Сформулируем одну естественную проблему, связанную с конечно аксиоматизируемыми теориями.

Проблема. Какова сложность множества

$$C_1 = \{n | \Phi_n \text{ полна и } \omega_1\text{-категорична}\}?$$

Нетрудно показать, что указанное множество находится в интервале $\varnothing^{(1)} \leqslant_m C_1 \leqslant_m \varnothing^{(3)}$.

В заключение автор выражает искреннюю признательность чл.-кор. АН СССР Ю. Л. Ершову за постоянную помощь и моральную поддержку. Хотелось бы отметить также работы Р. Л. Вота [18] и У. Ханфа [19], побудившие автора заниматься интерпретациями машин Тьюринга в конечно аксиоматизируемых теориях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Перетятькин М. Г.** Пример w_1-категоричной полной конечно аксиоматизируемой теории.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 3, с. 314—347.
2. **Перетятькин М. Г.** О конечно аксиоматизируемых полных теориях.— В кн.: V Всесоюзная конференция по математической логике (тезисы). Новосибирск, изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1979, с. 119.
3. **Перетятькин М. Г.** Сложность некоторых классов предложений.— Там же, с. 120.
4. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука. 1980.
5. **Кейслер Г., Чен Ч. Ч.** Теория моделей. М.: Мир, 1977.
6. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
7. **Перетятькин М. Г.** Сильно конструктивные модели и нумерации булевой алгебры рекурсивных множеств.— Алгебра и логика, 1971, т. 10, № 5. с. 535—557.
8. **Чёрч А.** Введение в математическую логику. Т. 1. М.: ИЛ, 1960.
9. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
10. **Сакс Дж.** Теория насыщенных моделей. М.: Мир, 1976.
11. **Hanf W.** The Boolean algebra of logic.— Bull. Amer. Math. Soc., 1975, v. 31, № 3, p. 587—589.
12. **Перетятькин М. Г.** Вычисления на машинах Тьюринга о конечно аксиоматизируемых теориях.— Алгебра и логика, 1981, т. 20. № 4, с. 456—502.
13. **Гончаров С. С., Нуртазин А. Т.** Конструктивные модели полных разрешимых теорий.— Алгебра и логика, 1972, т. 12, № 2, с. 125—142.
14. **Sacks G. E.** Effective bounds on Morley rank.— Fundam. Math., 1979, v. 103, № 2, p. 111—121.
15. **Lachlan A. H.** The transcendental rank of a theory.— Pacific J. Math., 1971, v. 27, p. 119—122.
16. **Harrington L.** Recursively presented prime models.— J. Symbolic Logic, 1974, v. 39, № 2, p. 305—309.
17. **Morley M.** Decidable models.— Israel J. Math., 1976, v. 25, № 3—4, p. 233—240.
18. **Vaught R. L.** Sentences true in all constructive models.— J. Symbolic Logic, 1961, v. 25, № 1, p. 39—58.
19. **Hanf W.** Model theoretic methods in the study of elementary logic.— In: Symposium on the theory of Models. Amsterdam: North — Holland Publishing Co., 1965, p. 132—165.

ОБ ИНДЕКСНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ИЕРАРХИИ КЛИНИ — МОСТОВСКОГО

В. Л. СЕЛИВАНОВ

В работе изучаются семейства рекурсивно перечислимых множеств (рпм), индексные множества которых находятся в иерархии Клини — Мостовского [1, гл. 14].

В § 1, который для этой статьи является вспомогательным, описаны довольно общие схемы построения иерархий, аналогичных известным иерархиям Клини — Мостовского и Ершова. Основную роль играют при этом теоретико-нумерационные соображения. Все необходимые нам сведения из теории нумераций содержатся в [2]. Некоторые замечания этого параграфа могут представить и определенный вспомогательный интерес.

В § 2 вводится и изучается естественная иерархия семейств рпм, возникающая из класса всех вполне перечислимых семейств рпм. Изучен вопрос о возможности описания семейств рпм, индексные множества которых принадлежат данному классу иерархии Клини — Мостовского, в терминах вполне перечислимых семейств. Изучена связь введенной иерархии с арифметической иерархией классов множеств из [1, гл. 15].

В § 3 вводится и изучается «малая» иерархия семейств рпм, возникающая из класса всех вполне перечислимых семейств. Изложение тесно связано с содержанием работ [3—5]. Отметим, что для § 2 и 3 существенное значение имеют определения и результаты работы [6]. В § 4 приведены замечания о распространении полученных результатов.

§ 1

Если X, Y — множества, φ — отображение из X в Y, то значение функции φ на элементе $x \in X$ обозначаем (в зависимости от контекста) одним из символов $\varphi(x)$, φx, φ_x. Символ $\operatorname{dom}\varphi$ обозначает область определения, $\operatorname{rng}\varphi$ — область значений функции φ, $\varphi(X')$ — образ множества $X' \subseteq X$, $\varphi^{-1}(Y')$ — прообраз множества $Y' \subseteq Y$ при отображении φ. $\mathscr{P}(X)$ обозначает семейство всех подмножеств X, $H(X)$ — множество всех нумераций множества X, т. е. множество всех отображений из множества натуральных чисел N в X. Иногда удобно рассматривать множество $H_\xi(X)$ всех отображений из данного множества $\xi \subseteq N$ в X, которые отождествляются с ξ-последовательностями элементов из X.

Фиксируем до конца параграфа произвольное множество ε. С каждым семейством $A \subseteq \mathscr{P}(\varepsilon)$ можно, используя теоретико-множественные операции $\cup$, $\cap$, $^-$, $\setminus$ на $\mathscr{P}(\varepsilon)$, связать другие семейства. В первой части этого параграфа приведем некоторые из таких способов порождения новых семейств, встречающиеся в дескриптивной теории множеств. Во второй части опишем конструктивные аналоги этих способов, которые затем используем для построения иерархий. Все результаты весьма просты, а многие из них известны, поэтому подробные доказательства не приводятся.

Символом A^c обозначаем семейство всех множеств вида $\bar{\alpha}$, $\alpha \in A$. Будем называть семейство A *σ-замкнутым* относительно объединения (пересечения), если объединение (пересечение) любого (не более чем) счетного подсемейства семейства A принадлежит A.

Пусть $\Sigma(A)$ ($\Pi(A)$) есть семейство подмножеств ε, являющихся объединениями (пересечениями) любых счетных подсемейств семейства A. Очевидно, что если $\varnothing \in A$ ($\varepsilon \in A$), то

$$\Sigma(A)\left\{\bigcup_x \nu_x \mid \nu \in H(A)\right\} \quad \left(\Pi(A) = \left\{\bigcap_x \nu_x \mid \nu \in H(A)\right\}\right).$$

В дальнейшем предполагаем, что $\varnothing$, $\varepsilon \in A$ (в приложениях это обычно выполняется). Приведем некоторые свойства введенных на $\mathscr{P}(\mathscr{P}\varepsilon)$ операций $A \to \Sigma(A)$, $A \to \Pi(A)$.

1. $A \subseteq \Sigma(A)$, $A \subseteq B \Rightarrow \Sigma(A) \subseteq \Sigma(B)$, $\Sigma(\Sigma A) \subseteq \Sigma(A)$ для любых A, $B \subseteq \mathscr{P}(\varepsilon)$, и аналогичные соотношения выполнены для отображения $A \to \Pi(A)$. Отсюда следует, что $\Sigma(A)$ ($\Pi(A)$) есть наименьшее σ-замкнутое относительно объединения (пересечения) семейство, содержащее семейство A.

2. $(\Sigma A)^c = \Pi(A^c)$, $(\Pi A)^c = \Sigma(A^c)$.

3. Если A замкнуто относительно конечных пересечений (объединений), то таково же и $\Sigma(A)$ $(\Pi(A))$.

Определим по индукции последовательность семейств $\Sigma_n(A)$, $\Pi_n(A)$ $(n \in N)$: $\Sigma_0(A) \rightleftharpoons \Pi_0(A) \rightleftharpoons A$, $\Sigma_{n+1}(A) \rightleftharpoons \Sigma(\Pi_n A)$, $\Pi_{n+1}(A) \rightleftharpoons \Pi(\Sigma_n A)$.

4. Введенные семейства упорядочены по включению следующим образом (включение обозначено стрелкой):

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma_1(A) \arrow[r] \arrow[ddr] & \Pi_2(A) \arrow[r] \arrow[ddr] & \Sigma_3(A) \arrow[r] \arrow[ddr] & \cdots \\
\Sigma_0(A)=\Pi_0(A) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & \Pi_1(A) \arrow[r] \arrow[uur] & \Sigma_2(A) \arrow[r] \arrow[uur] & \Pi_3(A) \arrow[r] \arrow[uur] & \cdots
\end{tikzcd}$$

5. Для всякого $n \geqslant 1$ имеем: $\Sigma_n(A) = \left\{ \bigcup\limits_{k_1} \bigcap\limits_{k_2} \ldots \mathop{\square}\limits_{k_n} \nu \langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle \,\middle|\, \nu \in H(A) \right\}$ (здесь $\bigcup\limits_{k_1} \bigcap\limits_{k_2} \ldots$ — чередующаяся последовательность, $\square$ обозначает $\cup$ при нечетном n и $\cap$ при четном, $\langle\ \ \rangle$ — канторовская нумерация) и, аналогично, $\Pi_n(A) = \left\{ \bigcap\limits_{k_1} \bigcup\limits_{k_2} \ldots \mathop{\square}\limits_{k_n} \nu \langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle \mid \nu \in H(A) \right\}$.

Кроме того, очевидно, что можно «объединять» конечные последовательности одинаковых операций. Например, если $\nu \in H(A)$, то множество $\bigcap\limits_{k_1} \bigcap\limits_{k_2} \bigcup\limits_{k_3} \bigcup\limits_{k_4} \bigcup\limits_{k_5} \nu \langle k_1, \ldots, k_5 \rangle$ принадлежит семейству $\Pi_2(A)$.

6. Если $A^c \subseteq A$, то $(\Sigma_n A)^c = \Pi_n(A)$, $(\Pi_n A)^c = \Sigma_n(A)$ для всякого $n \in N$.

7. При $n \geqslant 2$ семейства $\Sigma_n(A)$, $\Pi_n(A)$, $\Sigma_n(A) \cap \Pi_n(A)$ являются решетками относительно $\cup$, $\cap$, а если $A^c \subseteq A$, то $\Sigma_n(A) \cap \Pi_n(A)$ есть булева алгебра относительно $\cup$, $\cap$, $^-$.

Замечание 1. Построенную классификацию можно известным образом продолжить по бесконечным ординалам.

Приведем теперь замечания о построении «малой» иерархии. Изложение тесно связано с [4].

Пусть семейство $A \subseteq \mathscr{P}(\varepsilon)$ является булевой алгеброй (и тогда все семейство $\Sigma_n(A) \cap \Pi_n(A)$, $n \geqslant 0$, являются булевыми алгебрами), n — фиксированное число $\geqslant 0$, $B \subseteq \Sigma_n(A) \cap \Pi_n(A)$ — σ-замкнутое относительно объединения семейство, содержащее ε (например, эти условия выполняются при $n \geqslant 2$, $B = \Sigma_{n-1}(A)$). Исходя из семейства B, построим некоторый класс семейств.

Пусть $(\xi; \preccurlyeq)$ — счетный линейный порядок с четностью (можно считать, что $\xi \subseteq N$, что и будем делать), ξ_0 — множество всех четных, ξ_1 — множество всех нечетных относительно порядка $\preccurlyeq$ элементов ξ. Определим число $i(\xi)$, называемое *четностью порядка* $\xi : i(\xi)$ равно 0, если порядок ξ содержит наибольший элемент и этот элемент четный, и 1 в противном случае. Если $i \in \{0, 1\}$, то $\tilde{i}$ обозначает 1 при $i = 0$ и 0 в противном случае.

С порядком ξ свяжем два отображения S_ξ, P_ξ из $H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)$ в $\mathscr{P}\varepsilon$, определенные так: если $\nu \in H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)$, $i = i(\xi)$, то

$$S_\xi(\nu) \rightleftharpoons \bigcup_{x \in \xi_i} \Big(\nu_x \setminus \bigcup_{y < x} \nu_y\Big), \quad P_\xi(\nu) \rightleftharpoons \bigcup_{x \in \xi_{\tilde{i}}} \Big(\nu_x \setminus \bigcup_{y < x} \nu_y\Big) \cup \Big(\varepsilon \setminus \bigcup_{x \in \xi} \nu_x\Big)$$

(выражение «$y < x$» означает, конечно, «$y \in \xi$, $y \preccurlyeq x$, $y \neq x$»). Иногда вместо $S_\xi(\nu)$, $P_\xi(\nu)$ удобно использовать обозначения $S_\xi\{\nu_x\}$, $P_\xi\{\nu_x\}$, где $\{\nu_x\}_{x \in \xi}$ — другое обозначение ξ-последовательности $\nu \in H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)$. В § 3 нам понадобятся два довольно специфических свойства операций S_ξ, P_ξ, которые удобно сформулировать здесь. Доказательство ввиду простоты не приводим.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha \in H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)$, $\beta \subseteq \varepsilon$, $\beta \cap \left(\bigcup\limits_{x\in\xi} \alpha_x\right) = \varnothing$. *Тогда*

$$S_\xi\{\alpha_x \cup \beta\} = \begin{cases} S_\xi\{\alpha_x\}, & \textit{если } i(\xi)=1 \textit{ или } \xi \textit{ не имеет наименьшего элемента},\\ S_\xi\{\alpha_x\}\cup\beta & \textit{в противном случае};\end{cases}$$

$$P_\xi\{\alpha_x \cup \beta\} = \begin{cases} P_\xi\{\alpha_x\}, & \text{если } i(\xi)=1 \textit{ и } \xi \textit{ имеет наименьший элемент},\\ P_\xi\{\alpha_x\}\setminus\beta & \textit{в противном случае}.\end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть* ψ_k $(k\in N)$ — *последовательность взаимно однозначных отображений из множества* ε *в некоторое множество* ε' *такая, что* $k\neq l \Rightarrow \operatorname{rng}\psi_k \cap \operatorname{rng}\psi_l = \varnothing$. *Тогда для всякой последовательности* $\{\nu_{\langle k,x\rangle}\}_{k\in N,\, x\in\xi}$ *элементов из* $\mathscr{P}\varepsilon$ *имеем*:

$$S_\xi\left\{\bigcup_k \psi_k(\nu_{\langle k,x\rangle})\right\} = \bigcup_k \psi_k(S_\xi\{\nu_{\langle k,x\rangle}\}) \quad (\psi_k(\nu_{\langle k,x\rangle}) \text{ — образ}),$$

$$P_\xi\left\{\bigcup_k \psi_k(\nu_{\langle k,x\rangle})\right\} = \bigcup_k \psi_k(P_\xi\{\nu_{\langle k,x\rangle}\}) \cup \left(\varepsilon \setminus \bigcup_k \operatorname{rng}\psi_k\right).$$

Определим семейства множеств $\Sigma_{(\xi)}$, $\Pi_{(\xi)}$:

$$\Sigma_{(\xi)} \rightleftharpoons \{S_\xi(\nu) \mid \nu \in H_\xi(B)\}, \quad \Pi_{(\xi)} \rightleftharpoons \{P_\xi(\nu) \mid \nu\in H_\xi(B)\}.$$

Очевидно, если ограничиться только монотонными ξ-последовательностями $\{\nu_x\}_{x\in\xi}$, т. е. такими, что $x \preccurlyeq y \Rightarrow \nu_x \subseteq \nu_y$, то придем к тем же классам $\Sigma_{(\xi)}$, $\Pi_{(\xi)}$.

Следующие два свойства вытекают из условий на семейства A и B.

8. $\Sigma_{(\xi)} \cup \Pi_{(\xi)} \subseteq \Sigma_n(A)$ для всякого порядка ξ.

9. Если $(\xi;\ \preccurlyeq)$ вполне упорядочено, то $P_\xi(\nu) = \overline{S_\xi(\nu)}$ для всякого $\nu \in H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)$, $\Pi_{(\xi)} = \Sigma^c_{(\xi)}$, $\Sigma_{(\xi)} \cup \Pi_{(\xi)} \subseteq \Sigma_n(A) \cap \Pi_n(A)$.

Пусть $(\zeta;\ \preccurlyeq)$ — другой счетный линейный порядок с четностью, и $(\xi;\ \preccurlyeq)$ вкладывается в $(\zeta;\ \preccurlyeq)$. Последнее означает существование функции h: $\xi \to \zeta$ такой, что для всех x, $y\in\xi$, $i\leqslant 1$ выполняются соотношения $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow hx \preccurlyeq hy$, $x\in\xi_i \Leftrightarrow hx\in\zeta_i$. При этих условиях найдется такое отображение $H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)\to H_\zeta(\mathscr{P}\varepsilon)$, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[rr] \arrow[dr, "S_\xi"'] & & H_\zeta(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[dl, "S_\zeta"] \\ & \mathscr{P}\varepsilon & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[rr] \arrow[dr, "P_\xi"'] & & H_\zeta(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[dl, "P_\zeta"] \\ & \mathscr{P}\varepsilon & \end{tikzcd}$$

коммутативны. Действительно, достаточно ξ-последовательности $\{\nu_x\}_{x\in\xi}$ поставить в соответствие ζ-последовательность $\{\nu'_z\}_{z\in\zeta}$, определенную так: $\nu'_z \rightleftharpoons \bigcup\limits_{hx\leqslant z} \nu_x$ при $i(\xi)=i(\zeta)$ и $\nu'_z \rightleftharpoons \bigcup\limits_{hx<z}\nu_x$ при $i(\xi)\neq i(\zeta)$. Из очевидного соотношения $\nu\in H_\xi(B) \Rightarrow \nu'\in H_\zeta(B)$ вытекает такое свойство.

10. Если ξ вкладывается в ζ, то $\Sigma_{(\xi)} \subseteq \Sigma_{(\zeta)}$, $\Pi_{(\xi)} \subseteq \Pi_{(\zeta)}$.

Определим по данному порядку ξ новый порядок ξ' следующим образом. Пусть g — общерекурсивная функция (орф), взаимно однозначно отображающая N на $N\setminus\{0\}$. Полагаем $\xi' \rightleftharpoons g(\xi)\cup\{0\}$. Порядок $\preccurlyeq'$ на ξ' определим так: если x, $y\in g(\xi)$, то $x \prec' 0$ и $x\preccurlyeq' y$ тогда и только тогда, когда $g^{-1}(x) \preccurlyeq g^{-1}(y)$ относительно порядка на ξ. Доказательство предложения 7 из [4, § 3] показывает, что найдется отображение $H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)\to H_{\xi'}(\mathscr{P}\varepsilon)$, для которого диаграммы

$$\begin{tikzcd} H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[rr] \arrow[dr, "S_\xi"'] & & H_{\xi'}(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[dl, "P_{\xi'}"] \\ & \mathscr{P}\varepsilon & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[rr] \arrow[dr, "P_\xi"'] & & H_{\xi'}(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[dl, "S_{\xi'}"] \\ & \mathscr{P}\varepsilon & \end{tikzcd}$$

коммутативны, причем это отображение переводит $H_\xi(B)$ в $H_{\xi'}(B)$. Отсюда и из свойства 10 вытекает следующее.

11. Если существует функция h, вкладывающая ξ в ζ, и такая, что $\exists z \in \zeta \forall x \in \xi (hx \prec z)$, то $\Sigma_{(\xi)} \cup \Pi_{(\xi)} \subseteq \Sigma_{(\zeta)} \cap \Pi_{(\zeta)}$.

Во второй части параграфа приведем конструктивные аналоги введенных классификаций. Основную роль при этом играют замечательные свойства классических нумерованных множеств $\mathbf{\Pi} = (\Pi, \pi)$, образованного семейством всех рпм Π и нумерацией Поста π, и $\mathbf{K} = (K, \varkappa)$, образованного семейством всех частично рекурсивных функций (чрф) K и нумерацией Клини $\varkappa$. Аналогом семейства $A \subseteq \mathscr{P}(\varepsilon)$ будет при этом нумерация $\alpha \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$, аналогом отношения включения семейств $A \subseteq B$ $(A, B \subseteq \mathscr{P}\varepsilon)$ — отношение сводимости нумераций $\alpha \leqslant \beta$ $(\alpha, \beta \in H(\mathscr{P}\varepsilon))$. Если $\alpha \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$, то α^c обозначает нумерацию, определенную соотношением $\alpha^c(n) \rightleftharpoons \overline{\alpha(n)}$.

Пусть α — фиксированная нумерация из $H(\mathscr{P}\varepsilon)$. С нумерацией α свяжем две новые нумерации $\Sigma^0(\alpha)$, $\Pi^0(\alpha)$, определенные так:

$$(\Sigma^0\alpha)\, n \rightleftharpoons \bigcup_{x \in \pi n} \alpha_x, \quad (\Pi^0\alpha)\, n \rightleftharpoons \bigcap_{x \in \pi n} \alpha_x.$$

Нетрудно проверить, что нумерация $\Sigma^0\alpha$ $(\Pi^0\alpha)$ полная с особым объектом $\varnothing(\varepsilon)$.

Будем говорить, что нумерация $\alpha \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$ *замкнута относительно объединения*, если существует орф u, удовлетворяющая для любых $x, y \in N$ соотношению $\alpha_x \cup \alpha_y = \alpha_{u\langle x, y\rangle}$, и что нумерация α *σ-замкнута относительно объединения (пересечения)*, если $\Sigma^0\alpha \leqslant \alpha$ $(\Pi^0\alpha \leqslant \alpha)$.

Отметим простое, но существенное свойство нумерации $\Sigma^0\alpha$ $(\Pi^0\alpha)$, показывающее, что в случае $\varnothing \in \operatorname{rng} \alpha$ $(\varepsilon \in \operatorname{rng} \alpha)$ класс нумераций $\{\nu \in H(\mathscr{P}\varepsilon) | \nu \leqslant \Sigma^0\alpha\}$ $(\{\nu \in H(\mathscr{P}\varepsilon) | \nu \leqslant \Pi^0\alpha\})$, т. е. класс всех последовательностей, вычислимых относительно $\Sigma^0\alpha$ $(\Pi^0\alpha)$, полностью определяется классом $\{\mu \in H(\mathscr{P}\varepsilon) | \mu \leqslant \alpha\}$ всех последовательностей, вычислимых относительно α. А именно, для выполения соотношения $\nu \leqslant \Sigma^0\alpha$ $(\nu \leqslant \Pi^0\alpha)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала нумерация $\mu \leqslant \alpha$ такая, что $\nu_x = \bigcup_y \mu \langle x, y\rangle$ $\left(\nu x = \bigcap_y \mu \langle x, y\rangle\right)$ для любого $x \in N$.

На самом деле покажем, что это свойство выполняется эффективно, т. е. существуют морфизмы $\varphi \to \varphi'$, $\varphi \to \varphi''$ нумерованного множества $\mathbf{K}$ в себя такие, что если φ есть орф, то φ' — также орф и $(\Sigma^0\alpha)\, \varphi(x) = \bigcup_y \alpha\varphi' \langle x, y\rangle$ $\left((\Pi^0\alpha)\, \varphi(x) = \bigcap_y \alpha\varphi' \langle x, y\rangle\right)$ и φ'' есть орф, удовлетворяющая соотношению $\bigcup_y \alpha\varphi \langle x, y\rangle = (\Sigma^0\alpha)\, \varphi''(x)$ $\left(\bigcap_y \alpha\varphi \langle x, y\rangle = (\Pi^0\alpha)\, \varphi''(x)\right)$.

Для определения φ' выберем число m, для которого $\varnothing = \alpha_m$ $(\varepsilon = \alpha_m)$, и выберем такой способ перечисления по шагам $\{\pi_x^s\}$ нумерации π, что множество $\pi_x^s \setminus \pi_x^{s-1}$ при любых x, s содержит не более одного элемента. Функцию φ' определим так:

$$\varphi' \langle x, s\rangle \rightleftharpoons \begin{cases} \text{не определена, если } x \notin \operatorname{dom} \varphi, \\ m, \text{ если } x \in \operatorname{dom} \varphi \text{ и } \pi^s_{\varphi(x)} \setminus \pi^{s-1}_{\varphi(x)} \neq 0, \\ y, \text{ если } x \in \operatorname{dom} \varphi \text{ и } \pi^s_{\varphi(x)} \setminus \pi^{s-1}_{\varphi(x)} = \{y\}. \end{cases}$$

Функцию φ'' определим как любую орф, удовлетворяющую соотношению $\pi_{\varphi''(x)} = \{\varphi(x, y) \,|\, y \in N\}$.

Проверка того, что функции φ' и φ'' удовлетворяют сформулированным условиям, тривиальна.

В частности, из сказанного выше следует, что при $\varnothing \in \operatorname{rng} \alpha$ $(\varepsilon \in \operatorname{rng} \alpha)$ $\operatorname{rng}(\Sigma^0\alpha) = \left\{\bigcup_x \mu_x \,|\, \mu \leqslant \alpha\right\}$ $\left(\operatorname{rng}(\Pi^0\alpha) = \left\{\bigcap_x \mu_x \,|\, \mu \leqslant \alpha\right\}\right)$. В дальнейшем предполагается, что $\varnothing$, $\varepsilon \in \operatorname{rng} \alpha$.

Отметим еще ряд свойств введенных операций $\alpha \to \Sigma^0\alpha$, $\alpha \to \Pi^0\alpha$.

1^0. $\alpha \leqslant \Sigma^0\alpha$, $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \Sigma^0\alpha \leqslant \Sigma^0\beta$, $\Sigma^0(\Sigma^0\alpha) \leqslant \Sigma^0\alpha$ для любых α, $\beta \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$, и аналогичные свойства выполнены для операции $\alpha \to \Pi^0\alpha$.

Действительно, легко видеть, что орф f, удовлетворяющая соотношению $\pi_{f(n)} = \{n\}$, сводит α к $\Sigma^0\alpha$ и $\Pi^0\alpha$; если орф g сводит α к β, то орф $\tilde{g}$, удовлетворяющая соотношению $\pi_{\tilde{g}(n)} = g(\pi_n)$, сводит $\Sigma^0\alpha$ к $\Sigma^0\beta$ и $\Pi^0\alpha$ к $\Pi^0\beta$; орф h, удовлетворяющая соотношению $\pi_{h(n)} = \bigcup\limits_{x \in \pi n} \pi_x$, сводит $\Sigma^0(\Sigma^0\alpha)$ к $\Sigma^0\alpha$ и $\Pi^0(\Pi^0\alpha)$ к $\Pi^0\alpha$.

Свойство 1^0 показывает, что $\Sigma^0\alpha$ ($\Pi^0\alpha$) есть наименьшая нумерация над α, σ-замкнутая относительно $\cup$ ($\cap$).

2^0. $(\Sigma^0\alpha)^c = \Pi^0(\alpha^c)$, $(\Pi^0\alpha)^c = \Sigma^0(\alpha^c)$.

3^0. Если α замкнута относительно пересечения (объединения), то такова же и $\Sigma^0\alpha$ ($\Pi^0\alpha$).

Действительно, если орф f представляет пересечение (объединение) в нумерации α, т. е. $\alpha_x \cap \alpha_y = \alpha_{f\langle x, y\rangle}$ ($\alpha_x \cup \alpha_y = \alpha_{f\langle x, y\rangle}$), то орф $\tilde{f}$, удовлетворяющая соотношению $\pi_{\tilde{f}\langle m,n\rangle} = f(\pi_m \times \pi_n)$, представляет пересечение (объединение) в нумерации $\Sigma^0\alpha$ ($\Pi^0\alpha$).

Определим нумерации σ_n^0, π_n^0 и семейства $\Sigma_n^0\Pi_n^0$, ($n \in N$): $\sigma_0^0 \rightleftharpoons \pi_0^0 \rightleftharpoons \alpha$, $\sigma_{n+1}^0 \rightleftharpoons \Sigma^0(\pi_n^0)$, $\pi_{n+1}^0 \rightleftharpoons \Pi^0(\sigma_n^0)$, $\Sigma_n^0 \rightleftharpoons \operatorname{rng}\sigma_n^0$, $\Pi_n^0 \rightleftharpoons \operatorname{rng}\pi_n^0$. Нумерацию σ_n^0 (π_n^0) называем *канонической нумерацией семейства* Σ_n^0 (Π_n^0).

4^0. Введенные нумерации упорядочены по сводимости следующим образом (сводимость обозначена стрелкой):

$$\begin{tikzcd}
 & \sigma_1^0 \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_2^0 \arrow[r] \arrow[dr] & \sigma_3^0 \arrow[r] \arrow[dr] & \ldots \\
\sigma_0^0 = \pi_0^0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & \pi_1^0 \arrow[r] \arrow[uur] & \sigma_2^0 \arrow[r] \arrow[uur] & \pi_3^0 \arrow[r] \arrow[uur] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Следующее свойство доказывается простой индукцией по n с использованием свойства нумераций $\Sigma^0\alpha$, $\Pi^0\alpha$, отмеченного перед п. 1^0.

5^0. Для любого $n \geqslant 1$ и любой нумерации $\nu \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$ имеем: $\nu \leqslant \sigma$ ($\nu \leqslant \pi_n^0$) тогда и только тогда, когда найдется нумерация $\mu \leqslant \alpha$, такая что $\nu x = \bigcup\limits_{k_1}\bigcap\limits_{k_2} \ldots \mathop{\square}\limits_{k_n} \mu\langle x, k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle$ $\left(\nu x = \bigcap\limits_{k1}\bigcup\limits_{k_2} \ldots \mathop{\square}\limits_{k_n} \mu\langle x, k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle\right)$ для всех $x \in N$, и это свойство выполняется эффективно. В частности, $\Sigma_n^0 = \left\{\bigcup\limits_{k_1}\bigcap\limits_{k_2} \ldots \mathop{\square}\limits_{k_n} \mu\langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle \mid \mu \leqslant \alpha\right\}$, $\Pi_n^0 = \left\{\bigcap\limits_{k1}\bigcup\limits_{k_2} \ldots \mathop{\square}\limits_{k_n} \mu\langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle \mid \mu \leqslant \alpha\right\}$.

Кроме того, как и в свойстве 5, можно «склеивать» одинаковые операции. Например, если $\mu \leqslant \alpha$, то множество $\bigcup\limits_{k_1}\bigcup\limits_{k_2}\bigcap\limits_{k_3}\bigcup\limits_{k_4}\bigcup\limits_{k_5} \mu\langle k_1, \ldots, k_5\rangle$ принадлежит Σ_3^0.

6^0. Если $\alpha^c \leqslant \alpha$, то нумерация $(\sigma_n^0)^c$ эквивалентна нумерации π_n^0, а нумерация $(\pi_n^0)^c$ — нумерации σ_n^0 для всех $n \geqslant 0$. В частности, $(\Sigma_n^0)^c = \Pi_n^0$.

7^0. При $n \geqslant 2$ нумерации σ_n^0, π_n^0 замкнуты относительно $\cup$, $\cap$, а если $\alpha^c \leqslant \alpha$, то $\Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$ есть эффективная булева алгебра.

Эффективность понимается в следующем смысле. Назовем $\Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$-*индексом* множества $\tau \in \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$ любое число $\langle x, y\rangle$ такое, что $\tau = \sigma_n^0(x) = \pi_n^0(y)$. Операцию $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_m)$, действующую на $\Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$, считаем эффективной, если по любым индексам множеств $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$ эффективно находится некоторый индекс множества $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_m)$.

Перейдем к конструктивному аналогу малой иерархии. Пусть нумерация $\alpha \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$ замкнута относительно $\cup$, $\cap$, $^-$ (и тогда все семейства

$\Sigma_n \cap \Pi_n^0$, $n \geqslant 0$, являются эффективными булевыми алгебрами), n — фиксированное число $\geqslant 0$, и $\beta \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$ — такая σ-замкнутая относительно объединения нумерация, что $\beta \leqslant \sigma_n^0, \beta \leqslant \pi_n^0$, $\varepsilon \in \operatorname{rng} \beta$ (например, эти условия выполняются при $n \geqslant 2$, $\beta = \sigma_{n-1}^0$).

Пусть $\alpha \in L_0$ — номер рекурсивного линейного порядка с четностью $\langle \xi; \preccurlyeq \rangle$ (напомним, что все неопределяемые здесь понятия, касающиеся иерархии Ершова, содержатся в [4]). Свяжем с числом a семейства множеств $\Sigma_{(a)}$, $\Pi_{(a)}$ и некоторые их нумерации $\sigma_{(a)}$, $\pi_{(a)}$, которые будем называть *каноническими*. Обозначим через $J_\xi(\beta)$ класс всех ξ-последовательностей $\nu \in H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)$ таких, что $\nu \leqslant \beta$ (последнее означает существование чрф φ такой, что $\operatorname{dom} \varphi = \xi$ и $\nu_x = \beta\varphi(x)$ для всех $x \in \xi$). Положим $\Sigma_{(a)} \rightleftharpoons \{S_\xi(\nu) | \nu \in J_\xi(\beta)\}$, $\Pi_{(a)} \rightleftharpoons \{P_\xi(\nu) | \nu \in J_\xi(\beta)\}$. Как вытекает из известных результатов теории нумераций, из полноты нумерации β следует, что класс $J_\xi(\beta)$ имеет главную вычислимую относительно β нумерацию β' (вычислимость β' означает, что для некоторой чрф φ, $\operatorname{dom} \varphi = N \times \xi$, выполняется соотношение $\beta'_m(x) = \beta_{\varphi\langle m,x\rangle}$ $(m \in N,\ x \in \xi)$). Это позволяет определить нумерации $\sigma_{(a)}$ и $\pi_{(a)}$ так: $\sigma_{(a)}m \rightleftharpoons S_\xi(\beta'_m)$, $\pi_{(a)}m \rightleftharpoons P_\xi(\beta'_m)$. Из того, что нумерация β' полная с особым объектом $\{\iota_x\}_{x\in\xi}$, $\iota_x = \varnothing$, следует, что нумерация $\sigma_{(a)}$ $(\pi_{(a)})$ полная с особым объектом $\varnothing$ (ε). Из сказанного выше вытекает такое описание вычислимых относительно $\sigma_{(a)}$ $(\pi_{(a)})$ нумераций.

Для любого $a \in L_0$ имеем: $\nu \leqslant \sigma_{(a)}$ $(\nu \leqslant \pi_{(a)})$ тогда и только тогда, когда найдется такая нумерация $\mu \leqslant \beta'$, что $\nu_m = S_\xi(\mu_m)$ $(\nu_m = P_\xi(\mu_m))$, причем если g — орф, сводящая ν к $\sigma_{(a)}$ $(\pi_{(a)})$, то в качестве μ надо взять нумерацию $\beta' g$.

Замечание 2. Как и в [4], можно сначала показать, что семейство всех вычислимых монотонных ξ-последовательностей является r-подмножеством нумерованного множества $J_\xi(\beta)$, а затем определить каноническую нумерацию, используя главную вычислимую нумерацию всех вычислимых монотонных ξ-последовательностей. Полученные так нумерации будут изоморфны построенным.

Из определений и условий, наложенных на α и β, вытекает следующее.

8°. Для всякого $a \in L_0$ имеем $\sigma_{(a)} \leqslant \sigma_n^0$, $\pi_{(a)} \leqslant \sigma_n^0$. В частности, $\Sigma_{(a)} \cup \Pi_{(a)} \subseteq \Sigma_n^0$.

9°. Если $a \in W_0$, то $\sigma_{(a)}^c = \pi_{(a)}$, $\sigma_{(a)} \oplus \pi_{(a)} \leqslant \sigma_n^0$, $\sigma_{(a)} \oplus \pi_{(a)} \leqslant \pi_n^0$ ($\oplus$ — прямая сумма нумераций). В частности, $\Sigma_{(a)}^c = \pi_{(a)}$, $\Sigma_{(a)} \cup \Pi_{(a)} \subseteq \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$.

Пусть теперь $\langle \zeta; \preccurlyeq \rangle$ — другой рекурсивный линейный порядок с четностью номера $b \in L_0$ и $a \lessdot\lessdot_0 b$. В этом случае, очевидно, отображение из $H_\xi(\mathscr{P}_\varepsilon)$ в $H_\zeta(\mathscr{P}_\varepsilon)$, определенное перед свойством 10 (точнее, сужение этого отображения на класс $J_\xi(\beta)$), является морфизмом из нумерованного множества $J_\xi(\beta)$ с нумерацией β' в нумерованное множество $J_\zeta(\beta)$. Отсюда получаем следующее свойство.

10°. Если a, $b \in L_0$, $a \lessdot\lessdot_0 b$, то $\sigma_{(a)} \leqslant \sigma_{(b)}$, $\pi_{(a)} \leqslant \pi_{(b)}$. В частности, $\Sigma_{(a)} \subseteq \Sigma_{(b)}$, $\Pi_{(a)} \subseteq \Pi_{(b)}$.

Так же устанавливается аналог свойства 11.

11°. Если a, $b \in L_0$, $a \lessdot\lessdot\lessdot_0 b$, то $\sigma_{(a)} \oplus \pi_{(a)} \leqslant \sigma_{(b)}$, $\sigma_{(a)} \oplus \pi_{(a)} \leqslant \pi_{(b)}$. В частности, $\Sigma_{(a)} \cup \Pi_{(a)} \subseteq \Sigma_{(b)} \cap \Pi_{(b)}$.

Замечание 3. Когда в дальнейшем будем говорить о семействе $\Sigma_{(a)}$ $(a \in L_0)$ как о нумерованном множестве, будем подразумевать нумерованное множество $(\Sigma_{(a)}, \sigma_{(a)})$. Нумерации, сводящиеся к $\sigma_{(a)}$, будем также называть *вычислимыми* $\Sigma_{(a)}$-*последовательностями*, или даже просто $\Sigma_{(a)}$-последовательностями. То же относится к семействам $\Pi_{(a)}$, Σ_n^0, Π_n^0 и их каноническим нумерациям.

Замечание 4. Полная аналогия между неконструктивным и конструктивным случаями наводит на мысль, что оба они являются частными случаями некоторой более общей схемы построения иерархий. Такую схему действительно нетрудно сформулировать, но мы не будем здесь этим заниматься.

§ 2

В начале этого параграфа приведем простые замечания об индексных множествах (т. е. множествах вида $\pi^{-1}(A)$, $A \subseteq \Pi$) и Q-сводимости, а затем обратимся к вопросу о том, как описать строение семейств рпм, индексные множества которых принадлежат данному классу иерархии Клини — Мостовского, в терминах вполне перечислимых семейств рпм.

Пусть (Δ, δ) — нумерованное множество, составленное семейством всех конечных подмножеств N и сильно вычислимой нумерацией δ этого семейства. Применив схему из § 1 к нумерации $\alpha = \delta \oplus \delta^c$ семейства $\Delta \cup \Delta^c$ всех конечных множеств и их дополнений, получим последовательность нумераций σ^0_n, π^0_n и семейств Σ^0_n, Π^0_n $(n \in N)$. (очевидно, что на самом деле нумерации $\sigma^0_1, \pi^0_2, \sigma^0_3, \ldots$ можно получить из одной нумерации δ, а нумерации $\pi^0_1, \sigma^0_2, \pi^0_3, \ldots$ — из нумерации δ^c). Используя свойство 5^0 из § 1 и известные свойства иерархии Клини — Мостовского [1, с. 393, 394], легко проверить, что при $n \geqslant 1$ нумерации σ^0_n, π^0_n изоморфны каноническим нумерациям соответствующих классов иерархии Клини — Мостовского, а значит, Σ^0_n, Π^0_n $(n \geqslant 1)$ есть просто классы этой иерархии (таким образом, единственное отличие от определенной обычным способом иерархии состоит в классе Σ^0_0).

Хорошо известна [1, § 14.8] связь иерархии Клини — Мостовского со сводимостью по Тьюрингу и m-сводимостью. Имеется также некоторая связь этой иерархии с Q-сводимостью. Напомним, что множество α Q-сводится к множеству β $(\alpha \leqslant_Q \beta)$, если существует орф f, удовлетворяющая для всякого x соотношению $x \in \alpha \Leftrightarrow \pi_{f(x)} \subseteq \beta$.

Предложение 1. *Для принадлежности множества семейству* Π^0_n $(n \geqslant 1)$ *необходимо и достаточно, чтобы оно Q-сводилось к некоторому* Σ^0_{n-1}-*множеству.*

Доказательство. Для доказательства достаточности достаточно проверить, что из $\alpha \in \Pi^0_n$, $\beta \leqslant_Q \alpha$ следует $\beta \in \Pi^0_n$. Если орф f осуществляет Q-сводимость β к α, то имеем $x \in \beta \Leftrightarrow \forall y (y \in \pi_{f(x)} \Rightarrow y \in \alpha)$, откуда сразу следует $\beta \in \Pi^0_n$.

Докажем необходимость. Пусть β — любое множество из Π^0_n, α — Σ^0_{n-1}-полное множество. Достаточно доказать, что $\beta \leqslant_Q \alpha$. Поскольку $\beta \in \Pi^0_n$, то $\beta = \bigcap\limits_x \nu_x$ для некоторой Σ^0_{n-1}-последовательности множеств $\{\nu_x\}$. Поскольку α является Σ^0_{n-1}-полным, Σ^0_{n-1}-последовательность $\{\nu_x\}$ равномерно m-сводится к α, т. е. существует орф g, удовлетворяющая для любых x, $y \in N$ соотношению $y \in \nu_x \Leftrightarrow g\langle x, y\rangle \in \alpha$. Имеем: $y \in \beta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall x (y \in \nu_x) \Leftrightarrow \forall x (g\langle x, y\rangle \in \alpha)$. Отсюда следует, что любая орф h, удовлетворяющая соотношению $\pi_{h(y)} = \{g\langle x, y\rangle | x \in N\}$, осуществляет Q-сводимость β к α. Предложение доказано.

Как известно, множество α S-сводится к множеству β, если и только если $\bar{\alpha} \leqslant_Q \bar{\beta}$ (конечно, $\bar{\alpha} = N \backslash \alpha$).

Следствие 1. *Для принадлежности множества семейству* Σ^0_n $(n \geqslant 1)$ *необходимо и достаточно, чтобы оно S-сводилось к некоторому* Π^0_{n-1}-*множеству.*

С л е д с т в и е 2. *Для того чтобы множество* α *имело тьюрингову степень* $\leqslant o^{(n)}$ $(n\in N)$, *необходимо и достаточно, чтобы для некоторого* Σ_n^0-*множества* β *выполнялись соотношения* $\alpha\leqslant_Q\beta$, $\alpha\leqslant_{\bar{S}}\beta$.

В [6] было введено отношение предпорядка $\leqslant_M$ на $\mathscr{P}(\Pi)$, названное *сводимостью морфизмами*, которое является аналогом m-сводимости для нумерованного множества $\mathbf{\Pi}$. Если A, $B\subseteq\Pi$, то говорим, что семейство A *M-сводится* к семейству B $(A\leqslant_M B)$, если найдется такой морфизм $\Phi:\mathbf{\Pi}\to\mathbf{\Pi}$, что $A=\Phi^{-1}(B)$ (конечно, это определение применимо к любому нумерованному множеству).

Отметим некоторую связь Q-сводимости с M-сводимостью. Всякому множеству $\alpha\subseteq N$ сопоставим семейство $P_\alpha\rightleftharpoons\{\sigma\in\Pi|\sigma\subseteq\alpha\}$. Легко проверить, что для любых α, $\beta\subseteq N$ выполняются соотношения $\alpha\leqslant_Q\beta\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P_\alpha\leqslant_M P_\beta\Leftrightarrow\pi^{-1}(P_\alpha)\leqslant_m\pi^{-1}(P_\beta)$. Легко видеть также, что множество $\pi^{-1}(P_\alpha)$ является цилиндрификацией множества α относительно Q-сводимости. В сделанных замечаниях содержится следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 2. 1) *Отображение* $\alpha\to P_\alpha$ *есть эквивалентность предупорядоченного множества* $(\mathscr{P}(N);\leqslant_Q)$ *на некоторый подобъект предупорядоченного множества* $(\mathscr{P}(\Pi);\leqslant_M)$.

2) *Отображение* $\alpha\to\pi^{-1}(P_\alpha)$ (*точнее, сужение этого отображения на семейства* Π_n^0) *есть морфизм из нумерованного множества* Π_n^0 $(n\geqslant1)$ *в себя, причем если* α — Σ_{n-1}^0-*полное множество, то* $\pi^{-1}(P_\alpha)$ — Π_n^0-*полное множество.*

Отсюда вытекает следующее замечание, указывающее просто описываемую последовательность индексных Π_n^0 -полных множеств, см. [1, с. 421].

С л е д с т в и е 3. *Пусть* $\{\gamma_n\}_{n\in N}$ — *последовательность множеств, определенная так:* $\gamma_0\rightleftharpoons N$, $\gamma_{n+1}\rightleftharpoons\pi^{-1}(P_{\bar{\gamma}_n})$. *Тогда* γ_n *есть* Π_n^0-*полное множество для любого* $n\geqslant1$.

Обратимся теперь к вопросу о том, как устроены семейства рпм, принадлежащие классам $\widehat{\Sigma}_n^0\rightleftharpoons\{X\subseteq\Pi\,|\,\pi^{-1}(X)\in\Sigma_n^0\}$ (определение классов $\widehat{\Pi}_n^0$ аналогично). Введем некоторые, необходимые для дальнейшего определения. *Базисными открытыми семействами* называем семейства рпм вида $D_\gamma\rightleftharpoons\{\alpha\in\Pi|\gamma\subseteq\alpha\}$, где γ — конечное множество $(\gamma\in\Delta)$. *Канонической нумерацией* класса $\mathscr{D}$ всех базисных открытых семейств назовем нумерацию $D:N\to\mathscr{D}$, определенную так: $D_n\rightleftharpoons D_{\delta(n)}$ (δ — нумерация семейства Δ). Используя определения из § 1, введем следующие классы и нумерации: $\mathscr{S}\rightleftharpoons\Sigma(\mathscr{D})$ будем называть *классом всех открытых семейств*, $\mathscr{S}^0\rightleftharpoons\mathrm{rng}(\Sigma^0 D)$ — *классом всех эффективно открытых семейств*. Нумерацию $\Sigma^0 D$ будем называть *канонической нумерацией класса* $\mathscr{S}^0$ (напомним, что эта нумерация σ-замкнута относительно объединения). Пусть, далее, $\mathscr{B}$ — булева алгебра, порожденная классом $\mathscr{S}$ внутри булевой алгебры $\mathscr{P}(\Pi)$, $\mathscr{B}^0$ — булева алгебра, порожденная классом $\mathscr{S}$ внутри $\mathscr{P}(\Pi)$, B^0 — каноническая нумерация класса $\mathscr{B}^0$, индуцированная нумерацией $\Sigma^0 D$ (она получается из нумерации термов; очевидно, что $(B^0)^c\leqslant B^0$, см. § 1).

Теорема Райса [1, § 14.8, теорема XIV] решает поставленную выше задачу об описании семейств из $\widehat{\Sigma}_n^0$ для $n=0,1$: $\widehat{\Sigma}_0^0=\{\varnothing,\Pi\}$, $\widehat{\Sigma}_1^0=\mathscr{S}^0$. Мы изучим вопрос о возможности описания семейств из $\widehat{\Sigma}_n^0$ $(n\geqslant2)$ в терминах эффективно открытых семейств. Поскольку класс эффективно открытых семейств снабжен канонической нумерацией $\Sigma^0 D$, то естественно ожидать, что простое структурное описание $\widehat{\Sigma}_n^0$ -семейств и терминах эффективно открытых семейств привело бы к некоторой «хорошей» индуцированной нумерации класса $\widehat{\Sigma}_n^0$. В соответствии с этим в приводимой ниже теореме 1 мы решим вопрос о том, имеет ли семейство всех индексных множеств из Σ_n^0 главную Σ_n^0-вычислимую нумерацию. Однако спачала приведем необходимые для дальнейшего определения и свойства операций U_i^j $(i, j \leqslant 1)$, введенных в [6].

Определим для всякого $m \geqslant 1$ четыре операции U_i^j $(i, j \leqslant 1)$ из $\mathscr{P}(\mathscr{P}N)^{m+1}$ в $\mathscr{P}(\mathscr{P}N)$. Пусть $\{\rho_0, \ldots, \rho_m\}$ — разбиение множества N на непересекающиеся бесконечные рекурсивные множества, a_k — наименьший элемент в ρ_k, g_k — орф, взаимно однозначно отображающая N на $\rho_k \setminus \{a_k\}$ $(k \leqslant m)$. Полагаем:

$$F \rightleftharpoons \{\alpha \subseteq N / (\exists_k \leqslant m)(\alpha \subseteq \rho_k \wedge a_k \notin \alpha)\}, \quad G_k \rightleftharpoons \{\alpha \subseteq N | a_k \in \alpha \subseteq \rho_k\} \quad (k \leqslant m),$$

$$G \rightleftharpoons \bigcup_{k \leqslant m} G_k, H \rightleftharpoons \overline{F \cup G}, F' \rightleftharpoons F \cap \Pi, G_k' \rightleftharpoons G_k \cap \Pi, \quad G' \rightleftharpoons G \cap \Pi, H' \rightleftharpoons H \cap \Pi.$$

Для всякого $k \leqslant m$ определим оператор перечисления Ψ_k следующим образом: $\Psi_k(\alpha) \rightleftharpoons \{a_k\} \cup g_k(\alpha)$, $\alpha \subseteq N$. Очевидно, Ψ_k есть изоморфизм булевых алгебр $\mathscr{P}(N)$ и G_k, причем Ψ_k сохраняет многие свойства множеств (например, сохраняет все семейства Σ_n^0, Π_n^0). Отображение, переводящее семейство $A \subseteq \mathscr{P}(N)$ в образ $\Psi_k(A)$, сохраняет многие свойства семейств множеств, например классы $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}^0$. Для § 3 существенно отметить, что если $A \in \mathscr{S}^0$, то $\Psi_k(A) \cup H' \in \mathscr{S}^0$. Сужение отображения Ψ_k на семейство Π будем обозначать Ψ_k' (очевидно, Ψ_k' есть морфизм из Π в G_k' со стандартной нумерацией).

Операции U_i^j определим для любых $A_0, \ldots, A_m \subseteq \Pi$ (на самом деле можно брать любые $A_0, \ldots, A_m \subseteq \mathscr{P}(N)$, только вместо H', F', Ψ_k' надо в приводимых соотношениях взять H, F, Ψ_k) соотношениями:

$$U_0^0(A_0, \ldots, A_m) \rightleftharpoons \bigcup_{k \leqslant m} \Psi_k'(A_k), U_0^1(A_0, \ldots, A_m) \rightleftharpoons U_0^0 A_0, \ldots, A_m) \cup H',$$

$$U_1^0(A_0, \ldots, A_m) \rightleftharpoons U_0^0(A_0, \ldots, A_m) \cup F', \; U_1^1(A_0, \ldots, A_m) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons U_0^0(A_0, \ldots, A_m) \cup H' \cup F'.$$

Аналогичным образом определяются операции $U_i^j(A_0, A_1, \ldots)$ для бесконечных последовательностей семейств $\{A_k\}_{k \in N}$. В этом случае надо взять разбиение N на бесконечные рекурсивные множества $\{\rho_k\}_{k \in N}$ такое, что последовательность прямых пересчетов множеств ρ_k вычислима, и заменить в определениях «$k \leqslant m$» на «$k \in N$». Существенно отметить, что в этом случае $\{\Psi_k\}_{k \in N}$ есть вычислимая последовательность операторов перечисления. Поэтому если $\{A_k\}_{k \in N}$ есть вычислимая (относительно нумерации $\Sigma^0 D$) последовательность семейств из $\mathscr{S}^0$, то $\{\Psi_k'(A_k) \cup H'\}$ — также вычислимая $\mathscr{S}^0$-последовательность; если $\{A_k\}$ есть $\mathscr{B}^0$-последовательность, то и $\{\Psi_k'(A_k)$ есть $\mathscr{B}^0$-последовательность.

Докажем теперь первую теорему.

Теорема 1. 1) *Семейство всех индексных множеств из Σ_n^0 является r-подмножеством нумерованного множества Σ_n^0 при $n = 1$, $n \geqslant 3$.*

2) *Семейство всех индексных множеств из Σ_2^0 не имеет Σ_2^0-вычислимой нумерации.*

Доказательство. 1) Пусть $n = 1$. Определим отображение $\Phi : \Sigma_1^0 \to \Sigma_1^0$ следующим образом. Пусть d — орф, сводящая нумерацию δ к нумерации π. Для данного $\alpha \in \Sigma_1^0$ положим $\Phi(\alpha) \rightleftharpoons \pi^{-1}\left(\bigcup_{d(n) \in \alpha} D_n\right)$.

Очевидно, Φ есть морфизм из нумерованного множества Σ_1^0 в себя. Из теоремы Райса следует, что если β есть индексное множество, то $\Phi(\beta) = \beta$. Это показывает, что $\operatorname{rng} \Phi$ состоит в точности из всех индексных множеств, входящих в Σ_1^0, причем $\Phi(\Phi_\alpha) = \Phi_\alpha$ для любого $\alpha \in \Sigma_1^0$, что и требовалось.

Пусть теперь $n \geqslant 3$. С каждым множеством α свяжем семейство $C_\alpha \rightleftharpoons \{\pi_x | x \in \alpha\}$. Определим операцию Φ на Σ_n^0 соотношением $\Phi(\alpha) \rightleftharpoons \pi^{-1}(C_\alpha)$. Имеем $y \in \Phi(\alpha) \Leftrightarrow \pi_y \in C_\alpha \Leftrightarrow \exists_x (x \in \alpha \wedge \pi_x = \pi_y)$. Так как $n \geqslant 3$ и «$\pi_x = \pi_y$» есть Π_2^0-отношение, Φ есть морфизм из нумерованного множества Σ_n^0 в себя. Если β — индексное множество, т. е. $\beta = \pi^{-1}(B)$ для некоторого $B \subseteq \Pi$, то очевидно, что $C_\beta = B$ и потому $\Phi(\beta) = \beta$. Это означает, что $\mathrm{rng}\Phi$ состоит в точности из всех индексных множеств, входящих в Σ_n^0, причем $\Phi(\Phi\alpha) = \Phi\alpha$ для любого $\alpha \in \Sigma_n^0$, что и требовалось.

Вместо доказательства утверждения 2) докажем более сильный факт: существует эффективная процедура, которая по каждой Σ_2^0-последовательности индексных множеств $\{\alpha_k\}_{k \in N}$ выдает индексное множество $\beta \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$, не принадлежащее этой последовательности (это означает продуктивность семейства индексных множеств из $\Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$ в некотором сильном смысле). Фиксируем эффективный относительно o' способ перечисления по шагам $\{\alpha_k^t\}$ последовательности $\{\alpha_k\}$. Пусть F', H', G_k' $(k \in N)$ — последовательность семейств из определения операций U_i^j. Очевидно, все эти семейства лежат в $\mathscr{B}^0$, поэтому можно выбрать эффективные относительно o' способы перечисления по шагам $\{\tau^s\}$ множества $\tau \rightleftharpoons \pi^{-1}(F' \cup H')$ и $\{\sigma_k^s\}$ последовательности множеств $\{\sigma_k\}, \sigma_k \rightleftharpoons \pi^{-1}(G_k')$. Пусть, наконец, h — орф, сводящая последовательность рекурсивных множеств $\{\rho_k\}$ к нумерации π, $\rho_k = \pi_{h(k)}$.

Остается построить по шагам индексное множество β, отличающееся от всех α_k, и такое, что как β, так и $\bar{\beta}$ рекурсивно перечислимы относительно o'. Приведем эффективные относительно o' инструкции для вычисления конечных множеств β^s, γ^s на шаге s с таким расчетом, чтобы получить $\beta = \bigcup\limits_s \beta^s, \bar{\beta} = \bigcup\limits_s \gamma^s$.

Положим $\beta^{-1} \rightleftharpoons \gamma^{-1} \rightleftharpoons \varnothing$. На шаге $s \geqslant 0$, $s = \langle k, t \rangle$, возможны следующие случаи.

Случай 1. $h(k) \notin \alpha_k^t$.

Полагаем $\beta^s \rightleftharpoons \beta^{s-1} \cup \sigma_k^s$, $\gamma^s \rightleftharpoons \gamma^{s-1} \cup \tau^s$.

Случай 2. $h(k) \in \alpha_k^t \setminus \alpha_k^{t-1}$.

Перечисляя множество α_k, находим (первое в этом процессе) число x_k такое, что $d(x_k) \in \alpha_k$, $\delta(x_k) \in G_k'$, $\delta(x_k) \notin \{\pi_y | y \in \beta^{s-1}\}$ (напомним, что d — орф, сводящая δ к π). Такое число x_k существует, так как в силу леммы 3 из [7] всякое семейство $A \in \hat{\Sigma}_2^0$, содержащее бесконечное множество ξ, содержит бесконечно много конечных подмножеств этого множества, включающих фиксированное конечное множество $\theta \subseteq \xi$ (в данном случае семейство A_k, для которого $\alpha_k = \pi^{-1}(A_k)$, содержит множество ρ_k, $\theta = \{a_k\}$). Полагаем $\beta^s \rightleftharpoons \beta^{s-1} \cup \{y \in \sigma_k^s | \pi_y \neq \delta(x_k)\}$, $\gamma^s \rightleftharpoons \gamma^{s-1} \cup \tau^s \cup \{y \leqslant s | \pi_y = \delta(x_k)\}$.

Случай 3. Не имеют места случаи 1 и 2.

Множества β^s, γ^s определим так же, как в конце случая 2 (число x_k будет уже определено на некотором шаге $s' < s$, $s' = \langle k, t' \rangle$).

Приведенные инструкции эффективны относительно o', так как отношение «$\pi_y = \delta_x$» эффективно относительно o'. Поэтому множества $\beta \rightleftharpoons \bigcup\limits_s \beta^s$, $\gamma \rightleftharpoons \bigcup\limits_s \gamma^s$ принадлежат Σ_2^0. Из определения множеств β^s, γ^s очевидно, что $\beta \cap \gamma = \varnothing$, $\beta \cup \gamma = N$, поэтому $\beta \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$. То, что β есть индексное множество, тоже очевидно из определения β^s, γ^s. Остается проверить, что $\beta \neq \alpha_k$ для всякого $k \in N$. Возможны два случая: $h(k) \notin \alpha_k$ (т. е. множество ρ_k не принадлежит тому семейству $A_k \subseteq \Pi$, для которого $\alpha_k = \pi^{-1}(A_k)$), и $h(k) \in \alpha_k$ (т. е. $\rho_k \in A_k$). В первом случае на всех шагах s, $s = \langle k, t \rangle$, выполняется случай 1 инструкций и потому $\pi^{-1}(G'_k) = \sigma_k \subseteq \beta$. В частности, множество ρ_k из G'_k принадлежит тому семейству $B \subseteq \Pi$, для которого $\beta = \pi^{-1}(B)$. Поэтому $h(k) \in \beta \setminus \alpha_k$, $\beta \neq \alpha_k$. Если $h(k) \in \alpha_k$, то на том шаге $s = \langle k, t \rangle$, для которого $h(k) \in \alpha_k^t \setminus \alpha_k^{t-1}$, будет определено число x_k. Очевидно, $\delta(x_k) \in A_k$. Из построения множеств β^s, γ^s на последующих шагах $s' > s$, $s' = \langle k, t' \rangle$, очевидно, что $\delta(x_k) \notin B$, и потому $d(x_k) \in \alpha_k \setminus \beta$, $\alpha_k \neq \beta$. Теорема доказана.

Следствие 4. *Классы* $\widehat{\Sigma}_n^0$ ($n = 1$, $n \geqslant 3$) *можно снабдить такими нумерациями (будем называть их каноническими), что нумерованное множество* $\widehat{\Sigma}_n^0$ *будет ретрактом нумерованного множества* Σ_n^0.

Теорема 1 показывает, что трудно рассчитывать на получение простого описания семейств из $\widehat{\Sigma}_2^0$ в терминах эффективно открытых семейств, но можно попытаться найти такое описание для семейств из $\widehat{\Sigma}_n^0$ при $n \geqslant 3$. Как искать такое описание? Наиболее естественный путь — построить, следуя п. 4°, § 1, иерархию семейств рпм, исходя из канонической нумерации класса $\mathscr{S}^0$. Поскольку эта иерархия и иерархия Клини — Мостовского строятся по единой схеме и $\mathscr{S}^0 = \widehat{\Sigma}_1^0$, естественно ожидать тесной связи между классами $\widehat{\Sigma}_n^0$ и классами этой новой иерархии. Однако очевидно, что это не так: в полученную таким способом иерархию войдут лишь такие семейства рпм A, что из $\alpha \in A$, $\beta \in \Pi$, $\alpha \subseteq \beta$ следует $\beta \in A$, а для семейств из $\widehat{\Sigma}_n^0$ ($n \geqslant 2$) это, конечно не так. Поэтому модифицируем нашу идею следующим образом. Построим иерархию семейств исходя не из канонической нумерации класса $\mathscr{S}^0$, а из канонической нумерации B^0 класса $\mathscr{B}^0$ (определения см. перед теоремой 1). Классы этой иерархии обозначаем $\widetilde{\Sigma}_n^0, \widetilde{\Pi}_n^0$ ($n \geqslant 1$). Таким образом, каноническая нумерация класса $\widetilde{\Sigma}_1^0$ — это $\Sigma^0(B^0)$, каноническая нумерация класса $\widetilde{\Pi}_3^0$ — это $\Pi^0\Sigma^0\Pi^0(B^0)$ и т. д. Поскольку $(B^0)^c \leqslant B^0$, из 6°, § 1, следует $(\widetilde{\Sigma}_n^0)^c = \widetilde{\Pi}_n^0$, $(\widetilde{\Pi}_n^0)^c = \widetilde{\Sigma}_n^0$ ($n \geqslant 1$). Положим еще $\widetilde{\Sigma}_0^0 \rightleftarrows \mathscr{S}^0, \widetilde{\Pi}_0^0 \rightleftarrows (\widetilde{\Sigma}_0^0)^c$ (в определении $\widetilde{\Sigma}_0^0$ мы отступаем от обозначений § 1). Все классы $\widetilde{\Sigma}_n^0, \widetilde{\Pi}_n^0$ ($n \geqslant 0$) снабжены каноническими нумерациями.

Поскольку иерархия $\widetilde{\Sigma}_n^0$ построена по той же схеме, что и иерархия Клини — Мостовского, а M-сводимость является аналогом m-сводимости, естественно ожидать связи между иерархией $\widetilde{\Sigma}_n^0$ и M-сводимостью, аналогичной связи иерархии Клини — Мостовского с m-сводимостью.

Теорема 2. *Для всякого* $n \in N$ *существует семейство* $V_n \subseteq \Pi$ *такое, что* $\widetilde{\Sigma}_n^0 = \{X \subseteq \Pi \mid X \leqslant_M V_n\}$, $\widetilde{\Pi}_n^0 = \{X \subseteq \Pi \mid X \leqslant_M \overline{V}_n\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что из $A \in \widetilde{\Sigma}_n^0$, $B \leqslant_M A$ следует $B \in \widetilde{\Sigma}_n^0$ и аналогично для $\widetilde{\Pi}_n^0$. Это доказывается индукцией по n. Пусть Φ — морфизм в $\mathbf{\Pi}$ в себя, для которого $B = \Phi^{-1}(A)$. Если $n = 0$, т. е. A эффективно открыто, то непосредственно очевидно, что $B \in \widetilde{\Sigma}_0^0$. Ясно, кроме того, что отображение $(A, \Phi) \to \Phi^{-1}(A)$ есть морфизм из произведения нумерованных множеств $\widetilde{\Sigma}_0^0 \times \mathbf{\Phi}$ в $\widetilde{\Sigma}_0^0$, где $\mathbf{\Phi}$ — множество всех морфизмов из $\mathbf{\Pi}$ в $\mathbf{\Pi}$ с главной вычислимой нумерацией. Далее, если $A \in \mathscr{B}^0$, то $\Phi^{-1}(A) \in \mathscr{B}^0$, причем $(A, \Phi) \to \Phi^{-1}(A)$ есть морфизм из $\mathscr{B}^0 \times \mathbf{\Phi}$ в $\mathscr{B}^0$. Если $A \in \widetilde{\Sigma}_1^0$, то $A = \bigcup_x A_x$ для некоторой $\mathscr{B}^0$-последовательности семейств $\{A_x\}$. Но тогда, очевидно, $\Phi^{-1}(A) = \bigcup_x \Phi^{-1}(A_x)$, причем в силу сделанного замечания последовательность $\{\Phi^{-1}(A_x)\}$ вычислима относительно $\mathscr{B}^0$, т. е. $\Phi^{-1}(A) \in \widetilde{\Sigma}_1^0$, причем $(A, \Phi) \to \Phi^{-1}(A)$ есть, очевидно, морфизм из $\widetilde{\Sigma}_1^0 \times \mathbf{\Phi}$ в $\widetilde{\Sigma}_1^0$. Индукционный шаг рассматривается аналогично.

Остается показать, что в каждом классе $\widetilde{\Sigma}_n^0$ $(n \geqslant 0)$ имеется наибольшее по M-сводимости семейство. При $n = 0$ это понятно: любое эффективно открытое семейство, отличное от $\varnothing$ и Π, является наибольшим по M-сводимости в $\widetilde{\Sigma}_0^0$. Пусть $n > 0$ и A — каноническая нумерация класса $\widetilde{\Sigma}_n^0$. Положим $V_n \rightleftharpoons U_0^0(A_0, A_1, \ldots)$ (можно брать операцию U_i^j с любыми $i, j \leqslant 1$). Очевидно, что морфизм Ψ_k' осуществляет M-сводимость A_k к V_n для любого $k \in N$, поэтому остается проверить, что $V_n \in \widetilde{\Sigma}_n^0$. По определению $V_n = \bigcup\limits_k \Psi_k'(A_k)$, а из сказанного перед теоремой 1 следует, что отображение $X \to \Psi_k'(X)$ сохраняет все классы $\widetilde{\Sigma}_n^0, \widetilde{\Pi}_n^0$ $(n \geqslant 1)$, причем $\{\Psi_k'(A_k)\}$ есть $\widetilde{\Sigma}_n^0$- -последовательность. Теорема доказана.

Следствие 5 (теорема об иерархии). $\widetilde{\Sigma}_n^0 \not\subseteq \widetilde{\Pi}_n^0$ $(n \in N)$.

В приводимой ниже теореме 3 мы изучим вопрос о связи между классами $\widetilde{\Sigma}_n^0$ и $\widehat{\Sigma}_{n+1}^0$ $(n \in N)$, но сначала приведем два вспомогательных утверждения. Последовательность семейств рпм $\{A_x\}$ называем Σ_n^0 *-последовательностью,* если последовательность множеств $\{\pi^{-1}(A_x)\}$ сводится к канонической нумерации семейства Σ_n^0, аналогично для Π_n^0.

Предложение 3. *Для принадлежности семейства рпм классу* $\widehat{\Sigma}_n^0$ $(n \geqslant 3)$ *необходимо и достаточно, чтобы оно было представимо в виде объединения некоторой* Π_{n-1}^0- *последовательности конечных семейств.*

Доказательство. Очевидно, что если $\{A_k\}$ — Σ_n^0 -последовательность семейств, то $\bigcup\limits_k A_k$, принадлежит $\widehat{\Sigma}_n^0$, поэтому достаточность проверять не нужно. Докажем необходимость. Пусть $A \in \widehat{\Sigma}_n^0$, $n \geqslant 3$. Тогда $\pi^{-1}(A) = \bigcup\limits_k \alpha_k$ для некоторой Π_{n-1}^0- -последовательности множеств $\{\alpha_k\}$. Положим $\beta_{\langle k,s\rangle} \rightleftharpoons \{x \leqslant s | x \in \alpha_k\}$. Очевидно, $\{\beta_{\langle k,s\rangle}\}$ — Π_{n-1}^0- последовательность конечных множеств и $\pi^{-1}(A) = \bigcup\limits_{k,s} \beta_{\langle k,s\rangle}$. Положим $A_{\langle k,s\rangle} \rightleftharpoons \{\pi_x | x \in \beta_{\langle k,s\rangle}\}$. Имеем $y \in \pi^{-1}(A_{\langle k,s\rangle}) \Leftrightarrow \pi_y \in A_{\langle k,s\rangle} \Leftrightarrow (\exists x \leqslant s)(x \in \alpha_k \land \pi_y = \pi_x)$. Поскольку «$\pi_y = \pi_x$» есть Π_2^0 -отношение и $n \geqslant 3$, заключаем, что $\{A_{\langle k,s\rangle}\}$ есть Π_{n-1}^0- последовательность семейств. Очевидно, что $A = \bigcup\limits_{k,s} A_{\langle k,s\rangle}$. Предложение доказано.

Следствие 6. *Для принадлежности семейства рпм классу* $\widehat{\Sigma}_n^0$ $(\widehat{\Pi}_n^0)$ *при* $n \geqslant 3$ *необходимо и достаточно, чтобы оно представлялось в виде объединения (пересечения) некоторой* $\Pi_{n-1}^0(\Sigma_{n-1}^0)$ *-последовательности семейств рпм.*

Семейство рпм A назовем *аппроксимируемым,* если для всякого $\alpha \in A$ найдется конечное множество $\gamma \subseteq \alpha$ такое, что для любого $\beta \in \Pi$ из $\gamma \subseteq \beta \subseteq \alpha$ следует $\beta \in A$. Следующее утверждение ввиду его простоты приведем без доказательства.

Предложение 4. 1) *Семейство рпм аппроксимируемо тогда и только тогда, когда оно принадлежит классу* $\Sigma(\mathscr{B})$.

2) *Если семейства рпм* A, B *принадлежат классу* $\Sigma(\mathscr{B}) \cap \Pi(\mathscr{B})$ *и* $A \cap \Delta = B \cap \Delta$, *то* $A = B$.

Следствие 7. 1) *Всякое семейство из* $\widetilde{\Sigma}_1^0$ *аппроксимируемо.*

2) *Если* $A, B \in \widetilde{\Sigma}_1^0 \cap \widetilde{\Pi}_1^0$, $A \cap \Delta = B \cap \Delta$, *то* $A = B$.

Изучим теперь связь между классами $\widetilde{\Sigma}_n^0$ и $\widehat{\Sigma}_{n+1}^0$.

Теорема 3. 1) *При* $n = 0$, $n \geqslant 2$ *канонические нумерации классов* $\widetilde{\Sigma}_n^0$ *и* $\widehat{\Sigma}_{n+1}^0$ *изоморфны. В частности,* $\widetilde{\Sigma}_n^0 = \widehat{\Sigma}_{n+1}^0$.

2) $\widetilde{\Sigma}_1^0 \subseteq \widehat{\Sigma}_2^0$, $\widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_2^0 \not\subseteq \widetilde{\Sigma}_1^0 \cup \widetilde{\Pi}_1^0$.

Доказательство. 1) При $n=0$ утверждение есть следствие теоремы Райса. Для доказательства того, что каноническая нумерация класса $\tilde{\Sigma}_n^0$ сводится к канонической нумерации класса $\hat{\Sigma}_{n+1}^0$ при $n \geqslant 2$ и что $\tilde{\Sigma}_1^0 \subseteq \hat{\Sigma}_2^0$, достаточно (в силу теоремы 1) проверить, что отображение $A \to \pi^{-1}(A)$ есть морфизм из $\tilde{\Sigma}_n^0$ в Σ_{n+1}^0 при $n \geqslant 0$. При $n=0$ это очевидно. Если $n \geqslant 1$, то (см. 5^0, § 1) семейство $A \in \tilde{\Sigma}_n^0$ представимо в виде $A = \bigcup_{k_1} \bigcap_{k_2} \ldots \square_{k_n} B_{\langle k_1, \ldots, k_n \rangle}$, где $\{B_{\langle k_1, \ldots, k_n \rangle}\}$ — $\mathscr{B}^0$-последовательность семейств. Очевидно, что „$x \in \pi^{-1}(B_{\langle k_1, \ldots, k_n \rangle})$" является как Σ_2^0-, так и Π_2^0-отношением, откуда по тому же свойству 5^0 получаем, что множество $\pi^{-1}(A) = \bigcup_{k_1} \bigcap_{k_2} \ldots \square_{k_n} \pi^{-1}(B_{\langle k_1, \ldots, k_n \rangle})$ принадлежит Σ_{n+1}^0.

Докажем, что если $A \in \hat{\Sigma}_{n+1}^0$, $n \geqslant 2$, то $A \in \tilde{\Sigma}_n^0$. Это проверяется по индукции. Пусть $n=2$, $A \in \hat{\Sigma}_3^0$.

Докажем вспомогательное утверждение: если $\{\alpha_m\}_{m \in N}$ — Σ_1^0 -последовательность множеств, то последовательность семейств $\{A_{\langle m, x \rangle}\}$, определяемая соотношением

$$A_{\langle m,x \rangle} \rightleftharpoons \begin{cases} \varnothing \text{ при } x \notin \alpha_m, \\ \{\pi_x\} \text{ при } x \in \alpha_m, \end{cases}$$

является $\tilde{\Pi}_1^0$- последовательностью. Для доказательства достаточно (см. 5^0, § 1) построить $\mathscr{B}^0$-последовательность семейств $\{B_{\langle m,x,s \rangle}\}$ таким образом, что $A_{\langle m,x \rangle} = \bigcap_s B_{\langle m,x,s \rangle}$. Семейство $B_{\langle m,x,s \rangle}$ будет иметь вид $(P_{\langle m,x,s \rangle} \setminus Q_{\langle m,x,s \rangle}) \cup R_{\langle m,x,s \rangle}$ для подходящих $\tilde{\Sigma}_0^0$-последовательностей P, Q, R. Положим $Q_{\langle m,x,s \rangle} \rightleftharpoons D_{\langle s \rangle}$,

$$P_{\langle m,x,s \rangle} \rightleftharpoons \begin{cases} \mathbb{Q} \text{ при } x \notin \alpha_m, \\ D_{\pi_x^s} \text{ при } x \in \alpha_m, \end{cases} \qquad R_{\langle m,x,s \rangle} \rightleftharpoons \begin{cases} \varnothing \text{ при } s \notin \pi_x, \\ P_{\langle m,x,s \rangle} \text{ при } s \in \pi_x \end{cases}$$

(напомним, что $D_\gamma = \{\alpha \in \Pi \mid \gamma \subseteq \alpha\}$, $\gamma \in \Delta$). Проверим соотношение $A_{\langle m,x \rangle} = \bigcap_s B_{\langle m,x,s \rangle}$. Если $x \notin \alpha_m$, то $A_{\langle m,x \rangle} \rightleftharpoons \varnothing$, $B_{\langle m,x,s \rangle} \subseteq P_{\langle m,x,s \rangle} = \varnothing$ для любого s, поэтому $A_{\langle m,x \rangle} = \bigcap_s B_{\langle m,x,s \rangle}$. Пусть $x \in \alpha_m$. Надо доказать, что $\{\pi_x\} = \bigcap_s B_{\langle m,x,s \rangle}$. Проверим, что $\pi_x \in B_{\langle m,x,s \rangle}$ для всякого s. Возможны два случая: $s \notin \pi_x$ и $s \in \pi_x$. В первом случае $\pi_x \in P_{\langle m,x,s \rangle} \setminus Q_{\langle m,x,s \rangle} \subseteq B_{\langle m,x,s \rangle}$, во втором $\pi_x \in P_{\langle m,x,s \rangle} = R_{\langle m,x,s \rangle} \subseteq B_{\langle m,x,s \rangle}$. Остается доказать, что если рпм α принадлежит $B_{\langle m,x,s \rangle}$ при любом s, то $\alpha = \pi_x$. Поскольку $B_{\langle m,x,s \rangle} \subseteq P_{\langle m,x,s \rangle}$, то $\alpha \in P_{\langle m,x,s \rangle}$ для любого s, т. е. $\pi_x^s \subseteq \alpha$ для любого s, откуда $\pi_x \subseteq \alpha$. Проверим, наконец, что $\alpha \subseteq \pi_x$. Пусть $s \in \alpha$. Тогда из $\alpha \in B_{\langle m,x,s \rangle}$ следует $\alpha \in R_{\langle m,x,s \rangle}$, а это возможно лишь при условии $s \in \pi_x$. Вспомогательное утверждение доказано.

Вернемся к доказательству теоремы. Если $A \in \hat{\Sigma}_3^0$, то $\pi^{-1}(A) = \bigcup_k \bigcap_m \alpha_{\langle k,m \rangle}$ для некоторой Σ_1^0- последовательности множеств $\{\alpha_{\langle k,m \rangle}\}$. Согласно доказанному утверждению, последовательность семейств

$$A_{\langle k,m,x \rangle} \rightleftharpoons \begin{cases} \varnothing \text{ при } x \notin \alpha_{\langle k,m \rangle}, \\ \{\pi_x\} \text{ при } x \in \alpha_{\langle k,m \rangle} \end{cases}$$

есть $\tilde{\Pi}_1^0$-последовательность. Из 5^0, § 1, следует, что семейство $\bigcup_{k,x} \bigcap_m A_{\langle k,m,x \rangle}$ принадлежит $\tilde{\Sigma}_2^0$. Но, как легко видеть, $A = \bigcup_{k,x} \bigcap_m A_{\langle k,m,x \rangle}$, что доказывает базис индукции. Из доказательства вытекает, что на самом деле каноническая нумерация класса $\widehat{\Sigma}_3^0$ сводится к канонической нумерации класса $\widetilde{\Sigma}_2^0$, а поэтому и каноническая нумерация класса $\widehat{\Pi}_3^0$ сводится к канонической нумерации класса $\widetilde{\Pi}_2^0$.

Предположим, что утверждение доказано для числа $n \geqslant 2$ и докажем его для $n+1$. Если $A \in \widehat{\Sigma}_{n+2}^0$, то, согласно следствию 5, семейство A можно представить в виде $\bigcup_k A_k$ для некоторой $\widehat{\Pi}_{n+1}^0$-последовательности семейств $\{A_k\}$. По индукционному предположению, $\{A_k\}$ есть $\widetilde{\Pi}_n^0$-последовательность, но тогда $A \in \widetilde{\Sigma}_{n+1}^0$ по определению класса $\widetilde{\Sigma}_{n+1}^0$. 1) доказано.

Докажем 2). Соотношение $\widetilde{\Sigma}_1^0 \subseteq \widehat{\Sigma}_2^0$ уже доказано. Построим пример семейства $A \in \widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_0^2$ такого, что как A, так и $\bar{A}$ не являются аппроксимируемыми (согласно следствию 6 это более точное утверждение, чем $A \notin \widetilde{\Sigma}_1^0 \cup \widehat{\Pi}_1^0$). Заметим сначала, что достаточно построить пример семейства $B \in \widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_2^0$, не являющегося аппроксимируемым. Действительно, если B построено, то семейство $A \rightleftharpoons U_0^0(B, \overline{B})$ принадлежит $\widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_2^0$ (см. [6, § 5, свойство 3]), причем как A, так и $\bar{A} = U_1^1(\overline{B}, B)$ не являются аппроксимируемыми. Обратимся поэтому к построению неаппроксимируемого семейства из $\widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_2^0$. Утверждаем, что достаточно построить семейство $X \in \widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_2^0$, имеющее вид $X = \{\xi_0, \xi_1, \ldots\}$, где $\xi_0 \subset \xi_1 \subset \ldots$ — последовательность конечных множеств, для которой множество $\bigcup_x \xi_x$ рекурсивно перечислимо. Тогда, очевидно, $\overline{X}$ будет неаппроксимируемым.

Пусть $\gamma_0 \subset \gamma_1 \subset \ldots$ — некоторая вполне рекурсивная в нумерации $\delta: N \to \Delta$ последовательность конечных множеств. Определим семейства $A_0 \rightleftharpoons \{\gamma_0\}$, $A_1 \rightleftharpoons \{\gamma_1, \gamma_2\}$, $A_2 \rightleftharpoons \{\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5\}, \ldots$. Семейство A_n будем обозначать $\{\alpha_n^0, \ldots, \alpha_n^n\}$ (в нем $n+1$ элементов). Семейство X будет содержать ровно по одному множеству из каждого A_n. Введем множество $\varepsilon_n \rightleftharpoons \left\{x < n \mid \pi_x \notin \bigcup_{k<n} A_k\right\}$ (в нем не более n элементов). Пусть k — наименьшее число $\leqslant n$ такое, что α_n^k отличается от всех π_x, $x \in \varepsilon_n$. Именно это множество α_n^k мы и возьмем в качестве элемента из X. Легко видеть, что множество $\delta^{-1}(X)$ рекурсивно относительно O', т. е. $\delta^{-1}(X) \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$. Из определения X вытекает соотношение $\pi_n \in X \Leftrightarrow \pi_n \in (A_0 \cup \ldots \cup A_n) \cap X$, которое вместе с соотношением $\delta^{-1}(X) \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$ показывает, что $\pi^{-1}(X) \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$. Итак, $\pi^{-1}(\overline{X}) \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$, $\overline{X}$ неаппроксимируемо. Теорема доказана.

Следствие 8. *При $n \geqslant 2$ нумерованное множество $\widetilde{\Sigma}_n^0$ вместе с морфизмами $A \to \pi^{-1}(A)$ из $\widetilde{\Sigma}_n^0$ в Σ_{n+1}^0 и $\alpha \to \{\pi_x | x \in \alpha\}$ из Σ_{n+1}^0 в $\widetilde{\Sigma}_n^0$ является ретрактом нумерованного множества Σ_{n+1}^0.*

Замечание 1. С теоремами 1, 3 интересно сравнить теорему 2 из [8], которая показывает, что семейства из $\widehat{\Sigma}_2^0$ описываются через семейства из $\widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_2^0$, а именно (приводим уточненную формулировку): для принадлежности семейства A классу $\widehat{\Sigma}_2^0$ необходимо и достаточно, чтобы оно представлялось в виде $\bigcup_x A_x$ для некоторой последовательности семейств рпм $\{A_x\}$, являющейся одновременно Σ_2^0- и Π_2^0-последовательностью.

Замечание 2. Несмотря на то, что $\widetilde{\Sigma}_1^0 \neq \widehat{\Sigma}_2^0$, класс $\widetilde{\Sigma}_1^0$ содержит многие семейства из $\widehat{\Sigma}_2^0$. Например, легко понять, что если $A \subseteq \Delta$, то условия $A \in \widehat{\Sigma}_2^0$, $A \in \widetilde{\Sigma}_1^0$, $\delta^{-1}(A) \in \Sigma_2^0$ эквивалентны.

В заключение параграфа изучим связь введенной иерархии $\widetilde{\Sigma}^0_n$ с арифметической иерархией семейств множеств $\Sigma^{(s)}_n$, $\Pi^{(s)}_n$, определенной в [1, гл. 15]. Поскольку мы говорим только о семействах рпм, будем рассматривать «след» иерархии $\Sigma^{(s)}_n$ на семействе П. Классы этой новой иерархии обозначим так: $\Sigma^s_n \rightleftharpoons \Sigma^{(s)}_n \cap \Pi$, $\Pi^s_n \rightleftharpoons \Pi^{(s)}_n \cap \Pi$. Заметим, что иерархия Σ^s_n (и иерархия $\Sigma^{(s)}_n$) также может быть определена по схеме § 1. Пусть $\mathscr{B}'$ — булева алгебра, порожденная классом $\mathscr{D}$ всех базисных открытых семейств (см. определения перед теоремой 1) внутри $\mathscr{P}(\Pi)$, и B' — каноническая нумерация класса $\mathscr{B}'$, порожденная канонической нумерацией класса $\mathscr{D}$ (очевидно, $(B')^c \leqslant B'$). Отметим, что $\mathscr{B}'$ совпадает с классом всех открыто-замкнутых множеств в некоторой естественной топологии на П, см. [1, с. 435, 436]. Можно показать, что канонические нумерации классов Σ^s_n, Π^s_n $(n \in N)$ изоморфны нумерациям с соответствующими индексами, возникающим из B' по схеме 4°, § 1, см. [1, упражнение 15—8].

Предложение 5. 1) *Для всякого $n \geqslant 1$ каноническая нумерация класса Σ^s_n (Π^s_n) сводится к канонической нумерации класса $\widetilde{\Sigma}^0_n$ $(\widetilde{\Pi}^0_n)$.* В частности, $\Sigma^s_n \subseteq \widetilde{\Sigma}^0_n$ $(\Pi^s_n \subseteq \widetilde{\Pi}^0_n)$.

2) *Для всякого $n \geqslant 0$ каноническая нумерация класса $\widetilde{\Sigma}^0_n$ $(\widetilde{\Pi}^0_n)$ сводится к канонической нумерации класса Σ^s_{n+1} (Π^s_{n+1}). В частности,* $\widetilde{\Sigma}^0_n \subseteq \Sigma^s_{n+1}$ $(\widetilde{\Pi}^0_n \subseteq \Pi^s_{n+1})$.

3) $\widetilde{\Sigma}^0_n \nsubseteq \Pi^s_{n+1}$, $\widetilde{\Pi}^0_n \nsubseteq \Sigma^s_{n+1}$ *для всякого $n \geqslant 0$.*

Доказательство. 1) Пусть $n = 1$. Каноническая нумерация класса Σ^s_1 есть $\Sigma^0(B')$, а каноническая нумерация класса $\widetilde{\Sigma}^0_1$ есть $\Sigma^0(B^0)$, где B^0 — индуцированная нумерация булевой алгебры, порожденной классом $\widetilde{\Sigma}^0_0$. Очевидно, что $B' \leqslant B^0$, поэтому $\Sigma^0(B') \leqslant \Sigma^0(B^0)$ по свойству 1° из § 1. Случай $n > 1$ рассматривается тривиальной индукцией с использованием того же свойства 1°.

2) Пусть $n = 0$. Нумерация класса $\widetilde{\Sigma}^0_0$ — это $\Sigma^0(D)$, а класса Σ^s_1 — это $\Sigma^0(B')$. Но $D \leqslant B'$, поэтому $\Sigma^0(D) \leqslant \Sigma^0(B')$. Пусть теперь $n = 1$. Из $\Sigma^0(D) \leqslant \Sigma^0(B')$ следует, что $\Sigma^0(D)$ сводится к каноническим нумерациям классов Σ^s_2, Π^s_2. Отсюда следует, что и B^0 сводится к нумерациям классов Σ^s_2, Π^s_2 (так как $\Sigma^s_2 \cap \Pi^s_2$ есть эффективная булева алгебра, см. 7°, § 1). Свойство 1° показывает, что каноническая нумерация класса $\widetilde{\Sigma}^0_1$ сводится к канонической нумерации класса Σ^s_2. Случай $n > 1$ рассматривается тривиальной индукцией.

3) Произвольному $\alpha \subseteq N$ сопоставим семейство рпм $F_\alpha \rightleftharpoons \{\varnothing, \{x\} \mid x \in \alpha\}$. Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Для всякого $n \geqslant 0$ отображение $\alpha \to F_\alpha$ есть морфизм из нумерованного множества Π^0_{2n+1} в нумерованное множество $\widetilde{\Pi}^0_{2n}$ и из нумерованного множества Σ^0_{2n+2} в $\widetilde{\Sigma}^0_{2n+1}$.*

Рассмотрим случай $n = 0$. То, что $\alpha \to F_\alpha$ есть морфизм из Π^0_1 в $\widetilde{\Pi}^0_0$, вытекает из теоремы Райса. Пусть $\alpha \in \Sigma^0_2$. Тогда $\alpha = \bigcup\limits_x \alpha_x$ для некоторой Π^0_1-последовательности множеств $\{\alpha_x\}$. По доказанному последовательность семейств $\{F_{\alpha x}\}$ есть $\widetilde{\Pi}^0_0$-последовательность. Отсюда получаем, что семейство $F_\alpha = F_{\bigcup\limits_x \alpha x} = \bigcup\limits_x F_{\alpha x}$ принадлежит $\widetilde{\Sigma}^0_1$, причем $\alpha \to F_\alpha$ есть морфизм из Σ^0_2 в $\widetilde{\Sigma}^0_1$. При $n > 0$ доказательство аналогичное, с использованием очевидных равенств $F_{\bigcup\limits_x \alpha x} = \bigcup\limits_x F_{\alpha x}$, $F_{\bigcap\limits_x \alpha x} = \bigcap\limits_x F_{\alpha x}$.

Лемма 2. *Для всякого $n \geqslant 0$ отображение $A \to \delta^{-1}(A)$ (напомним, что δ — нумерация конечных множеств) является морфизмом из нумеро-*

ванного множества Σ^s_n в нумерованное множество Σ^0_n, а также из Π^s_n в Π^0_n (здесь считаем, что $\Sigma^0_0 = \Pi^0_0 = \Sigma^0_1 \cap \Pi^0_1$).

Пусть $n = 0$. То, что $\delta^{-1}(A)$ рекурсивно при $A \in \Sigma^s_0 = \mathscr{B}'$, очевидно из определения класса $\mathscr{B}'$. Если $A \in \Sigma^s_{n+1}$, то $A = \bigcup\limits_x A_x$ для некоторой Π^s_n-последовательности $\{A_x\}$. По индукции $\{\delta^{-1}(A_x)\}$ есть Π^0_n-последовательность множеств. Поэтому множество $\delta^{-1}(A) = \bigcup\limits_x \delta^{-1}(A_x)$ принадлежит Σ^0_{n+1}.

Вернемся к доказательству предложения. Пусть α_n $(n \geqslant 0)$ — Σ^0_n-полное множество. При четном n семейство $F_{\bar{\alpha}_{n+1}}$ принадлежит $\tilde{\Pi}^0_n$, поскольку $\bar{\alpha}_{n+1} \in \Pi^0_{n+1}$ (лемма 1). В то же время $F_{\bar{\alpha}_{n+1}} \notin \Sigma^s_{n+1}$, ибо в противном случае получили бы $\bar{\alpha}_{n+1} \in \Sigma^0_{n+1}$ по лемме 2, что противоречит Σ^0_{n+1}-полноте множества α_{n+1}. Итак, $F_{\bar{\alpha}_{n+1}} \in \tilde{\Pi}^0_n \setminus \Sigma^s_{n+1}$. Аналогично доказывается, что при нечетном n семейство $F_{\alpha_{n+1}}$ принадлежит $\tilde{\Sigma}^0_n \setminus \Pi^s_{n+1}$. Предложение доказано.

§ 3

В этом параграфе мы несколько глубже изучим строение семейств из $\tilde{\Sigma}^0_1 \cap \tilde{\Pi}^0_1$, построив для этого иерархию семейств рпм, аналогичную иерархии Ершова. Для классов $\tilde{\Sigma}^0_0$, $\tilde{\Sigma}^0_1$, $\tilde{\Pi}^0_1$ удовлетворяются все условия, которые позволяют построить малую иерархию (см. § 1). Действительно, класс $\tilde{\Sigma}^0_1 \cap \tilde{\Pi}^0_1$ является эффективной булевой алгеброй (так как нумерация B^0 замкнута относительно $\cup$, $\cap$, $^-$), каноническая нумерация класса $\tilde{\Sigma}^0_0$ является σ-замкнутой относительно объединения и сводится к каноническим нумерациям классов $\tilde{\Sigma}^0_1$, $\tilde{\Pi}^0_1$, $\varnothing$, $\Pi \in \tilde{\Sigma}^0_0$.

Схема из § 1 позволяет каждому $a \in L_0$, являющемуся номером рекурсивного линейного порядка с четностью $(\xi;\ \preccurlyeq)$, сопоставить классы $\tilde{\Sigma}_{(a)}$, $\tilde{\Pi}_{(a)}$. Очевидно, если $\xi = \varnothing$, то $\tilde{\Sigma}_{(a)} = \{\varnothing\}$, если ξ одноэлементно, то $\tilde{\Sigma}_{(a)} = \tilde{\Sigma}^0_0$, если ξ двухэлементно, то $\tilde{\Sigma}_{(a)}$ есть совокупность всех разностей эффективно открытых семейств и т. д.

Из общих замечаний 8°, 9° из § 1 вытекают некоторые иерархические свойства классов $\tilde{\Sigma}_{(a)}$, $\tilde{\Pi}_{(a)}$ $(a \in L_0)$. На самом деле имеет место некоторое уточнение свойства 9°, аналогичное предложению 3 из [4, § 3]: если $a \in W_0^{**}$, то $A \in \tilde{\Sigma}_{(a)} \Leftrightarrow \bar{A} \in \tilde{\Pi}_{(a)}$, и канонические нумерации классов $\tilde{\Sigma}_{(a)}$, $\tilde{\Pi}_{(a)}$ сводятся к каноническим нумерациям классов $\tilde{\Sigma}^0_1$, $\tilde{\Pi}^0_1$, в частности, $\tilde{\Sigma}_{(a)} \cup \tilde{\Pi}_{(a)} \subseteq \tilde{\Sigma}^0_1 \cap \tilde{\Pi}^0_1$. Это вытекает из следующего очевидного замечания: ξ-последовательность семейств $\{A_x\}_{x \in \xi}$ является $\tilde{\Sigma}^0_0$-вычислимой тогда и только тогда, когда ξ-последовательность множеств $\{\pi^{-1}(A_x)\}_{x \in \xi}$ Σ^0_1-вычислима.

Имеется некоторая связь иерархии $\tilde{\Sigma}_{(a)}$ с иерархией Ершова, классы которой обозначаем, следуя [4], через $\Sigma^{-1}_{(a)}$, $\Pi^{-1}_{(a)}$.

Предложение 1. *Для всякого $a \in L_0$ отображение $A \to \pi^{-1}(A)$ является морфизмом из нумерованного множества $\tilde{\Sigma}_{(a)}$ $(\tilde{\Pi}_{(a)})$ в нумерованное множество $\Sigma^{-1}_{(a)}$ $(\Pi^{-1}_{(a)})$.*

Это предложение легко следует из приведенного выше описания $\tilde{\Sigma}^0_0$-вычислимых ξ-последовательностей семейств. Действительно, пусть $A \in \tilde{\Sigma}_{(a)}$, $A = S_\xi\{C_x\}$, где $\{C_x\}_{x \in \xi}$ — $\tilde{\Sigma}^0_0$-вычислимая ξ-последовательность.

Тогда $\{\pi^{-1}(C_x)\}_{x\in\xi}$ есть Σ_1^0-вычислимая последовательность множеств. Имеем

$$\pi^{-1}(A)=\pi^{-1}(S_\xi\{C_x\})=\pi^{-1}\Big(\bigcup_{x\in\xi_i}C_x\setminus\bigcup_{y<x}C_y\Big)=\bigcup_{x\in\xi_i}\Big(\pi^{-1}(C_x)\setminus$$
$$\setminus\bigcup_{y<x}\pi^{-1}(C_y)\Big)=S_\xi\{\pi^{-1}(C_x)\}\in\Sigma_{(a)}^{-1},$$

и аналогично для $\widetilde{\Pi}_{(a)}$ (i — четность ξ, см. § 1).

Имеется связь иерархии $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$ с M-сводимостью, аналогичная связи иерархии Ершова с m-сводимостью.

Теорема 1. *Для всякого $a\in L_0$ существуют семейства* рпм V_a, V_a' *такие, что* $\widetilde{\Sigma}_{(a)}=\{X\subseteq\Pi\,|\,X\leqslant_M V_a\}$, $\widetilde{\Pi}_{(a)}=\{X\subseteq\Pi\,|\,X\leqslant_M V_a'\}$.

Доказательство. Проверим сначала, что из $A\in\widetilde{\Sigma}_{(a)}$, $B\leqslant_M A$ следует $B\in\widetilde{\Sigma}_{(a)}$. Пусть Φ — морфизм из Π в себя, для которого $B=\Phi^{-1}(A)$, и $\{C_x\}_{x\in\xi}$ — та $\widetilde{\Sigma}_0^0$ -вычислимая ξ-последовательность, для которой $A=S_\xi\{C_x\}$. Имеем

$$B=\Phi^{-1}(S_\xi\{C_x\})=\Phi^{-1}\Big(\bigcup_{x\in\xi_i}\Big(C_x\setminus\bigcup_{y<x}C_y\Big)\Big)=$$
$$=\bigcup_{x\in\xi_i}\Big(\Phi^{-1}(C_x)\setminus\bigcup_{y<x}\Phi^{-1}(C_y)\Big)=S_\xi\{\Phi^{-1}(C_x)\}.$$

Поскольку $\{\Phi^{-1}(C_x)\}_{x\in\xi}$ есть, очевидно, $\widetilde{\Sigma}_0^0$ - вычислимая ξ-последовательность, получаем $B\in\widetilde{\Sigma}_{(a)}$. Для $\widetilde{\Pi}_{(a)}$ доказательство аналогично. Легко понять, что на самом деле отображение $(A,\Phi)\to\Phi^{-1}(A)$ есть морфизм из произведения нумерованных множеств $\widetilde{\Sigma}_{(a)}\times\mathbf{\Phi}$ ($\widetilde{\Pi}_{(a)}\times\mathbf{\Phi}$), где $\mathbf{\Phi}$ — множество всех морфизмов из Π в себя с главной вычислимой нумерацией, в $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$ ($\widetilde{\Pi}_{(a)}$).

Остается показать, что в классе $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$ ($\widetilde{\Pi}_{(a)}$) есть наибольшее по отношению $\leqslant_M$ семейство $V_a(V_a')$. Здесь опять используем операции U_i^j, описанные в § 2 перед теоремой 1. Пусть A — каноническая нумерация класса $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$ ($\widetilde{\Pi}_{(a)}$). Пусть j равно 0, если $i(\xi)=1$ или ξ не имеет наименьшего элемента, и 1 в противном случае (j' равно 1, если $i(\xi)=1$ и ξ имеет наименьший элемент, и 0 в противном случае). Утверждаем, что в качестве V_a (V_a') можно взять семейство $U_0^j(A_0,A_1,\ldots)(U_1^{j'}(A_0,A_1,\ldots))$. Поскольку A_k M-сводится к каждому $U_l^m(A_0,A_1,\ldots)$ посредством морфизма Ψ_k', надо лишь убедиться, что $V_a\in\widetilde{\Sigma}_{(a)}$ $(V_a'\in\widetilde{\Pi}_{(a)})$. Согласно определению нумерации A существует $\widetilde{\Sigma}_0^0$- вычислимая последовательность семейств $\{B_{\langle k,x\rangle}\}_{k\in N,\,x\in\xi}$ такая, что $A_k=S_\xi\{B_{\langle k,x\rangle}\}$ $(A_k=P_\xi\{B_{\langle k,x\rangle}\})$ при любом $k\in N$. Положим $C_x\rightleftharpoons\bigcup_{k\in N}\Psi_k'(B_{\langle k,x\rangle})\cup H'$ для любого $x\in\xi$. Согласно замечаниям перед теоремой 1, § 2, ξ-последовательность $\{C_x\}_{x\in\xi}$ является $\widetilde{\Sigma}_0^0$-вычислимой. Поэтому достаточно проверить, что $V_a=S_\xi\{C_x\}$ $(V_a'=P_\xi\{C_x\})$.

Из леммы 2, § 1, следуют такие равенства:

$$S_\xi\Big\{\bigcup_k\Psi_k'(B_{\langle k,x\rangle})\Big\}=\bigcup_k\Psi_k'(S_\xi\{B_{\langle k,x\rangle}\})=\bigcup_k\Psi_k'(A_k)$$
$$\Big(P_\xi\Big\{\bigcup_k\Psi_k'(B_{\langle k,x\rangle})\Big\}=\bigcup_k\Psi_k'(P_\xi\{B_{\langle k,x\rangle}\})\cup\Big(\Pi\setminus\bigcup_k\operatorname{rng}\Psi_k'\Big)=$$
$$=\bigcup_k\Psi_k'(A_k)\cup\Big(\Pi\setminus\bigcup_k G_k'\Big)=\bigcup_k\Psi_k'(A_k)\cup F'\cup H',\ \text{так как }\operatorname{rng}\Psi_k'=G_k'\Big).$$

Используя эти соотношения и лемму 1 из § 1, получим:

$$S_\xi\{C_x\} = S_\xi\Big\{\bigcup \Psi'_k(B_{\langle k,x\rangle}) \cup H'\Big\} = \begin{cases} S_\xi\Big\{\bigcup\limits_k \Psi'_k(B_{\langle k,x\rangle})\Big\} \text{ при } j=0, \\ S_\xi\Big\{\bigcup\limits_k \Psi'_k(B_{\langle k,x\rangle}\Big\} \cup H' \text{ при } j=1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \bigcup\limits_k \Psi'_k(A_k) & \text{при } j=0, \\ \bigcup\limits_k \Psi'_k(A_k) \cup H' & \text{при } j=1 \end{cases} = U_0^j(A_0, A_1, \ldots) = V_a$$

$$\Bigg(P_\xi\{C_x\} = P_\xi\Big\{\bigcup_k \Psi'_k(B_{\langle k,x\rangle}) \cup H'\Big\} = \begin{cases} P_\xi\Big\{\bigcup\limits_k \Psi'_k(B_{\langle k,x\rangle})\Big\} & \text{при } j'=1, \\ P_\xi\Big\{\bigcup\limits_k \Psi'_k(B_{\langle k,x\rangle})\Big\} \setminus H' & \text{при } j'=0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \bigcup\limits_k \Psi'_k(A_k) \cup F' \cup H' & \text{при } j'=1, \\ \bigcup\limits_k \Psi'_k(A_k) \cup F' & \text{при } j'=0 \end{cases} = U_1^{j'}(A_0, A_1, \ldots) = V'_a\Bigg).$$

Теорема доказана.

Следствие 1 (теорема об иерархии). $\widetilde{\Sigma}_{(a)} \not\subseteq \widetilde{\Pi}_{(a)}$ $(a \in W_0^{**})$.

Следствие 2. *Если* $a \in W_0^{**}$, $i = i(\xi)$, $\{A_k\}_{k\in N}$ — $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$-*вычислимая* ($\widetilde{\Pi}_{(a)}$-*вычислимая*) *последовательность семейств, то* $U_0^i(A_0, A_1, \ldots) \in \widetilde{\Sigma}_{(a)}$ $(U_1^i(A_0, A_1, \ldots) \in \widetilde{\Pi}_{(a)})$.

В следующей теореме мы опишем строение семейств из $\widetilde{\Sigma}_{(a)} \cap \widetilde{\Pi}_{(a)}$ для $a \in W_0^{**}$, но сначала докажем простое вспомогательное предложение. Если a, $b \in L_0$, b — номер рекурсивного линейного порядка с четностью $(\zeta; \preccurlyeq)$, то запись $b \sqsubset a$ по определению означает, что существует орф, изоморфно отображающая $(\zeta; \preccurlyeq)$ на некоторый собственный начальный сегмент порядка $(\xi; \preccurlyeq)$.

Предложение 2. *Для всякого* $a \in L_0$ *если* $A \in \widetilde{\Sigma}_{(a)}$, $\varnothing \in A$, *то найдется такое* $b \in L_0$, *что* $b \sqsubset a$, $A \in \widetilde{\Pi}_{(b)}$.

Доказательство. Пусть $\{B_x\}_{x\in\xi}$ — $\widetilde{\Sigma}_0^0$-вычислимая ξ-последовательность семейств, для которой $A = \bigcup\limits_{x\in\xi_i}\Big(B_x \setminus \bigcup\limits_{y<x} B_y\Big)$, $i \rightleftharpoons i(\xi)$. Поскольку $\varnothing \in A$, найдется такое $x \in \xi_i$, что $\varnothing \in B_x$. Но семейство B_x открыто, поэтому $B_x = \Pi$. Определим рекурсивный линейный порядок $(\eta; \preccurlyeq)$ следующим образом: $\eta \rightleftharpoons \{y \in \xi \mid y \prec x\}$, порядок $\preccurlyeq$ есть сужение на множество η порядка $\preccurlyeq$, имеющегося на ξ (очевидно, номер b порядка $(\eta; \preccurlyeq)$ находится эффективно по a и $b \sqsubset a$). Из $x \in \xi_i$ очевидно, что четность j порядка η противоположна четности порядка ξ, т. е. $j = \bar{i}$. Имеем

$$A = \bigcup_{y\in\eta_i}\Big(B_y \setminus \bigcup_{z<y} B_z\Big) \cup \Big(\Pi \setminus \bigcup_{y\in\eta} B_y\Big) =$$

$$= \bigcup_{y\in\eta_{\bar{j}}}\Big(B_y \setminus \bigcup_{z<y} B_z\Big) \cup \Big(\Pi \setminus \bigcup_{y\in\eta} B_y\Big) = P_\eta\{B_y\},$$

причем η-последовательность $\{B_y\}_{y\in\eta}$ является $\widetilde{\Sigma}_0^0$-вычислимой. Это и означает, что $A \in \widetilde{\Pi}_{(b)}$, $b \sqsubset a$. Предложение доказано.

В качестве очевидного следствия получаем следующее.

Теорема 2. $\widetilde{\Sigma}_{(a)} \cap \widetilde{\Pi}_{(a)} = \bigcup\limits_{b \sqsubset a} (\widetilde{\Sigma}_{(b)} \cup \widetilde{\Pi}_{(b)})$ *для любого* $a \in W_0^{**}$.

Действительно, включение $\bigcup\limits_{b=a} (\tilde{\Sigma}_{(b)} \cup \tilde{\Pi}_{(b)}) \subseteq \tilde{\Sigma}_{(a)} \cap \tilde{\Pi}_{(a)}$ установлено для более общего случая в п. 11°, § 1, так как, очевидно, $b = a \Rightarrow b \prec\prec\prec_0 a$ для любых a, $b \in L_0$. Пусть теперь $A \in \tilde{\Sigma}_{(a)} \cap \tilde{\Pi}_{(a)}$. Поскольку $a \in W_\bullet^{**}$, то и $\bar{A} \in \tilde{\Sigma}_{(a)} \cap \tilde{\Pi}_{(a)}$. Но очевидно, что либо $\varnothing \in A$, либо $\varnothing \in \bar{A}$. По предложению 2 в первом случае получаем $A \in \bigcup\limits_{b=a} \tilde{\Pi}_{(b)}$, а во втором — $\bar{A} \in \bigcup\limits_{b=a} \tilde{\Pi}_{(b)}$, т. е. $A \in \bigcup\limits_{b=a} \tilde{\Sigma}_{(b)}$. Теорема доказана.

Для иерархии Ершова выполняется важное равенство $\bigcup\limits_{a \in W_0} \Sigma_{(a)}^{-1} = \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$, причем на самом деле достаточно ограничиться такими $a \in W_0$, что $|a| = \omega$ [4]. Имеет ли место аналогичное равенство для иерархии $\tilde{\Sigma}_{(a)}$? Прежде чем ответить на этот вопрос, приведем одно простое вспомогательное предложение, дающее некоторое структурное свойство семейств из $\tilde{\Sigma}_{(a)}$ для $a \in W_0$.

Последовательность рпм $\{\alpha_n\}_{n \in N}$ назовем *цепью* для семейства рпм A, если $\alpha_n \subseteq \alpha_{n+1}$, $\alpha_{2n} \in A$, $\alpha_{2n+1} \in \bar{A}$ для любого $n \in N$.

Предложение 3. *Пусть* $(\xi; \preccurlyeq)$ — *произвольное вполне упорядоченное множество. Если семейство рпм A представимо в виде $S_\xi\{B_x\}$ для некоторой ξ-последовательности семейств рпм $\{B_x\}_{x \in \xi}$, причем $x \in \xi$, $\alpha \in B_x$, $\alpha \subseteq \beta$, $\beta \in \Pi \Rightarrow \beta \in B_x$, то A не имеет цепей.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $\{\alpha_n\}$ — цепь для семейства A. Так как $\alpha_0 \in A = \bigcup\limits_{x \in \xi_i} \Big(B_x \setminus \bigcup\limits_{y < x} B_y\Big)$ $(i = i(\xi))$, то $\alpha_0 \in B_{x_0}$ для некоторого $x_0 \in \xi_i$. Поскольку $\alpha_0 \subseteq \alpha_1$, то $\alpha_1 \in B_{x_0}$. Но $\alpha_1 \notin A$, поэтому должно существовать такое $x_1 \prec x_0$, что $\alpha_1 \in B_{x_1}$. Тогда и $\alpha_2 \in B_{x_1}$, так как $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$. Но $\alpha_2 \in A$, поэтому найдется такое $x_2 \preccurlyeq x_1$, $x_2 \in \xi_i$, что $\alpha_2 \in B_{x_2}$. Итак, свойства множеств α_0, α_1, α_2 позволили построить элементы x_0, $x_2 \in \xi_i$, $x_2 \prec x_0$. Поскольку цепь $\{\alpha_n\}$ бесконечна, то, продолжая это рассуждение, получим бесконечную последовательность $x_0 \succ x_2 \succ x_4 \succ \ldots$ элементов из ξ_i. Противоречие с полной упорядоченностью $(\xi; \preccurlyeq)$. Предложение доказано.

Следствие 3. *Семейства из* $\bigcup\limits_{a \in W_0} \tilde{\Sigma}_{(a)}$ *не имеют цепей.*

Теорема 3. $\bigcup\limits_{a \in W_0} \tilde{\Sigma}_{(a)} \subset \tilde{\Sigma}_1^0 \cap \tilde{\Pi}_1^0$.

Доказательство. Поскольку включение $\bigcup\limits_{a \in W_0} \tilde{\Sigma}_{(a)} \subseteq \tilde{\Sigma}_1^0 \cap \tilde{\Pi}_1^0$ уже доказано, обратимся к построению семейства рпм A такого, что $A \in (\tilde{\Sigma}_1^0 \cap \tilde{\Pi}_1^0) \setminus \Big(\bigcup\limits_{a \in W_0} \tilde{\Sigma}_{(a)}\Big)$.

Пусть σ — простое множество, т. е. рпм с бесконечным дополнением $\bar{\sigma} = \{c_0 < c_1 < \ldots\}$, не содержащим бесконечных рекурсивно перечислимых подмножеств. Положим $\alpha_n \rightleftharpoons \{c_k | k \leqslant n\}$ $(n \in N)$, $A \rightleftharpoons \{\alpha_{2n} | n \in N\}$. Поскольку, очевидно, последовательность $\{\alpha_n\}$ является цепью для A, то $A \notin \bigcup\limits_{a \in W_0} \tilde{\Sigma}_{(a)}$ по следствию 3. Остается проверить, что $A \in \tilde{\Sigma}_1^0 \cap \tilde{\Pi}_1^0$.

Из рекурсивной перечислимости множества σ следует, что $\delta^{-1}(A) \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$ (напомним, что δ — нумерация семейства Δ всех конечных множеств). Согласно замечанию 2 из § 2 отсюда следует $A \in \tilde{\Sigma}_1^0$. Пусть $B \rightleftharpoons \{\alpha \in \Pi | \alpha \subseteq \bar{\sigma}\}$, $C \rightleftharpoons \{\alpha \in \Pi | \alpha \nsubseteq \bar{\sigma}\}$. В силу простоты σ получаем $B \subseteq \Delta$, и поэтому $\bar{A} = C \cup (\Delta \setminus A)$. Но очевидно, что $C \in \tilde{\Sigma}_0^0$, а поскольку $\delta^{-1}(A) \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$, то $\delta^{-1}(\Delta \setminus A) = \overline{\delta^{-1}(A)} \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$ и $\Delta \setminus A \in \tilde{\Sigma}_2^0$ согласно замечанию 2 из § 2. Отсюда следует, что $\overline{A}\in\widetilde{\Sigma}_1^0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Автору кажется, что должно выполняться равенство $\bigcup_{a\in W_0^{**}}\widetilde{\Sigma}_{(a)}=\widetilde{\Sigma}_1^0\cap\widetilde{\Pi}_1^0$, но доказательство получить пока не удалось.

По любому $a\in L_0$ можно эффективно найти $a'\in L_0$, являющееся номером рекурсивного линейного порядка с четностью $(\xi';\ \preccurlyeq')$, получающегося из $(\xi;\ \preccurlyeq)$ «добавлением наибольшего элемента 0» (см. § 1; напомним, что g — орф, отображающая ξ на $\xi'\setminus\{0\}$). В [5] показано, что имеется естественная операция (m-скачок), позволяющая получить $\Sigma_{(a')}^{-1}$- универсальное (относительно m-сводимости) множество из $\Sigma_{(a)}^{1-}$ универсального. Аналогичное имеет место для иерархии $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$.

Предложение 4. *Пусть $a\in L_0$, A — такое семейство рпм, что к нему M-сводится любое семейство из $\widetilde{\Pi}_{(a)}$. Тогда любое семейство из $\widetilde{\Sigma}_{(a')}$ M-сводится к $U_0^j(A, X)$ для всех $j\leqslant 1$, $X\subseteq\Pi$.*

Доказательство. Пусть $B\in\widetilde{\Sigma}_{(a')}$ и $\{C_z\}_{z\in\xi'}$ — $\widetilde{\Sigma}_0^0$-вычислимая ξ'-последовательность, для которой $B=S_{\xi'}\{C_z\}$. Надо доказать, что $B\leqslant_M U_0^j(A, X)$. Из определения ξ' следует равенство

$$B=\bigcup_{x\in\xi_{\overline{i}}}\Big(C_{g(x)}\setminus\bigcup_{y<x}C_{g(y)}\Big)\cup\Big(C_0\setminus\bigcup_{x\in\xi}C_{g(x)}\Big)\ (i=i(\xi)=\overline{i(\xi')}).$$

Рассмотрим семейство

$$D\rightleftharpoons\bigcup_{x\in\xi_{\overline{i}}}\Big(C_{g(x)}\setminus\bigcup_{y<x}C_{g(y)}\Big)\cup\Big(\Pi\setminus\bigcup_{x\in\xi}C_{g(x)}\Big).$$

Очевидно, что $D\in\widetilde{\Pi}_{(a)}$, поэтому $D\leqslant_M A$. Пусть $\Phi:\mathbf{\Pi}\to\mathbf{\Pi}$ — морфизм, M-сводящий D к A, т. е. $\alpha\in D\Leftrightarrow\Phi(\alpha)\in A$ для всех $\alpha\in\Pi$. Определим морфизм $\Phi':\mathbf{\Pi}\to\mathbf{\Pi}$ так:

$$\Phi'(\alpha)\rightleftharpoons\begin{cases}\varnothing,\ \text{если}\ \alpha\notin\bigcup_{z\in\xi'}C_z,\\ \Psi_0^j\Phi(\alpha)\ \text{в противном случае}\end{cases}$$

(морфизм Ψ_0^j определен перед теоремой 1, § 2). Морфизм Φ' осуществляет M-сводимость B к $U_0^j(A, X)$. Действительно, если $\alpha\notin\bigcup_{z\in\xi'}C_z$, то $\alpha\notin B$ и $\Phi'(\alpha)=\varnothing\notin U_0^j(A, X)$. Если же $\alpha\in\bigcup_{z\in\xi'}C_z$, то из $g(x)\prec'0$ ($x\in\xi$) следует, что

$$\alpha\in B\Leftrightarrow\alpha\in D\Leftrightarrow\Phi(\alpha)\in A\Leftrightarrow\Phi'(\alpha)=\Psi_0^j\Phi(\alpha)\in U_0^j(A, X).$$

Предложение доказано.

Следствие 4. *Если $a\in W_0^{**}$, V_a — универсальное по M-сводимости семейство в $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$, $i=i(\xi)$, то семейства $V_{a'}$ и $U_0^i(V_a,\overline{V}_a)$, а также семейства $\overline{V_{a'}}$ и $U_1^i(\overline{V}_a, V_a)$ эквивалентны по отношению $\leqslant_M$.*

Действительно, следствие 2 показывает, что $U_0^i(V_a,\overline{V}_a)\in\widetilde{\Sigma}_{(a')}$, $U_1^i(\overline{V}_a, V_a)\in\widetilde{\Pi}_{(a')}$, а предложение 4 — что всякое семейство из $\widetilde{\Sigma}_{(a')}$ M-сводится к $U_0^i(V_a,\overline{V}_a)$.

Следствие 5. *Если $a\in W_0^{**}$, то $U_0^i\ (V_a,\overline{V}_a)\leqslant_M U_0^{\overline{i}}\ (V_a,\ \overline{V}_a)$ и $U_1^i(\overline{V}_a, V_a)\leqslant_M U_{\overline{i}}(\overline{V}_a, V_a)$.*

Следствие 5 вместе со свойством дискретности операций U_i^j по отношению к M-сводимости, установленным в [6, § 3], дает такое утверждение.

Следствие 6. *Пусть $a\in W_0^{**}$. Для любого $X\subseteq\Pi$ имеем:*

1) *если $V_a\leqslant_M X$ и $\overline{V}_a\leqslant_M X$, то либо $V_{a'}\leqslant_M X$, либо $\overline{V}_{a'}\leqslant_M X$;*

2) *если* $X \leqslant_M V_{a'}$ *и* $X \leqslant_M \overline{V}_{a'}$, *то либо* $X \leqslant_M V_a$, либо $X \leqslant_M \overline{V}_a$.

Классы $\widetilde{\Sigma}_{[a]}$, $\widetilde{\Pi}_{[a]}$ для $a \in \mathbf{O}$ ($\mathbf{O}$ — клиниевская система обозначений для ординалов) определяются по аналогии с классами $\Sigma^{-1}_{[a]}$, $\Pi^{-1}_{[a]}$ иерархии Ершова [4]. Определим индукцией по системе $\mathbf{O}$ последовательность семейств $\{S_a\}_{a \in \mathbf{O}}$:

1) если $a = 1$, то $S_a \rightleftharpoons \varnothing$;

2) если $a = 2^b$ и a четно в $\mathbf{O}$ (т. е. a четно в линейном порядке $\{x \in \mathbf{O} \mid x \leqslant_{\mathbf{O}} a\}$), то $S_a \rightleftarrows U^0_0(S_b, \overline{S}_b)$;

3) если $a = 2^b$ и a нечетно в $\mathbf{O}$, то $S_a \rightleftarrows U^1_0(S_b, \overline{S}_b)$;

4) если $a = 3 \cdot 5^e$, то $S_a \rightleftarrows U^0_0(\{S_b\}_{b <_{\mathbf{O}} a})$ («$b <_{\mathbf{O}} a$» означает «$b \in \mathbf{O}$, $b <_{\mathbf{O}} a$», $U^0_0(\{S_b\}_{b <_{\mathbf{O}} a})$ — сокращенное обозначение для семейства $U^0_0(A_0, A_1, \ldots)$, где A_x есть пустое семейство при $x \not<_{\mathbf{O}} a$ и семейство S_x при $x <_{\mathbf{O}} a$).

Следующее предложение является уточнением одного результата из [6, § 5] о связи операций U^j_i с операцией m-скачка. Напомним, что в [5] определена $\mathbf{O}$-последовательность множеств $\{\Xi_a\}_{a \in \mathbf{O}}$ такая, что Ξ_a m-универсально в $\Sigma^{-1}_{[a]}$ для любого $a \in \mathbf{O}$. Приведем это определение (с модификацией при $a = 1$):

1) если $a = 1$, то $\Xi_a \rightleftharpoons \varnothing$;

2) если $a = 2^b$, то $\Xi_a \rightleftharpoons \mathrm{mj}(\Xi_b)$;

3) если $a = 3 \cdot 5^e$, то $\Xi_a \rightleftarrows \{\langle b, x \rangle \mid b <_{\mathbf{O}} a \wedge x \in \Xi_b\}^{\mathrm{pm}}$.

Предложение 5. *Для всякого* $a \in \mathbf{O}$ *множества* Ξ_a *и* $\pi^{-1}(S_a)$ *рекурсивно изоморфны.*

Доказательство. Из следствия 2 вытекает, что $S_a \in \widetilde{\Sigma}_{[a]}$ для всякого $a \in \mathbf{O}$. Отсюда получаем $\pi^{-1}(S_a) \in \Sigma^{-1}_{[a]}$ по предложению 1, поэтому $\pi^{-1}(S_a) \leqslant_m \Xi_a$. Соотношение $\Xi_a \leqslant_m \pi^{-1}(S_a)$ докажем индукцией по $a \in \mathbf{O}$.

Для $a = 0$ утверждение очевидно, так как $S_a = \varnothing$, $\Xi_a = \varnothing$.

Пусть $a = 2^b$ и соотношение $\Xi_b \leqslant_m \pi^{-1}(S_b)$ уже установлено. Свойство 6) из [6, § 5] показывает, что $\mathrm{mj}(\pi^{-1}(S_b)) \leqslant_m \pi^{-1}(U^j_0(S_b, \overline{S}_b))$ для любого $j \leqslant 1$, откуда получаем

$$\Xi_a = \mathrm{mj}(\Xi_b) \leqslant_m \mathrm{mj}(\pi^{-1}(S_b)) \leqslant_m \pi^{-1}(S_a).$$

Пусть, наконец, $a = 3 \cdot 5^e$. По индукции считаем, что существует вычислимая последовательность орф $\{g_b\}_{b <_{\mathbf{O}} a}$ такая, что g_b осуществляет m-сводимость Ξ_b к $\pi^{-1}(S_b)$ для любого $b <_{\mathbf{O}} a$. Пусть f — любая орф, удовлетворяющая для всех $y \in N$, $y = \langle t, z \rangle$ соотношению:

$$\pi_{f(y)} = \begin{cases} \varnothing, \text{ если } t \notin \operatorname{dom} \varkappa_z \text{ или } t \in \operatorname{dom} \varkappa_z \wedge \varkappa_z(t) \notin \{\langle b, x \rangle \mid b <_{\mathbf{O}} a \wedge x \in N\}; \\ \Psi'_b(\pi g_b(x)) \text{ в противном случае, где } b <_{\mathbf{O}} a \text{ и } x \in N \text{ таковы,} \\ \qquad \text{что } \varkappa_z(t) = \langle b, x \rangle \end{cases}$$

(здесь $\varkappa$ — нумерация Клини, Ψ'_b — морфизм из определения операций U^j_i перед теоремой 1, § 2). Утверждаем, что f осуществляет m-сводимость множества Ξ_a к $\pi^{-1}(S_a)$. Действительно, если выполняется условие из первой строчки определения $\pi_{f(y)}$, то $y \notin \Xi_a$ по определению Ξ_a и операции pm-цилиндрификации, и $\pi_{f(y)} = \varnothing \notin U^0_0(\{S_b\}_{b <_{\mathbf{O}} a}) = S_a$, т. е. $y \notin \Xi_a$ и $f(y) \notin \pi^{-1}(S_a)$. Если же выполняется условие второй строчки определения $\pi_{f(y)}$, то имеем $y \in \Xi_a \Leftrightarrow x \in \Xi_b \Leftrightarrow g_b(x) \in \pi^{-1}(S_b) \Leftrightarrow \pi g_b(x) \in S_b \Leftrightarrow \pi_{f(y)} = \Psi'_b(\pi g_b(x)) \in U^0_0(\{S_b\}_{b <_{\mathbf{O}} a}) = S_a \Leftrightarrow f(y) \in \pi^{-1}(S_a)$. Предложение доказано.

Следствие 7. *Пусть* $a \in O$, V_a — *универсальное по M-сводимости семейство в* $\Sigma_{[a]}$. *Тогда множество* $\pi^{-1}(V_a)$ *универсально по m-сводимости в* $\Sigma_{[a]}^{-1}$.

Действительно, $\pi^{-1}(V_a) \in \Sigma_{[a]}^{-1}$ по предложению 1, и m-универсальное в $\Sigma_{[a]}^{-1}$ множество Ξ_a m-сводится к $\pi^{-1}(V_a)$, ибо $\Xi_a \leqslant_m \pi^{-1}(S_a)$ и $S_a \leqslant_M V_a \Rightarrow \pi^{-1}(S_a) \leqslant_m \pi^{-1}(V_a)$.

Из следствия 5, теоремы 1 из [6, § 3] и свойства 6) из [6, § 5] вытекает следующее утверждение, являющееся распространением одного из утверждений основного результата работы [9].

Следствие 8. *Пусть* V_a — *M-универсальное семейство в* $\tilde{\Sigma}_{[a]}$ $(a \in O)$, V_{2a} — *M-универсальное семейство в* $\tilde{\Sigma}_{[2^a]}$. *Тогда для всякого* $X \subseteq \Pi$ имеем:

1) *если* $\pi^{-1}(V_a) \leqslant_m \pi^{-1}(X)$ и $\overline{\pi^{-1}(V_a)} \leqslant_m \pi^{-1}(X)$, *то либо* $\pi^{-1}(V_{2^a}) \leqslant_m \pi^{-1}(X)$, *либо* $\overline{\pi^{-1}(V_{2^a})} \leqslant_m \pi^{-1}(X)$;

2) *если* $\pi^{-1}(X) \leqslant_m \pi^{-1}(V_{2^a})$ *и* $\pi^{-1}(X) \leqslant_m \overline{\pi^{-1}(V_{2^a})}$, *то либо* $\pi^{-1}(X) \leqslant_m \pi^{-1}(V_a)$, *либо* $\pi^{-1}(X) \leqslant_m \overline{\pi^{-1}(V_a)}$.

Замечание 2. Следствие 4 показывает, что если $a \in O$ есть обозначение конечного ординала, т. е. $|a|_O < \omega$, то семейство S_a M-универсально в $\tilde{\Sigma}_{[a]}$. Однако можно показать, что S_a не является M-универсальным в $\tilde{\Sigma}_{[a]}$ при $|a|_O \geqslant \omega$.

В заключение сделаем несколько замечаний о малой иерархии семейств рпм по конечным ординалам, классы которой, следуя [3], будем обозначать так: $\tilde{\Sigma}_n^{-1}$, $\tilde{\Pi}_n^{-1}$ $(n \in N)$. Очевидно, $\tilde{\Sigma}_0^{-1} = \{\varnothing\}$, $\tilde{\Sigma}_{2n+1}^{-1}$ есть класс всех семейств рпм, представимых в виде $A_0 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots, \cup (A_{2n} \setminus A_{2n-1})$ для некоторой $2n+1$-последовательности $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{2n}$ эффективно открытых семейств, $\tilde{\Sigma}_{2n+2}^{-1}$ есть класс всех семейств, представимых в виде $(A_1 \setminus A_0) \cup \ldots \cup (A_{2n+1} \setminus A_{2n})$ для некоторой $2n+2$-последовательности $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{2n+1}$ эффективно открытых семейств, $\tilde{\Pi}_n^{-1}$ есть класс всех дополнений до семейств из $\tilde{\Sigma}_n^{-1}$. Очевидно, $\bigcup_{n \in N} \tilde{\Sigma}_n^{-1}$ есть булева алгебра, порожденная классом всех эффективно открытых семейств. Через Σ_n^{-1} $(n \in N)$ обозначаем классы «конечной» иерархии Ершова, получающейся по этой же схеме из семейства множеств Π (единственное отличие от описания в [3] состоит в классе Σ_0^{-1}).

Следующее утверждение до некоторой степени двойственно предложению 2.

Предложение 6. *Пусть* $A \subseteq \Pi$, $N \in A$. *Тогда для всякого* $n \in N$ *из* $A \in \tilde{\Sigma}_{2n+2}^{-1}$ *следует* $A \in \tilde{\Sigma}_{2n+1}^{-1}$ *и из* $A \in \tilde{\Pi}_{2n+1}^{-1}$ *следует* $A \in \tilde{\Pi}_{2n}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $A \in \tilde{\Sigma}_{2n+2}^{-1}$. По определению $\tilde{\Sigma}_{2n+2}^{-1}$, $A = (B_1 \setminus B_0) \cup \ldots \cup (B_{2n+1} \setminus B_{2n})$ для некоторой последовательности $B_0 \subseteq \ldots \subseteq B_{2n+1}$ эффективно открытых семейств. По условию, $N \in A$. Очевидно, это может быть лишь в случае $N \notin B_0$. Поскольку B_0 открыто, отсюда следует $B_0 = \varnothing$. Получили, что $A = C_0 \cup (C_2 \setminus C_1) \cup \ldots \cup (C_{2n} \setminus C_{2n-1})$, где $C_k \rightleftharpoons B_{k+1}$, т. е. $A \in \tilde{\Sigma}_{2n+1}^{-1}$. Случай $A \in \tilde{\Pi}_{2n+1}^{-1}$ рассматривается аналогично. Предложение доказано.

Из предложений 2 и 6 вытекает такое утверждение, параллельное теореме 5 из [9].

Следствие 9. *Для любых* $A \subseteq \Pi$, $n \in N$ *имеем*:

1) *если* $A \in \tilde{\Sigma}_n^{-1} \setminus \tilde{\Pi}_{n-1}^{1}$ *то* $\varnothing \notin A$.

2) *если* $A \in (\tilde{\Sigma}_{2n+2}^{-1} \setminus \tilde{\Sigma}_{2n+1}^{-1}) \cup (\tilde{\Pi}_{2n+1}^{-1} \setminus \tilde{\Pi}_{2n}^{-1})$, *то* $N \notin A$.

Замечание 3. Пусть V_n — M-универсальное семейство в $\tilde{\Sigma}_n^{-1}$ $(n \in N)$. Легко понять, что M-степени семейств $\{V_n, \overline{V}_n | n \leqslant 2\}$ образуют начальный сегмент в частично упорядоченном множестве всех M-степеней. Из доказательства предложения 1 из [10] следует, что для $n = 3$ это не так: имеется бесконечно много M-степеней, сводящихся к M-степени семейства V_3.

Замечание 4. Естественно поставить вопрос о связи между классами $\widetilde{\Sigma}_n^{-1}$ и $\widehat{\Sigma}_n^{-1} \rightleftharpoons \{X \subseteq \Pi | \pi^{-1}(X) \in \Sigma_n^{-1}\}$ $(n \in N)$. Если для иерархии $\widetilde{\Sigma}_n^0$ имеется тесная связь между классами $\widetilde{\Sigma}_n^0$ и $\widehat{\Sigma}_{n+1}^0$, то в данном случае связь очень слабая: в теореме 6 из [7] доказано, что $\widehat{\Sigma}_2^{-1} \not\subseteq \bigcup_{n \in N} \widetilde{\Sigma}_n^{-1}$.

§ 4

Тривиально проверяется, что все результаты этой статьи, полученные для нумерованного множества **П**, справедливы также и для нумерованного множества **К** (доказательства почти дословно совпадают с приведенными, а некоторые утверждения из § 3 доказываются даже проще). Вообще, кажется правдоподобным, что полученные результаты справедливы для некоторого класса нумерованных множеств, описываемого в теоретико-нумерационных терминах.

Мы рассматривали семейства рпм, однако можно было рассматривать произвольные подсемейства семейства $\mathscr{P}(N)$. Определения даются с очевидными изменениями (так, «$\alpha \in \Pi$» во всех определениях надо заменить на «$\alpha \subseteq N$»). Например, класс $\mathscr{D}^*$ базисных открытых семейств состоит из всех семейств вида $D_\gamma^* \rightleftharpoons \{\alpha \subseteq N \mid \gamma \subseteq \alpha\}$, где $\gamma \in \Delta$. Применив к этому классу $\mathscr{D}^*$ схемы из § 1, получим некоторые иерархии семейств множеств Σ_n^*, Π_n^*, $\Sigma_{(a)}^*, \Pi_{(a)}^*$ $(n \in N,\ a \in L_0)$. При этом, очевидно, $\widetilde{\Sigma}_n^0 = \Sigma_n^* \cap$ $\cap\, \Pi$, $\widetilde{\Sigma}_{(a)} = \Sigma_{(a)}^* \cap \Pi$. Результаты статьи, касающиеся свойств иерархий $\widetilde{\Sigma}_n^0$, $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$, справедливы и для этих расширенных иерархий (доказательства получаются очевидными модификациями приведенных, при этом надо учесть замечания из конца § 3 [6]).

Быть может, представляет интерес изучение семейств из $\widetilde{\Sigma}_n^0 \cap \widetilde{\Pi}_n^0$ $(n \geqslant 2)$ посредством построения малой иерархии, возникающей из класса $\widetilde{\Sigma}_{n-1}^0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Роджерс X.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
2. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
3. **Ершов Ю. Л.** Об одной иерархии множеств I.— Алгебра и логика, 1968, т. 7, № 1, с. 47—73.
4. **Ершов Ю. Л.** Об одной иерархии множеств II.— Алгебра и логика, 1968, т. 7, № 4, с. 15—47.
5. **Ершов Ю. Л.** Об одной иерархии множеств III.— Алгебра и логика, 1970, т. 9, № 1, с. 34—51.
6. **Селиванов В. Л.** О структуре степеней неразрешимости индексных множеств.— Алгебра и логика, 1979, т. 18, № 4, с. 463—480.
7. **Селиванов В. Л.** Несколько замечаний о классах рекурсивно перечислимых множеств.— Сиб. мат. журн., 1978, т. 13, № 1, с. 153—160.
8. **Ишмухаметов Ш. Т., Кузьмина Т. М.** О семействах рекурсивно перечислимых множеств.— В кн.: Материалы V Всесоюз. конференции по математической логике. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1979, с. 57.
9. **Hay L.** A discrete chain of degrees of index sets.— J. Symbolic Logic, 1972, v. 37, N 1, p. 139—144.
10. **Селиванов В. Л.** Об индексных множествах вычислимых классов конечных множеств.— В кн.: Алгоритмы и автоматы. Казань: Казанский ун-т, 1978. с. 95—99.