ЧАСТЬ I

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ. ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ РАЗНОРАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЕЛИЧИН С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ МОМЕНТАМИ

А. И. САХАНЕНКО

1. Введение и основная теорема

Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих нормальные распределения, по которой требуется построить последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с заранее выбранными распределениями, причем таким образом, чтобы величина

$$\Delta = \Delta_n \equiv \max_{m \leqslant n} \left| \sum_{j \leqslant m} \xi_j - \sum_{j \leqslant m} \eta_j \right|$$

была бы как можно меньше.

Решение этой задачи представляет собой основную трудность при получении оценок как в принципе инвариантности Донскера — Прохорова, когда скорость сходимости Δ_n к нулю оценивается числом ε_n, для которого $\mathbf{P}(\Delta_n > \varepsilon_n) \leqslant \varepsilon_n$ (см., например, [1—3]), так и в принципе инвариантности Штрассена, где эта скорость характеризуется последовательностью δ_n, для которой $\Delta_n/\delta_n \to 0$ п. н. (см. [4—6]). Поэтому, следуя работам [5, 6], мы и займемся получением оценок для Δ_n. При этом, конечно, будем предполагать, что заданные распределения величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ удовлетворяют условию

$$\mathbf{M}\xi_j = \mathbf{M}\eta_j = 0, \ \mathbf{D}\xi_j = \mathbf{D}\eta_j > 0 \qquad \forall j. \tag{1}$$

Для величины $\mathbf{P}(\Delta > x)$ несложно построить оценки снизу (см. [3, 7, 8]), показывающие, что (по крайней мере для правильно меняющихся функций распределения) $\mathbf{P}(\Delta > x)$ при $x \to \infty$ убывает не медленнее, чем $\mathbf{P}(\max_j |\xi_i| > x) \sim \sum_j \mathbf{P}(|\xi_j| > x)$. В случае одинаково распределенных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ Дж. Комлошем, П. Майором и Г. Тушнади [6] были получены оценки сверху для $\mathbf{P}(\Delta_n > x)$, имеющие таким образом правильный порядок зависимости от n и x. В частности, если

$$\mathbf{M} \exp(t\xi) < \infty \ \text{ при } \ |t| \leqslant t_0, \ t_0 > 0, \tag{2}$$

то (см. [6]) $\xi_1, \ldots, \xi_n$ можно задать на одном вероятностном пространстве с $\eta_1, \ldots, \eta_n$ таким образом, что

$$\mathbf{P}(\Delta_n > x) \leqslant C(\mathcal{F})\, n^{K(\mathcal{F})} e^{-c(\mathcal{F})x}, \tag{3}$$

где константы $C(\mathcal{F}) < \infty$, $K(\mathcal{F}) < \infty$ и $c(\mathcal{F}) > 0$ зависят только от общего распределения $\mathcal{F}$ величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Однако используемый в [5, 6] метод одного вероятностного пространства непосредственно не переносится на случай разнораспределенных слагаемых, так как требует от распределений величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ выполнения хотя бы одного из двух следующих условий: либо $\xi_1, \ldots, \xi_n$ должны иметь достаточно гладкие (или решетчатые) распределения, либо эти величины должны быть одинаково распределены. Известные же ранее методы Прохорова [1] и Скорохода [9] применимы и для разнораспределенных слагаемых, но оценки, даваемые ими при наличии у величин $\{\xi_j\}$ моментов большого порядка, качественно хуже оценок Комлоша — Майора — Тушнади.

В данной работе предлагается еще один способ построения величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Главное его отличие от метода Комлоша — Майора — Тушнади состоит в появлении специальным образом организованного сглаживания, что значительно усложняет задачу, но позволяет получать хорошие оценки и в случае разнораспределенных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Если выполнено условие* (1) *и при некотором* $\lambda > 0$ *справедливы неравенства*

$$\lambda \mathbf{M}|\xi_j|^3 \exp(\lambda|\xi_j|) \leqslant \mathbf{D}\xi_j \qquad \forall j, \tag{4}$$

то требуемые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *можно построить по* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *таким образом, что*

$$\mathbf{M}e^{c\lambda\Delta} \leqslant 1 + \lambda B, \tag{5}$$

где $c > 0$ — *некоторая абсолютная постоянная, а* $B^2 = \sum_{j \leqslant n} \mathbf{D}\xi_j$.

Оценка Комлоша — Майора — Тушнади (3) следует из (5) при $B^2 = n\mathbf{D}\xi_1$, так как условия (2) и (4) эквивалентны.

Отметим, что примененная в теореме 1 характеристика $B^{-1} \max_j (\mathbf{M}|\xi_j|^3 \exp(\lambda|\xi_j|))/\mathbf{D}\xi_j$ представляет собой очень простую мажоранту отношения Ляпунова для сопряженных распределений. А это отношение появится с необходимостью, поскольку нам потребуются оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме (для квантилей условных распределений) с учетом больших уклонений.

Подчеркнем, что в оценке (5) в отличие от (3) указана явная зависимость используемых характеристик от распределений величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Поэтому мы можем применять (подбирая λ в (4)) это неравенство для срезок произвольных случайных величин, чтобы получить оценки в принципе инвариантности и когда нет экспоненциальных моментов. В частности, справедливо неравенство

$$\mathbf{M}\Delta^s \leqslant C(s) \sum_{j \leqslant n} \mathbf{M}|\xi_j|^s,$$

где константа $C(s)$ зависит только от s, которое будет доказано в другой работе автора.

Доказательству теоремы 1 и описанию используемого при этом построения величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ посвящен раздел 3. Но для этого доказательства необходимы оценки для квантилей условных распределений сумм разнораспределенных слагаемых, причем оценки на порядок точнее используемых для одинаково распределенных величин в более простом методе Комлоша — Майора — Тушнади. Необходимость иметь такие оценки перенесла основную тяжесть доказательства в раздел 2, где соответствующие результаты и получены. Отметим, что теорема 3 этого раздела, содержащая новую оценку в локальной предельной теореме для плотностей, представляет самостоятельный интерес.

Работа, таким образом, состоит из трех разделов, первым из которых является введение. Второй и третий разделы делятся на пункты, имеющие двойную нумерацию, первая цифра в которой означает номер раздела. Нумерация теорем и замечаний в работе сквозная; кроме того, в каждом пункте имеется своя нумерация лемм и формул. При ссылках на леммы и формулы данного пункта (а таких ссылок подавляющее большинство) мы будем использовать одинарную нумерацию, а при упоминании соответствующих утверждений из другого пункта данного раздела — двойную, в которой первая цифра означает номер этого пункта. Кроме того, в разделе 3 имеется несколько ссылок на леммы из раздела 2, в которых, естественно, используется тройная нумерация. Конец доказательства лемм отмечает знак $\square$.

Условимся, что символ O используется только, когда соответствующая постоянная является абсолютной, а символ θ может заменять любую величину, по модулю не превосходящую 1. Далее, $C_1, C_2, \ldots$ — некоторые положительные абсолютные постоянные, но в разных пунктах C_i может обозначать различные величины. Символы $C<\infty$ и $c>0$ заменяют любые абсолютные постоянные, сохраняя свое фиксированное значение лишь в пределах нескольких абзацев. Через $\Phi(x)$ и $\varphi(x) = 2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$ обозначены функция распределения и плотность стандартного нормального распределения.

2. Оценки для плотностей и квантилей гладких распределений

2.1. Основные результаты

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющих при некотором $R\neq 0$ условию

$$\mathbf{M}\xi_j=0,\ \mathbf{M}|\xi_j|^4\exp(R\xi_j)<\infty \quad \forall j. \tag{1}$$

Пусть $S=\xi_1+\ldots+\xi_m$, причем

$$0<\mathbf{D}S\equiv B^2<\infty. \tag{2}$$

Ясно, что второе неравенство в (1) при $h\neq R$ совпадает с условием Крамера: $\mathbf{M}\exp(h\xi_j)<\infty$ для всех j и h, принадлежащих интервалу, содержащему 0 и R, т. е. при

$$0\leqslant h/R\leqslant 1. \tag{3}$$

Отказ от предположения $B=1$ в (2) не увеличивает, конечно, общности, но оно оказывается очень обременительным в п. 2.9. Условимся, что далее всюду параметр h удовлетворяет условию (3), а суммы берутся по j, пробегающему значения от 1 до m.

Введем в рассмотрение последовательность независимых случайных величин $\xi_1(h), \ldots, \xi_m(h)$, имеющих «сопряженные» распределения (или распределения, являющиеся преобразованием Крамера распределений величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$), т. е. имеющих при $\xi=\xi_j$ функции распределения

$$\mathbf{P}(\xi(h)<x)=\int\limits_{z<x}e^{hz}d\mathbf{P}(\xi<z)/\mathbf{M}e^{h\xi}. \tag{4}$$

Не уменьшая общности, будем далее предполагать, что $\xi_j(0)=\xi_j$. Используя обозначение $\xi_{j,h}=\xi_j(h)-\mathbf{M}\xi_j(h)$, положим

$$S(h)=\Sigma\xi_j,\quad A(h)=\mathbf{M}S(h),$$
$$B^2(h)=\mathbf{D}S(h),\quad \Gamma(h)=\Sigma\mathbf{M}(\xi_{j,h})^3,$$
$$L^*(h)=B^{-3}(h)\sum\mathbf{M}|\xi_{j,h}|^3,\quad L(R)=\max_{0\leqslant h/R\leqslant 1}\sum\mathbf{M}|\xi_{j,h}|^3,$$
$$K^*(h)=B^{-4}(h)\sum\mathbf{M}|\xi_{j,h}|^4,\quad K(R)=\max_{0\leqslant h/R\leqslant 1}\sum\mathbf{M}|\xi_{j,h}|^4.$$

Так как $L^*(h)$ и $K^*(h)$ являются отношениями Ляпунова третьего и четвертого порядков, то (см. [10], с. 137)

$$B^{-6}(h)\Gamma^2(h)\leqslant(L^*(h))^2\leqslant K^*(h). \tag{5}$$

Пусть теперь $\Lambda(h)\equiv\ln\mathbf{M}e^{hS}$ — производящая функция кумулянтов. В силу свойств последних мы на интервале (3), очевидно, имеем

$$\Lambda'(h)=A(h),\ \Lambda''(h)=B^2(h)>0,\ \Lambda'''(h)=\Gamma(h), \tag{6}$$

$$\Lambda(0)=A(0)=0,\ B(0)=B,\ \Gamma(0)=\mathbf{M}S^3=\Gamma, \tag{7}$$

$$\Lambda^{\mathrm{IV}}(h)=\Sigma[\mathbf{M}(\xi_{j,h})^4-3\mathbf{D}^2\xi_{j,h}]. \tag{8}$$

Из (6) немедленно вытекает, что для h, удовлетворяющих (3), верна оценка

$$|\Lambda'''(h)|\leqslant L(h)\leqslant L(R), \tag{9}$$

а из (8) и неравенства $\mathbf{D}^2\xi_{j,h}=\mathbf{M}^2(\xi_{j,h})^2\leqslant\mathbf{M}(\xi_{j,h})^4$ при указанных h имеем

$$|\Lambda^{\mathrm{IV}}(h)|\leqslant 2K(h)\leqslant 2K(R). \tag{10}$$

Так как $L(R)$ и $K(R)$ будут использоваться ниже как удобные характеристики, позволяющие одновременно оценивать как отношения Ляпунова $L^*(R)$ и $K^*(R)$, так и производные функции $\Lambda(h)$, а также (см. формулу (15)) функций $\lambda(x)$ и $\beta(x)$, то уместно привести следующие полезные оценки:

$$L(R) \leqslant 8 \sum \mathbf{M} |\xi_j|^3 \max\{\exp R\xi_j, 1\}, \tag{11}$$

$$K(R) \leqslant 16 \sum \mathbf{M} |\xi_j|^4 \max\{\exp R\xi_j, 1\}, \tag{12}$$

которые доказываются в лемме 6.1. (На самом деле, имеются с другими константами и обратные неравенства, но только в случае, когда нет «выдающихся» слагаемых, т. е. когда $R^2 \max\limits_{j,h} \mathbf{D}\xi_j(h) = O(1)$.)

Обозначим

$$f(t, h) = \mathbf{M}e^{(h+it)S}/\mathbf{M}e^{hS}, \quad T(h) = 1/(4L^*(h)B(h)),$$

$$U^*(h) = B(h) \int\limits_{|t| \geqslant T(h)} |f(t, h)|\, dt, \quad U(R) = \max_{|h| \leqslant |R|} \int\limits_{|t| \geqslant T(h)} |f(t, h)|\, dt.$$

Отметим (см. [10], с. 272), что в силу независимости величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$ величина $S(h)$ сама имеет сопряженное распределение (т. е. справедливо (4) при $\xi = S$), а, следовательно, $f(t, h)$ является характеристической функцией случайной величины $S(h)$. Из формулы обращения для характеристических функций вытекает, что конечность при некотором h функции $U^*(h)$ гарантирует нам существование ограниченной плотности распределения $p(x, h)$ случайной величины $S(h)$. А из (4) при $\xi = S$ следует, что в этом случае

$$p(x) = e^{\Lambda(h) - hx} p(x, h), \tag{13}$$

где $p(x) = p(x, 0)$ — плотность распределения случайной величины S.

Если теперь мы будем получать оценки для плотности $p(x)$, используя (13), и оценки в локальной предельной теореме для плотности $p(x, h)$, то наилучшей точности достигнем, если положим $h = H(x)$ в (13), где $H(x)$ является решением уравнения

$$A(H(x)) = x. \tag{14}$$

Положим

$$\lambda(x) = xH(x) - \Lambda(H(x)), \quad \beta(x) = \ln B(H(x)). \tag{15}$$

Теорема 2. *Если $H(x)$ удовлетворяет условию*

$$0 \leqslant H(x)/R \leqslant 1, \tag{16}$$

то справедливы соотношения

$$p(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\lambda(x) - \beta(x)} (1 + \theta \delta_L(x)), \tag{17}$$

$$p(x + z) \leqslant (2\pi)^{-1/2} e^{-\lambda(x) - \beta(x) - zH(x)} (1 + \delta_L(x)), \tag{18}$$

где

$$\delta_L(x) = (2/5) U^*(H(x)) + 6L^*(H(x)). \tag{19}$$

А если выполнено условие

$$2|R| L(R) \leqslant B^2, \tag{20}$$

то для x, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant x/R \leqslant (2/3)B^2, \tag{21}$$

справедливы соотношения (16)—(18) *и, кроме того, верны следующие оценки:*

$$3/4 \leqslant H(x)/(xB^{-2}) \leqslant 3/2, \quad x \neq 0, \tag{22}$$

$$1/2 \leqslant B^2(H(x))/B^2 \leqslant 2, \tag{23}$$

$$\lambda(x) = (x/B)^2/2 + \theta x^3 L(R) B^{-6}, \tag{24}$$

$$\beta(x) - \ln B = 2\theta |x| L(R) B^{-4}, \tag{25}$$

$$\delta_L(x) \leqslant BU(R) + 15B^{-3}L(R). \tag{26}$$

Еще более точные оценки дает, как правило,

Теорема 3. *Если x удовлетворяет условию* (16), *то справедливо равенство*

$$p(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\lambda(x)-\beta(x)} (1 + \theta\delta_K(x)), \tag{27}$$

где

$$\delta_K(x) = (2/5) U^*(H(x)) + 12K^*(H(x)). \tag{28}$$

А если выполнено условие

$$4R^2 K(R) \leqslant B^2, \tag{29}$$

то верны соотношения (16)—(18) *и* (26), *а при x, удовлетворяющих* (20), *справедливы также оценки* (21)—(25) *и*

$$\lambda(x) = (x/B)^2/2 - (x/B)^3(\Gamma/B)^3/6 + 2\theta x^4 K(R)/B^8, \tag{30}$$

$$\beta(x) - \ln B = (x/B)(\Gamma/B^3)/2 + 4\theta x^2 K(R) B^{-6}, \tag{31}$$

$$\delta_K(x) \leqslant BU(R) + 32B^{-4}K(R), \tag{32}$$

$$\delta_L(x) \leqslant BU(R) + 10(B^{-4}K(R))^{1/2}. \tag{33}$$

Соотношения (17)—(19) и (27)—(28) будут доказаны в п. 2.2, а остальные утверждения теорем 2 и 3 — в п. 2.3.

Отметим, что для повышения при фиксированном x точности оценок в теоремах 2—5 мы должны положить $R = (3/2)x$ в теоремах 2 и 3, $R = 2x$ в теореме 4 и $R = 8x$ в теореме 5.

Выбор константы 4 в условии (29) (и 2 в условии (20)) является во многом произвольным и продиктован желанием получить «приличную» константу 2/3 в (21). Ясно, что если константу в (29) заменим на бóльшую (т. е. сделаем это условие более жестким), то мы расширим области x, для которых верны теоремы 2—5 (т. е. в частности, увеличим константу 2/3 в (21) на некоторую $2/3 < c < 1$).

Замечание 1. Предположим, что для последовательности $\{\xi_j\}$ выполнены только следующие условия:

$$\mathbf{M}\xi_j = 0, \ \ \mathbf{M} \exp(\pm R_0 \xi_j) \leqslant R_1 < \infty \quad \forall j, \ \ R_0 > 0, \tag{34}$$

$$B^2 \geqslant \delta m, \ \ \delta > 0, \tag{35}$$

$$U(R_0) \leqslant R_2/m, \ \ R_2 < \infty. \tag{36}$$

В этом случае в силу неравенства $x \leqslant e^x + e^{-x}$ мы получаем, что

$$h^k \mathbf{M} |\xi_j|^k e^{\pm h\xi} \leqslant \mathbf{M} e^{(k+1)h\xi} + \mathbf{M}^{-(k+1)h\xi} \text{ при } h = R_0/(k+1).$$

Из этого соотношения, из (11), (12) и (34) вытекают неравенства:

$$L(R) \leqslant 2 \cdot 8 \cdot 4^3 R_1 (R_0)^{-3} m \leqslant \delta m R_3/2, \tag{37}$$

$$K(R) \leqslant 2 \cdot 16 \cdot 5^4 R_1 (R_0)^{-4} m \leqslant \delta m R_4/4, \tag{38}$$

$$B^2 = \Sigma \mathbf{M}(\xi_j)^2 \leqslant 2 \cdot 3^2 \cdot R_1 (R_0)^{-2} m. \tag{39}$$

Из (35) и (37) следует выполнение условия (20) теорем 2 и 3 для $R = \pm 1/R_3$, а, следовательно, при

$$|x| \leqslant (2/3) R\delta m \tag{40}$$

верны все утверждения теоремы 2. В частности, подставляя (35), (36), (37) и (39) в (26) и (25), мы из (17) получаем оценку вида

$$p(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\lambda(x)} (1 + \theta R_5 (1 + |xm^{-1/2}|) m^{-1/2}) \tag{41}$$

при x, удовлетворяющих (40). Так как условия (35) и (36) совпадают с условиями 2 и 3 в [11], а (34) слабее условия 1 этой работы, то теорема 3 в [11] является частным случаем нашей теоремы 2, причем константы R_4 и R_5 в (40) и (41) нетрудно выразить через R_0, R_1, R_2 и δ при использовании теоремы 2.

Тот факт, что утверждение вида (41) верно при ограничении вида (40) (т. е. при $|x| \leqslant R_0(\{\xi_j\})$ вместо $x = o(m)$, как предполагалось в [11], отмечен в [5].

Заметим, что, предполагая вместо (36) справедливым чуть более жесткое условие:

$$U(R_0) \leqslant R_7/m^{3/2}, \ R_7 < \infty, \tag{42}$$

и учитывая (38) и (39), мы получаем, что если верны условия (34), (35) и (42), то выполнены все предположения теоремы 3 для $R = \pm(1/R_4)^{1/2}$, и, в частности, (27) можно переписать в виде

$$p(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\lambda(x)-\beta(x)}(1 + \theta R_8/m) \tag{43}$$

при $|x| \leqslant (2/3)\delta Rm$.

Отметим, что, как следует из доказательства (см. леммы 2.2 и 2.3), повышение точности в (43) по сравнению с (41) достигается за счет использования для сопряженных распределений следующей оценки в локальной предельной теореме:

$$p(0) = \varphi(0) + \theta R_9 m^{-1}$$

вместо

$$p(x) = \varphi(x) + \theta R_{10} m^{-1/2}.$$

Замечание 2. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющая следующим условиям: $\mathbf{M}\xi = 0$, $0 < \mathbf{D}\xi < \infty$ и

$$\int\limits_{|t|<\infty} |\mathbf{M}e^{(h+it)}|^{k(\mathscr{F})}\,dt < C_1(\mathscr{F}) \quad \text{при} \quad |h| \leqslant c_0(\mathscr{F}), \tag{44}$$

где $k(\mathscr{F}) > 0$, $c_0(\mathscr{F}) > 0$, а символом $\mathscr{F}$ обозначено общее распределение величин $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$. Из (44) вытекает, в частности, что

$$\mathbf{M}e^{h\xi} \leqslant C_2(\mathscr{F}) < \infty \ \text{ при } |h| \leqslant c_0(\mathscr{F}), \tag{45}$$

$$|f_0(t, h)| \leqslant e^{-c(\varepsilon,\mathscr{F})} \quad \text{при} \quad |t| \geqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad |h| \leqslant c_0(\mathscr{F}), \tag{46}$$

где $c(\varepsilon, \mathscr{F}) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$, а

$$f_0(t, h) = \mathbf{M}e^{(h+it)\xi}/\mathbf{M}e^{h\xi}$$

есть характеристическая функция величины ξ, когда последняя имеет сопряженное распределение. Из (45) следует, что выполнено условие (34) замечания 1 при $R_1 = C_2(\mathscr{F})$, $R_0 = c_0(\mathscr{F})$. Условие (35) выполняется автоматически при $\delta = D\xi$. А из (37) и (38) следует, что выполнены условия (20) при $R = \pm 1/R_3 = \pm C_3(\mathscr{F})$ и (29) при $R = \pm(1/R_4)^{1/2} = \pm C_4(\mathscr{F})$. Таким образом, из (44), (46) и определения функции $U(R)$ вытекает, что

$$U(R) \leqslant \int\limits_{|t|>\varepsilon(\mathscr{F})} |f_0(t, h)|^m\,dt \leqslant e^{-(m-k(\mathscr{F}))c(\varepsilon(\mathscr{F}),\mathscr{F})}C_1(\mathscr{F}), \tag{47}$$

так как $\mathbf{M}e^{h\xi} \geqslant 1$. В силу (47), при $m > m_0(\mathscr{F})$, выполнены условия (36) и (42) замечания 1, а потому справедливы соотношения (41) и (43).

Заметим теперь, что большинство введенных в этом пункте для величины S обозначений (за исключением $L^*(h)$, $K^*(h)$, $T(h)$, $L(R)$ и $K(R)$) не зависят от конкретного представления S в виде $S = \sum \xi_i$. Поэтому мы можем переосмыслить определение S следующим образом. Далее будем предполагать, что S есть произвольная случайная величина, удовлетворяющая (2) и условию $\mathbf{M}|S|^4 e^{RS} < \infty$. Сохраним для S все введенные выше обозначения, но условимся понимать под $L^*(h)$, $K^*(h)$, $T^{-1}(h)$, $L(R)$ и $K(R)$ инфимумы в соответствующих определениях по всем представлениям S в виде $S = \xi_1 + \ldots + \xi_m$ — суммы некоторого числа независимых случайных величин, удовлетворяющих условию (1).

Будем говорить, что случайная величина S (точнее ее распределение) принадлежит классу $\mathscr{D}(R)$ при $R > 0$, если выполнены условия (2) и

$$4R^2K(R) \leqslant B^2, \ 4R^2K(-R) \leqslant B^2. \tag{48}$$

Будем полагать, что $S \in \mathscr{D}_0(R) \subset \mathscr{D}(R)$, если выполнены условия (48) и

$$R^2U(R) \leqslant B^{-3}, \ R^2U(-R) \leqslant B^{-3}. \tag{49}$$

Отметим, что, подставляя (48) и (49) в (32) и (33), мы получим, что

$$\delta_K(x) \leqslant 9(RB)^{-2} \leqslant 2/3, \quad \delta_L(x) \leqslant 6(RB)^{-1} \text{ при } RB \geqslant 4, \tag{50}$$

если $S \in \mathscr{D}_0(R)$ и $|x| \leqslant (2/3)RB^2$.

Приведем теперь оценку для квантилей.

Теорема 4. *Если $S \in \mathscr{D}_0(R)$ и $RB \geqslant 4$, то*

$$F(x) = \Phi(a(x) + \delta(x) + O((RB)^{-2})) \tag{51}$$

при $|x| \leqslant RB^2/2$, где

$$a(x) = x(2x^{-2}\lambda(x))^{1/2}, \; a(0) = 0,$$

$$\delta(x) = a^{-1}(x)[\beta(x) + \ln a'(x)].$$

В частности,

$$F(x) = \Phi(x/B - (\Gamma/B^3)((x/B)^2 - 1)/6 + O(|x/B|^3 + 1)(RB)^{-2})), \tag{52}$$

$$F(x) = \Phi(x/B + O((x/B)^2 + 1)(RB)^{-1}). \tag{53}$$

Отметим, что если $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, $\mathbf{M}\xi = 0$, $\mathbf{D}\xi = 1$, $\mathbf{M}\xi^3 = \gamma$ и удовлетворяют условию (44), то, как следует из замечания 2, при $n \geqslant m_0(\mathscr{F})$ формулы (52) и (53) можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \xi_j < x n^{1/2}\right) = \Phi\left(x - (\gamma/6)(x^2 - 1)\, n^{-1/2} + \theta C_5(\mathscr{F})\,(|x|^3 + 1)\, n^{-1}\right) =$$

$$= \Phi\left(x + \theta C_6(\mathscr{F})(x^2 + 1)\, n^{-1/2}\right) \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \delta(\mathscr{F})\, n^{1/2}. \tag{54}$$

Последнее представление из (54) доказано в [5].

З а м е ч а н и е 3. На самом деле, равенство (53) и последнее соотношение в (54) верны и без условия (49), т. е. без предположения гладкости. Более того, в этом случае справедлива оценка

$$F(x) = \Phi(a(x) + O((RB)^{-1})),$$

усилением которой является равенство (51). Этот факт будет доказан в другой работе автора.

Пусть теперь $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ — две случайные величины с функциями распределения $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ соответственно, причем

$$\mathbf{M}S^{(j)} = 0, \; \mathbf{D}S^{(j)} = B^2, \; \mathbf{M}(S^{(j)})^3 = \Gamma \quad \forall j. \tag{55}$$

Подчеркнем, что в (54) числа B и Γ не зависят от j. Сохраним для $S^{(j)}$ все введенные выше для S обозначения, снабжая их дополнительным верхним индексом j.

Теорема 5. *Если $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ принадлежат классу $\mathscr{D}_0(R)$ и выполнено условие* (55), *то при $|x| \leqslant RB^2/10$ и $RB \geqslant 6$ верно равенство*

$$F^{(1)}(x) = F^{(2)}(x + O(|x/B|^3 + 1)(RB)^{-1}). \tag{56}$$

Теоремы 4 и 5 доказываются в п. 2.4. В п. 2.5 мы докажем аналоги этих утверждений для условных распределений, а в п. 2.6 приведем несколько простых свойств классов $\mathscr{D}(R)$ и $\mathscr{D}_0(R)$, которые нам понадобятся в дальнейшем.

2.2. Оценки для плотностей сопряженных распределений

При фиксированном h, удовлетворяющем условию (1.3), положим

$$\eta_j = \xi_{j,h}/B(h), \; L = L^*(h), \; K = K^*(h), \; U = U^*(h),$$

$$G = \Sigma \mathbf{M}(\eta_j)^3, \tag{1}$$

$$Z = Z(h) \equiv (S(h) - A(h))/B(h) = \Sigma \eta_j.$$

Обозначим через $f(t)$ характеристическую функцию случайной величины Z и заметим (см. [10], с. 138), что

$$|f(t)| \leqslant \exp(-t^2/3) \quad \text{при} \quad |t| \leqslant 1/(4L). \tag{2}$$

Отметим также, что $|f(t)| = |f(t/B(h), h)|$, а потому

$$U = \int\limits_{|t| \geqslant 1/(4L)} |f(t)|\, dt. \tag{3}$$

Нам потребуется

Лемма 1. *При* t, *удовлетворяющих неравенству*

$$Kt^4 \leqslant 1, \tag{4}$$

справедливо соотношение

$$\mu(t) \equiv f(t) - (1 - \mathrm{i}Gt^3/6)\exp(-t^2/2) = \theta K(t^4 + t^6/72)\exp(-t^2/2). \tag{5}$$

Доказательство. В силу неравенства (4) для характеристической функции $v = v_j(t)$ случайной величины $\eta = \eta_j$ справедливы следующие известные соотношения (см., например, [10], с. 87):

$$|v - 1| \leqslant D\eta t^2/2 \leqslant (\mathrm{M}\eta^4 t^4)^{1/2}/2 \leqslant 1/2, \tag{6}$$

$$v = 1 - D\eta t^2/2 - \mathrm{iM}\eta^3 t^3/6 + \theta \mathrm{M}\eta^4 t^4/24. \tag{7}$$

Разлагая логарифм в ряд Тейлора и пользуясь соотношениями (6) и (7), мы получаем

$$\ln v = (v-1) + (1/2)(v-1)^2/(1 + \theta(v-1))^2 =$$
$$= -D\eta t^2/2 - \mathrm{iM}\eta^3 t^3/6 + \theta(1/24 + 1/2)\mathrm{M}\eta^4 t^4. \tag{8}$$

Полагая $v = v_j$ в (8) и суммируя получившиеся выражения по j, находим

$$\ln f(t) = \sum \ln v_j(t) = -t^2/2 - \mathrm{i}Gt^3/6 + \theta K(13/24)t^4. \tag{9}$$

Из разложения экспоненты в ряд Тейлора следует, что

$$\mu_1 \equiv \exp(-\mathrm{i}Gt^3/6) = 1 - \mathrm{i}Gt^3/6 + \theta(Gt^3/6)^2/2, \tag{10}$$

$$\mu_2 \equiv \exp \theta K(13/24)t^4 = 1 + \theta K(13/24)t^4 \exp K(13/24)t^4. \tag{11}$$

Теперь из формул (9)—(11) и (4) мы имеем

$$f(t)\exp(t^2/2) = \mu_1\mu_2 = \mu_1(\mu_2 - 1) + \mu_1 =$$
$$= \theta K(13/24)t^4 \exp(13/24) - \mathrm{i}Gt^3/6 + \theta G^2 t^6/72. \tag{12}$$

Из (12) следует (5), так как $G^2 \leqslant L^2 \leqslant K$ в силу (1.5). □

Положим

$$\psi(t) = \exp(-t^2/2), \quad \gamma_k = \int |t|^k \psi(t)\, dt,$$
$$\mu_0(t) = f(t) - \psi(t)$$

и обозначим через $q(x)$ плотность распределения случайной величины Z.

В этом случае в силу формулы обращения для характеристических функций

$$q(x) - \varphi(x) = (2\pi)^{-1} \int e^{-\mathrm{i}tx} \mu_0(t)\, dt. \tag{13}$$

Нам потребуется

Лемма 2.

$$|q(0) - \varphi(0)| \leqslant 12(2\pi)^{-1/2}K + U/2\pi.$$

Доказательство. В силу (13) и нечетности функции $t^3\psi(t)$ мы для любого $T > 0$ имеем

$$2\pi(q(0) - \varphi(0)) = \int \mu_0(t)\, dt = \int\limits_{|t|<T} \mu(t)\, dt + \int\limits_{|t|>T} f(t)\, dt -$$
$$- \int\limits_{|t|>T} \psi(t)\, dt \equiv I_1(T) + I_2(T) - I_3(T). \tag{14}$$

При $T = K^{-1/n}$ из (2) и (3) следует

$$|I_2(T)| \leqslant I_4(T) + U, \tag{15}$$

где $$I_4(T) = \int\limits_{|t|>T} \exp(-t^2/3)\, dt \leqslant \int Kt^4 \psi((2/3)^{1/2} t)\, dt = (3/2)^{5/2} K\gamma_4. \tag{16}$$

Из леммы 1 при указанном T вытекает, что

$$|I_1(T)| \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant T} (Kt^4 + Kt^6/72)\psi(t)\,dt \leqslant (K\gamma_4 - I_3(T)) + K\gamma_6/72. \quad (17)$$

Суммируя (14)—(17), мы получим требуемое утверждение, если только заметим, что

$$\gamma_3 = 4,\ \gamma_4 = 3(2\pi)^{1/2},\ \gamma_6 = 15(2\pi)^{1/2}. \ \square \quad (18)$$

Лемма 3.

$$|q(x) - \varphi(x)| \leqslant (13L + U)/2\pi.$$

Доказательство. Воспользуемся оценкой (см. [12])

$$|\mu_0(t)| \leqslant \psi(t)[e^{\alpha(t/T)} - 1] \text{ при } |t| \leqslant T \equiv L^{-1/3}, \quad (19)$$

где при $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$\alpha(x) = -x^2/2 + x^3/6 - \ln(1 - x^2/2) = x^3/6 + \\ + \sum_{k\geqslant 2} k^{-1}(x^2/2)^k \leqslant x^3\alpha(1) \leqslant 0{,}36x^3 \leqslant 0{,}36. \quad (20)$$

Из (19) и (20) мы получаем, что при $|t| \leqslant T$

$$|\mu_0(t)| \leqslant \psi(t)\cdot 0{,}36L|t|^3e^{0{,}36} \leqslant 0{,}52L|t|^3\psi(t). \quad (21)$$

Заметим, что в силу формулы (13)

$$(2\pi)|q(x) - \varphi(x)| \leqslant \int |\mu_0(t)|\,dt \leqslant I_0(T) + U + I_4(T) + I_3(T), \quad (22)$$

где $I_0(T) \equiv \int\limits_{|t|\leqslant T} |\mu_0(t)|\,dt$.

Из (21) и неравенства $1 \leqslant L|t|^3$ при $|t| \geqslant T$ следует

$$I_0(T) + I_3(T) \leqslant L_3\gamma_3. \quad (23)$$

Далее, при указанных T из оценки (2) вытекает, что

$$I_4(T) \leqslant \int L|t|^3 \exp(-t^2/3)\,dt = (3/2)^2 L\gamma_3. \quad (24)$$

Из (18) и (22)—(24) получаем требуемое утверждение. $\square$

Отметим теперь, что $p(y,\ h) = B^{-1}(h)q((y - A(h))/B(h))$ в силу условий (1). Отсюда и из неравенства (1.10) следует

$$p(y) = B^{-1}(h)e^{\Lambda(h) - hx - h(y-x)}q(y - A(h)/B(h)). \quad (25)$$

Подставляя $h = H(x)$ и $y = x$ в (25) и оценивая $q(0)$ при помощи леммы 2, мы получаем утверждения (1.27) и (1.28) теоремы 3. А из леммы 3 в этом случае имеем (1.17) и (1.19) в теореме 2. Неравенство (1.18) при том же $\delta_L(x)$ очевидно следует при $h = H(x)$ и $y = x + z$ из (25), леммы 3 и неравенства $\varphi(u) \leqslant \varphi(0)$.

Замечание 4. Так как $(1 - iGt^3/6)\psi(t) \equiv \psi(t,\ G)$ является преобразованием Фурье функции $(1 - (G/6)(x^3 - 3x))\varphi(x) \equiv \varphi(x,\ G)$, то аналогично леммам 2 и 3 доказывается соотношение

$$|q(y) - \varphi(y,\ G)| \leqslant (2\pi)^{-1}\int |f(t) - \psi(t,\ G)|\,dt = O(K + U),$$

из которого и из (25) при $y = x + z$ и $h = H(x)$ следует

$$p(x+z) = (2\pi)^{-1/2}e^{-\lambda(x) - \beta(x) - zH(x)} \times \\ \times [\varphi(z/B(H(x)),\ B^{-3}(H(x))\Gamma(H(x))) + O(\delta_K(x))]. \quad (26)$$

Полученная оценка может быть точнее, чем (1.18). При $z = 0$ формулы (26) и (1.27) совпадают.

2.3. *Оценки для функций, связанных с $H(x)$*

Чтобы закончить доказательство теорем 2 и 3, нам потребуется еще несколько вспомогательных утверждений, которые мы сначала и приведем.

Применяя формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{0\leqslant i<k} x^i f^{(i)}(0)/i! + x^k f^{(k)}(|\theta|x)/k! \tag{1}$$

при $f(h) = A(h)$ и используя (1.6), (1.7), (1.9) и (1.10), находим, что справедлива

Лемма 1. *Если выполнено условие* (1.3), *то*

$$A(h) = B^2h + \theta h^2 L(R)/2, \tag{2}$$

$$A(h) = B^2h + h^2\Gamma/2 + \theta h^3 K(R)/3. \tag{3}$$

Заметим, что в силу соотношения (1.5)

$$\Gamma = |\Lambda'''(0)| \leqslant BK^{1/2}(0) \leqslant BK^{1/2}(R). \tag{4}$$

Используя теперь (4) и производя несложную оценку констант, мы из (2) и (3) получаем, что имеет место

Лемма 2. *Если выполнено условие* (1.3) *и одно из условий* (1.20) *или* (1.29), *то*

$$|A(h) - hB^2| \leqslant |h|B^2/3. \tag{5}$$

В дальнейших доказательствах центральное место занимает

Лемма 3. *При выполнении условия* (1.21) *и одного из двух условий* (1.20) *или* (1.29) *верны соотношения* (1.22) *и* (1.16).

Доказательство. В силу симметрии рассмотрим только случай $x \geqslant 0$ и $R > 0$. Так как при выполнении (1.21) числа $h = H_- = (3/4)xB^{-2}$ и $h = H_+ = (3/2)xB^{-2}$ удовлетворяют (1.3), мы можем воспользоваться утверждением леммы 2 и при сделанном выше предположении получим неравенства

$$A(H_-) \leqslant (4/3)H_-B^2 = x = (2/3)H_+B^2 \leqslant A(H_+). \tag{6}$$

Чтобы закончить доказательство, нам достаточно убедиться, что в силу монотонности функции $A(h)$ соотношение (6) совпадает при $x \geqslant 0$ с соотношением (1.22). Из (1.21) и (1.22) очевидно следует (1.16). □

Заметим, что в силу (1.14) и (1.15) имеет место тождество

$$\lambda'(x) = H(x). \tag{7}$$

Дифференцируя по x равенство (1.14), мы получаем $A'(H(x)) \cdot H'(x) = 1$. Из этого соотношения, (1.6), (1.15) и (7) следует

Лемма 4. *Если выполнено условие* (1.16), *то*

$$H'(x) = \lambda''(x) = B^{-2}(H(x)), \tag{8}$$

$$\lambda'''(x) = -\Gamma(H(x))B^{-6}(H(x)), \tag{9}$$

$$\beta'(x) = \Gamma(H(x))B^{-4}(H(x))/2. \tag{10}$$

Отметим, что при выводе равенств (9) и (11) мы использовали тождество

$$(B^{2k}(H))' = kB^{2(k-2)}(H)\Gamma(H), \tag{11}$$

которое вытекает из (1.6), (8) и правила дифференцирования сложной функции (в (11)—(14) производные в левой части берутся по x и используется сокращенная запись $H = H(x)$). Из (11), (1.9) и леммы 3 следует также

$$|(B^4(H))'| = 2|\Gamma(H)| \leqslant 2L(R). \tag{12}$$

Используя в последнем рассуждении неравенство (1.5) вместо (1.9), мы имеем

$$|(B^3(H))'| = (3/2)B^{-1}(H)|\Gamma(H)| \leqslant (3/2)K^{1/2}(R). \tag{13}$$

Наконец, из (1.5), (1.6), (1.10), (11) и леммы 3 вытекает формула

$$(\Gamma(H)B^{-2m}(H))' = \Lambda^{\mathrm{IV}}(H)B^{-2m-2}(H) - \\ - m(\Gamma(H))^2B^{-2m-4}(H) = \theta(|m|+2)K(R)B^{-2m-2}(H). \tag{14}$$

Интегрируя (12) и используя (7) и лемму 3, получаем, что

$$|B^4(H(x)) - B^4| \leqslant 2|x|L(R) \leqslant (2/3)B^4.$$

Аналогично, интегрируя (13), имеем

$$|B^3(H(x)) - B^3| \leqslant (3/2)|x|K^{1/2}(R) \leqslant (1/2)B^3.$$

Из двух последних соотношений и (8) находим, что верна

Лемма 5. *Если выполнены условия* (1.20) *и* (1.21), *то*

$$1/3 \leqslant B^4(H(x))/B^4 \leqslant 5/3. \tag{15}$$

А если справедливы (1.21) *и* (1.29), *то*

$$B^{-2}(2/3)^{2/3} \leqslant \lambda''(x) = B^{-2}(H(x)) = e^{-2\beta(x)} \leqslant 2^{2/3}B^{-2}. \tag{16}$$

Из соотношения (1.5) и лемм 4, 5 очевидно следует

Лемма 6. *При выполнении условий* (1.21) *и* (1.29) *верны неравенства*

$$|\lambda'''(x)| \leqslant 2^{5/3}K^{1/2}(R)B^{-5}, \quad |\beta'(x)| \leqslant K^{1/2}(R)B^{-3}.$$

Из (9), (10), (14), (16) и оценки $5\cdot 2^{5/3} \leqslant 32$ немедленно вытекает

Лемма 7. *Если условия* (1.21) *и* (1.29) *выполнены, то*

$$|\lambda^{\mathrm{IV}}(x)| \leqslant 32K(R)B^{-8}, \quad |\beta''(x)| \leqslant 8K(R)B^{-6}.$$

Отметим, что в силу (1.7), (1.14), (7), (9) и (10) очевидны следующие равенства:

$$\lambda(0) = \lambda'(0) = H(0) = 0, \quad \lambda''(0) = B^{-2}, \tag{17}$$

$$\lambda'''(0) = -\Gamma B^{-6}, \quad \beta'(0) = \Gamma B^{-4}/2. \tag{18}$$

Подставляя (17), (18) и утверждения леммы 7 в (1), при $f(x) = \lambda^{(k)}(x)$ и $f(x) = \beta'(x)$ получаем, что справедлива

Лемма 8. *Если справедливы условия* (1.21) *и* (1.29), *то*

$$\lambda'''(x) = -\Gamma B^{-6} + \theta 32xK(R)B^{-8}, \tag{19}$$

$$\lambda''(x) = B^{-2} - x\Gamma B^{6} + \theta 16x^2K(R)B^{-8}, \tag{20}$$

$$\lambda'(x) = xB^{-2} - x^2\Gamma B^{-6}/2 + \theta 6x^3K(R)B^{-8}, \tag{21}$$

$$\beta'(x) = x\Gamma B^{-4}/2 + \theta 8xK(R)B^{-6}. \tag{22}$$

Закончим доказательство теорем 2 и 3. Заметим, что выполнение (1.16) и (1.22) при условии (1.21) и (1.20) или (1.29) показано в лемме 3, а справедливость (1.23) при тех же условиях следует из леммы 5 после несложной оценки постоянных. Далее, из (1.16) и (1.5) при $H = H(x)$ мы находим, что

$$L^*(H) \leqslant L(R)B^{-3}(H), \quad K^*(H) \leqslant K(R)B^{-4}(H),$$

$$L^*(H) \leqslant K^{1/2}(R)B^{-2}(H), \quad T^{-1} \leqslant 4\min\{L(R)B^{-2}(H),\ K^{1/2}(R)B^{-1}(H)\}. \tag{23}$$

Используя теперь (15), из (23) имеем

$$L^*(H) \leqslant 3^{3/4}L(R)B^{-3}, \quad T^{-1}(H) \leqslant 4\cdot 3^{1/2}L(R)B^{-2}, \tag{24}$$

откуда, а также из (15) и (1.20) следует

$$T(H) \geqslant R/4, \quad U^*(H) \leqslant B(H)U(R) \leqslant (5/2)BU(R). \tag{25}$$

Подставляя (24) и (25) в (1.19) и учитывая, что $6\cdot 3^{3/4} < 15$, получаем (1.26). Аналогично из (23) и (16) имеем

$$K^*(H) \leqslant 2^{4/3}K(R)B^{-4}, \quad L^*(H) \leqslant 2^{2/3}K^{1/2}(R) \tag{26}$$

и $T^{-1}(H) \leqslant 4\cdot 2^{1/3}K^{1/2}(R)$. Так как последнее неравенство, (1.29) и (16) дают (25), то мы можем теперь подставить (25) и (26) в (1.28) и получим (1.32) и (1.33), если только заметим, что $12 \cdot 2^{4/3} < 32$, а $6 \cdot 2^{2/4} < 10$.

Чтобы доказать (1.30) и (1.31), надо воспользоваться формулой Тейлора (1) при $f(x) = \lambda(x)$ и $f(x) = \beta(x)$ и применить соотношения (17), (18) и лемму 7. Аналогично из (1) и (17) мы получим (1.24) и (1.25), если воспользуемся неравенствами

$$|\lambda'''(x)| \leqslant 6L(R)B^{-6}, \quad |\beta'(x)| \leqslant 2L(R)B^{-4},$$

которые немедленно вытекают из (9), (10), (1.9) и (15) после оценки постоянных.

Теоремы 2 и 3 доказаны полностью.

2.4. Доказательство теорем 4 и 5

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений, причем лемма 1 представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Предположим, что функция распределения $F(x)$ имеет плотность $p(x)$, которая при некотором $n \geqslant 1$, всех z и всех x таких, что $|x| \leqslant n^{1/2}$, удовлетворяет условиям*

$$p(x) = \varphi(0)e^{-\lambda(x)-\beta(x)}\rho(x), \quad \rho(x) = e^{O(1/n)}, \tag{1}$$

$$p(x+z) \leqslant \varphi(0)\exp(-\lambda(x) - \beta(x) - z\lambda'(x))\rho_+, \quad \rho_+ = O(1), \tag{2}$$

причем при указанных x верны соотношения

$$|\lambda^{\mathrm{IV}}(x)| + |\beta''(x)| + (\lambda'''(0))^2 + (\beta'(0))^2 = (O(n^{-1}), \tag{3}$$

$$\lambda(0) = \lambda'(0) = \beta(0) = 0, \quad \lambda''(0) = 1, \tag{4}$$

$$\lambda''(x) = e^{O(1)}. \tag{5}$$

Тогда для любого фиксированного α такого, что $0 < \alpha < 1$, при $|x| \leqslant \alpha n^{1/2}$ справедливо равенство

$$F(x) = \Phi(g(x) + O(n^{-1}(1+|x|)^{-1})), \tag{6}$$

где

$$g(x) = a(x) + \delta(x),$$

$$\delta(x) = a^{-1}(x)[\beta(x) + \ln a'(x)],$$

$$a(x) \equiv x(2x^{-2}\lambda(x))^{1/2} = x + x^2\lambda'''(0)/6 + O(x^3/n) =$$

$$= x + O(x^2 n^{-1/2}) = O(x), \tag{7}$$

$$\delta(x) = \beta'(0) + \lambda'''(0)/3 + O(x/n) = O(n^{-1/2}). \tag{8}$$

Заметим, что, как будет следовать из доказательства, абсолютные константы, соответствующие символам O в (6)—(8), зависят только от абсолютных констант, определяющих O в (1)—(5), и от α.

Почти все содержание данного пункта (до леммы 6) представляет собой доказательство леммы 1, причем в силу симметрии мы рассмотрим только случай $x \geqslant 0$. При этом, не оговаривая, будем ниже предполагать, что $n \geqslant 1$, $|x| \leqslant n^{1/2}$ и что выполнены условия (1)—(5) леммы 1. Нам понадобится также следующая элементарная

Лемма 2. *Если* $1 + \varepsilon = e^{O(1)}$ и $k = O(1)$, *то*

$$(1+\varepsilon)^k = 1 + k\varepsilon + O(\varepsilon) = 1 + O(\varepsilon) = O(1). \tag{9}$$

Отметим теперь, что в силу (5) справедливы соотношения

$$\lambda'(x) = xe^{O(1)}, \quad 2\lambda(x) = x^2 e^{O(1)}. \tag{10}$$

С другой стороны, из (3), (4) и формулы Тейлора вытекает, что

$$\lambda''(x) = 1 + x\lambda'''(0) + O(x^2 n^{-1}), \tag{11}$$

$$\lambda'(x) = x(1 + x\lambda'''(0)/2 + O(x^2 n^{-1})), \tag{12}$$

$$2\lambda(x) = x^2(1 + x\lambda'''(0)/3 + O(x^2 n^{-1})), \tag{13}$$

$$\beta'(x) = \beta'(0) + O(xn^{-1}), \tag{14}$$

$$\beta(x) = x\beta'(0) + O(x^2 n^{-1}). \tag{15}$$

Наличие оценок (10) позволяет нам применить (9) при $\varepsilon = \lambda'(x)/x - 1$ и $\varepsilon = 2\lambda(x)/x^2 - 1$. Учитывая (12) и (13), при $k = O(1)$ имеем

$$|a(x)|^{2k} = (2\lambda(x))^k = x^{2k}(1 + kx\lambda'''(0)/3 + \\ + O(x^2n^{-1})) = x^{2k}(1 + O(xn^{-1/2})), \tag{16}$$

$$(\lambda'(x))^{-1} = x^{-1}(1 - x\lambda'''(0)/2 + O(x^2n^{-1})) = x^{-1}(1 + O(xn^{-1/2})). \tag{17}$$

Соотношение (7) является частным случаем (16).

Из (11), (12), (16) и (17), учитывая (3), получаем

$$(\ln a'(x))' = \lambda''(x)/\lambda'(x) - \lambda'(x)/(2\lambda(x)) = \\ = (1 + x\lambda'''(0))x^{-1}(1 - x\lambda'''(0)/2) - x(1 + x\lambda'''(0)/2) \times \\ \times x^{-2}(1 - x\lambda'''(0)/3) + O(xn^{-1}) = \lambda'''(0)/3 + O(xn^{-1}). \tag{18}$$

Далее, из формулы Тейлора следует, что

$$\ln a'(x) = x\lambda'''(0)/3 + O(x^2n^{-1}). \tag{19}$$

Из (15), (16) и (19) вытекает (8).

Оценим теперь $\varepsilon(x) \equiv \delta'(x)/a'(x)$. Для этого воспользуемся представлением

$$\varepsilon(x) = -a^{-1}(x)\delta(x) + (\lambda'(x))^{-1}(\beta'(x) + (\ln a'(x)))'. \tag{20}$$

Подставляя в (20) оценки (8), (14) и (18) и используя (16) и (17), мы получаем

$$\varepsilon(x) = x^{-1}(1 + O(xn^{-1/2}))(-\delta(x) + \beta'(x) + (\ln a'(x))') = O(n^{-1}). \tag{21}$$

Положим

$$\Psi(x) = \Phi(g(x)), \quad \psi(x) = \Psi'(x). \tag{22}$$

Нам понадобится

Лемма 3.

$$\psi(x) = p(x)(1 + O(n^{-1})), \quad p(x) = \varphi(g(x))e^{O(1)}. \tag{23}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\psi(x) = \varphi(g(x))a'(x)(1 + \varepsilon(x)) = \\ = \varphi(0)e^{-\lambda(x)-\beta(x)}(1 + \varepsilon(x)) \exp(-\delta^2(x)/2). \tag{24}$$

Из (8), (21) и (24) следует первое соотношение в (23). Используя теперь (1) и (8), мы можем переписать (24) в следующем виде:

$$p(x) = a'(x)\varphi(g(x)) \exp(O(n^{-1})). \tag{25}$$

Из (25) вытекает второе равенство в (23), если только воспользоваться (10) и соотношением $a'(x) = \lambda'(x)/(2\lambda(x))^{1/2}$, чтобы получить оценку $a'(x) = e^{O(1)}$. □

Лемма 4. *Если* $|x| \leqslant \alpha n^{1/2}$, *то*

$$F(x) = \Psi(x) + p(x)O(n^{-1}(1 + |x|)^{-1}). \tag{26}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $1 \leqslant x \leqslant \alpha n^{1/2}$ и воспользуемся неравенством $\lambda'(x) \geqslant x/C$, $0 < C = O(1)$, справедливым в силу (10). Учитывая (2), имеем

$$p(x + z) = O(p(x)e^{-z/C}). \tag{27}$$

Из (27) мы при рассматриваемых x и $R = n^{1/2}$ находим, что

$$1 - F(R) = \int\limits_{z > R-x} p(x + z)\,dz = O(p(x)e^{-(R-x)/C}) = O(p(x)/(nx)). \tag{28}$$

При выводе последнего соотношения в (28) мы использовали неравенства $R - x \geqslant (1 - \alpha)R$, $e^{-(1-\alpha)R/C} = O(R^{-3}) = O(x^{-1}n^{-1})$. Аналогично из свойств нормального распределения (23) и (27) вытекает

$$1 - \Psi(R) = O(\varphi(g(R))) = O(p(R)) = \\ = O(p(x)e^{-(R-x)/C}) = O(p(x)/(xn)). \tag{29}$$

Из (27)—(29) и первого соотношения в (23) следует, что

$$|F(x)-\Psi(x)| \leqslant \int\limits_{x \leqslant z \leqslant R} |p(x+z)-\psi(x+z)|\,dz + (1-F(R)) +$$
$$+ (1-\Psi(R)) = \int\limits_{z>0} O(n^{-1}p(x)e^{-zx/C}) + O(p(x)/(nx)) = O(p(x)/(nx)). \qquad (30)$$

Полученная оценка влечет справедливость соотношения (26) при $x \geqslant 1$. Если теперь $|x| \leqslant 1$, то (26) вытекает из (30) и (23), так как при таких x

$$|F(x)-\Psi(x)| \leqslant \int\limits_{-1 \leqslant z \leqslant 1} |p(z)-\psi(z)|\,dz + |F(1)-\Psi(1)| = O(1/n).$$

Случай $x \leqslant -1$ легко сводится к $x \geqslant 1$ введением функции распределения $1-F(x+0)$. □

Нам потребуется

Лемма 5. *Если числа z и $\tau \geqslant 0$ удовлетворяют условию*

$$|z|\tau + \tau^2 \leqslant (\ln 2)/2, \qquad (31)$$

то имеет место соотношение

$$\Phi(z-2\tau) \leqslant \Phi(z) - \tau\varphi(z) \leqslant \Phi(z) + \tau\varphi(z) \leqslant \Phi(z+2\tau).$$

Доказательство. Заметим, что при выполнении (31) справедливо неравенство

$$\varphi(z+2\theta\tau) = \varphi(z)\exp(-2\theta z\tau - 2\theta^2\tau^2) \geqslant \varphi(z)/2.$$

Из этого соотношения и формулы Тейлора вытекает требуемое утверждение, так как

$$\Phi(z+2\tau) - \Phi(z) = 2\tau\varphi(z+2\theta\tau) \geqslant \tau\varphi(z),$$
$$\Phi(z-2\tau) - \Phi(z) = 2\tau\varphi(z-2\alpha\tau) \leqslant -\tau\varphi(z). \qquad □$$

Закончим теперь доказательство леммы 1. Перепишем (26) в виде

$$F(x) = \Phi(g(x)) + \varphi(g(x))\theta C_1 n^{-1}(1+|x|)^{-1} \qquad (32)$$

и воспользуемся соотношениями (7) и (8):

$$|g(x)| \leqslant C_2(|x|+1). \qquad (33)$$

Положим $\tau = C_1 n^{-1}(1+|x|)^{-1}$, $z = g(x)$ и, учитывая (33), получаем, что указанные z и τ удовлетворяют условию (31) при $n \geqslant C_3 \equiv (2/\ln 2)C_1 \times (C_1+C_2)$. Из (32) и леммы 5 мы, таким образом, имеем требуемое утверждение (6), но при дополнительном предположении, что $n \geqslant C_3$.

Избавимся теперь от этого предположения. Если

$$1 \leqslant n = O(1), \qquad (34)$$

то равенство (6) можно переписать в виде

$$F(x) = \Phi(O(1)) \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \alpha n^{1/2}. \qquad (35)$$

Далее, $p(x) = e^{O(n)}$ при $|x| \leqslant n^{1/2}$ в силу условия (1). Интегрируя плотность по интервалам $(\alpha n^{1/2}, n^{1/2})$ и $(-n^{-1/2}, -\alpha n^{-1/2})$, из последнего соотношения находим

$$1 - F(\alpha n^{1/2}) = e^{O(n)}, \quad F(-\alpha n^{1/2}) = e^{O(n)}. \qquad (36)$$

Для окончания доказательства надо только понять, что (36) эквивалентно (35), если выполнено (34).

Соотношение (6), таким образом, доказано полностью. Остальные утверждения леммы 1 были доказаны ранее, до леммы 3. Условие $\alpha < 1$ использовалось только при выводе (28) и (29), и от него можно было бы избавиться, если вместо (1) и (2) предполагать выполненным условие вида (2.26).

Отметим, что из последних соотношений в (1), (3) и (5) следует существование таких постоянных β^*, ρ_-, λ_-, λ_+, для которых при $|x| \leqslant n^{1/2}$

$$\rho(x) \geqslant \rho_- > 0, \quad \beta_- \leqslant e^{-\beta(x)} \leqslant \beta_+, \tag{37}$$

$$0 < \lambda_- \leqslant \lambda''(x) \leqslant \lambda_+ < \infty. \tag{38}$$

В частности, из (38), (7), (4) и формулы Тейлора вытекает

$$|a(x)| = (2\lambda(x))^{1/2} = (x^2\lambda''(\theta x))^{1/2} \leqslant (\lambda_+)^{1/2}|x|, \tag{39}$$

$$a'(x) = \lambda'(x)/a(x) \geqslant \lambda_-/(\lambda_+)^{1/2} \equiv \lambda_0. \tag{40}$$

Лемма 6. *Пусть $F^{(1)}(x)$ и $F^{(2)}(x)$ — две функции распределения с плотностями $p^{(1)}(x)$ и $p^{(2)}(x)$. Предположим, что каждая из плотностей $p(x) = p^{(1)}(x)$ и $p(x) = p^{(2)}(x)$ удовлетворяет при $|x| \leqslant n^{1/2}$ условиям (1)—(5) и (37), (38) при некоторых $\beta(x) = \beta^{(j)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(j)}(x)$, $\rho(x) = \rho^{(j)}(x)$, $j = 1, 2$, и одних и тех же числах β_+, β_-, ρ_+, ρ_-, λ_+, λ_- и n. Тогда при выполнении условий*

$$\begin{gathered} |x|n^{-1/2} \leqslant \alpha^2\lambda^* \equiv (1/3)(\lambda_-/\lambda_+)\alpha^2, \\ n \geqslant N \equiv (3/2)(\lambda_+/\lambda_-)^{1/2}(\beta_+/\beta_-)(\rho_+/\rho_-)/\lambda_- \end{gathered} \tag{41}$$

справедливо равенство

$$F^{(1)}(x) = F^{(2)}(x + O(g^{(1)}(x) - g^{(2)}(x)) + O(n^{-1})). \tag{42}$$

Доказательство. В силу леммы 1 верно представление

$$F^{(j)}(x) = \Phi(x + g^{(j)}(x) + \theta C_4/n) \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \alpha n^{1/2}. \tag{43}$$

Заметим, что для доказательства леммы нам достаточно подобрать такое $0 \leqslant \tau = \tau(x) = O(g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x)) + O(n^{-1})$, что

$$|x \pm \tau(x)| \leqslant \alpha n^{1/2} \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \lambda^*\lambda_1^2 n^{1/2}, \tag{44}$$

и чтобы были справедливы неравенства

$$g^{(2)}(x+\tau) - 2C_4/n \geqslant g^{(1)}(x) \geqslant g^{(2)}(x-\tau) + 2C_4/n, \tag{45}$$

поскольку в этом случае в силу (43)

$$\begin{aligned} F^{(2)}(x+\tau) &\geqslant \Phi(g^{(2)}(x+\tau) - C_4/n) \geqslant \Phi(g^{(1)}(x) + C_4/n) \geqslant F^{(1)}(x) \geqslant \\ &\geqslant \Phi(g^{(1)}(x) - C_4/n) \geqslant \Phi(g^{(2)}(x-\tau) + C_4/n) \geqslant F^{(2)}(x-\tau), \end{aligned}$$

откуда получаем $F^{(1)}(x) = F^{(2)}(x + \theta\tau)$.

Из (21) и (40) при $|x| \leqslant n^{1/2}$ имеем

$$(g^{(2)}(x))' = (a^{(2)}(x))'(1 + \varepsilon^2(x)) \geqslant \lambda_0(1 - C_5/n), \tag{46}$$

а из (8) и (39) вытекает, что при $|x| \leqslant \lambda^*\alpha^2 n^{1/2}$

$$|g^{(j)}(x)| \leqslant (\lambda_+)^{1/2}|x| + C_6 n^{1/2} \leqslant (\lambda_+)^{1/2}\lambda^*\alpha^2 n^{1/2} + C_6 n^{-1/2}. \tag{47}$$

Положим

$$\tau(x) = (|g^{(1)}(x) - g^{(2)}(x)| + 2C_4/n)(1 - C_5/n)^{-1}/\lambda_0 \tag{48}$$

при $n \geqslant 2C_5$. В силу (47), леммы 2 и равенства $2(\lambda_+)^{1/2}\lambda^* = \lambda_0$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \tau(x) &\leqslant (2(\lambda_+)^{1/2}\lambda^*\alpha^2 n^{1/2} + 2C_4/n^{-1/2})(1 + O(n^{-1}))/\lambda_0 = \\ &= (2/3)\alpha^2 n^{1/2}(1 + O(n^{-1})) \leqslant (2/3)\alpha n^{1/2}(\alpha + C_7/n), \end{aligned}$$

из которой вытекает справедливость условия (44) при $n \geqslant C_7/(1-\alpha)$.

Далее, из (46) следует, что при выполнении (44) и $n \geqslant 2C_5$ верны неравенства

$$g^{(2)}(x-\tau) + \tau\lambda_0(1 - C_5/n) \leqslant g^{(2)}(x) \leqslant g^{(2)}(x+\tau) - \tau\lambda_0(1 - C_5/n). \tag{49}$$

Подставляя (48) в (49), мы получаем справедливость соотношения (45).

Таким образом, мы доказали лемму, но при двух дополнительных предположениях: $n \geqslant 2C_5$ и $n \geqslant C_7/(1-\alpha)$. Чтобы избавиться от этих ограничений, заметим, что при условии (34) утверждение леммы 6 можно записать в виде

$$F^{(1)}(x)=F^{(2)}(O(1)) \quad \text{при} \quad |x|\leqslant \lambda^*\alpha^2 n^{1/2}, \tag{50}$$

и для доказательства (50) нам достаточно показать, что

$$F^{(1)}(-\lambda^*\alpha^2 n^{1/2})\geqslant F^{(2)}(-n^{1/2}),\quad F^{(1)}(\lambda^*\alpha^2 n^{1/2})\leqslant F^{(2)}(n^{1/2}). \tag{51}$$

Докажем для примера второе утверждение в (51). Из соотношения (38) следует, что $(\lambda^{(2)}(n^{1/2}))'\geqslant \lambda_- n^{1/2}$, $\lambda^{(2)}(n^{1/2})\geqslant \lambda_- n/2$, а потому в силу (2) и (37) верна оценка

$$p^{(2)}(n^{1/2}+z)\leqslant C_+ \exp(-z\lambda_- n^{1/2}),$$

где $C_\pm=\rho_\pm\beta_\pm \exp(-\lambda_- n/2)\varphi(0)$. Из этого неравенства мы получаем

$$1-F^{(2)}(n^{1/2})=\int\limits_{z>0} p^{(2)}(n^{1/2}+z)\,dz\leqslant C_+(\lambda_- n^{1/2})^{-1}. \tag{52}$$

С другой стороны, из (38) следует

$$\lambda^{(1)}(x)\leqslant \lambda_+ x^2/2\leqslant \lambda_- n/2 \quad \text{при} \quad |x|\leqslant (\lambda_-/\lambda_+)^{1/2} n^{1/2}\equiv \gamma.$$

Последнее соотношение дает нам, что

$$1-F^{(2)}(\lambda^*\alpha^2 n^{1/2})\geqslant \int\limits_{\gamma/3<x\leqslant\gamma} p^{(1)}(x)\,dx\geqslant (\gamma-\gamma/3)\,C_-, \tag{53}$$

так как $3\lambda^*\alpha^2<\gamma/n^{1/2}$. Из (52) и (53) вытекает второе неравенство в (50). Первое доказывается аналогично, если интервал $(\gamma/3,\ \gamma)$ в (53) заменить на $(-\gamma,\ -\gamma/3)$. □

Лемма 7. *Если* $S\in\mathscr{D}_0(R)$ *при* $B=1$ *и* $R\geqslant 4$, *то справедливы условия* (1)—(5), (37) *и* (38) *при*

$$n^{1/2}\equiv(2/3)R,\quad \lambda^*=3^{-5/3}. \tag{54}$$

Кроме того, при $R\geqslant 6$ *верно неравенство* $N\leqslant 16\leqslant n$.

Доказательство. Из леммы 3.5 мы получаем, что в рассматриваемом случае неравенство (38) выполнено при $\lambda_-=(2/3)^{2/3}$, $\lambda_+=2^{2/3}$, а следовательно, справедливо (5) и верна оценка для λ^* в (54). Лемма 3.7 и равенства (3.17) и (3.18) дают (3) и (4). Из оценок (1.50) и теоремы 2 вытекает справедливость (1) и (2) при $|x|\leqslant(2/3)R\equiv n^{1/2}$. При этом мы находим, что

$$\rho_-\equiv 3/4\leqslant 1-9/R^2\leqslant\rho(x)\leqslant 1+9/R^2\leqslant 1+6/R\leqslant 2\equiv\rho_+.$$

Наконец, соотношение (3.16) дает нам оценку $\beta_-\equiv(2/3)^{1/3}\leqslant e^{-\beta(x)}\leqslant$ $\leqslant 2^{1/3}\equiv\beta_+$.

Суммируя сказанное, получаем утверждение леммы, при указанных λ^* и n и неравенство

$$N=(3/2)(3/2)^{2/3}\cdot 2\cdot(4/3)\cdot 3^{1/3}<16\leqslant(2/3)^2R^2=n. \qquad \square$$

Перейдем теперь к доказательству теорем 4 и 5. Заметим, что мы можем ограничиться только случаем $B=1$, так как к нему всегда можно перейти, рассматривая величины S/B вместо S. В этом случае, в силу леммы 7, теорема 4 вытекает из леммы 1 при $\alpha=(1/2)/(2/3)<1$, если выразить $\beta'(0)$ и $\lambda'''(0)$ при помощи формул (3.18).

Теорема 5 при $B=1$ также является немедленным следствием лемм 6 и 7 при указанных в (54) значениях λ^*, n и $\alpha^2=(1/10)/((2/3)\lambda^*)=$ $=3^{8/3}/20<27/28<1$. Чтобы показать это, нам достаточно убедиться, что в этом случае

$$g^{(1)}(x)-g^{(2)}(x)=O(|x|^3+1)n^{-1}. \tag{55}$$

Но последнее соотношение вытекает из (7) и (8), так как при выполнении условия (1.55), мы в силу (3.18) имеем

$$\lambda^{(j)\prime\prime\prime}(0)=-\Gamma,\quad \beta^{(j)\prime}(0)=\Gamma/2\quad \forall j.$$

Подставляя (55) в (42), получаем (1.56), что и требовалось.

Пусть S_1 и S_2 — две независимые случайные величины, принадлежащие классу $\mathscr{D}_0(R)$, а $S_0=S_1+S_2$. В этом случае плотность $p(x|y)$ условного распределения величины S_1 в точке x при условии, что $S_0=S_1+S_2=y$, очевидно, равна

$$p(x|y)=p_1(x)p_2(y-x)/p_0(y), \tag{1}$$

где $p_i(x)$ — плотность случайной величины S_i. (Здесь и далее, если не оговорено противное, индекс i пробегает значения 0, 1, 2.) Обозначим через $F(x\,|\,y)=\int\limits_{z<x} p\,(z\,|\,y)\,dz$ условную функцию распределения случайной величины S_1 при условии, что $S_0=y$. Нашей целью в этом пункте является получение оценок для функции $Q(x|y)$, являющейся решением уравнения

$$F(x|y)=\Phi(Q(x|y)).$$

Сохраним для S_i все обозначения, введенные ранее для величины S, но будем снабжать их дополнительным нижним индексом i (обозначения без индекса будем использовать для других величин). Положим

$$0<B_i\equiv(\mathbf{D}S_i)^{1/2}<\infty,\quad B\equiv B_1B_2/B_0. \tag{2}$$

Из более громоздкой, но значительно более точной леммы 4, приведенной ниже, вытекает

Теорема 6. *При сделанных выше предположениях и при*

$$|u|\leqslant RB^2/6,\quad |y|\leqslant RB^2/6,\quad RB\geqslant 4 \tag{3}$$

справедливы равенства:

$$F(u|y)=\Phi(v+g(v,\ y/B_0)/B_0+O(|u|^3+|y|^3+B^3)B^{-3}(RB)^{-2}), \tag{4}$$

$$F(u|y)=\Phi(v+O(u^2+y^2+B^2)B^{-2}(RB)^{-1}), \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} v=(u-\alpha_1y)/B,\quad \alpha_i=(B_i/B_0)^2,\quad \Gamma_{i,k}=\Gamma_iB_i^k,\\ g(v,\ w)=-w^2G_2-vwG_0(B/B_0)/2-v^2G_6/6-G_6/3+G_4/2,\\ G_0=(\Gamma_{1,4}+\Gamma_{2,4})B^2,\quad G_2=(\Gamma_{1,2}-\Gamma_{2,2})(B/B_0)^2,\\ G_4=(\Gamma_{1,4}-\Gamma_{2,4})B^2,\quad G_6=(\Gamma_{1,6}-\Gamma_{2,6})B^4. \end{gathered} \tag{6}$$

Пусть теперь $\left(S_1^{(1)},\ S_2^{(1)},\ S_0^{(1)}\right)$ и $\left(S_1^{(2)},\ S_2^{(2)},\ S_0^{(2)}\right)$ — две тройки случайных величин, причем $S_0^{(j)}=S_1^{(j)}+S_2^{(j)}\ \ \forall j$ и

$$0<\mathbf{D}S_i^{(1)}=B_i^2=\mathbf{D}S_i^{(2)}<\infty,\quad \mathbf{M}\left(S_i^{(1)}\right)^3=\Gamma_i=\mathbf{M}\left(S_i^{(2)}\right)^3\quad \forall i. \tag{7}$$

Сохраним для величин $S_i^{(j)}$ все обозначения, которые были и будут введены для величин S_i, но снабдим их дополнительным верхним индексом (j). Предположим, конечно же, что при всех j величины $S_1^{(j)}$ и $S_2^{(j)}$ независимы и принадлежат классу $\mathscr{D}_0(R)$.

Теорема 7. *При сделанных предположениях справедливо равенство*

$$F^{(1)}(u|y^{(1)})=F^{(2)}(u+\alpha_1(y^{(2)}-y^{(1)})+G(u)/2+O(\varepsilon(u))|y^{(2)}), \tag{8}$$

если только

$$|u|\leqslant RB^2/36,\quad |y^{(1)}|\leqslant RB^2/36,\quad |y^{(2)}|\leqslant RB^2/36,\quad RB\geqslant 12, \tag{9}$$

где

$$\varepsilon(u)=(|u|^3+|y^{(1)}|^3+|y^{(2)}|^3+B^3)/(B^3(RB)),$$

$$G(u)=[(y^{(2)}/B_0)^2-(y^{(1)}/B_0)^2]G_2+(u-\alpha_1y^{(1)})[(y^{(2)}/B_0)-(y^{(1)}/B_0)]G_0/B_0, \tag{10}$$

причем

$$|G(u)|\leqslant|y^{(1)}-y^{(2)}|(|u|+2|y^{(1)}|+|y^{(2)}|)(B_0)^{-2}(2R)^{-1}. \tag{11}$$

Замечание 5. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих условиям: $\mathbf{M}\xi=0$, $\mathbf{D}\xi=1$, $\mathbf{M}\xi^3=\gamma$ и (1.44). Пусть $S_1=\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\xi_j$, $S_2=\sum\limits_{m+1\leqslant j\leqslant 2m}\xi_j$. Как следует из замечания 2, в этом случае найдутся числа $m_0(\mathcal{F})<\infty$ и $R(\mathcal{F})>0$ такие, что $S_i=S_{i,m}\in\mathcal{D}(R(\mathcal{F}))$ при $m\geqslant m_0(\mathcal{F})$. Следовательно, при указанных m и R выполнены все условия теоремы 6. В этом случае (5) можно переписать в виде

$$F(u|y)=\Phi((u-y/2)(m/2)^{-1/2}+\theta C_1(\mathcal{F})(u^2+y^2+m)m^{-3/2}). \tag{12}$$

Так как теперь $G_k=0$ при $k\neq 0$ и $B^2=m/2$, то (4) и (6) превратятся в

$$F(u|y)=\Phi(v-\gamma vy/(4m)+\theta C(\mathcal{F})(|u|^3+|y|^3-m^{3/2})m^{-5/2}),$$

где $v=(u-y/2)(m/2)^{-1/2}$.

Соотношение (12) получено в [5].

Отметим, что если $\{\xi_k^{(j)}\}$ — две последовательности, удовлетворяющие условиям замечания 5, то при $y=y^{(1)}=y^{(2)}$ соотношение (10) имеет особенно простой вид.

Замечание 6. Пусть выполнены условия теоремы 6. Введем в рассмотрение две независимые величины $S_1(h)$ и $S_2(h)$, имеющие распределения, являющееся преобразованиями Крамера распределения величин S_1 и S_2 при одном и том же h. Обозначим через $p_h(x|y)$ условную плотность распределения величины $S_1(h)$ при условии, что $S_0(h)=S_1(h)+S_2(h)=y$. В силу (1), (1.13) и равенства $\Lambda_0(h)=\Lambda_1(h)+\Lambda_2(h)$ мы получаем

$$p(x|y)=p_h(x|y). \tag{13}$$

Подставляя теперь в (13) значение $h=H$, равное решению уравнения

$$\mathbf{M}S_0(H)=A_0(H)=y, \tag{14}$$

мы приводим теорему 6 к частному случаю, когда $y=0$, но для случайных величин $S_i(H)$.

При $y=0$ доказать теорему 6 проще, но тогда возникнет проблема приведения получившегося для $S_i(H)$ решения к решению для S_i.

Указанный прием не сокращает доказательства теоремы 5, но оно становится идейно более понятным. Но мы не пойдем по этому пути, так как он требует введения значительно большего числа обозначений, чем в предлагаемом ниже доказательстве.

Приступим к доказательству теоремы 6. Вместо случайных величин S_i всегда можем изучать RS_i. Поэтому далее, не уменьшая общности, предполагаем, что $R\equiv 1$, не оговаривая этого больше. Так как условие $S\in\mathcal{D}(1)$ жестче, чем (1.29) при $R\pm 1$, можно для $S=S_1$ и $S=S_2$ использовать результаты п. 2.3 при $R=\pm 1$, что и будем ниже очень часто делать.

Отметим, что справедливы соотношения

$$B\leqslant B_i\leqslant B_0,\quad 2^{1/2}B\leqslant B_0\leqslant 2^{1/2}\max_{i=1,2}B_i, \tag{15}$$

$$B_1^{-2}+B_2^{-2}=B^{-2},\quad B_1^2+B_2^2=B_0^2, \tag{16}$$

которые вытекают из (2) и равенства $\mathbf{D}S_0=\mathbf{D}S_1+\mathbf{D}S_2$. Далее, верны также неравенства

$$|\Gamma_{i,k}|\leqslant B_i^{2-k}/2\leqslant B^{2-k}\quad \forall k\geqslant 2, \tag{17}$$

$$|K_i(\pm 1)|\leqslant B_i^2/4. \tag{18}$$

Действительно, при $i=1$ и 2 эти неравенства следуют из условия $S_i\in\mathcal{D}(1)$ и (3.4), а при $i=0$ — из тождеств $\Gamma_0=\Gamma_1+\Gamma_2$, $K_0(h)=K_1(h)+K_2(h)$ и (16). В частности, из (15)—(17) мы получаем оценку

$$|G_k|\leqslant 1/2\quad \forall k. \tag{19}$$

Так как для характеристических функций величин $S_i(h)$ справедливо неравенство

$$|f(t, h)| = |f_1(t, h) f_2(t, h)| \leqslant \min_{i=1,2} |f_i(t, h)|,$$

то из условия $S_i \in \mathscr{D}(1)$ и определения $U(R)$ имеем

$$U_0(\pm 1) \leqslant \min_{i=1,2} U_i(\pm 1) \leqslant \left(B_0 2^{-1/2}\right)^3. \tag{20}$$

При получении последней оценки мы также использовали второе соотношение в (15).

Из теоремы 2, формул (1.50) и (15) для $S_i \in \mathscr{D}(1)$ получаем

$$p_i(x_i) = \varphi(0) \exp(-\lambda_i(x_i) - \beta_i(x_i))(1 + 9\theta B^{-2}), \tag{21}$$

$$p_i(x_i + z_i) \leqslant \varphi(0) \exp(-\lambda_i(x_i) - \beta_i(x_i) - z_i H_i(x_i))(1 + 6/B) \tag{22}$$

при $|x_i| \leqslant (2/3) B_i^2$, всех z_i, $i = 1, 2$. Так как условие (18) выполнено при $i = 0$ и гарантирует справедливость (1.29) в этом случае, мы можем воспользоваться утверждением теоремы 3 при $S = S_0$ и $R = 1$. Имеем

$$p_0(y) = \varphi(0) \exp(-\lambda_0(y) - \beta_0(y)) \rho_0(y) \quad \text{при} \quad |y| \leqslant (2/3) B_0^2, \tag{23}$$

причем в силу (1.27), (1.32), (18) и (20)

$$|\rho_0(y) - 1| \leqslant \delta_{0,K}(y) \leqslant \max\{B_0 U_0(\pm 1) + 32 B_0^{-4} K_0(\pm 1)\} \leqslant$$
$$\leqslant B_0 2^{3/2} B_0^{-3} + 8B_0^2/B_0^4 \leqslant 12 B_0^{-2} \leqslant 3/4,$$

так как $B_0 \geqslant B \geqslant 4$. Приведенная только что цепочка неравенств показывает, что

$$\rho_0(y) = \exp(O(B^{-2})), \tag{24}$$

если только y удовлетворяет ограничению из (23).

При некоторых a и $\sigma > 0$ введем в рассмотрение случайную величину $S = (S_1 - a)/\sigma$ и обозначим через $p(x)$ условную плотность распределения величины S при условии, что $S_0 = y$. В этом случае в силу (1)

$$p(x) = \sigma p(a + \sigma x | y) = \sigma p_1(a_1 + x\sigma) p_2(a_2 - x\sigma)/p_0(a_0), \tag{25}$$

где
$$a_1 = a, \quad a_2 = y - a, \quad a_0 = y. \tag{26}$$

Символом $F(x)$ мы будем далее обозначать функцию распределения, соответствующую плотности $p(x)$. В силу (25)

$$F(u) = F(a + \sigma u | y). \tag{27}$$

Заметим, что если выполнено условие

$$|a_i| + \delta |x| \leqslant (2/3) B_i^2, \quad i = 1, 2, \tag{28}$$

то из (16) и (26) имеем $|y| = |a_0| \leqslant |a_1| + |a_2| \leqslant (2/3) B_0^2$. Таким образом, при выполнении (28) мы можем использовать (21), (22) и (23) для $x_1 = a_1 + \sigma x$, $x_2 = a_2 - \sigma x$, $z_1 = \sigma z$, $z_2 = -\sigma z$. Подставляя (21)—(23) в (25), получаем

$$p(x) = \varphi(x) e^{-\lambda(x) - \beta(x)} \rho(x), \tag{29}$$

$$p(x + z) \leqslant \varphi(0) \exp(-\lambda(x) - \beta(x) - z\lambda'(x)) \rho_+ \tag{30}$$

при
$$\lambda(x) = \lambda_1(a_1 + x\sigma) + \lambda_2(a_2 - x\sigma) - \lambda_0(a_0), \tag{31}$$

$$\beta_0(x) = \beta_1(a_1 + x\sigma) + \beta_2(a_2 - x\sigma) - \beta_0(a_0) - \ln \sigma, \tag{32}$$

$$\rho_+ = (1 + 6/B)^2/\rho_0(y), \tag{33}$$

$$\rho_- = (1 - 9B^{-2})^2/\rho_0(y) = \rho(x) \leqslant (1 + 9B^{-2})^2/\rho_0(y). \tag{34}$$

В частности, из (24) и (34) следует, что

$$\rho(x) = \exp(O(B^{-2})) \quad \text{при} \quad B \geqslant 4; \tag{35}$$

а из (32) и (3.16) при $S=S_1$ и $S=S_2$ вытекает

$$(2/3)^{2/3} \leqslant \exp(-\beta(x)-\beta_0(a_0)-\ln\sigma) \leqslant 2^{2/3}. \qquad (36)$$

Отметим, что при выводе (30) из (22) мы использовали равенство $\lambda'(x)=\sigma H_1(a_1+x\sigma)-\sigma H_2(a_2-x\sigma)$, которое просто получается из (31) и (3.7). Более того, дифференцируя k раз равенство (31) и (32), находим, что

$$\lambda^{(k)}(x)=\sigma^k\left[\lambda_1^{(k)}(a_1+x\sigma)+(-1)^k\lambda_2^{(k)}(a_2-x\sigma)\right], \qquad (37)$$

$$\beta^{(k)}(x)=\sigma^k\left[\beta_1^{(k)}(a_1+x\sigma)+(-1)^k\beta_2^{(k)}(a_2-x\sigma)\right]. \qquad (38)$$

Подставив теперь оценку (3.16) для $S=S_1$ и $S=S_2$ в (37) при $k=2$ и учитывая (16), имеем

$$\lambda_-\equiv\sigma^2B^{-2}(2/3)^{2/3}\leqslant\lambda''(x)\leqslant\sigma^2B^{-2}2^{2/3}\equiv\lambda_+. \qquad (39)$$

Далее, применяя лемму 3.7 для $S=S_1$ и $S=S_2$ и учитывая неравенства (15) и (18), мы из (37) при $k=4$ получим

$$\lambda^{\mathrm{IV}}(x)=\sigma^4O(B^{-6}), \qquad (40)$$

а из (38) при $k=2$ находим

$$\beta''(x)=\sigma^2O(B^{-4}). \qquad (41)$$

Аналогично из леммы 3.6 и (37) при $k=2$ мы имеем

$$\lambda'''(x)=\sigma^3O(B^{-4}), \qquad (42)$$

а из (38) при $k=1$ вытекает

$$\beta'(x)=\sigma O(B^{-2}). \qquad (43)$$

Таким образом, доказана

Лемма 1. *Если выполнено условие* (28), *то справедливы соотношения* (29)—(43).

Выберем теперь числа a и σ, а следовательно и a_1, a_2 в (26), специальным образом. Пусть $H\equiv H_0(y)$ — решение уравнения (14). Положим

$$a_1=a\equiv A_1(H),\quad a_2=y-a,$$
$$\sigma\equiv B(H)\equiv B_1(H)B_2(H)/B_0(H). \qquad (44)$$

В силу (14) и равенства $\Lambda_0(h)=\Lambda_1(h)+\Lambda_2(h)$ имеем

$$a_i=A_i(H),\quad \lambda(0)=0. \qquad (45)$$

Так как функция $H_i(\cdot)$ является обратной к $A_i(\cdot)$, то

$$H_i(a_i)=H\quad\forall i. \qquad (46)$$

В частности, из (46), (3.7) и (37) при $k=1$ вытекает

$$\lambda'(0)=\sigma(H-H)=0. \qquad (47)$$

Из (44), (46) и (3.8) по аналогии с равенствами (16) имеем

$$\sigma^{-2}=B^{-2}(H)=B_1^{-2}(H)+B_2^{-2}(H)=\lambda_1''(a_1)+\lambda_2''(a_2). \qquad (48)$$

В частности, из (48), (16) и (3.16) при $S=S_1$ и $S=S_2$ получаем

$$(2/3)^{2/3}B^{-2}\leqslant\sigma^{-2}\leqslant2^{2/3}B^{-2}. \qquad (49)$$

Нам потребуется

Лемма 2. *Если* $|y|\leqslant(2/3)B_0^2$, *то*

$$|a_i|\leqslant2|y|(B_i/B_0)^2. \qquad (50)$$

Доказательство. Так как при указанных y и $R=1$ для $S=S_0$ выполнено в силу (18) условие (1.29), то из леммы 3.3 и (1.22) вытекает

$$|H|\leqslant(3/2)|y|B_0^{-2}. \qquad (51)$$

Так как $|H| \leqslant 1$, то из леммы 3.2 при $R=1$ и $S=S_i$ следует

$$|A_i(H)| \leqslant (4/3)\,|H|\,B_i^2.$$

Подставляя первое из полученных соотношений во второе и используя (45), мы получаем (50). □

Лемма 3. *Если*

$$|y| \leqslant B_0^2/11, \quad n^{1/2} \equiv (6/11)\,B^2/\sigma, \quad B \geqslant 4, \tag{52}$$

то плотность $p(x)$ *удовлетворяет всем условиям леммы* 4.1. *Кроме того, в этом случае справедливы соотношения* (4.37) *и* (4.38) *при*

$$\lambda_+/\lambda_- = \beta_+/\beta_- = 3^{2/3}, \quad \rho_+/\rho_- = (1+6/B)^2(1-9B^{-2})^{-2}. \tag{53}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу (50) и (52) условие $|x| \leqslant n^{1/2}$ достаточно для выполнения (28) и что $n \geqslant B^2/6 > 1$ при $B \geqslant 4$, как следует из (49). В этом случае в силу леммы 1 выполнение условий (4.1) и (4.2) вытекает из (29), (30) и (35). Подставляя (49) в (40)—(43), находим

$$|\lambda^{\mathrm{IV}}(x)| + |\beta''(x)| = O(B^{-2}),$$

$$|\lambda'''(x)| + |\beta'(x)| = O(B^{-1}),$$

откуда следует справедливость (4.3) в нашем случае. Аналогично из соотношений (39) и (49) вытекает (4.5). Чтобы проверить (4.4), надо воспользоваться равенствами (45), (47) и заметить, что $\lambda''(0)=1$ в силу формул (48) и (37) при $k=2$, а $\beta(0)=0$, так как (45) и (46) дают равенство $\beta_i(a_i)=\ln B_i(H)$.

Таким образом, все условия (4.1)—(4.5) действительно выполнены. Соотношения (53) следуют из (39), (36) и, соответственно, (33) и (34). □

В силу леммы 2 и соотношений (15)

$$|x| \leqslant (|u| + 2|y|)/\sigma \quad \text{при} \quad x=(u-a)/\sigma, \tag{54}$$

если только $|y| \leqslant (2/3)\,B_0^2$. Из этого неравенства и (15), очевидно, получаем, что следующее условие

$$|y| \leqslant \alpha(2/11)B^2, \quad |u| \leqslant \alpha(2/11)B^2, \quad 0<\alpha<1, \tag{55}$$

является достаточным для справедливости оценок

$$|y| \leqslant \alpha B_0^2/11, \quad |x| \leqslant \alpha(6/11)\,B^2/\sigma, \quad 0<\alpha<1. \tag{56}$$

Из этого факта, из (27) и лемм 3 и 4.1 вытекает следующее утверждение, превосходящее по точности теорему 6.

Лемма 4. *Если для фиксированного* α *выполнены условия* (55) *или* (56), *то при* $x=(u-a)/\sigma$ *справедливо равенство*

$$F(x) = F(a+x\sigma\,|\,y) = \Phi(x+g(x)+O(B^{-2}(1+|x|)^{-1})), \tag{57}$$

где $g(x)$ *выражается через* $\lambda(x)$ *и* $\beta(x)$ *(см.* (31) *и* (32)*) по формулам, приведенным в лемме* 4.1. *В частности,*

$$g(x) = x^2\lambda'''(0)/\sigma + \lambda'''(0)/3 + \beta'(0) + O(|x|^3+1)B^{-2}. \tag{58}$$

Чтобы получить теперь теорему 6, нам осталось выразить $\lambda'''(0)$, $\beta'(0)$ и x в (57) и (58) через Γ_i, y и $u=a+x\sigma$. Для этого понадобится несколько вспомогательных утверждений, которые мы сейчас и докажем. Ниже всюду, не оговаривая, будем считать выполненным условие (3) и предполагать, что $R=1$. Чтобы избежать громоздких выражений, положим $b=B_0$ и будем использовать обозначения α_i, $\Gamma_{i,k}$, G_k и v, введенные в формулировке теоремы 6.

Лемма 5.

$$a = \alpha_1 y + y^2 b^{-2} G_2/2 + O(y^3 b^{-4}), \tag{59}$$

$$a_i = \alpha_i y + O(y^2 b^{-2}) = O(y), \quad i=1,\ 2. \tag{60}$$

Доказательство. Из неравенств (3) и (51) следует, что $|H| \leqslant 1$, а потому мы можем воспользоваться леммой 3.1 при $R=1$ и $S=S_1$. Из

(3.3), (18) и (15) паходим

$$a=\alpha_1 b^2 H + H^2\Gamma_1/2 + O(H^3 b^2). \qquad (61)$$

В силу (3) и (3.19) для $S=S_0$ и $x=y$ имеем

$$H\equiv H_0(y) = yb^{-2} - y^2\Gamma_{0,6}/2 + O(y^3 b^{-6}). \qquad (62)$$

Из формул (3), (17) и (62) вытекает, что

$$H = yb^{-2} + O(y^2 b^{-4}) = O(yb^{-2}),$$

а потому

$$H^2 = y^2 b^{-4} + O(y^3 b^{-6}).$$

Подставляя теперь (62) и два последних соотношения в (61) и учитывая соотношения (15) и (17) при $k=2$, мы получаем

$$a = \alpha_1 y - \alpha_1 y^2 \Gamma_{0,4}/2 + y^2\Gamma_1 b^{-4}/2 + O(y^3 b^{-4}). \qquad (63)$$

Чтобы привести (63) к виду (59), нам достаточно воспользоваться тождествами (16) и $\Gamma_0=\Gamma_1+\Gamma_2$, из которых имеем $\Gamma_1-\alpha_1\Gamma_0 = G_2 b^2$. Из (59) вытекает (60), если воспользоваться неравенствами (3), (15) и (19). □

Лемма 6. *Если* $k=O(1)$, *то*

$$\sigma^k = B^k(1+(k/2)yb^{-2}G_0 + O(y^2B^{-4})), \qquad (64)$$

$$\sigma^k = B^k(1+O(yB^{-2})) = O(B^k). \qquad (65)$$

Доказательство. Подставляя в (48) разложения (3.20) при $S=S_1$ и $x=a_i$ и учитывая (15), (16) и (18), имеем

$$\sigma^{-2} = B^{-2} - a_1\Gamma_{1,6} - a_2\Gamma_{2,6} + O(|a_1|^2+|a_2|^2)B^{-6}. \qquad (66)$$

Оценивая a_i в (66) по формуле (60) и используя (15), (17) и (19), находим, что

$$B^2\sigma^{-2} = 1 - yb^{-2}G_0 + O(y^2B^{-4}) = 1 + O(yB^{-2}). \qquad (67)$$

В силу неравенства (49) мы можем применить лемму 4.2 при $1+\varepsilon = B^2\sigma^{-2}$ и $m=-k/2$, из которой и из (67) получаем (64) и (65). □

Лемма 7.

$$\lambda'''(0) = -G_6/B + O(yB^{-3}), \qquad (68)$$

$$\beta'(0) = G_4/(2B) + O(yB^{-3}). \qquad (69)$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (37) для $k=3$ и (3.19) при $S=S_i$ и $a=a_i$. Учитывая (18) и (15), имеем

$$\lambda'''(0) = \sigma^3[-\Gamma_{1,6}+\Gamma_{2,6}+O(|a_1|+|a_2|)B^{-6}]. \qquad (70)$$

Подставляя теперь (60) и (65) в (70) и используя (17), мы получаем (68).

Аналогично из равенства (38) при $k=1$ и (3.22) вытекает, что

$$\beta'(0) = \sigma[\Gamma_{1,4}/2 - \Gamma_{2,4}/2 + O(|a_1|+|a_2|)B^{-4}], \qquad (71)$$

причем мы опять использовали (18) и (15). Применяя (60) и (65), мы из (71) выводим (69).

Лемма 8.

$$x = v - vyb^{-2}G_0/2 - y^2b^{-2}B^{-1}G_2 + O(|u|y^2+|y|^3)B^{-5}, \qquad (72)$$

$$x^k = v^k + O(|u|^k|y| + |y|^{k+1})B^{-2-k}, \quad k=1,\ 2. \qquad (73)$$

Доказательство. Из (59) следует

$$x\equiv (u-a)/\sigma = (B/\sigma)(v - y^2b^{-2}B^{-1}G_2/2 + O(y^3B^{-5})).$$

Подставляя в это выражение (64) и (65), получим (72) и (73) при $k=1$, если только воспользуемся неравенствами (15), (19) и

$$B|v| = |u-\alpha_1 y| \leqslant |u|+|y|. \qquad (74)$$

В силу условий (3) случай $k=2$ в (73) сводится к $k=1$. □

Из соотношений (57), (73) и леммы 7 имеем

$$g(x) = -v^2G_6/(6B) - G_6/(3B) + G_4/(2B) + O(|u|^3+|y|^3+B^3)B^{-5}. \qquad (75)$$

При оценке остатка в последнем соотношении мы использовали также (19), (74) и элементарное неравенство $|c|d^2 \leqslant |c|^3 + |d|^3$.

Заметим, что условия (3) гарантируют нам выполнение условий (55) при $\alpha = 11/12 < 1$. Таким образом, при выполнении условий теоремы 6 справедливо (57). Подставляя теперь (72) и (75) в (57), мы получаем требуемые соотношения (4) и (6), а из них, из (3), (19) и (74) — более простую оценку (5).

Теорема 6, таким образом, доказана полностью. Отметим теперь, что, оценивая константы в (53), мы из лемм 3 и 4.6 находим, что справедлива

Лемма 9. *Если* $|y| \leqslant (2/11)B^2$ *и* $B \geqslant 12$, *то плотность* $p(x)$ *удовлетворяет условиям* (4.1)—(4.5), (4.37) и (4.38) *при*

$$n = (6/11)^2 B^4/\sigma^2, \quad \lambda^* = 3^{-5/3}.$$

Кроме того, в этом случае верно неравенство $N < (1/4)B^4/\sigma^2 < n$.

При выводе этого утверждения из леммы 3 мы использовали также соотношения (15) и (39).

Перейдем к доказательству теоремы 7. Будем снабжать введенные ранее величины $p(x)$, $F(x)$, $g(x)$ и σ верхним индексом, чтобы указать, к которой из троек случайных величин они в данной ситуации относятся. В этом случае из лемм 9 и 4.6 следует, что для фиксированного α, $0 < \alpha < 1$, и

$$\mu(x) = O(g^{(1)}(x) - g^{(2)}(x)) + O(B^{-2})$$

верно равенство

$$F^{(1)}(x) = F^{(2)}(x + \mu(x)) \tag{76}$$

при

$$|y| \leqslant (2/11)B^2, \quad |x| \leqslant \lambda^* \alpha^2 (6/11) B^2/\sigma^{(1)}. \tag{77}$$

Из (54) мы немедленно получаем, что условие (9) достаточно для выполнения (77) при $\alpha^2 = (3/36)/(\lambda^*(6/11)) < 23/24 < 1$. Полагая $x = (u - a^{(1)})/\sigma^{(1)}$ в (76) и используя представление (27), находим, что доказана

Лемма 10. *Если выполнены условия* (9), *то при* $x = (u - a^{(1)})/\sigma^{(1)}$ *справедливо соотношение*

$$F^{(1)}(u|y^{(1)}) = F^{(2)}(u - a^{(1)} + a^{(2)} + x(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}) + \sigma^{(2)}\mu(x)|y^{(2)}). \tag{78}$$

Так как G_k и x в силу (7) не зависят от (j), из (75) следует

$$\mu(x) = O(\varepsilon(u)/B). \tag{79}$$

Далее, из лемм 5, 6 и 8 мы находим соответственно

$$a^{(2)} - a^{(1)} = V_a + O(|y^{(1)}|^3 + |y^{(2)}|^3)/B^4, \tag{80}$$

$$\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)} = BV_\sigma + O(|y^{(1)}|^2 + |y^{(2)}|^2)/B^3 = O(|y^{(1)}| + |y^{(2)}|)/B^2, \tag{81}$$

$$x = (u - \alpha_1 y^{(1)})/B + O(|u|^2 + |y^{(1)}|^2)/B^3, \tag{82}$$

где

$$V_a = \alpha_1(y^{(2)} - y^{(1)}) + [(y^{(2)})^2 - (y^{(1)})^2] b^{-2} G_2/2,$$

$$V_\sigma = B(y^{(2)} - y^{(1)}) b^{-2} G_0/2.$$

Подставляя (79)—(82) в (78), имеем

$$F^{(1)}(u|y^{(1)}) = F^{(2)}(u + V_a + (u - \alpha_1 y^{(1)}) V_\sigma + O(\varepsilon(u))|y^{(2)}).$$

Расписывая это соотношение более подробно, мы получаем, что оно эквивалентно (8) и (10). А так как (11) немедленно следует из (10) и (19), то теорема 7 доказана полностью.

2.6. Некоторые свойства классов $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}_0$

Сохраним все обозначения и предположения из п. 2.1. Простые критерии принадлежности классу $\mathscr{D}(R)$ можно получать из следующего утверждения.

Лемма 1. *Справедливы неравенства* (1.11) *и* (1.12). *Кроме того,*

$$K(\pm R) \leqslant 16 \sum \mathbf{M} |\xi_j|^4 \exp(|R\xi_j|), \tag{1}$$

$$K(\pm R) \leqslant 16R^{-1} \sum \mathbf{M} |\xi_j|^3 \exp(2|R\xi_j|). \tag{2}$$

Доказательство. Чтобы показать выполнение (1.11) и (1.12), нам достаточно последовательно воспользоваться при $\xi = \xi_j$ и $k = 3, 4$ следующими известными соотношениями:

$$\mathbf{M}|\xi(h) - \mathbf{M}\xi(h)|^k \leqslant 2^k \mathbf{M}|\xi(h)|^k,$$

$$\mathbf{M}|\xi(h)|^k = \mathbf{M}|\xi|^k e^{h\xi}/\mathbf{M}e^{h\xi},$$

$$\mathbf{M}e^{h\xi} \geqslant e^{h\mathbf{M}\xi} \geqslant 1,$$

$$\max_{0 \leqslant h/R \leqslant 1} e^{h\xi} = \max\{1, e^{R\xi}\}.$$

Соотношение (1) следует из (1.12), а (2) — из (1) и неравенства $|R\xi| \leqslant e^{|R\xi|}$. □

Особенно простой критерий для принадлежности к $\mathscr{D}(R)$ дает

Лемма 2. *Если* $\mathbf{M}\xi_j = 0 \quad \forall j$ *и выполнено условие*

$$64R^2 \mathbf{M}|\xi_j|^4 \exp(|R\xi_j|) \leqslant \mathbf{D}\xi_j \quad \forall j \tag{3}$$

или условие

$$\mathbf{P}(|\xi_j| \leqslant 1/(9R)) = 1 \quad \forall j, \tag{4}$$

то $S = \xi_1 + \ldots + \xi_m \in \mathscr{D}(R)$.

Доказательство. Заметим, что из (4) следует (3), так как в этом случае при $\xi = \xi_j$ справедливо неравенство

$$64R^2\xi^4 e^{|R\xi|} \leqslant (8/9)^2 \xi^2 e^{1/9} \leqslant \xi^2.$$

А если выполнено (3), то из (1) вытекает оценка $4K(\pm R) \leqslant \mathbf{D}\xi_1 + \ldots$ $\ldots + \mathbf{D}\xi_m$, что доказывает требуемое утверждение. □

Так как $\Lambda(h) = \int\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} hA(th)\,dt$, то из леммы 3.2 следует

Лемма 3. *Если* $S \in \mathscr{D}(R)$, *то*

$$\ln \mathbf{M}e^{hS} = (1 + \theta/3)h^2\mathbf{D}S/2 \quad \text{при} \quad |h| \leqslant R.$$

Условимся далее обозначать $K(R, S)$ вместо $K(R)$, чтобы указать, к которой из случайных величин относится обозначение $K(R)$. Аналогично введем величины $f(t, h, S)$ и $U(R, S)$. Из определений величин $K(R)$ и $U(R)$ очевидно вытекает

Лемма 4. *Если* S_1 *и* S_2 *независимые случайные величины, принадлежащие* $\mathscr{D}(R)$, *то* $S_1 + S_2 \in \mathscr{D}(R)$. Кроме того,

$$K(R, S_1 + S_2) = K(R, S_1) + K(R, S_2), \tag{5}$$

а если $U(R, S_i) < \infty \quad \forall i$, *то*

$$U(R, S_1 + S_2) \leqslant \min_{i=1,2} U(R, S_i). \tag{6}$$

Выделим классы $\mathscr{D} \equiv \mathscr{D}(1)$ и $\mathscr{D}_0 \equiv \mathscr{D}_0(1)$. Заметим, что если $S \in \mathscr{D}(R)$, то $RS \in \mathscr{D}$.

Простой критерий принадлежности классу $\mathscr{D}_0$ дает

Лемма 5. *Если случайная величина* S *принадлежит классу* $\mathscr{D}$ *и не зависит от величины* S_0, *имеющей нормальное распределение с нулевым средним, то* $S + S_0 \in \mathscr{D}_0$ *при*

$$\sigma^2 \equiv \mathbf{D}S_0 \geqslant 8 + 48|\ln \mathbf{D}(S + S_0)|. \tag{7}$$

Доказательство. В силу свойств нормального распределения мы имеем

$$K(h, S_0) = 0, \quad |f(t, h, S_0)| = \exp(-t^2\sigma^2/2) \ \forall h. \tag{8}$$

Из (5), первого соотношения в (8) и (1.48) следует, что $S + S_0 \in \mathscr{D}(R)$, а из (6) и второго равенства в (8) вытекает

$$U(\pm 1) \equiv U(\pm 1, S+S_0) \leqslant U(\pm 1, S_0) \leqslant \int\limits_{|t| \geqslant 1/4} \exp(-t^2\sigma^2/2)\, dt.$$

Из этого соотношения, (7) и неравенств $\sigma^2 \geqslant 8$ и $1-\Phi(x) \leqslant x^{-1}\varphi(x)$ при $x > 0$ получаем

$$U(\pm 1) \leqslant 8\sigma^{-2} \exp(-\sigma^2/32) \leqslant \exp(-\sigma^2/32).$$

Две последние оценки немедленно дают неравенство

$$(\mathbf{D}(S+S_0))^{3/2} U(\pm 1) \leqslant (\mathbf{D}(S+S_0))^{3/2} \exp(-\sigma^2/32).$$

Подставляя в это соотношение σ^2, удовлетворяющее (7), мы находим, что выполнено (1.49), а потому $S+S_0 \in \mathscr{D}_0$. □

Во многом аналогичной является

Лемма 6. *Если случайная величина S принадлежит классу $\mathscr{D}$ и не зависит от последовательности $\nu_1, \nu_2, \ldots$ независимых случайных величин, имеющих равномерные распределения на интервале $[-1/9, 1/9]$, то $S+Z_m \in \mathscr{D}_0$ при*

$$m \geqslant C_0(1 + |\ln \mathbf{D}(S+Z_m)|), \tag{9}$$

где $Z_m = \nu_1 + \ldots + \nu_m$, а C_0 — абсолютная постоянная.

Доказательство. Ясно, что ограниченная случайная величина $\nu(h) \equiv \nu_1(h)$ (см. (1.4)) при любом h имеет ограниченную (константой $(9/2)e^{|h/9|}$), а следовательно и интегрируемую в квадрате, плотность. Таким образом, в силу равенства Парсеваля ее характеристическая функция интегрируема в квадрате, а потому выполнено условие (1.44) при $k=2$. Следовательно, в силу замечания 2 справедливо соотношение (1.47), которое в этом случае можно переписать в виде

$$U(\pm 1, Z_m) \leqslant C_1 e^{-cm}, \tag{10}$$

где $C_1 < \infty$ и $c > 0$ — абсолютные (так как у ν фиксировано распределение) постоянные. Воспользовавшись теперь при $S_1 = S$ и $S_2 = Z_m$ неравенством (6), мы находим

$$U(R) \equiv U(R, S+Z_m) \leqslant U(R, Z_m). \tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем

$$(\mathbf{D}(S+Z_m))^{3/2} U(\pm 1) \leqslant (\mathbf{D}(S+Z_m))^{3/2} C_1 e^{-cm} \leqslant 1 \tag{12}$$

при $m \geqslant (3/(2c)) \ln \mathbf{D}(S+Z_m) + c^{-1} \ln C_1$. Этот факт показывает, что при $C_0 = \max\{3/(2c),\ c^{-1}|\ln C_1|\}$ условие (7) гарантирует выполнение (12), а следовательно, и (1.49).

Чтобы закончить доказательство леммы, нам осталось проверить, что $S+Z_m \in \mathscr{D}$. Но этот факт вытекает из леммы 3, так как $\nu_j \in \mathscr{D}$ в силу (4).

Докажем теперь утверждение, в некотором смысле обратное лемме 4.

Лемма 7. *Если величина $S \in \mathscr{D}(2R)$, причем $\mathbf{D}S \geqslant 2n \geqslant 2$ и $R \geqslant 1$, то ее можно представить в виде суммы $S = S_0 + S_1 + \ldots + S_n$ независимых случайных величин $S_0, S_1, \ldots, S_n$ таким образом, что*

$$S_i \in \mathscr{D}(R) \quad \forall i, \quad 1 \leqslant \mathbf{D}S_i \leqslant 5/4 \quad \forall i \neq 0. \tag{13}$$

Доказательство. Если $S \in \mathscr{D}(2R)$, то в силу (1.48) $\max\limits_{|h| \leqslant 2} 16R^2 \times K(h, S) \leqslant \mathbf{D}S$. Следовательно, можно представить S в виде суммы независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$, удовлетворяющих условию

$$12 \max_{|h| \leqslant 2R} R^2 \sum \mathbf{M}\, |\xi_{j,h}|^4 \leqslant \sum \mathbf{D}\xi_j = \mathbf{D}S. \tag{14}$$

(Мы используем обозначение $\xi_{j,h}$ из п. 2.1 и, как и там, опускаем пределы суммирования 1 и m.)

Разобьем теперь случайные величины $\{\xi_j\}$ на две группы, полагая $J=\left\{j\colon 4R^2\max\limits_{|h|\leqslant 2}\mathbf{M}\,|\,\xi_{j,h}|^4\leqslant \mathbf{D}\xi_j\right\}$. Легко понять, что в этом случае в силу (14)

$$\sum_{j\not\equiv J}\mathbf{D}\xi_j\leqslant 4R^2\sum\mathbf{M}\,|\,\xi_{j,h}\,|\leqslant\sum\mathbf{D}\xi_j/3. \tag{15}$$

Заметим, что из определения J и неравенства $\mathbf{M}|\xi_{j,\,0}|^4=\mathbf{M}|\xi_j|^4\geqslant\mathbf{D}^2\xi_j$ вытекает

$$\xi_j\in\mathscr{D}(R),\quad \mathbf{D}\xi_j\leqslant 1/(4R^2)\leqslant 1/4\quad \forall j\in J. \tag{16}$$

В силу (15)

$$\sum_{j\in J}\mathbf{D}\xi_j\geqslant(2/3)\sum\mathbf{D}\xi_j\geqslant(2/3)\,2n>(5/4)\,n. \tag{17}$$

Из (16) и (17) немедленно следует, что мы можем разбить множество J на непересекающиеся подмножества $J(0)$, $J(1)$, ..., $J(n)$ таким образом, что

$$1\leqslant\sum_{j\in J(i)}\mathbf{D}\xi_j\leqslant 5/4\quad \forall j\neq 0. \tag{18}$$

Положим теперь

$$S_0=\sum_{j\not\equiv J}\xi_j+\sum_{j\in J(0)}\xi_j,\quad S_i=\sum_{j\in J(i)}\xi_j\quad \forall i\neq 0. \tag{19}$$

В этом случае формулы (18) и (19) гарантируют выполнение второго соотношения в (13), а (16) и лемма 4 дают первое условие в (13) при $i\neq 0$. Нам осталось проверить только, что $S_0\in\mathscr{D}(R)$. Из (17)—(19) вытекает, что $\mathbf{D}(S-S_0)\leqslant(5/4)n\leqslant(2/3)\mathbf{D}S$, а потому $\mathbf{D}S_0\geqslant\mathbf{D}S/3$. Из последнего неравенства и (14) следует

$$4R^2K(\pm 2R,\,S_0)\leqslant 4R^2K(\pm 2R,\,S)\leqslant\mathbf{D}S/3\leqslant\mathbf{D}S_0,$$

а это с лихвой гарантирует, что $S_0\in\mathscr{D}$. □

В следующем утверждении для некоторых распределений из класса $\mathscr{D}$ мы построим близкие к ним гладкие и ограниченные распределения.

Лемма 8. *Если $S\in\mathscr{D}(8)$ и $3/4\leqslant\mathbf{D}S\leqslant 5/4$, то существует такая случайная величина W, что*

$$W\in\mathscr{D},\quad \mathbf{D}W=\mathbf{D}S,\quad \mathbf{M}W^3=\mathbf{M}S^3,\quad |W|=O(1)\quad \textit{п. н.} \tag{20}$$

и W можно представить в виде $W=Z+\nu$, где Z и ν — независимы, а ν *имеет равномерное распределение на* $(-1/9,\,1/9)$.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{D}S=B^2$, $\mathbf{M}S^3=\Gamma$ и заметим, что в силу (3.4) и условий леммы

$$3/4\leqslant B^2\leqslant 5/4,\quad |\Gamma|\leqslant B^2/2R=B^2/16. \tag{21}$$

Положим $n=5\cdot 2^8$, $\sigma^2=(\mathbf{D}S-\mathbf{D}\nu)=(B^2-3^{-5})$, $a_\pm=(\Gamma^2\sigma^{-4}/4+\sigma^2/n)^{1/2}\pm\pm\Gamma\sigma^{-2}/2$ и введем в рассмотрение последовательность ξ, ξ_1, ..., ξ_n независимых и одинаково распределенных случайных величин, принимающих только два значения. Именно:

$$\mathbf{P}(\xi=a_+)=a_-/(a_++a_-),\quad \mathbf{P}(\xi=a_-)=a_+/(a_++a_-).$$

В этом случае

$$\mathbf{M}\xi=0,\quad \mathbf{D}\xi=\sigma^2/n,\quad \mathbf{M}\xi^3=\Gamma/n. \tag{22}$$

Несложные вычисления с учетом (21) дают

$$\begin{aligned}|a_\pm|&\leqslant|\Gamma|\sigma^{-2}+\sigma n^{-1/2}\leqslant\\ &\leqslant B^2(B^2-3^{-5})^{-1}/16+Bn^{-1/2}\leqslant\\ &\leqslant 5/(4\cdot 16)+(5/(4n))^{1/2}<1/9.\end{aligned} \tag{23}$$

Полагая теперь $Z=\xi_1+\ldots+\xi_n$, мы из (22) получим

$$\mathbf{D}W=\mathbf{D}S,\quad \mathbf{M}W^3=\Gamma,$$

а из (23) находим, что $W=O\,(1)$ и $W\in\mathscr{D}$ в силу леммы 2. □

Следующее утверждение является простым следствием лемм 6 и 8.

Лемма 9. *Пусть S, W_1, ..., W_m — последовательность независимых случайных величин, причем $S \in \mathscr{D}$, а каждая из величин $W = W_j$ удовлетворяет всем условиям леммы 8. Тогда $S_m \equiv S + W_1 + \ldots + W_m \in \mathscr{D}_0$, если только*

$$m \geqslant C_0(1 + |\ln \mathbf{D}S_m|),$$

где $C_0 < \infty$ — абсолютная постоянная.

3. Оценки в принципе инвариантности при существовании экспоненциальных моментов

Предлагаемая нами конструкция для построения на одном вероятностном пространстве, о которой говорилось во введении, будет приведена в п. 3.5, а важный вспомогательный результат, полученный при ее помощи,— в п. 3.6. Так как эта конструкция представляет собой усиление метода Комлоша — Майора — Тушнади, то в п. 3.3 мы уточним, что понимается под этим методом, а в п. 3.4 получим при его помощи оценку в принципе инвариантности для гладких распределений.

Конструкции пп. 3.3 и 3.5 существенно используют понятие квантильного преобразования, поэтому мы напомним его в п. 3.1. В п. 3.2 приведем оценки для таких преобразований, которые необходимы при доказательстве результатов пп. 3.4 и 3.6.

Теорема 1, приведенная во введении, является следствием несколько более общего утверждения, которое будет доказано в п. 3.7 как комбинация результатов пп. 3.4 и 3.6.

3.1. Квантильные преобразования

Пусть U — некоторая случайная величина с непрерывной функцией распределения F_U, а F_V — произвольная фиксированная функция распределения. Определим случайную величину V как (любое) решение уравнения

$$F_V(V) = F_U(U). \tag{1}$$

Хорошо известно (это нетрудно проверить и непосредственно), что полученная таким образом случайная величина V имеет F_V своей функцией распределения, а величина $F_U(U)$ равномерно распределена на $[0, 1]$. Построенную величину V мы будем (следуя [5]) называть квантильным преобразованием величины U.

Рассмотрим теперь более сложную конструкцию. Предположим, что нам требуется построить две независимые случайные величины V_1 и V_2 с заранее заданными распределениями. Поскольку мы знаем совместное распределение величин V_1 и V_2, то, в частности, нам известны и распределение величины $V_0 = V_1 + V_2$, и (условная) функция распределения $F_V(\cdot|y)$ случайной величины V_1 при условии $V_0 = y$.

Предположим теперь дополнительно, что случайная величина V_0 с требуемым распределением уже построена, причем таким образом, что она не зависит от некоторой величины U с непрерывной функцией распределения F_U. Определим в этом случае V_1 как (любое) решение уравнения

$$F_V(V_1|V_0) = F_U(U). \tag{2}$$

Так как $F_U(U)$ равномерно распределена на $[0, 1]$, то при фиксированном значении $V_0 = y$ случайная величина V_1 имеет $F_V(\cdot|y)$ своей функцией распределения. Следовательно, по формуле полной вероятности определенные выше величины V_1 и V_0 имеют желаемое совместное распределение. В частности, V_1 и $V_2 \equiv V_0 - V_1$ являются независимыми случайными величинами с заданными распределениями.

Далее, если U_1 и U_2 — две независимые случайные величины, имеющие плотности распределения (относительно меры Лебега), то условная функция распределения $F_U(\cdot|y)$ случайной величины U_1 при условии $U_0 \equiv U_1 + U_2 = y$ является непрерывной функцией распределения и справедливо равенство

$$F_U(x \mid y) = \int_{z<x} (p_1(z)\, p_2(y-z)/p_0(y))\, dz,$$

где $p_i(\cdot)$ — плотность величины U_i, $i = 0, 1, 2$.

Рассмотрим еще более сложную конструкцию. Пусть нам задан случайный вектор W, не зависящий от независимых случайных величин U_1 и U_2, имеющих плотности распределения относительно меры Лебега, и требуется построить две независимые случайные величины V_1 и V_2 с заданными распределениями. Предположим, что случайная величина $V_0 \equiv V_1 + V_2$ уже построена, причем таким образом, что она является функцией только от W и $U_0 \equiv U_1 + U_2$. В этом случае при фиксированных значениях W и $U_0 = y$ случайная величина U_1 имеет определенную выше функцию $F_U(\cdot|y)$ своей (непрерывной) функцией распределения, а потому величина $U' = F_U(U_1|U_2)$ при любом фиксированном значении U_0 имеет равномерное распределение на $[0, 1]$. Таким образом, величина U' не зависит от W и U_0, а значит, и от V_0. Следовательно, если мы для некоторой непрерывной функции распределения F_U определим случайную величину U как (любое) решение уравнения $F_U(U) = U'$ (проще всего, конечно, положить $U = U'$), то окажутся выполненными предположения рассмотренной выше более простой конструкции условного квантильного преобразования.

Суммируя сказанное, мы из равенства (2) немедленно получаем, что при сделанных в предыдущем абзаце предположениях случайная величина V_1, определенная как (любое) решение уравнения

$$F_V(V_1|V_0) = F_U(U) = F_U(U_1|U_0), \tag{3}$$

имеет требуемое совместное распределение со случайной величиной $V_2 = V_0 - V_1$. Случайную величину V_1 будем называть квантильным преобразованием величины U_1, условным относительно U_0 и V_0.

Отметим, что если V_1 — квантильное преобразование величины U_1, условное относительно U_0 и V_0, то по построению $V_2 = V_0 - V_1$ является квантильным преобразованием величины $U_2 = U_0 - U_1$, условным относительно тех же U_0 и V_0.

Таким образом, квантильное преобразование позволяет нам строить случайные величины с заданными распределениями, а условное квантильное преобразование дает возможность определять пары независимых величин с требуемыми распределениями, когда их сумма уже построена.

Заметим, что если мы хотим для построенной по формуле (1) величины V иметь представление вида $U = G(V)$, нам достаточно доказать, что $F_V(x) = F_U(G(x))$. Аналогично, чтобы для V_1, заданной по формуле (3), было справедливо равенство $U = G(V_1, V_0, U_0)$, надо получить тождество $F_V(x|y_1) = F_U(G(x, y_1 y_2)|y_2)$. В важных частных случаях требуемые представления для функций G получены в теоремах 4—7. Для удобства ссылок мы в п. 3.2 приведем оценки для квантильных преобразований, вытекающие из этих представлений.

3.2. *Оценки для квантильных преобразований*

В п. 2.1 были введены понятия классов распределений $\mathcal{D}(R)$ и $\mathcal{D}_0(R) < \mathcal{D}(R)$ при $R > 0$. Как следует из результатов п. 2.6, если $S = \xi_1 + \ldots + \xi_m$, где $\xi_1, \ldots, \xi_m$ независимы и имеют нулевые средние, то для того, чтобы величина S принадлежала $\mathcal{D}(R)$, достаточно выполнения следующего условия:

$$0 < 64R^2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \mathbf{M}\,|\xi_j|^3 \exp(2R\,|\xi_j|) \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \mathbf{D}\xi_j < \infty. \tag{1}$$

(Отметим, что условие (1) близко в некотором смысле к необходимому условию для выполнения $S \in \mathcal{D}(R)$.) Относительно класса гладких распределений $\mathscr{D}_0(R)$ подчеркнем, что если $S \in \mathscr{D}(R)$, то, прибавив к S независящую от нее нормально распределенную случайную величину с дисперсией порядка $\ln \mathbf{D}S$, мы получим величину из класса $\mathscr{D}_0(R)$.

Укажем, что, если $S \in \mathscr{D}(R)$, то $\mathbf{M}S = 0$, $0 < \mathbf{D}S < \infty$, и что случайная величина, имеющая невырожденное нормальное распределение с нулевым средним, принадлежит классу $\mathscr{D}(R)$ при всех R. Напомним, что если $S \in \mathscr{D}(R)$ (или $S \in \mathscr{D}_0(R)$), то $RS \in \mathscr{D}(1) \equiv \mathscr{D}$ (или соответственно $RS \in \mathscr{D}_0(1) \equiv \mathscr{D}_0$) и что $\mathscr{D}(R) \subset \mathscr{D}$ и $\mathscr{D}_0(R) \subset \mathscr{D}_0$ при $R \geqslant 1$.

Леммы 1—4 далее вытекают соответственно из теорем 4—7 и замечания в конце предыдущего пункта.

Пусть U и V — две случайные величины, удовлетворяющие условиям:

$$\mathbf{D}U = B^2 = \mathbf{D}V, \quad U,\ V \in \mathscr{D}_0. \tag{2}$$

Лемма 1. *Если случайная величина V является квантильным преобразованием величины U, имеющей нормальное распределение, и выполнено условие* (2), *то*

$$U - V = O(1 + |V/B|^2) \tag{3}$$

при $|V| \leqslant B^2/2$ *и* $B \geqslant 4$. (4)

Лемма 2. *Если случайная величина V является квантильным преобразованием величины U, удовлетворяющей условию* (2) *и условию*

$$\mathbf{M}V^3 = \mathbf{M}U^3, \tag{5}$$

то

$$U - V = O(1 + |V/B|^3)/B \tag{6}$$

при

$$|V| \leqslant B^2/10 \quad и \quad B \geqslant 6. \tag{7}$$

Пусть теперь нам даны две тройки U_1, U_2, $U_0 \equiv U_1 + U_2$ и V_1, V_2, $V_0 \equiv V_1 + V_2$ случайных величин, причем каждая пара (U_1, U_2) и (V_1, V_2) состоит из независимых величин. Предположим, что выполнены условия

$$\mathbf{D}U_i = \mathbf{D}V_i \quad \forall i,\ U_1,\ U_2,\ V_1,\ V_2 \in \mathscr{D}_0, \tag{8}$$

и положим

$$\alpha_i = \mathbf{D}V_i/\mathbf{D}V_0, \quad B^2 = \mathbf{D}V_1 \cdot \mathbf{D}V_2/\mathbf{D}V_0.$$

Лемма 3. *Пусть U_1 и U_2 имеют нормальные распределения и выполнены условия* (8). *Тогда, если V_1 является квантильным преобразованием величины U_1, условным относительно U_0 и V_0, то*

$$V_1 - U_1 = \alpha_1(V_0 - U_0) + O(1 + |V_1/B|^2 + |V_0/B|^2) \tag{9}$$

при

$$|V_1| \leqslant B^2/6, \quad |V_0| \leqslant B^2/6, \quad B \geqslant 4. \tag{10}$$

Лемма 4. *Предположим, что выполнены условия* (8) *и*

$$\mathbf{M}(V_i)^3 = \mathbf{M}(U_i)^3 \quad \text{при} \quad i = 1,\ 2. \tag{11}$$

Тогда, если V_1 является квантильным преобразованием величины U_1, условным относительно U_0 и V_0, то

$$V_1 - U_1 = \alpha_1(V_0 - U_0) + g(V_1, V_0, U_0) + O(\varepsilon(V_1, V_0, U_0)) \tag{12}$$

при

$$|V_1| \leqslant B^2/36, \quad |V_0| \leqslant B^2/36, \quad |U_0| \leqslant B^2/36, \quad B \geqslant 12, \tag{13}$$

где

$$|g(V_1, V_0, U_0)| \leqslant |V_0 - U_0|(|V_1| + 2|V_0| + |U_0|)/(4B^2), \tag{14}$$

$$\varepsilon(V_1, V_0, U_0) = (1 + |V_1/B|^3 + |V_0/B|^3 + |U_0/B|^3)/B. \tag{15}$$

3.3 Метод Комлоша — Майора — Тушнади для гладких распределений

Условимся сначала об обозначениях. Если нам в дальнейшем будет задана последовательность величин, например $T_1, \ldots, T_n$, обозначенных одной и той же буквой (быть может, с верхними индексами) и занумерованная, начиная с единицы, будем обозначать

$$T(l) = \sum_{j \leqslant l} T_j, \quad l = 0, \ldots, n. \tag{1}$$

Если будут заданы две такие последовательности одинаковой длины, например $T_1, \ldots, T_n$ и $S_1, \ldots, S_n$, будем полагать

$$\Delta(T, S) = \max_{l \leqslant n} |T(l) - S(l)|. \tag{2}$$

Если же последовательность $T_1, \ldots, T_n$ имеет число членов, являющееся степенью двойки, например $n = 2^N$, то мы будем обозначать

$$T(i, m) = T(i2^{N-m}) - T((i-2)2^{N-m}) \tag{3}$$

и предполагать, что i изменяется от 1 до 2^m, а m — от 0 до N. Отметим, что в этом случае имеет место следующее полезное равенство:

$$T(i, m) = T(2i-1, m+1) + T(2i, m+1). \tag{4}$$

Пусть теперь $Y_1, \ldots, Y_n$, $n = 2^N$,— последовательность независимых случайных величин, имеющих плотности распределения (относительно меры Лебега), а нам требуется построить последовательность $X_1, \ldots, X_n$ независимых случайных величин с заданными распределениями (а значит, известны и распределения величин $X(j, m)$). Идея метода Колмоша — Майора — Тушнади состоит в следующем. При каждом $m = 0, 1, \ldots$ $\ldots, N$ мы построим последовательность $\mathscr{X}_m = \{X(1, m), \ldots, X(2^m, m)\}$ независимых случайных величин, имеющих требуемые распределения и являющихся функциями только от случайных величин $\mathscr{Y}_m = \{Y(1, m), \ldots$ $\ldots, Y(2^m, m)\}$. В этом случае при $m = N$ получим требуемую последовательность $\{X_j\} = \mathscr{X}_N$.

При $m = 0$ искомую случайную величину $V = X(1, 0)$ определим при помощи квантильного преобразования случайной величины $U = Y(1, 0)$. Если при некотором $m < N$ мы уже построили нужную последовательность $\mathscr{X}_m$, то построим $\mathscr{X}_{m+1}$, определяя при каждом $i = 1, \ldots, 2^m$ случайную величину $V_1 = X(2i-1, m+1)$ как квантильное преобразование величины $U_1 = Y(2i-1, m+1)$, условное относительно величин $V_0 =$ $= X(i, m)$ и $U_0 = Y(i, m)$, и доопределяя $V_2 \equiv X(2i, m+1) = V_0 - V_1$ в соответствии с (4).

Покажем теперь, что построенная последовательность $\mathscr{X}_{m+1}$ является требуемой. Заметим, что по построению каждая пара $X_{i,m} =$ $= \{X(2i-1, m+1), X(2i, m+1)\}$ имеет требуемое совместное распределение и является функцией только от величин $Y(2i-1, m+1)$, $Y(i, m)$ и $X(i, m)$, поэтому $\mathscr{X}_{m+1}$ есть функция от $\mathscr{Y}_{m+1}$. Обозначим через $F(x, i)$ известную заранее функцию распределения случайной величины $X(i, m+1)$ и при некоторых x_i введем события $A_i = \{X(i, m+1) < x_i\}$. Нам осталось доказать только, что при всех x_i

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_i A_i\Big) = \prod_i \mathbf{P}(A_i) \equiv \prod_i F(x_i, i), \tag{5}$$

т. е., что величины $\mathscr{X}_m$ имеют нужное совместное распределение.

В силу свойств условного квантильного преобразования справедливы равенства:

$$\mathbf{P}(A_{2i-1}A_{2i}|\mathscr{Y}_m) = \mathbf{P}(A_{2i-1}A_{2i}|X(i, m)), \tag{6}$$

$$\mathbf{P}(A_{2i}A_{2i-1}) = F(x_{2i-1}, 2i-1)F(x_{2i}, 2i). \tag{7}$$

Так как при фиксированном $\mathscr{Y}_m$ случайные величины $Y(2i-1, m+1)$ (условно) независимы, построенные выше пары $X_{i,m}$ также (условно) независимы, т. е.

$$\mathbf{P}\Big(\prod_i A_i\Big) = \mathbf{MP}\Big(\prod_i (A_{2i-1}A_{2i}) \mid \mathscr{Y}_m\Big) = \mathbf{M}\prod_i \mathbf{P}(A_{2i-1}A_{2i} \mid \mathscr{Y}_m). \tag{8}$$

Подставляя теперь (6) в (8) и пользуясь независимостью величин $X(1, m), \ldots, X(2^m, m)$, мы получаем

$$\mathbf{P}\Big(\prod_i A_i\Big) = \prod_i \mathbf{P}(A_{2i-1}A_{2i}). \tag{9}$$

Из (9) и (7) следует требуемое утверждение (5).

Таким образом, мы показали корректность конструкции. Получим теперь удобное представление для $|X(l)-Y(l)|$. Обозначим через $\tau_{l,m}$ единственное целое число, удовлетворяющее соотношению

$$(\tau_{l,m}-1)2^{N-m} < l \leqslant \tau_{l,m}2^{N-m}, \tag{10}$$

и положим $X_{l,k}=X(\tau_{l,k}, k)$.

Лемма 1. *Если $1\leqslant l\leqslant n$ делится на 2^{N-m}, то*

$$|X(l)-Y(l)| \leqslant \sum_{0<k\leqslant m} |X_{l,k}-Y_{l,k}|. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\mu_k=\mu_{l,k}$ — ближайшее к l число среди чисел, делящихся на 2^{N-m}. (Если таких чисел два, то мы условимся выбирать меньшее.) Обозначим через δ_k знак разности $\mu_k-\mu_{k-1}$. Из (10) следует, что при одном из трех значений $\delta_k=0, +1, -1$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} &\mu_k=\mu_{k-1}+\delta_k 2^{N-k},\\ &x_k\equiv X(\mu_k)-X(\mu_{k-1})=\delta_k X_{l,k},\\ &y_k\equiv Y(\mu_k)-Y(\mu_{k-1})=\delta_k Y_{l,k}. \end{aligned} \tag{12}$$

Чтобы получить теперь неравенство (11), достаточно подставить разности соотношений из (12) в следующее очевидное тождество:

$$X(\mu_m)-Y(\mu_m)=X(\mu_0)-Y(\mu_0)+\sum_{1\leqslant k\leqslant m}(x_k-y_k)$$

и заметить, что $\mu_m=l$, а $X(\mu_0)-Y(\mu_0)$ равно либо $X_{l,0}-Y_{l,0}$, либо нулю.

Лемма 2. *При всех l и m случайные величины*

$$X_{l,0}-X_{l,1},\quad X_{l,1}-X_{l,2},\quad \ldots,\quad X_{l,m-1}-X_{l,m}$$

и $X_{l,m}$ независимы в совокупности.

Доказательство. Заметим, что $X_{l,k}$ можно представить (см. (3) и (10)) в виде суммы величин X_j по $j\in J(k)=\{j:(\tau_{l,k}-1)2^{N-k}<j\leqslant \leqslant \tau_{l,k}2^{N-k}\}$. Так как $J(0)\supset J(1)\supset\ldots\supset J(m)$, то множества $J(0)\backslash J(1), \ldots, J(m-1)\backslash J(m)$ и $J(m)$ не пересекаются. Из этого факта и из равенства (4) вытекает, что случайные величины, перечисленные в формулировке леммы, действительно независимы, так как являются суммами величин X_j по j, принадлежащим указанным непересекающимся интервалам. □

Замечание 7. В описанном методе построения случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ по $Y_1, \ldots, Y_n$ формально не налагается каких-либо ограничений на распределения величин $\{X_j\}$. Однако, чтобы этот метод давал хорошие оценки в принципе инвариантности, нам придется требовать от этих распределений выполнения некоторых условий гладкости (или решетчатости (см. [5, 6])). Так как в противном случае мы можем столкнуться с ситуацией, когда по величине $X(0,0)=X_1+\ldots+X_n$, построенной на первом шаге этой конструкции, уже можно однозначно определить значения всех величин X_j, например, если X_j принимает только значения вида $\pm(1+2^{-j})$. И для условных квантильных преобразований мы не будем иметь хороших оценок, так как соответствущие условные распределения в этом случае вырождены. Для одинаково распределенных величин этой ситуации удается избежать, потому что по сумме таких величин мы, даже определив их значения, не можем сказать, которая из X_j это значение приняла. (Это есть главная идея основного результата из [6].) Один из способов обойти эту трудность в общем случае мы укажем в п. 3.5.

3.4. Оценки в принципе инвариантности для гладких распределений

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — последовательность независимых случайных величин, а $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — последовательность независимых величин, имеющих нормальные распределения, причем

$$\mathbf{M}\xi_j=\mathbf{M}\eta_j=0,\quad \mathbf{D}\xi_j=\mathbf{D}\eta_j>0\quad \forall j. \tag{1}$$

Кроме того, на распределения величин ξ_j наложим следующее условие гладкости:

$$\xi(l)-\xi(k)\in\mathscr{D}_0(\lambda), \text{ если } \mathbf{D}(\xi(l)-\xi(k))\geqslant\varepsilon, \tag{2}$$

причем для удобства мы будем предполагать, что

$$\sigma^2\max_j \mathbf{D}\xi_j\leqslant\varepsilon\leqslant\mathbf{D}\xi(n)\equiv B^2. \tag{3}$$

(Обозначение $\xi(l)$ выше и $\eta(l)$ и $\Delta(\varepsilon,\eta)$ ниже вводятся в соответствии с равенствами (3.1) и (3.2).)

Теорема 8. *Если выполнены условия* (1), (2) *и* (3), *то случайные величины* $\xi_1,\ldots,\xi_n$ *можно задать на одном вероятностном пространстве со случайными величинами* $\eta_1,\ldots,\eta_n$ *таким образом, что*

$$\mathbf{M}e^{c\lambda\Delta(\xi,\eta)}\leqslant 1+\lambda B\exp(\lambda^2\varepsilon), \tag{4}$$

где $c>0$ — абсолютная постоянная.

Как будет показано в лемме 6, на самом деле константы перед B и ε в правой части неравенства (4) можно выбирать произвольными, изменяя при этом число $c>0$ в левой части.

Отметим, что условие (2) будет использоваться только в доказательстве леммы 8, а леммы 1—7 справедливы при замене (2) на более слабое ограничение:

$$\xi(l)-\xi(k)\in\mathscr{D}(\lambda), \text{ если } \mathbf{D}(\xi(l)-\xi(k))\geqslant\varepsilon. \tag{5}$$

В п. 3.7 мы покажем, что условие (2) можно заменить на (5) и в формулировке теоремы 8 (это является основной целью данной работы).

Так как вместо ξ_j всегда можно рассматривать величины $\lambda\xi_j$, то далее, не уменьшая общности, будем предполагать, что $\lambda=1$. В доказательстве будут использоваться очевидное неравенство

$$\mathbf{P}\left(\max_{i\in I}\zeta_i>x\right)\leqslant\sum_{i\in I}\mathbf{P}(\zeta_i>x) \tag{6}$$

и следующая элементарная

Лемма 1. *Если* $\mathbf{P}(|\zeta|>x)\leqslant K^2e^{-2x}$, *то* $\mathbf{M}e^{\alpha|\zeta|}\leqslant(2K)^\alpha$ *при* $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Доказательство. Интегрируя по частям, имеем

$$\mathbf{M}e^{|\zeta|}=1+\int\limits_{x>0}e^x\mathbf{P}(|\zeta|>x)\,dx\leqslant 1+\int\limits_{0<x\leqslant\ln K}e^x dx+\int\limits_{x>\ln K}e^xK^2e^{-2x}dx=2K.$$

Случай $\alpha<1$ вытекает из неравенства Гельдера $\mathbf{M}e^{\alpha|\zeta|}\leqslant(\mathbf{M}e^{|\zeta|})^\alpha$. □

Введем целое число $N=\max\{m\colon B^2\geqslant 2^m\max\{\varepsilon+\sigma^2, 4\sigma^2, 80\}\}$. Положим $b_m=B^2 2^{-m}$ и $b=b_N$ при $0\leqslant m\leqslant N$. А если $N<0$, то условимся полагать $b\equiv b_0\equiv b_N\equiv B^2$. Пусть

$$n_i=\min\{m:\mathbf{D}\xi(m)\geqslant ib_N\},\quad X_i=\xi(n_i)-\xi(n_{i-1}) \tag{7}$$

для $i=1,\ldots,2^N$. Аналогично введем $Y_i=\eta(n_i)-\eta(n_{i-1})$. Из определения b_m и выбора n_i в (7) вытекает, что

$$(3/4)b_m\leqslant\mathbf{D}X(i,m)=\mathbf{D}Y(i,m)\leqslant(5/4)b_m\quad\forall i\forall m, \tag{8}$$

$$\varepsilon\leqslant\mathbf{D}X_j\quad\forall i,\ \varepsilon\leqslant\mathbf{D}X(i,m)\quad\forall i\forall m. \tag{9}$$

Положим

$$X^*(j,m)=\max_j\{|\xi(j)-\xi(n_{i-1})|:n_{i-1}\leqslant j\leqslant\eta_i\} \tag{10}$$

и аналогично, заменяя ξ на η, определим величины $Y^*(j,m)$.

Лемма 2. *Если выполнены условия* (1) *и* (5), *то*

$$Q_m(x)\leqslant 2\exp(b_m-x)\quad\forall x, \tag{11}$$

$$Q_m(x)\leqslant 2\exp(-x^2/(4b_m))\ \text{при}\ |x|\leqslant 2b_m, \tag{12}$$

где

$$Q_m(x)=\max_i\{\mathbf{P}(X^*(i,m)>x),\quad\mathbf{P}(Y^*(i,m))>x\}.$$

Доказательство. Из (5) и (9) следует, что $X = X(i, m) \in \mathscr{D}$, а потому в силу леммы 2.6.3 имеем

$$\mathbf{M}e^{hX} \leqslant \exp((2/3)h^2\mathbf{D}X) \leqslant \exp(h^2 b_m) \text{ при } |h| \leqslant 1. \tag{13}$$

При выводе последнего соотношения мы использовали также правое неравенство в (8).

Далее, в силу (10) $X^* = X^*(i, m)$ является максимумом модуля последовательных сумм случайных величин, в сумме равных X. Учитывая (1), мы можем воспользоваться неравенством Колмогорова с экспоненциальным моментом, которое нам дает оценку

$$\mathbf{P}(X^* > x) \leqslant e^{-hx}\mathbf{M}e^{hX} + e^{-hx}\mathbf{M}e^{-hX}. \tag{14}$$

Подставляя теперь (13) в (14), находим, что

$$\mathbf{P}(X^* > x) \leqslant 2\exp(-hx + h^2 b_m) \quad \text{при} \quad |h| \leqslant 1. \tag{15}$$

Так как в силу нормальности Y_j неравенство (15) подавно верно при замене X^* на $Y^* = Y^*(j, m)$, то при $h > 1$ из (15) следует (11), а при $h = x/(2b_m)$ мы получим (12), если только заметим, что $|h| \leqslant 1$ при $|x| \leqslant 2b_m$.

Лемма 3. *Пусть* $Z(j, m) = \min\{X^2(j, m)/b_m, b_m\}$. *Тогда*

$$\max_{i,m} \mathbf{M}e^{Z(i,m)/8} \leqslant 2^{3/2}.$$

Доказательство. Нам достаточно проверить, что $\zeta = Z(i, m)/8$ удовлетворяет условию леммы 1 при $K^2 = 2$. Действительно, при $|x| \leqslant b_m/2$ мы из (12) имеем

$$\mathbf{P}(Z(i, m)/8 > x) \leqslant Q_m((8xb_m)^{1/2}) \leqslant 2e^{-2x},$$

так как в этом случае $(8xb_m)^{1/2} \leqslant 2b_m$. А при $x > b_m/8$ неравенство $\mathbf{P}(\zeta > x) \leqslant 2e^{-2x}$ выполняется автоматически, так как $Z(i, m) \leqslant b_m$. □

Положим

$$X^*(m) = \max_i X^*(i, m), \quad Y^*(m) = \max_i Y^*(i, m).$$

В силу (6) мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X^*(m) > x) &\leqslant 2^m Q_m(x), \\ \mathbf{P}(Y^*(m) > x) &\leqslant 2^m Q_m(x). \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что в силу (11) и (16) при $\zeta = X^*(m)/2$ $\zeta = Y^*(m)/2$ справедливо неравенство $\mathbf{P}(\zeta > x) \leqslant 2^{m+1}\exp(b_m - 2x)$, из которого и леммы 1 вытекает

Лемма 4. *Если выполнены условия* (1) *и* (5) *и* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$, *то*

$$\mathbf{M}\exp(\alpha X^*(m)) \leqslant (2^{m+3}\exp(b_m))^\alpha,$$
$$\mathbf{M}\exp(\alpha Y^*(m)) \leqslant (2^{m+3}\exp(b_m))^\alpha.$$

Нам потребуется

Лемма 5. *Если выполнены условия* (1) *и* (5), *то при любом задании величин* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *и* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *на одном вероятностном пространстве справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}e^{\Delta(\xi, \eta)/12} \leqslant 1 + B\exp(B^2/6). \tag{17}$$

Доказательство. Заметим, что при $\zeta = X^*(0)$ и $\zeta = Y^*(0)$ неравенство Колмогорова дает нам оценку $\mathbf{P}(\zeta > x) \leqslant \min\{B^2x^{-2}, 1\}$, из которой вытекает соотношение

$$\mathbf{M}|\zeta|^{3/2} = \int_{x>0} \mathbf{P}(\zeta > x)\, dx^{3/2} \leqslant \int_{0<x\leqslant B} dx^{3/2} + \int_{x>B} x^{-2}B^2(3/2)\,x^{1/2}dx = 4B^{3/2}.$$

С другой стороны, из неравенства Гельдера при $p = 3/2$ и $q = 3$ имеем

$$\mathbf{M}e^{\zeta/6} \leqslant 1 + \mathbf{M}\xi e^{\zeta/6}/6 \leqslant 1 + (\mathbf{M}\zeta^{3/2})^{2/3}(\mathbf{M}e^{3\xi/6})/6.$$

Два последних соотношения и лемма 4 при $m=0$ дают

$$\mathbf{M}e^{\zeta/6} \leqslant 1 + (4B^{3/2})^{2/3}(3\exp(B^2/2))^{1/3} \leqslant 1 + B\exp(B^2/6) \tag{18}$$

Воспользуемся теперь следующей грубой оценкой:

$$\Delta \equiv \Delta(\xi, \eta) \leqslant X^*(0) + Y^*(0) \tag{19}$$

и неравенством Гельдера

$$\mathbf{M}e^{\Delta/12} \leqslant (\mathbf{M}\exp(X^*(0)/6)\mathbf{M}\exp(Y^*(0)/6))^{1/2}.$$

Оценивая правую часть в последнем выражении при помощи (18), мы получаем (17).

Нам понадобится следующая тривиальная

Лемма 6. *Если для некоторых абсолютных констант $c_0 > 0$ и $K < \infty$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}\exp(c_0\Delta) \leqslant 1 + O(B^K)e^{O(b)}, \tag{20}$$

то, каковы бы ни были положительные абсолютные постоянные $C \leqslant K$, $C_1 < \infty$ и $C_2 < \infty$, найдется такая абсолютная постоянная $c > 0$, что

$$\mathbf{M}\exp(c\Delta) \leqslant 1 + C_1B^C\exp(C_2\varepsilon). \tag{21}$$

Если же дополнительно $B \geqslant 1$, то (21) верно при любом $C \geqslant K$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством

$$(1+x)^{\alpha\beta} \leqslant 1 + \alpha x^\beta \quad \text{при} \quad 0 < \alpha,\ \beta \leqslant 1,\ x \geqslant 0, \tag{22}$$

которое легко доказывается сравнением производных от обеих частей по x. Записывая теперь правую часть в (20) в виде $1 + C_3B^K\exp(C_4b)$ и пользуясь неравенством Гельдера, мы из (20) и (22) имеем

$$\mathbf{M}\exp(\alpha\beta c_0\Delta) \leqslant (\mathbf{M}\exp(c_0\Delta))^{\alpha\beta} \leqslant 1 + \alpha C_3B^{\beta K}\exp(\beta C_4b). \tag{23}$$

Чтобы из (23) получить (21), достаточно рассмотреть следующие два случая. Если $\varepsilon \geqslant 20$, то $b < 8\varepsilon$, и (21) вытекает из (23) при $\beta = \min\{C/K, 8C_4/C_2\}$, так как $B \geqslant \varepsilon^{1/2} > 1$. Если же $\varepsilon < 20$, то $b < 160$, и (21) следует из (23) при $\beta = C/K$ и $\alpha = (C_1/C_3)\exp(-160\beta C_4)$.

Последнее утверждение леммы 6 справедливо в силу неравенства $B^K \leqslant B^C$ при $0 \leqslant K \leqslant C$ и $B \geqslant 1$. □

В частности, из леммы 5 и 6 немедленно следует

Лемма 7. *Если выполнены условия (1), (3), (5) и $N < 0$, то справедливо утверждение теоремы 8.*

Заметим, что если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ заданы (любым способом) на одном вероятностном пространстве, то справедливо неравенство

$$\Delta = \Delta(\xi, \eta) \leqslant X^*(m) + Y^* + \Delta_m \quad \forall m, \tag{24}$$

где

$$\Delta_m = \max_i \Delta_{i,m}, \quad \Delta_{i,m} = |X(i2^{N-m}) - Y(i2^{N-m})|. \tag{25}$$

Приступим теперь к собственно доказательству теоремы 8. Зададим случайные величины $X_1, \ldots, X_{2N}$ на одном вероятностном пространстве с величинами $Y_1, \ldots, Y_{2N}$ методом, описанным в предыдущем пункте, и достроим случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ произвольным образом (см. замечание 8 в конце пункта). Чтобы воспользоваться теперь соотношением (24), нам в силу (25) необходимо получить «хорошие» оценки для $\Delta_{i,m}$ при всех i и m, чем мы сейчас и займемся.

Фиксируем некоторое число l вида $l = i2^{N-m}$ и положим для сокращения записи

$$X^{(k)} = X_{l,k}, \quad Y^{(k)} = Y_{l,k},$$

$$Z^{(m)} = \min\{|X^{(m)}|^2/b_m,\ b_m\},$$

$$Z^{(k)} = \min\{(X^{(k)} - X^{(k+1)})^2/b_{k+1},\ b_{k+1}\} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant k < m.$$

В этих обозначениях утверждение леммы 3.1 перепишется в виде

$$\Delta_{i,m} \leqslant \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} |X^{(k)} - Y^{(k)}| \equiv \delta_{i,m}. \tag{26}$$

Центральной в доказательстве теоремы 8 является

Лемма 8. *Если выполнены все условия теоремы* 8 *и*

$$X^*(m) \leqslant b_m/8, \quad m \geqslant 0, \tag{27}$$

то

$$\Delta_{i,m} \leqslant C\Bigl(m + \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} Z^{(k)}\Bigr). \tag{28}$$

Доказательство. Так как каждая из величин $X^{(k)}$ является суммой 2^{k-m} слагаемых вида $X(j, m)$, то из (27) следует, что

$$|X^{(k)}| \leqslant b_k/8 \leqslant \mathbf{D}X^{(k)}/6, \ k \leqslant m. \tag{29}$$

Отметим, что правое неравенство в (29) вытекает из соотношения (8).

Так как $X^{(0)} = X(0, 0)$ является квантильным преобразованием величины $Y^{(0)} = Y(0, 0)$, то для оценки разности $X^{(0)} - Y^{(0)}$ мы можем воспользоваться леммой 2.1 при $U = Y^{(0)}$ и $V = X^{(0)}$. В этом случае условие (2.1) вытекает из (2), (8) и (9), а (2.4) следует из (29), так как $b \geqslant 80 > 4^2$. Таким образом, соотношение (2.3) дает нам оценку

$$|X_0 - Y_0| = O(1 + (X^{(0)})^2/b_0). \tag{30}$$

Поскольку $X^{(k)}$ при $k > 0$, является квантильным преобразованием величины $Y^{(k)}$, условным относительно $Y^{(k-1)}$ и $X^{(k-1)}$, для оценки разности $X^{(k)} - Y^{(k)}$ мы можем воспользоваться утверждением леммы 2.3 при $V_1 = X^{(k)}$, $V_0 = X^{(k-1)}$, $U_1 = Y^{(k)}$, $U_0 = Y^{(k-1)}$. Заметим, что в силу (8)

$$\mathbf{D}X^{(k)}/\mathbf{D}X^{(k-1)} \leqslant ((5/4)b_k)/((3/4)b_{k-1}) = 5/6,$$

$$\mathbf{D}X^{(k)}\mathbf{D}(X^{(k-1)} - X^{(k)})/\mathbf{D}X^{(k-1)} \geqslant (3/4)b_k(3/4)b_k/(5/4)b_{k-1} = (9/80)b_{k-1},$$

а потому в обозначениях леммы 2.3

$$\alpha_1 \leqslant 5/6, \ B^2 \geqslant b_{k-1}/10 = b_k/5 \geqslant b/5 \geqslant 4^2. \tag{31}$$

Отметим теперь, что в рассматриваемом случае условие (2.8) следует из (2), (8) и (9), а условие (2.10) вытекает из (27) с учетом (29) и (31). Таким образом, мы можем переписать (2.9) в следующем виде:

$$|X^{(k)} - Y^{(k)}| \leqslant (5/6)|X^{(k-1)} - Y^{(k-1)}| + O(1 + (X^{(k)})^2/b_k + (X^{(k-1)})^2/b_{k-1}) \tag{32}$$

при $1 \leqslant k \leqslant m$, если еще учтем оценки из (31).

Суммируя теперь (30) и (32) по всем k и учитывая (26), мы получаем $\delta_{i,m} \leqslant (5/6)\delta_{i,m} + O(m + Z)$ при

$$Z = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} (X^{(k)})^2/b_k, \tag{33}$$

а потому

$$\Delta_{i,m} \leqslant \delta_{i,m} = 6O(m + Z). \tag{34}$$

Используя элементарное неравенство

$$(3/2)a^2 + 3b^2 - (a + b)^2 = (2^{-1/2}a - 2^{1/2}b)^2 \geqslant 0,$$

мы имеем

$$(X^{(k+1)})^2/b_{k-1} \leqslant (3/2)(X^{(k)})^2/b_{k-1} + 3(X^{(k-1)} - X^{(k)})^2/b_{k-1}. \tag{35}$$

Заметим теперь, что при выполнении неравенства (29) $(X^{(k-1)} - X^{(k)})^2 \leqslant Z^{(k)}b_k$ при $0 \leqslant k \leqslant m$ и $(X^{(m)})^2 \leqslant Z^{(m)}b_m$. Из этих соотношений, (33) и (35) мы, учитывая, что $b_{k-1} = 2b_k$, получаем

$$Z \leqslant (3/4)Z + (3/2) \sum_{0 \leqslant k < m} Z^{(k)} + Z^{(m)},$$

а потому

$$Z \leqslant 4 \cdot (3/2) \sum_{0 \leqslant k < m} Z^{(k)}.$$

Подставляя последнее выражение в (34), находим (28). □

Замечая, что в силу леммы 3.2 случайные величины $Z^{(0)}, \ldots, Z^{(m)}$ независимы, мы из (28) имеем

$$R_{i,m} = \mathbf{M} \exp(\Delta_{i,m}/(8C); \Omega(m)) \leqslant 2^{m/2} \prod_{0 \leqslant h \leqslant m} \mathbf{M} \exp(Z^{(h)}/8), \tag{36}$$

где событие $\Omega(m) = \{X^*(m) \leqslant b_m/8\}$. Так как каждая из величин $Z^{(k)}$ при некотором j, зависящем от k и l, представима в виде $Z^{(k)} = Z(j, k)$, то из условия (3), неравенства Чебышева и (36) следует

$$\mathbf{P}(\Delta_{i,m} > x; \Omega(m)) \leqslant e^{-x/(8C)} \cdot 2^{m/2+3m/2}, \tag{37}$$

если только выполнены условия леммы 3.

Лемма 9. *Если выполнены условия теоремы* 8 *и* $N \geqslant 0$, *то существует абсолютная постоянная* $c > 0$ *такая, что*

$$\mathbf{P}(\Delta > x) \leqslant 5 \cdot 2^{3N} \exp(-2cx + 2cb). \tag{38}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала основной случай, когда

$$2b_{m+1} \leqslant b_m \leqslant x \leqslant 2b_m, \quad 0 \leqslant m \leqslant N. \tag{39}$$

Из неравенства (24) при таких x имеем

$$\mathbf{P}(\Delta > x) \leqslant P_X + P_Y + P_0, \tag{40}$$

где $P_X = \mathbf{P}(X^*(m) > b_m/8)$, $P_Y = \mathbf{P}(Y^*(m) > b_m/8)$, $P_0 = \mathbf{P}(\Delta_m > b_m/2; \Omega_m)$. Из (15) и (12) следует

$$P_X + P_Y \leqslant 4 \cdot 2^m \exp(-b_m/(4 \cdot 8^2)), \tag{41}$$

а из (37) с учетом (6) и (25) вытекает

$$P_0 \leqslant 2^m \cdot 2^{2m} \exp(-b_m/(16C)). \tag{42}$$

Суммируя (40)—(42) и учитывая, что $m \leqslant N$, мы для x, удовлетворяющих (39), получим (38) при $c = (1/2) \min \{8^{-3}, (32C)^{-1}\}$.

Если же $x \geqslant 2b_0$, то неравенство (38) следует из (19) и (11), так как в этом случае

$$\mathbf{P}(\Delta > x) \leqslant 2Q(x/2) \leqslant 4 \exp(b_0/2 - x/2) \leqslant 4 \exp(-x/4).$$

А если $x \leqslant b_N = b$, то неравенство (38) выполняется автоматически, так как правая часть в нем больше единицы. □

Таким образом, в силу леммы 9 случайная величина $\zeta = 2c\Delta$ удовлетворяет всем условиям леммы 1, а потому

$$\mathbf{M}e^{2c\Delta} \leqslant 5^{1/2} 2^{3N/2} e^{cb} \equiv 5^{1/2} B^3 e^{cb} b^{-3/2} \tag{43}$$

при $N \geqslant 0$. Утверждение теоремы 8 следует при $N \geqslant 0$ из (43) и леммы 6, так как в этом случае $B^2 \geqslant b > 1$.

Замечание 8. В силу гладкости распределений величин η_j мы можем получить чуть более сильный результат, чем в теореме 8. Именно: при выполнении условий теоремы 8 существуют такие функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, $x \in R^n$, что случайные величины $\xi_1 = f_1(\eta), \ldots, \xi_n = f_n(\eta)$, где $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, независимы, имеют требуемые распределения и удовлетворяют (4).

Действительно, анализируя доказательство теоремы 8, видим, что мы построили случайные величины $X_1, \ldots, X_{2N}$ как функции от $Y_1, \ldots, Y_{2N}$, и не стали конкретизировать, как далее строим величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$, так как в силу леммы 4 это не играет роли (но тем самым мы не исключили возможности расширения вероятностного пространства).

Укажем теперь конкретный способ дальнейшего построения величин ξ_j, например при $k \equiv n_{i-1} < j < n_i$. Так как величины $\eta_1, \ldots, \eta_n$ имеют плотности, мы можем продолжить построение методом предыдущего пункта. Определим ξ_{k+1} как квантильное преобразование величины η_{k+1}, условное относительно $Y_i = \eta(n_i) - \eta(k)$ и $X_i = \xi(n_i) - \xi(k)$, а если мы задали величины $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_{k+j-1}$, то возьмем в качестве ξ_j квантильное преобразование величины η_j, условное относительно $\eta(n_i) - \eta(k + j - 1)$

и $\xi(n_i)-\xi(k+j-1)$. Т. е. случайные величины, дающие в сумме X_i, достраиваем по одной слева направо при всех i. А значит, в итоге все $\xi_1, \ldots, \xi_n$ являются функциями только от $\eta_1, \ldots, \eta_n$.

Заметим, что способ построения величин ξ_j по одной не дает хороших оценок близости к η_i, но в силу леммы 4 это не играет роли при $\mathbf{D}X_i = O(\varepsilon+1)$, когда $\lambda=1$.

3.5. Основная конструкция

Пусть, как и в п. 3.3, $Y_1, \ldots, Y_n$, $n=2^k$,— заданная последовательность независимых случайных величин, по которой требуется построить последовательность $X_1, \ldots, X_n$ независимых случайных величин таким образом, чтобы каждая из них, с одной стороны, имела фиксированное заранее распределение, а с другой — была бы функцией только от величин $Y_1, \ldots, Y_n$. При этом основное требование к такому построению состоит в том, что расстояние $\Delta(X, Y)$ должно быть в некотором смысле как можно меньше.

Как указано в замечании 7, приведенная в п. 3.3 конструкция без дополнительных предположений о распределениях величин X_j может не давать хороших оценок для $\Delta(X, Y)$. Поэтому укажем другой способ построения, который сложнее, но иногда позволяет получать оценки в более общих ситуациях, чем метод из п. 3.3. Но сначала методом п. 3.3 по $\{Y_j\}$ сконструируем последовательность $W_1, \ldots, W_n$ независимых случайных величин со специально подобранными гладкими распределениями, а требуемые величины $X_1, \ldots, X_n$ мы будем строить по $W_1, \ldots, W_n$.

Предлагаемую конструкцию лучше всего объяснять при помощи индукции по числу случайных величин. Если $k=O(1)$, то любой способ задания дает достаточно хорошие оценки для $\Delta(X, W)$ (см., например, лемму 4.5). Предположим теперь, что мы имеем «хороший» способ построения при всех $k \leqslant N-1$, и займемся описанием обещанной конструкции при $k=N$.

Фиксируем некоторое целое число A, $0<A\leqslant N$, и построим сначала по $W_1, \ldots, W_n$ методом п. 3.3 вспомогательную последовательность $Z_1, \ldots, Z_n$ независимых случайных величин, распределения которых мы выберем заранее следующим образом. Будем предполагать, что при i, не делящихся на 2^A, величины Z_i одинаково распределены с X_i, а при i, делящихся на 2^A, распределения этих величин специально подобраны и имеют плотности.

После того как $Z_1, \ldots, Z_n$ построены, положим $X_i=Z_i$ при i, не делящихся на 2^N, и обозначим $W_j^*=Z_{j2^A}$, $j=1, \ldots, 2^{N-A}$. В силу индукционного предположения можно по последовательности $\{W_j^*\}$ построить последовательность $\{X_j^*=X_{j2^A}\}$ независимых величин, имеющих требуемые распределения и являющихся функциями только от $W_1^*, \ldots$ $\ldots, W_{2^k}^*$, $k=N-A$. В силу последнего обстоятельства мы, таким образом, имеем два независимых семейства: $\mathscr{X}_A=\{X_i : i\neq j2^A\}$ и $\mathscr{X}^*=\{X_j^*=X_{j2^A}\}$ случайных величин, так как $\mathscr{X}_A$ и $\{W_j^*\}$ независимы по построению. Но так как каждое из семейств $\mathscr{X}_A$ и $\mathscr{X}^*$ состоит из независимых величин, имеющих желанные распределения, то мы, следовательно, построили нужный набор $\mathscr{X}_A \cup \mathscr{X}^*=\{X_1, \ldots, X_n\}$ величин.

Требуемая конструкция, таким образом, описана. Отметим, что при построении $\mathscr{X}^*$ по $\{W_j^*\}$ мы, конечно же, также будем использовать прием с введением вспомогательной последовательности, который каждый раз сокращает число еще не заданных величин X_j по крайней мере в два раза.

Основное преимущество описанного метода по сравнению с аналогичным из п. 3.3 состоит в том, что на каждом шаге мы должны строить по $\{W_j\}$ последовательность $\{Z_j\}$, в которой каждая 2^A-я величина имеет гладкое распределение. Т. е., в частности, имеют плотности распределения величины $Z(j, m)$ при $m \leqslant N - A$, которые играют основную роль при получении оценок для $\Delta(W, Z)$.

Замечание 9. Пусть независимые величины X_i удовлетворяют условию

$$X_i \in \mathscr{D},\ \mathbf{D}X_i \approx 1.$$

Нетрудно понять, что если мы применим теперь конструкцию данного пункта при $W_j = Y_j$, имеющих нормальные распределения, то из теоремы 8 мы сможем получить

$$\Delta(X,\ \ Z) \approx \ln n \approx N.$$

Повторяя это построение рекуррентно, найдем

$$\Delta(X,\ Y) \approx N + (N - A) + (N - 2A) + \ldots + 1 \approx N^2,$$

что хуже оценки

$$\Delta(X, Y) \approx N,$$

полученной в [6] для одинаково распределенных величин.

Чтобы избежать этого ухудшения, будем строить $\{X_j\}$ по последовательности величин $\{W_j\}$, у которых те же, что и у $\{X_j\}$, первые три (а не два) момента. В этом случае мы должны получить

$$\Delta(X, Z) \approx 1 \text{ и } \Delta(X, Y) \approx N.$$

Именно для достижения такой точности в оценках нам и потребовались очень хлопотно доказываемые оценки для квантилей в разделе 2.

Отметим еще, что предложенная выше конструкция представляет собой по сути добавление несколько необычного сглаживания к методу Комлоша — Майора — Тушнади. Стандартный же способ сглаживания не даст нужного эффекта, так как если, например, мы к каждой из X_i прибавим независимую, нормально распределенную величину ν_i с $\mathbf{D}\nu_i = \delta^2$, то, чтобы воспользоваться теоремой 8, нам необходимо, чтобы сумма $\ln n$ слагаемых принадлежала классу $\mathscr{D}_0$, т. е. надо

$$\delta^2 \ln n > 1.$$

С другой стороны, чтобы эти нормальные добавки не играли существенной роли, необходимо, чтобы

$$n\delta^2 < \ln n.$$

Поэтому такое стандартное сглаживание может давать эффект только для некоторых распределений, например имеющих абсолютно непрерывную компоненту (см. [6]).

3.6. Ключевая теорема

Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ и $X_1, \ldots, X_n$, $n = 2^N$,— две последовательности независимых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$3/4 \leqslant \mathbf{D}X_j = \mathbf{D}Y_j \leqslant 5/4, \quad X_j \in \mathscr{D}(8) \quad \forall j. \tag{1}$$

(Точнее, нам пока заданы только распределения величин $X_1, \ldots, X_n$.)

Теорема 9. *Если выполнено условие* (1), *то по последовательности независимых случайных величин* $Y_1, \ldots, Y_n$, *имеющих нормальное распределение, можно построить последовательность* $X_1, \ldots, X_n$ *независимых случайных величин с заданными распределениями таким образом, что будет верно неравенство*

$$\mathbf{M}e^{c\Delta(X,\ Y)} \leqslant 2n, \tag{2}$$

где $c > 0$ — *абсолютная постоянная.*

Подчеркнем, что далее величины вида $X(l)$, $X(j,\ m)$ и $\Delta(X,\ Y)$ будут вводиться в соответствии с договоренностью в начале п. 3.3. Кроме того, в этом пункте числа C_1, C_2, C_3 соответствуют каждый раз одним и тем же абсолютным постоянным.

Выберем сначала распределения случайных величин W_i. Условимся сразу, что далее величины W_i^* и W_{i2A} одинаково распределены.

Лемма 1. *Существует последовательность независимых случайных величин $W_1, \ldots, W_n$, удовлетворяющих условиям*

$$W_i \in \mathscr{D}, \quad \mathbf{D}W_i = \mathbf{D}X_i, \quad \mathbf{M}W_i^3 = \mathbf{M}X_i^3, \quad |W_i| \leqslant C_1 < \infty \quad \forall i. \tag{3}$$

Кроме того, распределения величин W_i имеют плотности, а если случайная величина S не зависит от последовательности $\{W_i\}$, то

$$S_m \equiv S + W_{i_1} + \ldots + W_{i_m} \in \mathscr{D}_0, \tag{4}$$

если только

$$m \geqslant C_0(1 + \ln \mathbf{D}S_m), \quad m > 0, \tag{5}$$

где $C_0 < \infty$ — абсолютная постоянная.

Существование величин $\{W_i\}$ с требуемыми свойствами вытекает из лемм 2.6.8 и 2.6.9.

Лемма 2. *Существует такая целая абсолютная постоянная $0 \leqslant L < \infty$, что для всех j*

$$W(j, k) \in \mathscr{D}_0, \quad Z(j, k) \in \mathscr{D}_0 \quad \text{при } 0 \leqslant k \leqslant N - 2A - L. \tag{6}$$

Иначе говоря, величины $Z(j, k)$ имеют достаточно гладкие распределения, если в их состав входят по крайней мере 2^{A+L} слагаемых вида W_i.

Доказательство. Так как каждая из величин $W(j, k)$ и $Z(j, k)$ имеет вид (4), то нам достаточно проверить справедливость (5) при $m = 2^{N-k-A}$ в случае, когда $S_m \equiv Z(j, k)$, и при $m = 2^{N-k}$, когда $S_m \equiv W(j, k)$. Воспользовавшись соотношением $\mathbf{D}Z(j, k) = \mathbf{D}W(j, k) \leqslant (5/4)2^{N-k}$, вытекающим из условия (1), мы (5) можем переписать в виде

$$2^{N-k-A} \geqslant C_0(1 + \ln 2^{N-k+1}). \tag{7}$$

Но

$$\ln 2^{N-k+1} = \ln (2^{N-k-A}/2C_0) + \ln (2C_0 2^A) \leqslant 2^{N-k-A}/(2C_0) + 2C_0 2^A - 1.$$

Подставляя это соотношение в (7), получим, что для выполнения (6) достаточно справедливости неравенства

$$2^{N-k-A} \geqslant 2^{N-k-A}/2 + C_0(2C_0 2^A),$$

т. е. (6) верно при $2^L \geqslant (2C_0)^2$. □

Пусть далее $\{W_i\}$ построены по $\{Y_i\}$ методом п. 3.3, а $\{Z_i\}$ по $\{W_i\}$ — методом п. 3.5. В силу леммы 2 для последовательности $\{W_i\}$ выполнены все условия теоремы 8 при $\xi_i = W_i$, $\eta_i = Y_i$, $\lambda = 1$, $\sigma^2 \leqslant 5/4$, $\varepsilon = 2^{2A+L} \geqslant 4 > \sigma^2$, а потому имеет место

Лемма 3. *Существует такая абсолютная постоянная $c > 0$, что*

$$\mathbf{M}e^{c\Delta(W, Y)} = O(n^{1/2} \exp (2^{2A+L})). \tag{8}$$

Фиксируем некоторое целое число l, $0 < l \leqslant 2^N$, и приступим к оцениванию величины $\Delta(l) = |W(l) - Z(l)|$. Пусть, как и в п. 3.3, $\tau_k 2^{N-k} \geqslant l$ — ближайшее из чисел, не меньших l и делящихся на 2^{N-k}. Положим

$$W^{(k)} = W(\tau_k, k), \quad W^{\{k\}} = W(\tau_k 2^{N-k}) - W(l) \tag{9}$$

и аналогично введем $Z^{(k)}$, $Z^{\{k\}}$, $W^{*(k)}$ и $W^{*\{k\}}$. Так как $(\tau_k - 1)2^{N-k} < l \leqslant \tau_m 2^{N-m} \leqslant \tau_k 2^{N-k}$ при $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant N$, то в силу леммы 3.1

$$\left| W\left(\tau_m 2^{N-m}\right) - Z\left(\tau_m 2^{N-m}\right) \right| \leqslant \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \left| Z^{(k)} - W^{(k)} \right|. \tag{10}$$

Суммируя (9) и (10), находим, что справедлива

Лемма 4. *Если $0 \leqslant m \leqslant N$, то*

$$|W(l) - Z(l)| \leqslant \sum_{0 \leqslant h \leqslant m} \left| Z^{(h)} - W^{(h)} \right| + \left| W^{\{m\}} \right| + \left| Z^{\{m\}} \right|. \tag{11}$$

Отметим, что в силу (1)

$$(3/4)2^{N-k} \leqslant \mathbf{D}Z^{(k)} = \mathbf{D}W^{(k)} \leqslant (5/4)2^{N-k}. \tag{12}$$

Кроме того, $(3/4)2^{N-k} \leqslant \mathbf{D}(Z^{(k-1)} - Z^{(k)}) \leqslant (5/4)2^{N-k}$, а потому

$$\alpha^{(k)} \equiv \mathbf{D}Z^{(k)}/\mathbf{D}Z^{(k-1)} \leqslant 5/8, \tag{13}$$

$$(B^{(k)})^2 \equiv \mathbf{D}Z^{(k)}\mathbf{D}(Z^{(k-1)} - Z^{(k)})/\mathbf{D}Z^{(k-1)} \geqslant (3/8)2^{N-k}. \tag{14}$$

При выводе (13) и (14) мы воспользовались неравенствами $x/(x+y) \leqslant \leqslant b(a+b)$ и $xy/(x+y) \geqslant a/2$ при $0 < a \leqslant x,\ y \leqslant b < \infty$.

Далее будем предполагать, что $L \geqslant 10$, так что в силу (14) справедливы соотношения

$$\mathbf{D}Z^{(k)} \geqslant 6^2, \quad B^{(k)} \geqslant 12 \quad \text{при } N-k \geqslant L. \tag{15}$$

Лемма 5. *Если*

$$|Z^{(0)}| \leqslant 2^N/14, \quad N \geqslant 2A + L, \tag{16}$$

то

$$|Z^{(0)} - W^{(0)}| \leqslant C_2(2^{-N/2} + |Z^{(0)}|^3 2^{-2N}). \tag{17}$$

Доказательство. Так как по построению $Z^{(0)}$ является квантильным преобразованием величины $W^{(0)}$, воспользуемся леммой 2.2 при $U = W^{(0)}$, $V = Z^{(0)}$ и $B^2 = \mathbf{D}Z^{(0)}$. В этом случае условия (2.2) вытекают из (3) и (6), а (2.5) — из (3). Замечая теперь, что $B^2 \geqslant (3/4)2^N$ в силу (12), мы получаем, что (17) следует из (2.6), а (2.7) — из (15), (16) и указанной оценки для B^2.

Лемма 6. *Если* $N-k \geqslant 2A + L$ *и*

$$\max\{|Z^{(k)}|,\ |Z^{(k-1)}|,\ |W^{(k-1)}|\} \leqslant 2^{N-k}/96, \tag{18}$$

то

$$|Z^{(k)} - W^{(k)}| \leqslant (5/8 + g_k)|W^{(k-1)} - Z^{(k-1)}| + C_2\varepsilon_k, \tag{19}$$

где

$$g_k \equiv (|Z^{(k)}| + 2|Z^{(k-1)}| + |W^{(k-1)}|)2^{-(N-k)}, \tag{20}$$

$$\varepsilon_k \equiv 2^{-(N-k)/2} + (|Z^{(k)}|^3 + |Z^{(k-1)}|^3 + |W^{(k-1)}|^3)2^{-2(N-k)}. \tag{21}$$

Доказательство. Так как по построению $Z^{(k)}$ является квантильным преобразованием величины $W^{(k)}$, условным относительно $W^{(k-1)}$ и $Z^{(k-1)}$, воспользуемся утверждением леммы 2.4 при $U_1 = W^{(k)}$, $U_0 = W^{(k-1)}$, $V_1 = Z^{(k)}$, $V_0 = Z^{(k-1)}$ и $B = B^{(k)}$. В этом случае условия (2.8) следуют из (3) и (6), (2.11) — из (3), а (2.13) — из (14), (15) и (18). Сравнивая (2.14) с (20), а (2.15) с (21), мы получаем

$$|g(V_1, V_0, U_0)| \leqslant |Z^{(k-1)} - W^{(k-1)}|g_k, \quad \varepsilon(V_1, V_0, U_0) = O(\varepsilon_k).$$

Из этих соотношений и (2.12) вытекает (19), если только мы заметим, что в рассматриваемом случае $\alpha_1 \equiv \alpha^{(k)} \leqslant 5/8$. □

Пусть

$$\gamma = \min\{1/192,\ (216C_2)^{-1/2}\}, \tag{22}$$

и введем величину ω, полагая

$$\omega = \max\{m \leqslant N - 2A - L : |Z^{(k)}| \leqslant 2\gamma a(k, m) \quad \forall k \leqslant m,\ |Z^{(m)}| \leqslant 2\gamma 2^{N-m}\},$$

где $a(k, m) = 2^{2(N-k)/3}h^{1/3}(k, m)$, $h(k, m) = 2^{N+k/8-(9/8)m}$. Условимся считать, что $\omega = -1$, если либо $N < 2A + L$, либо $|Z^{(0)}| > 2\gamma 2^N$, либо $|Z^{(0)}| > 2\gamma 2^N$. Не уменьшая общности, мы будем далее предполагать, что число L удовлетворяет неравенству $2^L \geqslant 6C_2/\gamma$, так что верна оценка

$$C_2 2^{-(N-k)/2} \leqslant (\gamma/6)h(k, \omega) \quad \text{при } 0 \leqslant k \leqslant \omega \leqslant N - L. \tag{23}$$

Отметим, что из определения ω вытекает

$$\max\{|Z^{(k)}|,\ |Z^{(k)}|\} \leqslant 2\gamma a(k, \omega) \quad \text{при } 0 \leqslant k \leqslant \omega. \tag{24}$$

Лемма 7. *Если* $0 \leqslant k \leqslant \omega$, *то*

$$|Z^{(k)} - W^{(k)}| \leqslant 2\gamma h(k, \omega), \tag{25}$$

$$|W^{(k)}| \leqslant 4\gamma a(k, \omega). \tag{26}$$

Доказательство. Применим индукцию по k. Если $k=0$, то, подставляя (24) в (17), мы получаем

$$|Z^{(0)}-W^{(0)}| \leqslant C_2 2^{-N/2}+C_2(2\gamma)^3 h(0,\ \omega). \tag{27}$$

Учитывая соотношения (22) и (23), из (27) несложно извлечь (25).

Предположим теперь, что (25) выполнено при всех $0\leqslant k<m\leqslant\omega$. В этом случае в силу (24) и неравенства треугольника соотношение (26) также верно при указанных k. А если мы докажем (25) при $k=m$, то автоматически получим и (26).

Чтобы вывести формулу (25) при $k=m$, подставим (26) при $k=m-1$ и (24) при $k=m-1$ и $k=m$ в (19)—(21), так как условие (18) при $k=m\leqslant\omega$ выполнено автоматически. Мы, таким образом, находим

$$g_m \leqslant (1+2\cdot 2^{5/8}+2^{5/8})2\gamma a(m,\ \omega)2^{-N+m}<16\gamma\leqslant 1/8, \tag{28}$$

$$\varepsilon_m \leqslant 2^{-(N-m)/2}+(1+2(2^{5/8})^3)(2\gamma)^3 a^3(m,\ \omega)2^{-2N+2m}\leqslant$$
$$\leqslant (1/6+1/3)(\gamma/C_2)h(m,\ \omega). \tag{29}$$

Отметим, что при выводе формул (28) и (29) мы использовали (22) и (23). Теперь из (28), (29) и (19) имеем

$$|Z^{(m)}-W^{(m)}| \leqslant (3/4)|Z^{(m-1)}-W^{(m-1)}|+(\gamma/2)h(m,\ \omega).$$

Подставляя в последнее соотношение оценку из (25) при $k=m-1$, мы получим требуемое неравенство (25) при $k=m$. □

Заметим теперь, что в силу (3)

$$|W^{\{k\}}| \leqslant 2^{N-k}C_1,\quad |W^{*\{k\}}| \leqslant 2^{N-k-A}C_1. \tag{30}$$

Так как в правой части в (25) стоит геометрическая прогрессия со знаменателем $2^{1/8}$, то из (11), (25), (30) и определения величины ω следует

Лемма 8. *Если* $\omega\geqslant 0$, *то*

$$|W(l)-Z(l)| \leqslant (2\gamma(1-2^{-1/8})^{-1}+2\gamma+C_1)2^{N-\omega}\equiv C_3 2^{N-\omega}. \tag{31}$$

Положим

$$V^{(k)}=Z^{(k)}-W^{*(k)},\quad V^{\{k\}}=Z^{\{k\}}-W^{*\{k\}}$$

и определим ν, заменяя в определении величины ω число 2γ на γ, а случайные величины Z на V. Введем теперь $\beta(N)\equiv\max\{m: |W^{(k)}|\leqslant 4\gamma a(k,\ m)\ \ \forall k\leqslant m\}$ и аналогично построим $\beta(N-A)$, заменив в определении величины $\beta(N)$ число 4γ на $4\gamma 2^{-A}$, а W на W^*. Будем полагать $\beta(N)=-1$, если $|W^0|>4\gamma a(0,\ 0)$, и аналогичное соглашение сделаем относительно $\beta(N-A)$.

Выберем теперь число A как минимальное целое, удовлетворяющее неравенствам:

$$A\geqslant 1,\quad 2^{(5/2)A}\gamma\geqslant 2^{3/2}C_1. \tag{32}$$

Лемма 9. *Если* $\nu\geqslant 0$, *то* $\omega\geqslant 0$ *и*

$$2^{N-\beta(N)}+2^{N-\omega}\leqslant 2^{N-A-\beta(N-A)}+2\cdot 2^{N-\nu}. \tag{33}$$

Доказательство. В силу леммы 7

$$\beta(N)\geqslant\omega,\quad 2^{N-\beta(N)}\leqslant 2^{N-\omega}, \tag{34}$$

далее, из (30) и (32) вытекает

$$|W^{*\{k\}}|\leqslant\gamma 2^{N-k}. \tag{35}$$

Подставляя (34) в левую часть (33), мы получаем, что для доказательства (33) достаточно проверить неравенство

$$\omega\geqslant\min\{\nu,\ \beta(N-A)+A+1\}\equiv\mu. \tag{36}$$

Действительно, если $\omega\geqslant\nu$, то в (33) решающую роль играет последнее слагаемое в правой части этого выражения, а если $\omega\geqslant\beta(N-A)+A+1$, то — первое.

Подставляя (35) и неравенство $|Z^{(k)}| \leqslant |V^{(k)}| + |W^{*(k)}|$ в определения величин ω и ν, мы получаем, что (36) будет доказано, если только верны следующие соотношения:

$$|V^{(k)}| \leqslant \gamma a(k, \mu) \quad \forall 0 \leqslant k \leqslant \mu, \tag{37}$$

$$|W^{*(k)}| \leqslant \gamma a(k, \mu) \quad \forall 0 \leqslant k \leqslant \mu, \tag{38}$$

так как в этом случае $|Z^{(k)}| \leqslant 2\gamma a(k, \mu)$. Но (37) следует из определения величины ν, а (38) также вытекает из определения случайной величины $\beta(N-A)$, однако только при $k \leqslant \beta(N-A)$.

Нам, таким образом, осталось проверить справедливость (38) при $\beta(N-A) \leqslant k \leqslant \beta(N-A)+A+1$. В этом случае мы можем воспользоваться (30) и убедиться, что

$$|W^{*(k)}| \leqslant 2^{N-k-A}C_1 \leqslant \gamma a(k, \mu),$$

так как последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$2^{(3/8)\mu} \geqslant 2^{(3/8)k} \geqslant 2^{(3/8)(\mu-A-1)} \geqslant 2^{(3/8)\mu}2^{-A}(C_1/\gamma).$$

А это соотношение справедливо в силу выбора A. □

Положим $\delta(N) = |X(l) - W(l)|$, $\delta(N-A) = |X^*([l2^{-A}]) - W^*([l2^{-A}])|$ и заметим, что

$$\delta(N) \leqslant \Delta(l) + \delta(N-A). \tag{39}$$

Далее, пусть $S(N) = 2C_3 2^{N-\nu}$ при $\nu \geqslant 0$ и $S(N) = V + (3C_1 + 2C_3)2^N$ в противном случае, где $V \equiv |V^{(0)}| + |V^{(0)}|$. Из (11) при $m=0$ и из (30) вытекает следующее грубое соотношение:

$$\Delta(l) \leqslant V + 3C_1 2^N. \tag{40}$$

Обозначим $\rho(N) = C_3 2^{N-\beta(N)}$ и $\rho(N-A) = C_3 2^{N-A-\beta(N-A)}$. Суммируя оценки (31), (33), (39) и (40), мы находим, что верна

Лемма 10.

$$\delta(N) + \rho(N) \leqslant \delta(N-A) + \rho(N-A) + S(N).$$

Лемма 11. *Пусть* $Q_k(x) = \max\{\mathbf{P}(|V^{(k)}| > x),\ \mathbf{P}(|V^{(k)}| > x)\}$. *Тогда*

$$Q_k(x) \leqslant 2\exp(2^{N-k} - x) \quad \forall x, \tag{41}$$

$$Q_k(x) \leqslant 2\exp(-x^2 2^{-(N-k)-2}) \quad \text{при } |x| \leqslant 2^{N-k+1}. \tag{42}$$

Доказательство. Из (1) следует, что $\zeta \in \mathscr{D}$, если $\zeta = V^{(k)}$ или $\zeta = V^{(k)}$, так как ζ есть сумма независимых величин из $\mathscr{D}$. В этом случае из леммы (6.3) раздела 2 вытекает

$$\mathbf{M}e^{h\zeta} \leqslant \exp((2/3)h^2\mathbf{D}\zeta) \leqslant \exp(h^2 2^{N-k}) \quad \text{при } |h| \leqslant 1.$$

При доказательстве последнего соотношения мы пользовались неравенством $\mathbf{D}\zeta \leqslant (5/4)2^{N-k}$, справедливым в силу (1). Далее доказательство такое же, как в лемме 4.2. □

Лемма 12. *Существует такая абсолютная постоянная* $c > 0$, *что*

$$E_1 \equiv \mathbf{M}\{\exp(2c(S(N) + \rho(N)));\ \nu < 0\} = O(1).$$

Доказательство. Из (40) следует

$$\mathbf{P}(V > x) \leqslant 2Q_0(x/2), \tag{43}$$

$$E_2 \equiv \mathbf{M}\{e^{2cV};\ \nu < 0\} \leqslant \mathbf{M}\{e^{2cV};\ V > \gamma 2^N\} \leqslant (\mathbf{M}e^{4cV}\mathbf{P}(V > \gamma 2^N))^{1/2}. \tag{44}$$

Последний переход в (44) имеем из неравенства Гельдера. Так как $V/4$ удовлетворяет в силу (41) и (43) условию леммы 4.1, то

$$\mathbf{M}e^{4cV} = O(\exp(16c2^N)) \quad \text{при } 0 < 16c \leqslant 1. \tag{45}$$

Из (43) и (42) вытекает, что $\mathbf{P}(V > \gamma 2^N) \leqslant 4\exp(-\gamma^2 2^N/16)$. Подставляя это неравенство и (45) в (44), мы получим оценку $E_2 \leqslant \exp(8c2^N - \gamma^2 2^N/32)$. Так как $E_1 \leqslant E_2 \exp(c2^N(3C_1 + 4C_3))$, то из последних двух соотношений следует требуемое утверждение при $0 < c < (8 + 3C_1 + 4C_3)^{-1}\gamma^2/32$. □

Лемма 13. *Существует такая абсолютная постоянная $c>0$, что*

$$E_3 \equiv \mathbf{M}\{e^{2cS(N)};\ \nu \geqslant 0\} = O(1).$$

Доказательство. В силу (42) и определения величины ν

$$\mathbf{P}(\nu=m-1) \leqslant \sum_{0\leqslant k\leqslant m} \left(\mathbf{P}\left(|V^{(k)}|>\gamma a(k,m)\right)+\mathbf{P}\left(|V^{(k)}|>\gamma 2^{N-m}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{0\leqslant k\leqslant m} \exp\left(-\gamma^2 a^2(k,m)/2^{N-k+2}\right) = 4\sum_{0\leqslant k\leqslant m} \exp\left(-\gamma^2 2^{N-m} 2^{(m-k)/4}/4\right).$$

Таким образом, при $2c\cdot 2C_3 \leqslant \gamma^2/16$

$$E_3 \leqslant \sum_{0\leqslant m\leqslant N} \exp\left(\gamma^2 2^{N-m}/16\right)\mathbf{P}(\nu=m) \leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{0\leqslant m\leqslant N}\ \sum_{0\leqslant k\leqslant m} \exp\left(-\gamma^2 2^{N-m} 2^{(m-k)/4}/16\right) \leqslant 4\sum_{i,j\geqslant 0} \exp\left(-\gamma^2 2^{i+j/4}/16\right).$$

Ясно, что этот ряд сходится.

Таким образом, из лемм 12 и 13 мы получаем

$$\mathbf{M}e^{2cS(N)} \leqslant C. \tag{46}$$

Следующее утверждение наряду с леммами 7 и 9 является основным в доказательстве теоремы 9.

Лемма 14. *Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$, $n=2^k$, с требуемыми распределениями можно построить по $W_1, \ldots, W_n$ таким образом, что*

$$\mathbf{M}e^{2c(\delta(k)+\rho(k))} = O(C^k) \quad \forall l. \tag{47}$$

Доказательство. При $k<A$ соотношение (47) следует из леммы 12. Предположим теперь по индукции, что (47) доказано при $k<N$. В этом случае, так как последовательность $\{X_j^*\}$ содержит 2^{N-A} величин, то справедлива оценка

$$\mathbf{M}e^{2c(\delta(N-A)+\rho(N-A))} = O(C^{N-A}). \tag{48}$$

Чтобы доказать (47) при $k=N$, воспользуемся леммой 10 и заметим (а это самое главное), что величины $\delta(N)+\rho(N)$ и $S(N)$ независимы по построению, так как первая есть функция от $\{W_j^*\}$, а вторая — от $\{V_j\}$, т. е. от уже построенных величин $\{X_j\}$ с номерами, не делящимися на 2^A. Таким образом,

$$\mathbf{M}e^{2c(\delta(N)+\rho(N))} \leqslant \mathbf{M}e^{2c(\delta(N-A)+\rho(N-A))}\mathbf{M}e^{2cS(N)}.$$

Из последнего соотношения, (46) и (48) вытекает (47). □

Закончим теперь доказательство теоремы. В силу леммы 14 мы имеем

$$\mathbf{P}(|X(l)-W(l)|>x) = e^{O(N)-2cx},$$

а потому

$$\mathbf{P}(\Delta \equiv \Delta(X, W)>x) \leqslant 2^N e^{O(N)-2cx}.$$

Используя последнее соотношение и лемму 2.1 при $\zeta = c\Delta$, мы получим

$$\mathbf{M}e^{c\Delta} = e^{O(N)}. \tag{49}$$

Не уменьшая общности, предположим, что константа $c>0$ в (8) совпадает с $c>0$ в (49). В этом случае из (8), (49) и неравенства Гельдера следует

$$\mathbf{M}e^{c\Delta(X,Y)/2} = e^{O(N)}. \tag{50}$$

При выводе (50) мы также использовали неравенство треугольника $\Delta(X, Y) \leqslant \Delta(X, W)+\Delta(W, Y)$.

Лемма 4.6 и (50) дают теперь требуемое утверждение теоремы 9.

Докажем сначала теорему 1. Так как вместо ξ_j мы всегда можем рассматривать величины $\lambda\xi_j/64$, то далее ограничимся только случаем, когда $\lambda = 64$. При этом предположении условия, накладываемые на ξ_j доказываемой теоремы (чуть огрубив), можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{M}\xi_j = 0, \quad 64\mathbf{M}|\xi_j|^3 \exp(2|\xi_j|) \leqslant \mathbf{D}\xi_j \quad \forall j. \tag{1}$$

Сравнивая (1) с (2.1), мы получаем

$$\xi(l) - \xi(k) \in \mathscr{D} \quad \forall l > k. \tag{2}$$

Кроме того, из (1) и неравенства Гельдера имеем

$$\mathbf{D}\xi_j \geqslant 64\mathbf{M}|\xi_j|^3 \geqslant 64(\mathbf{D}\xi_j)^{3/2}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что выполнены условия (4.1), (4.3) и (4.5) при $\varepsilon = \sigma^2 \leqslant (64)^{-2}$. Отсюда, в частности, вытекает утверждение теоремы 1 при $N < 0$, так как лемма 4.7 дает нам требуемую оценку:

$$\mathbf{M}e^{c\Delta} \leqslant 1 + B\exp((64)^{-2}) \leqslant 1 + 64B. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь случай $N \geqslant 0$. В силу (2) и (3) мы можем использовать обозначения п. 3.4 и лемм 4.1—4.7 при

$$\varepsilon = \sigma^2 \leqslant (64)^{-2}, \quad 80 \leqslant b \leqslant 160, \quad B^2 = b2^N \geqslant b. \tag{5}$$

Так как $b^{1/2} > 8$ и $X_j \in \mathscr{D}$ в силу (2), то

$$X_j b^{-1/2} \in \mathscr{D}(8) \quad \forall j.$$

Отсюда из теоремы 9 следует, что мы можем построить требуемые величины $\{X_j\}$ по заданным $\{Y_j\}$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathbf{M}e^{c\delta} \leqslant 2^{N+1} = 2B^2/b, \tag{6}$$

где $\delta = \Delta(X, Y)$, и в силу (5) $c = c_1 b^{-1/2} > c_1(160)^{-1/2} > 0$, если через c_1 обозначим абсолютную постоянную в теореме 9.

Не уменьшая общности, предположим, что $0 < c \leqslant 1/6$ в (6), и перепишем (4.24) в виде $\Delta = X + Y + \delta$, где $X = X^*(N)$, $Y = Y^*(N)$. Из неравенства Гельдера имеем

$$\mathbf{M}e^{c\Delta/3} \leqslant (\mathbf{M}e^{cX})^{1/3}(\mathbf{M}e^{cY})^{1/3}(\mathbf{M}e^{c\delta})^{1/3}.$$

Подставляя в это соотношение оценки из (6) и леммы 4.4, находим

$$\mathbf{M}e^{c\Delta/3} = O((2^{cN})^{1/3}(2^{cN})^{1/3}(2^{cN})^{1/3}) = O(B^{(2+2c)/3}). \tag{7}$$

При выводе (7) мы использовали также неравенства для $b = b_N$ из (5). Сравнивая (7) с (4.20), из леммы 4.6 получим (4). Теорема 1, таким образом, доказана и при $N \geqslant 0$.

Докажем теперь следующее естественное обобщение теорем 1 и 8.

Теорема 10. *Утверждение теоремы* 8 *остается справедливым, если условие* (4.2) *в ней заменить на* (4.5).

Отметим, что в теореме 10 не утверждается, что построенные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ обязательно будут функциями только от $\eta_1, \ldots, \eta_n$, т. е. мы не исключаем возможности расширения первоначального вероятностного пространства, на катором заданы $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Тот факт, что используемые ниже расширения существуют, отмечен, например, в [13].

Перейдем к доказательству теоремы. Так как вместо ξ_j можно строить величины $\lambda\xi_j/16$, то мы, не уменьшая общности, рассмотрим только случай, когда $\lambda = 16$. Так как $\mathscr{D}(16) \subset \mathscr{D}$, можно сохранить все обозначения, введенные в п. 3.4, и использовать леммы 4.2—4.5 и в нашем случае, но при этом величины X_j будут дополнительно удовлетворять условию

$$X_j \in \mathscr{D}(16) \quad \forall j \quad \text{при } N \geqslant 0. \tag{8}$$

Далее, будем предполагать, что $N \geqslant 0$, так как в противном случае теорема 10 является следствием леммы 4.6. Пусть L и K — единственные целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$32 \leqslant L \leqslant b/2 < 2L, \quad L = 2^K. \tag{9}$$

В силу (8) и леммы 2.6.7 существуют две независимые между собой последовательности $S_1, \ldots, S_n$, $n = 2^N$, и $V_1, \ldots, V_{nL}$, каждая из которых состоит из независимых величин, обладающих свойствами:

$$S_j \in \mathscr{D}(8), \quad V_j \in \mathscr{D}(8), \quad 1 \leqslant \mathbf{D}V_j \leqslant 5/4 \quad \forall j, \tag{10}$$

а самое главное, при всех i величины X_i и $S_i + V_{(i-1)L+1} + \ldots + V_{iL}$ одинаково распределены.

Пусть $U_1, \ldots, U_{nL}$ — последовательность независимых случайных величин, не зависящая от последовательности $S_1, \ldots, S_n$, причем каждая из величин U_j имеет нормальное распределение, и $\mathbf{D}V_j = \mathbf{D}U_j$. Положим

$$Z_i = S_i + U_{(i-1)L+1} + \ldots + U_{iL}. \tag{11}$$

Допустим теперь, что нам задана только определенная в п. 3.4 последовательность $\{Y_j\}$ независимых случайных величин, имеющих нормальные распределения, которая, очевидно, удовлетворяет условию $\mathbf{D}Y_j = \mathbf{D}X_j = \mathbf{D}Z_j$ при всех j. Относительно же величин $\{S_j, U_j, V_j, Z_j, X_j\}$ предположим, что они еще не определены, а вся приведенная выше информация является необходимым требованием к распределениям этих величин, которые мы должны еще построить.

Перейдем теперь к построению. Сначала по последовательности $Y_1, \ldots, Y_n$, $n = 2^N$, методом п. 3.3 зададим независимые случайные величины $Z_1, \ldots, Z_n$ с определенными выше распределениями. Затем, расширяя вероятностное пространство, мы построим независимые в совокупности случайные величины $S_1, \ldots, S_n$ и $V_1, \ldots, V_{nL}$, имеющие требуемые распределения и удовлетворяющие равенству (11) для определенных только что величин $\{Z_i\}$.

Далее, по уже полученной последовательности $V_1, \ldots, V_{nL}$ методом п. 3.5 построим независимые величины $U_1, \ldots, U_n$ с нужными распределениями. Так как последовательности $\{V_i\}$ и $\{S_i\}$ независимы, а независимые величины $\{U_i\}$ являются функциями только от $\{V_i\}$, то в этом случае величины

$$X_i \equiv S_i + V_{(i-1)L+1} + \ldots + V_{iL} \tag{12}$$

независимы и имеют искомые распределения.

Чтобы закончить построение, нам осталось только еще раз расширить вероятностное пространство, чтобы, не меняя величин $\{Y_i, S_i, V_i, U_i, X_i\}$, доопределить $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ с нужными распределениями.

Перейдем теперь к оцениванию величины $\Delta \equiv \Delta(\xi, \eta)$. Имеем

$$\Delta(X, Y) \leqslant \Delta(X, Z) + \Delta(Z, Y), \quad \Delta(X, Z) \leqslant \Delta(V, U). \tag{13}$$

При выводе второго неравенства в (13) мы использовали тот факт, что S_i в (11) и (12) одни и те же. Таким образом, из (13) и (4.18) следует

$$\Delta \leqslant \mu + \delta + X + Y, \tag{14}$$

где $\mu = \Delta(Z, Y)$, $\delta = \Delta(V, U)$, $X = X^*(N)$, $Y = Y^*(N)$.

Из леммы 4.4 вытекает

$$(\mathbf{M}e^{\alpha X})(\mathbf{M}e^{\alpha Y}) \leqslant (2^3 \cdot 2^N e^b)^{2\alpha} = (8B^2 e^b/b)^{2\alpha} \tag{15}$$

при $0 < \alpha \leqslant 1/2$. Далее, в силу (10) при $X_i = V_i$ и $Y_i = U_i$ справедливо утверждение теоремы 9, а потому

$$\mathbf{M}e^{c\delta} \leqslant 2nL \leqslant 2(B^2/b)(b/2) = B^2. \tag{16}$$

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы* 10 *и* $N \geqslant 0$, *то*

$$Z_i \in \mathscr{D}_0(8) \quad \forall i. \tag{17}$$

Доказательство. Нам надо показать, что $8Z_i \in \mathscr{D}_0$. Так как $Z_i - S_i$ имеет нормальное распределение, то в силу леммы 2.6.5 нам достаточно проверить выполнение неравенства

$$8^2\mathbf{D}(Z_i - S_i) \geqslant 8 + 48\ln(5^2\mathbf{D}Z_i) \quad \forall i. \tag{18}$$

Заметим, что в силу (9)

$$\mathbf{D}(Z_i - S_i) \geqslant L \geqslant b/4 \geqslant (5/4)b/5 \geqslant \mathbf{D}Z_i/5,$$

а потому для доказательства (18) достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$f(x) \equiv x/5 - 8 - 48\ln x \geqslant 0 \quad \forall x \geqslant 3600, \tag{19}$$

так как $x \equiv 8^2\mathbf{D}Z_i \geqslant 8^2(3/4)\cdot 80 \geqslant 3600$. Но $f'(x) = 1/5 - 48/x \geqslant 0$ при $x \geqslant 5\cdot 48$, а следовательно, (19) действительно верно, ибо $f(3600) > 720 - 8 - 48\cdot 8 > 0$. □

Таким образом, в силу (17), чтобы найти оценку для величины $\mu = \Delta(Z, Y)$, мы можем воспользоваться утверждением теоремы 8 при $\xi_j = Z_j$, $\eta_j = Y_j$, $\sigma^2 \leqslant \varepsilon = (5/4)b$, $\lambda = 1$, в итоге получаем

$$\mathbf{M}e^{c\mu} \leqslant 1 + Be^b < 2Be^b, \tag{20}$$

так как $B > 1$ при $N \geqslant 0$.

Закончим теперь доказательство теоремы 10. В силу леммы 4.6 предположим, что c в (16) и (20) равны и не превосходят 1/2. В этом случае из (14) и неравенства Гельдера следует

$$\mathbf{M}e^{c\Delta/4} \leqslant (\mathbf{M}e^{c\mu}\mathbf{M}e^{c\delta}\mathbf{M}e^{cX}\mathbf{M}e^{cY})^{1/4}. \tag{21}$$

Подставляя в (21) оценки из (16), (20) и (15) при $\alpha = c$, получаем

$$\mathbf{M}e^{c\Delta/4} = O(B^{(4c+1+2)/4}e^{(2cb+b)/4}). \tag{22}$$

Сравнивая (22) с (4.20) и учитывая, что $N \geqslant 0$, так как $B \geqslant 1$, мы из леммы 4.6 извлекаем требуемое утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Прохоров Ю. В.** Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, № 2, с. 177—238.
2. **Боровков А. А.** О скорости сходимости в принципе инвариантности.— Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, № 2, с. 217—234.
3. **Komlós J., Major P., Tusnady G.** Weak convergence and embedding.— Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai, Keszthely (Hungary), 1974, p. 149—165.
4. **Strassen V.** Almost sure behaviour of sums of independent random variable and martingales.— Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab., 1965, v. 11, N 1, p. 315—343.
5. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF.I.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. verw. Gebiete, 1975, v. 32, N 2, p. 111—131.
6. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF.II.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1976, v. 34, N 1, p. 33—58.
7. **Саханенко А. И.** Оценки скорости сходимости в принципе инвариантности.— ДАН СССР, 1974, т. 219, № 5, с. 1076—1078.
8. **Арак Т. В.** Об одной оценке А. А. Боровкова.— Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. 20, № 2, с. 380—381.
9. **Скороход А. В.** Исследования по теории случайных процессов. Киев: изд. Киевск. ун-та, 1961.
10. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
11. **Петров В. В.** О больших уклонениях сумм случайных величин.— Вестник Ленингр. ун-та, 1961, № 1, с. 25—37.
12. **Золотарев В. М.** Абсолютная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме.— Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, № 1, с. 108—119.
13. **Berkes I., Philipp W.** Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors.— Ann. Prob., 1979, v. 7, N 1, p. 29—54.