44. **Утев С. А.** Замечание о скорости сходимости в принципе инвариантности.— Сиб. мат. журн., 1981, т. 22, № 5, с. 206—209.
45. **Городецкий В. В.** Оценки скорости сходимости в принципе инвариантности для последовательностей с сильным перемешиванием.— Третья Вильн. конф. по теории вероятн. и мат. статистике (тезисы докладов), Вильнюс, 1981, т. 1, с. 149—150.
46. **Ken-ichi Yoshihara.** Convergence rates of the invariance principles for absolutely regular sequances.— Yokohama Math. J., 1979, v. 27, N 1, p. 49—55.
47. **Stein Ch.** A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables.— In: Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Probability, Berkeley, Calif., 1972, v. 2, p. 583—602.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ДВУГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В. Р. ХОДЖИБАЕВ

Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, $\xi(0)=0$,— однородный процесс с независимыми приращениями и непрерывными справа выборочными траекториями, $\mathbf{M}\xi(1)=0$. При $-a<0<b$ определим случайные величины

$$T=\inf\{t\colon \xi(t)\notin(-a,b)\},\quad Y=\xi(T).$$

Рассмотрим следующие вероятности:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(\xi(t)\in A, T>t),\quad A\subset(-a,b);\\ \mathbf{P}(Y\in B, T<t),\quad B\subset(-\infty,-a]\cup[b,\infty),\end{gathered}\tag{1}$$

и их интегральные преобразования

$$\begin{gathered}H(u,A)=\int\limits_0^\infty e^{-ut}\mathbf{P}(\xi(t)\in A,\ T>t)\,dt,\\ \Pi(u,B)=\int\limits_0^\infty e^{-ut}\mathbf{P}(Y\in B,\ T\in dt).\end{gathered}\tag{2}$$

Целью работы является получение полных асимптотических разложений (п. а. р.) вероятностей (1) при $t\to\infty$, если $a=a(t)\to\infty$, $b=b(t)\to\infty$.

Изучению граничных функционалов от траекторий случайных процессов с независимыми приращениями посвящена обширная литература. Приведем только некоторые публикации, относящиеся непосредственно к тематике нашей работы. Для случайных блужданий с дискретным временем и одной границей ($a=\infty$) п. а. р. распределений граничных функционалов содержатся в [1—3]. Для таких же блужданий на отрезке п. а. р. граничных функционалов в наиболее общих предположениях найдены в [4—6]. В ряде случаев получены п. а. р. и для случайных блужданий с непрерывным временем. В [7] при $a=\infty$, $B=[b,\infty)$ и при выполнении некоторых условий найдены асимптотические формулы для $\Pi(u,B)$ и соответствующие п. а. р. При $a=C_1\sqrt{t}$, $b=C_2\sqrt{t}$, $t\to\infty$ (в дальнейшем буквой C с индексами или без них обозначаются положительные постоянные), при выполнении условия Крамера найдены п. а. р. в [9] для распределения момента выхода процесса без положительных скачков через нижнюю границу и в [10] — для вероятностей $\mathbf{P}(T<t)$, $\mathbf{P}(Y\geqslant b,\ T<t)$ при условии, что положительные скачки процесса имеют распределение специального типа. Точные выражения для распределения T при отсутствии положительных (отрицательных) скачков процесса в случае $a=\infty$ известны из [11, 12].

В разделе 1 настоящей работы найдены асимптотические представления преобразований (2) при $a\to\infty$, $b\to\infty$. При этом используются некоторые результаты работы [7], в связи с чем везде на процесс накладываются следующие ограничения из [7]:

1. $Me^{\lambda\xi(1)} < \infty$ при $\lambda_- \leqslant \lambda \leqslant \lambda_+$, $-\infty < \lambda_- < 0 < \lambda_+ < \infty$. Обозначим

$$\psi(\lambda) = \ln \mathrm{M}e^{\lambda\xi(1)} = \alpha\lambda + \sigma^2\lambda^2/2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x\right) dS(x),$$

где α, σ — действительные числа. $S(-\infty) = S(+\infty) = 0$.

2. Если $\sigma^2 > 0$, то $|\psi_4(\lambda)| = |\psi(\lambda) - \alpha\lambda - \sigma^2\lambda^2/2| \leqslant C_3|\lambda|^{2-p}$ при $\lambda_- \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_+$, $|\operatorname{Im}\lambda| > C_4$ и некотором $p > 0$.

3. Если $\sigma^2 = 0$, то $S(x)$ — функция ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$, $\gamma = \alpha - \int_{-\infty}^{\infty} x dS(x) \neq 0$ и

$$\varlimsup_{|\lambda|\to\infty} |\psi_2(\lambda)|/\psi_2(\operatorname{Re}\lambda) < 1 \text{ при } \lambda_- \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_+,$$

где $\psi_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dS(x) - \mu$, $\mu = S(+0) - S(-0)$.

Излагаемый здесь метод получения асимптотических представлений для интегральных преобразований (2) включает на первом этапе нахождение тождеств для двойных преобразований над распределениями (1), содержащих компоненты факторизации функции $u/(u - \psi(\lambda))$ с последующим выделением особенностей компонент факторизации. Известные из [7] свойства компонент факторизации позволяют обращать двойные преобразования по пространственной переменной, выделяя при этом главную часть. В этом метод настоящей работы сходен с аналогичными исследованиями для случайных блужданий с дискретным временем [1—5] и использует ряд технических приемов из [2, 4, 7]. В разделе 2, используя найденные асимптотические представления преобразований (2), находятся п. а. р. вероятностей (1) в спектре уклонений границ $a = o(t) \to \infty$, $b = o(t) \to \infty$, $a + b \geqslant C\sqrt{t}$, $t \to \infty$. При этом применяется, как и в [2—4], модификация метода перевала к исследованию главных частей асимптотических представлений, полученных в разделе 1.

1. Асимптотические представления интегральных преобразований

1. Введем обозначения:

$$V(u, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-ut} \int_{-a}^{b} e^{\lambda x} \mathbf{P}(\xi(t) \in dx,\ T > t)\, dt, \quad \operatorname{Re} u > 0,\ \operatorname{Re}\lambda = 0;$$

$$V_{u+}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-ut} \int_b^{\infty} e^{\lambda x} \mathbf{P}(Y \in dx,\ T \in dt);$$

$$V_{u-}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-ut} \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x} \mathbf{P}(Y \in dx,\ T \in dt), \quad \operatorname{Re} u \geqslant 0,\ \operatorname{Re}\lambda = 0.$$

Из [13] и [15] известно, что при $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$

$$(u - \psi(\lambda))V(u, \lambda) = 1 - V_{u+}(\lambda) - V_{u-}(\lambda). \tag{3}$$

Пусть, как и в [2], V — совокупность комплексных функций $v(t)$, $-\infty < t < \infty$, имеющих ограниченную вариацию, и

$$\mathfrak{B}(\mu_-, \mu_+) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} dv(t) : v(\cdot) \in V,\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\operatorname{Re}\lambda t} |dv(t)| < \infty,\ \mu_- \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \mu_+ \right\},$$

$$\mathfrak{B}_\pm(\mu_\pm) = \left\{ \pm \int_0^{\pm\infty} e^{\lambda t} dv(t) : v(\cdot) \in V,\ \pm \int_0^{\pm\infty} e^{\operatorname{Re}\lambda t} |dv(t)| < \infty,\ \pm\operatorname{Re}\lambda \leqslant \pm\mu_\pm \right\}.$$

Определим норму в $\mathfrak{B}(\mu_-, \mu_+)$ (см. также [7]):

$$\|f\| = \max_{\mu_- \leqslant c \leqslant \mu_+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{cx} |dF(x)| \text{ при } f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dF(x).$$

Обозначим $\mathfrak{R}(\mu_-, \mu_+)$ подмножество множества $\mathfrak{B}(\mu_-, \mu_+)$, образованное элементами $g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dv(x)$, у которых функция $v(\cdot)$ абсолютно непрерывна. $\mathfrak{R}_\pm(\mu)$ определяются аналогично. Для $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dF(x)$, $F(\cdot) \in V$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ обозначим

$$[f(\lambda)]^A = \int_A e^{\lambda x} dF(x), \quad A \subset (-\infty, \infty).$$

Пусть $r_u(\lambda) = r_{u+}(\lambda) r_{u-}(\lambda)$ — безгранично делимая факторизация (б. д. ф.) функции $r_u(\lambda) = u/(u - \psi(\lambda))$ при $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Тогда $r_{+u}(\lambda)$ $(r_{u-}(\lambda))$ есть преобразование Лапласа при $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ $(\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0)$ безгранично делимого распределения, носитель которого содержится на неотрицательной (неположительной) полуоси, $r_{u\pm}(\lambda) \in \mathfrak{B}_\pm(0)$ (см. [8]).

Приведем некоторые свойства функции $\psi(\lambda)$, известные из [7]. Функция $\psi(\lambda)$ аналитична внутри полосы $\lambda_- \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_+$. Кроме того, она является выпуклой при $\lambda_- \leqslant \lambda \leqslant \lambda_+$ (см. также [14]) и, следовательно, достигает минимума на этом отрезке. Поскольку $\mathbf{M}\xi(1) = 0$, точка $\lambda = 0$ является точкой минимума $\psi(\lambda)$, $\psi(0) = 0$. Из выпуклости следует, что уравнение $u = \psi(\lambda)$ при $\lambda_- \leqslant \lambda \leqslant \lambda_+$, $0 < u \leqslant \min\{\psi(\lambda_-), \psi(\lambda_+)\}$ имеет ровно два корня $\lambda_-(u)$, $\lambda_+(u)$, $\lambda_-(u) < 0 < \lambda_+(u)$, $\lambda_-(0) = \lambda_+(0) = 0$. Если $u_0 = \min\{\psi(\lambda_-), \psi(\lambda_+)\}$, то $0 < \lambda_+(u) < \lambda_+$, $\lambda_- < \lambda_-(u) < 0$ при $0 < u < u_0$. Функции $\lambda_\pm(u)$ допускают аналитические продолжения в область $U_{\varepsilon_1,\delta} = \{u : -\varepsilon_1 < \operatorname{Re} u < u_0 - \varepsilon_2,\ |\operatorname{Im} u| < \delta\} \setminus \{u: -\varepsilon_1 < \operatorname{Re} u = u \leqslant 0\}$, где $\delta > 0$ — достаточно малое (д. м.) число, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta) > 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. При этом полученные продолжения остаются решениями уравнения $u = \psi(\lambda)$. Функции $\lambda_-(u)$ и $\lambda_+(u)$ являются ветвями двузначной аналитической функции с точкой ветвления $u = 0$, их можно считать аналитическими в $U_{\varepsilon_1,\delta}$ и однолистными.

Далее, рассмотрим функцию

$$\psi_3(\lambda) = \begin{cases} \alpha\lambda + \sigma^2\lambda^2/2 - u_1, & \text{если } \sigma^2 > 0, \\ \gamma\lambda - u_1, & \text{если } \sigma^2 = 0, \end{cases}$$

где $u_1 > 0$ выбирается так, чтобы $\max\{\psi_3(\lambda_-), \psi_3(\lambda_+)\} < -1$. Эта функция обладает всеми упоминавшимися свойствами функции $\psi(\lambda)$. В частности, при $u > -u_1$, $\sigma^2 > 0$ определены решения $\mu_\pm(u)$ уравнения $u = \psi_3(\lambda)$. Если $\sigma^2 = 0$, то определена одна из функций $\mu_\pm(u)$ в зависимости от знака γ.

При сделанных предположениях функция $\psi_1(\lambda, u) = (u - \psi(\lambda))/(u - \psi_3(\lambda))$ при $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ допускает каноническую факторизацию (к. ф.) $\psi_1(\lambda, u) = \psi_{1+}(\lambda, u)\psi_{1-}(\lambda, u)$, $\psi_{1+}^{\pm 1}(\lambda, u) \in \mathfrak{B}_+(0)$, $\psi_{1-}^{\pm 1}(\lambda, u) \in \mathfrak{B}_-(0)$. Компоненты этой к. ф. обладают следующими свойствами. Существует такое $\delta_1 > 0$, что при $u \in K_{\varepsilon_1,\delta} = U_{\varepsilon_1,\delta} \cup \{u : -\varepsilon_1 < \operatorname{Re} u = u < 0\}$ функции

$$\begin{aligned} &[\psi_{1+}(\lambda, u)(\lambda - \lambda_+ - 1)/(\lambda - \lambda_+(u))]^{\pm 1} \in \mathfrak{B}_+(\delta_1), \\ &[\psi_{1-}(\lambda, u)(\lambda - \lambda_- + 1)/(\lambda - \lambda_-(u))]^{\pm 1} \in \mathfrak{B}_-(-\delta_1) \end{aligned} \tag{4}$$

аналитичны и равномерно по норме ограничены при $u \in K_{\varepsilon_1,\delta}$, а при $u \in \widetilde{U}_{\varepsilon_1,\delta} = \{u : \operatorname{Re} u > -\varepsilon_1\} \setminus \{u : -\varepsilon_1 < \operatorname{Re} u < u_0,\ |\operatorname{Im} u| < \delta\}$ функции

$$[\psi_{1+}(\lambda, u)]^{\pm 1} \in \mathfrak{B}_+(\delta_1), \ [\psi_{1-}(\lambda, u)]^{\pm 1} \in \mathfrak{B}_-(-\delta_1) \tag{4'}$$

аналитичны и ограничены равномерно по u. В [7] приводится связь между б. д. ф. функции $r_u(\lambda)$ и к. ф. функции $\psi_1(\lambda, u)$: при $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$

$$r_{u+}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\psi_{1+}(0,u)\,\mu_+(u)}{\psi_{1+}(\lambda,u)\,(\mu_+(u)-\lambda)}, & \text{если } \sigma^2>0 \text{ или } \sigma^2=0,\ \gamma>0,\\[2mm] \dfrac{\psi_{1+}(0,u)}{\psi_{1+}(\lambda,u)}, & \text{если } \sigma^2=0,\quad \gamma<0;\end{cases} \tag{5}$$

при $\operatorname{Re} u>0$, $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$

$$r_{u-}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\psi_{1-}(0,u)\,\mu_-(u)}{\psi_{1-}(\lambda,u)\,(\mu_-(u)-\lambda)}, & \text{если } \sigma^2>0 \text{ или } \sigma^2=0,\ \gamma<0,\\[2mm] \dfrac{\psi_{1-}(0,u)}{\psi_{1-}(\lambda,u)}, & \text{если } \sigma^2=0,\ \gamma>0.\end{cases} \tag{6}$$

Теорема 1. *Существуют* $\delta>0$, $\delta_1>0$, $\varepsilon>0$ *такие, что для достаточно больших* (д. б.) a *и* b *равномерно в* $U_\delta=\{u\colon 0\leqslant\operatorname{Re} u<\varepsilon,\ |\operatorname{Im} u|<\delta,\ u\neq 0\}$ *при* $B\subset[b,\infty)$

$$\Pi(u,B)=\frac{F_1(u,B)\left(1-\mu^a(u)\,H_1(u)\right)}{e^{\lambda_+(u)b}\left(1-\mu^{b+a}(u)\,H_2(u)\right)}+O\left(e^{-\delta_1\min(x,x-b+a)}\right),\quad x=\inf_{z\in B} z;$$

при $B\subset(-\infty,-a]$

$$\Pi(u,B)=\frac{F_2(u,B)\,e^{\lambda_-(u)a}\left(1-\mu^b(u)\,H_3(u)\right)}{1-\mu^{b+a}(u)\,H_2(u)}+O\left(e^{\delta_1\max(x,x+a-b)}\right),\quad x=\sup_{z\in B} z,$$

где $\int\limits_b^\infty e^{\lambda x}F_1\ (u,\,dx)=e^{\lambda b}v_u(\lambda_+(u))/v_u(\lambda)$, $\int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}F_2(u,dx)=w_u\ (\lambda\_(u))/$ $/(w_u(\lambda)\,\lambda^a)$, $\operatorname{Re}\lambda=0$, $v_u\ (\lambda)=(\lambda-\lambda_+(u))r_{u+}(\lambda)/\lambda_+(u)$, $w_u(\lambda)=$ $=(\lambda-\lambda_-(u))\,r_{u-}(\lambda)/\lambda_-(u)$, $\mu(u)=\exp(\lambda_-(u)-\lambda_+(u))$, $H_1(u)=w_u(\lambda_-(u))/$ $/w_u(\lambda_+(u))$, $H_3(u)=v_u(\lambda_+(u))/v_u(\lambda_-(u))$, $H_2(u)=H_1(u)\,H_3(u)$.

Для доказательства потребуется несколько лемм. В [13] доказана

Лемма 1. *При* $\operatorname{Re} u>0$, $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$

$$V_{u+}(\lambda)=r_{u+}^{-1}(\lambda)\left[r_{u+}(\lambda)\,(1-V_{u-}(\lambda))\right]^{[b,\infty)}.$$

Аналогично доказывается

Лемма 2. *При* $\operatorname{Re} u>0$, $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$

$$V_{u-}(\lambda)=r_{u-}(\lambda)\left[r_{u+}^{-1}(\lambda)\,(1-V_{u+}(\lambda))\right]^{(-\infty,-a]}.$$

Лемма 3. (*см. также* [2]). *Если* $\{\nu_u\}$ — *совокупность функций из* $\mathfrak{B}(0,\mu_+)$, $(\mathfrak{B}(\mu_-,0))$, *равномерно ограниченных по норме, то в представлении*

$$\nu_u(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}d\omega_u(x),\ \operatorname{Re}\lambda=0$$

имеет место оценка

$$\int\limits_x^\infty |\,d\omega_u(t)\,|=O\left(e^{-\mu_+x}\right),\quad x\to\infty,\quad \left(\int\limits_{-\infty}^x |\,d\omega_u(t)\,|=O\left(e^{-\mu_-x}\right),\ x\to-\infty\right)$$

равномерно по u *и* x.

Доказательство следует из того, что при $\operatorname{Re}\lambda=0$

$$\int\limits_x^\infty |\,d\omega_u(t)\,|=\int\limits_x^\infty e^{-\mu_+t}e^{\mu_+t}\,|\,d\omega_u(t)\,|\leqslant e^{-\mu_+x}\int\limits_x^\infty e^{\mu_+t}\,|\,d\omega_u(t)\,|.$$

Приведем следующую лемму из [2].

Лемма 4. *Если* $\nu \in \mathfrak{B}(\mu_-, \mu_+)$ и $\nu(\mu_0) = 0$, $\mu_- \leqslant \operatorname{Re}\mu_0 \leqslant \mu_+$, *то* $r(\lambda) = \nu(\lambda)/(\lambda - \mu_0) \in \mathfrak{R}(\mu_-, \mu_+)$, *и в представлении*

$$r(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} p(x)\, dx \quad |p(x)| = O\left(e^{-\mu_+ x}\right) \text{ при } x \to \infty$$

и $p(x) = O\left(e^{-\mu_- x}\right)$ *при* $x \to -\infty$.

Лемма 5. *Пусть функции* $f_u(\lambda) \in \mathfrak{B}(-\delta_1, 0)$ *равномерно ограничены по норме в* U_δ. *Тогда при* $\operatorname{Re}\lambda = 0$

$$\left[\frac{f_u(\lambda)}{\lambda - \lambda_-(u)}\right]^{(-\infty, -a]} = \frac{f_u(\lambda_-(u))\, e^{\lambda_-(u)a}}{e^{\lambda a}(\lambda - \lambda_-(u))} + \theta(u, \lambda),$$

где $\theta(u, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}\theta_u(x)\, dx$ *и равномерно по* $x \leqslant -a$ *и* $u \in U_\delta$ $|\theta_u(x)| = O\left(e^{\delta_1 x}\right)$, $x \to -\infty$. *Кроме того,* $(\lambda - \lambda_-(u))\theta(u, \lambda) \in \mathfrak{B}(-\delta_1, 0)$ *равномерно ограничены по* u, $u \in U_\delta$, *и в представлении*

$$(\lambda - \lambda_-(u))\,\theta(u, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x} d\eta_u(x), \quad \int\limits_{-\infty}^{x} |d\eta_u(t)| = O\left(e^{\delta_1 x}\right)$$

равномерно по u.

Доказательство.

$$\frac{f_u(\lambda)}{\lambda - \lambda_-(u)} = \frac{f_u(\lambda_-(u))}{\lambda - \lambda_-(u)} - \frac{1}{\lambda - \lambda_-(u)}[f_u(\lambda_-(u)) - f_u(\lambda)].$$

Выражение в квадратных скобках есть нуль при $\lambda = \lambda_-(u)$. Второе слагаемое по лемме 4 принадлежит классу $\mathfrak{R}(-\delta_1, 0)$. Требуемая оценка для $\theta_u(x)$ следует из лемм 3, 4. При этом

$$\left[\frac{1}{\lambda - \lambda_-(u)}\right]^{(-\infty, -a]} = \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{(\lambda - \lambda_-(u))x}\, dx = \frac{e^{-(\lambda - \lambda_-(u))a}}{\lambda - \lambda_-(u)}.$$

Доказательство второй части леммы следует из соотношения

$$\left[\frac{f_u(\lambda) - f_u(\lambda_-(u))}{\lambda - \lambda_-(u)}\right]^{(-\infty, -a]} = \frac{[f_u(\lambda)]^{(-\infty, -a]}}{\lambda - \lambda_-(u)} - \frac{e^{-(\lambda - \lambda_-(u))a}}{\lambda - \lambda_-(u)}[f_u(\lambda)]^{(-\infty, -a]}_{\lambda = \lambda_-(u)}.$$

Аналогичным образом доказывается

Лемма 6. *Пусть функции* $g_u(\lambda) \in \mathfrak{B}(0, \delta_1)$ *равномерно ограничены по норме в* U_δ. *Тогда при* $\operatorname{Re}\lambda = 0$

$$\left[\frac{g_u(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(u)}\right]^{[b, \infty)} = \frac{g_u(\lambda_+(u))\, e^{\lambda b}}{e^{\lambda_+(u)b}(\lambda - \lambda_+(u))} + \varphi(u, \lambda),$$

где $\varphi(u, \lambda) = \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda x}\varphi_u(x)\, dx$, $|\varphi_u(x)| = O\left(e^{-\delta_1 x}\right)$, $x \to +\infty$, *равномерно по* u, $u \in U_\delta$, $(\lambda - \lambda_+(u))\varphi(u, \lambda) \in \mathfrak{B}(0, \delta_1)$ *и в представлении*

$$(\lambda - \lambda_+(u))\,\varphi(u, \lambda) = \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda x} d\zeta_u(x) \int\limits_{x}^{\infty} |d\zeta_u(t)| = O\left(e^{-\delta_1 x}\right)$$

при $x \to \infty$ *равномерно по* u.

Доказательство теоремы 1. Леммы 1, 2 при $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ дают два уравнения с двумя неизвестными: $V_{u+}(\lambda)$, $V_{u-}(\lambda)$. В силу

(4), (5) и леммы 4 при $u \in U_\delta$ имеем при $\sigma^2 > 0$

$$v_u(\lambda)(\lambda-\lambda_+-1)^{-1} \in \mathfrak{R}_+(\delta_1),\quad w_u(\lambda)(\lambda-\lambda_-+1)^{-1} \in \mathfrak{R}_-(-\delta_1),$$
$$v_u^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{B}_+(\delta_1),\quad w_u^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{B}_-(-\delta_1); \tag{7}$$

при $\sigma^2 = 0$, $\gamma > 0$

$$v_u(\lambda)(\lambda-\lambda_+-1)^{-1} \in \mathfrak{R}_+(\delta_1),\quad w_u(\lambda)(\lambda-\lambda_-+1)^{-1} \in \mathfrak{B}_-(-\delta_1),$$
$$v_u^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{B}_+(\delta_1),\quad w_u^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{R}_-(-\delta_1); \tag{8}$$

при $\sigma^2 = 0$, $\gamma < 0$

$$v_u(\lambda)(\lambda-\lambda_+-1)^{-1} \in \mathfrak{B}_+(\delta_1),\quad w_u(\lambda)(\lambda-\lambda_-+1)^{-1} \in \mathfrak{R}_-(-\delta_1),$$
$$v_u^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{R}_+(\delta_1),\quad w_u^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{B}_-(-\delta_1). \tag{9}$$

Причем все эти функции аналитичны внутри V_δ, непрерывны и равномерно ограничены по норме, включая границу $\operatorname{Re} u = 0$. Так как при любом $\delta_1 > 0$ функции $V_{u+}(\lambda) \in \mathfrak{B}(-\delta_1, 0)$, $V_{u-}(\lambda) \in \mathfrak{B}(0, \delta_1)$ аналитичны в U_δ и непрерывны, включая границу, то, используя леммы 1—6 и соотношения (7)—(9), получим при $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \delta_1$, $u \in U_\delta$

$$V_{u+}(\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_-(u)}{w_u(\lambda)}\left[\frac{w_u(\lambda)(1-V_{u+}(\lambda))}{\lambda-\lambda_-(u)}\right]^{(-\infty,-a]} =$$
$$= \frac{e^{\lambda_-(u)a} w_u(\lambda_-(u))(1-V_{u+}(\lambda_-(u)))}{e^{\lambda a} w_u(\lambda)} + (\lambda-\lambda_-(u))\,\theta_1(u,\lambda); \tag{10}$$

при $-\delta_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, $u \in U_\delta$

$$V_{u+}(\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_+(u)}{v_u(\lambda)}\left[\frac{v_u(\lambda)(1-V_{u-}(\lambda))}{\lambda-\lambda_+(u)}\right]^{[b,\infty)} =$$
$$= \frac{e^{\lambda b} v_u(\lambda_+(u))(1-V_{u-}(\lambda_+(u)))}{e^{\lambda_+(u)b} v_u(\lambda)} + (\lambda-\lambda_+(u))\,\varphi_1(u,\lambda). \tag{11}$$

Для последних слагаемых в (10) и (11) имеют место оценки из лемм 5 и 6 соответственно. Подставляя $\lambda = \lambda_+(u)$ и $\lambda = \lambda_-(u)$ в (10) и (11), получим два уравнения, из которых находим

$$V_{u+}(\lambda_-(u)) = \frac{\mu^b(u)H_3(u) - \mu^{b+a}(u)H_2(u)}{1-\mu^{b+a}(u)H_2(u)} -$$
$$- \frac{(\lambda_-(u)-\lambda_+(u))\big(\mu^b(u)H_3(u)\,\theta_1(u,\lambda_+(u)) - \varphi_1(u,\lambda_-(u))\big)}{1-\mu^{b+a}(u)H_2(u)}. \tag{12}$$

Отметим, что функции $H_1(u)$ и $H_3(u)$ аналитичны в $K_{\varepsilon_1,\delta}$, разрезанной по лучу $u \leqslant 0$, и в некоторой окрестности нуля разлагаются в ряд по степеням $\sqrt{u}$, $H_1(0) = H_2(0) = 1$. Эти свойства следуют из (4)—(9). Функция $|\lambda_-(u) - \lambda_+(u)|\,|1-\mu^{b+a}(u)H_2(u)|^{-1}$ при д. м. δ, ε_1 и д. б. $a+b$ равномерно ограничена в $K^1_{\varepsilon_1,\delta} = K_{\varepsilon_1,\delta} \cap \{u\colon |\arg u - \pi| \geqslant \pi/4\}$. Действительно (см. также [4]),

$$|\lambda_+(u) - \lambda_-(u)|\,|1-\mu^{b+a}(u)H_2(u)|^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda_+(u) - \lambda_-(u)|(1-|\mu(u)|)^{-1}(1+|\mu(u)|+|\mu^2(u)+\ldots+$$
$$+|\mu^{b+a-1}(u)| + |\mu^{b+a}(u)|(1-|H_2(u)|)(1-|\mu(u)|)^{-1}),$$

функция $|\lambda_+(u) - \lambda_-(u)|(1-|\mu(u)|)^{-1}$ ограничена равномерно в $K^1_{\varepsilon_1,\delta}$, а при д. б. $a+b$, $u=0$ в силу вышеуказанных свойств функций $H_1(u)$ и $H_3(u)$

$$1+|\mu(u)|+\ldots+|\mu^{b+a-1}(u)| + |\mu^{b+a}(u)|(1-|H_2(u)|)(1-|\mu(u)|)^{-1} > 1.$$

Поскольку выражение в левой части неравенства непрерывно в окрестности точки $u=0$, неравенство верно и для $u \in U_{\varepsilon_1,\delta}$ при некоторых $\delta=\delta(a+b)>0$ и $\varepsilon_1=\varepsilon_1(a+b)>0$, к тому же как функция $a+b$ эта величина не убывает. Аналогично можно установить равномерную в $K^1_{\varepsilon_1,\delta}$ ограниченность функций

$$(1-\mu^a(u)H_1(u))(1-\mu^{b+a}(u)H_2(u))^{-1}.$$

Далее, $|\mu(u)|\leqslant 1$ в U_δ, $|H_3(u)|$ ограничена равномерно,

$$|\theta_1(u, \lambda_+(u))| = O\left(e^{-\delta_1 a}\right), \quad |\varphi_1(u, \lambda_-(u))| = O\left(e^{-\delta_1 b}\right). \tag{13}$$

Оценки в (13) равномерны в U_δ и следуют из лемм 5 и 6. Соотношения (12), (13) дают при $u \in U_\delta$

$$V_{u+}(\lambda_-(u)) = \frac{\mu^b(u)H_3(u)-\mu^{b+a}(u)H_2(u)}{1-\mu^{b+a}(u)H_2(u)} + O\left(e^{-\delta_1 a}+e^{-b_1\delta}\right). \tag{14}$$

Аналогично имеем равномерно в U_δ

$$V_{u-}(\lambda_+(u)) = \frac{\mu^a(u)H_1(u)-\mu^{b+a}(u)H_2(u)}{1-\mu^{b+a}(u)H_2(u)} + O\left(e^{-\delta_1 a}+e^{-\delta_1 b}\right). \tag{15}$$

Из лемм 5, 6 и соотношений (10), (11), (14), (15) следует, что при $u \in U_\delta$, д. б. a и b и при указанном выборе $\delta>0$

$$V_{u-}(\lambda) = \frac{e^{\lambda_-(u)a}w_u(\lambda_-(u))\left(1-\mu^b(u)H_3(u)\right)}{e^{\lambda a}w_u(\lambda)\left(1-\mu^{b+a}(u)H_2(u)\right)} + \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}d\varepsilon_u(x), \tag{16}$$

$$V_{u+}(\lambda) = \frac{e^{\lambda b}v_u(\lambda_+(u))\left(1-\mu^a(u)H_1(u)\right)}{e^{\lambda_+(u)b}v_u(\lambda)\left(1-\mu^{b+a}(u)H_2(u)\right)} + \int_b^{\infty} e^{\lambda x}d\rho_u(x), \tag{17}$$

где равномерно по $u \in U_\delta$ и x

$$\int_{-\infty}^{x} |d\varepsilon_u(y)| = O\left(e^{\delta_1 x}+e^{\delta_1(x+a-b)}\right), \quad x\leqslant -a;$$

$$\int_{x}^{\infty} |d\rho_u(y)| = O\left(e^{-\delta_1 x}+e^{-\delta_1(x-b+a)}\right), \quad x\geqslant b.$$

Этим завершается доказательство теоремы 1.

При $a=\infty$, $B=[b, \infty)$, $\Psi_+(\lambda, u)=\psi_{1+}(0, u)\mu_+(u)v_u^{-1}(\lambda)$ получим следующее

Следствие 1.1. *При* $u \in U_\delta$

$$u\int_0^\infty e^{-ut}\mathbf{P}(\bar{\xi}(t)\geqslant b)\,dt = \Psi_+(0, u)\Psi_+^{-1}(\lambda_+(u), u)e^{-\lambda_+(u)b} + O\left(e^{-\delta_1 b}\right),$$

где $\bar{\xi}(t) = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\xi(s)$.

Это утверждение известно также из [7].

Пусть

$$[(H_1(u)-1)u^{-1/2}]_{u=0}=\gamma_1, \quad [(H_2(u)-1)u^{-1/2}]_{u=0}=\eta_1,$$
$$[(H_3(u)-1)u^{-1/2}]_{u=0}=\zeta_1, \quad [\lambda_+(u)u^{-1/2}]_{u=0}=\alpha_1.$$

Следствие 1.2. *При* $B\subset[b, \infty)$

$$\mathbf{P}(Y\in B) = \frac{a-\gamma_1/(2\alpha_1)}{b+a-\eta_1/(2\alpha_1)}F_1(0, B) + O\left(e^{-\delta_1\min(x, x-b+a)}\right), \quad x=\inf_{z\in B} z,$$

и при $B\subset(-\infty, -a]$

$$\mathbf{P}(Y\in B) = \frac{b-\zeta_1/(2\alpha_1)}{b+a-\eta_1/(2\alpha_1)}F_2(0, B) + O\left(e^{\delta_1\max(x, x+a-b)}\right), \quad x=\sup_{z\in B} z.$$

С использованием соотношений (3), (16) и (17) легко доказывается следующая

Теорема 2. *Существуют* $\delta_1>0$, $\delta>0$, $\varepsilon>0$ *такие, что при* $u\in U_\delta=U_\delta(\varepsilon)$ *(см. теорему 1) и д. б.* a *и* b *для любого* $A\subset(-a,\,b)$ *равномерно по* u

$$uH(u,\,A)-u\int\limits_0^\infty e^{-ut}\mathbf{P}(\xi(t)\in A)\,dt=\mu^a(u)\,\Pi_2(u)\,F_4(u,\,A)-$$

$$-\mu^b(u)\,\Pi_1(u)\,F_3(u,\,A)+\lambda_+(u)\,O\left(e^{-\delta_1\min\{\inf(b-A),\,\inf(a+A)\}}\right),$$

где $\qquad \Pi_1(u)=(1-\mu^a(u)H_1(u))/(1-\mu^{b+a}(u)H_2(u));$

$$\Pi_2(u)=(1-\mu^b(u)\,H_3(u))\,(1-\mu^{b+a}(u)\,H_2(u))^{-1},\qquad z+A=\{z+y\colon\ y\in A\};$$

$$F_3(u,\,A)=\lambda_+(u)\,\lambda_-(u)\int\limits_A e^{-\lambda_-(u)x}dx\,v_u(\lambda_+(u))\,w_u(\lambda_-(u))\,(\lambda_+(u)-\lambda_-(u))^{-1};$$

$$F_4(u,\,A)=F_3(u,\,A)\int\limits_A e^{\lambda_+(u)x}dx\Big/\int\limits_A e^{-\lambda_-(u)x}dx.$$

Нетрудно заметить, что главные части асимптотических формул для $\Pi(u,\,B)$ и $H(u,\,A)$ аналитически продолжаются в область $U_{\varepsilon_1,\delta}$ при некотором $\varepsilon_1>0$ (см. соотношение (4)).

2. Для получения разложений вероятностей (1) потребуются оценки для $\Pi(u,\,B)$ и $H(u,\,A)$ в $\bar U_\delta=\{u:|\operatorname{Im}u|\geqslant\delta,\ \operatorname{Re}u=0\}$. Здесь будут использованы равномерная ограниченность функций $\psi_{1\pm}(\lambda,\,u)$, $\psi_{1\pm}^{-1}(\lambda,\,u)$ при $u\in\bar U_\delta$, $|\operatorname{Re}\lambda|\leqslant\delta_1$ (см. [7]) и некоторые результаты работы [7]. Пусть

$$\Pi_b(u,\,x)=\Pi(u,\,[b,\,x)),\ x>b,\ \Pi_a(u,\,y)=\Pi(u,\,(y,\,-a]),\ y<-a.$$

Лемма 7. *Пусть выполняются условия 1—3. Если* $\sigma^2=0$, $\gamma>0$, *дополнительно будем предполагать, что*

$$|\psi_2(\lambda)|\leqslant C_5|\lambda|^{-r},\ \ 0<r<1,\ \ \lambda_-\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant\lambda_+,\ \ |\operatorname{Im}\lambda|>C_6.$$

В этих условиях равномерно по $u\in\bar U_\delta$

$$|\Pi_b(u,\,x)|=O\left(\frac{e^{-\delta_1x/2}}{|u|^{\gamma_2}}\right),\quad \gamma_2>0,\quad x>b.$$

Доказательство. Из леммы 1 при $c>0$ получим

$$\Pi_b(u,\,x)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=-c}\frac{[r_{u+}(\lambda)\,(1-V_{u-}(\lambda))]^{[b,\infty)}}{\lambda r_{u+}(\lambda)}\,e^{-\lambda x}d\lambda=$$

$$=-[r_{u+}(\lambda)\,(1-V_{u-}(\lambda))]^{[b,\infty)}_{\lambda=0}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\delta_1/2}\frac{[r_{u+}(\lambda)\,(1-V_{u-}(\lambda))]^{[b,\infty)}}{\lambda r_{u+}(\lambda)}\,e^{-\lambda x}d\lambda. \tag{18}$$

Пусть

$$r_{u+}(\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{\lambda x}df(x,\,u).$$

Тогда при выполнении условий леммы равномерно в $\bar U_\delta$

$$\left|\int\limits_y^\infty df(x,\,u)\right|=O\left(\frac{e^{-\delta_1 y}}{|u|^{\gamma_2}}\right),\quad \gamma_2>0,\quad y>0, \tag{19}$$

а если при $\sigma^2=0$, $\gamma>0$ условие леммы не выполняется, то тем не менее

$$\left|\int\limits_y^\infty df(x,\,u)\right|=O\left(e^{-\delta_1 y}\right),\quad y>0. \tag{20}$$

Эти оценки следуют из результатов [7] в силу непрерывности $f(x, u)$ по x, $x>0$, для рассматриваемых процессов (см. [13]). С помощью (19) нетрудно доказать, что первое слагаемое в (18) оценивается величиной $O\left(e^{-\delta_1 b}/|u|^{1/2}\right)$. Оценим интеграл в (18):

$$\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\delta_1/2} \frac{[r_{u+}(\lambda)(1-V_{u-}(\lambda))]^{[b,\infty)}}{\lambda r_{u+}(\lambda)} e^{-\lambda x} d\lambda = \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\delta_1/2} \frac{1-V_{u-}(\lambda)}{\lambda} e^{-\lambda x} d\lambda -$$

$$- \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\delta_1/2} \frac{[r_{u+}(\lambda)(1-V_{u-}(\lambda))]^{(-\infty,b)}}{\lambda r_{u+}(\lambda)} e^{-\lambda x} d\lambda = J_1 - J_2.$$

В силу леммы Жордана $J_1 = 0$. Для оценки J_2 рассмотрим три случая.

I. Пусть $\sigma^2 > 0$. Тогда (см. соотношение (5))

$$\frac{1}{r_{u+}(\lambda)} = \frac{\psi_{1+}(\lambda, u)(\mu_+(u)-\lambda)}{\psi_{1+}(0, u)\mu_+(u)} = \frac{(u-\psi(\lambda))(\mu_+(u)-\lambda)}{(u-\psi_3(\lambda))\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)} =$$

$$= \frac{\mu_+(u)-\lambda}{\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)} - \frac{2(\psi_4(\lambda)+u_1)}{\sigma^2(\mu_-(u)-\lambda)\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)},$$

$$J_2 = \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\delta_1/2} \frac{[r_{u+}(\lambda)(1-V_{u-}(\lambda))]^{(-\infty,b)}(\mu_+(u)-\lambda)}{\lambda\mu_+(u)\psi_{1+}(0,u)\psi_{1-}(\lambda,u)} e^{-\lambda x} d\lambda -$$

$$- \frac{2}{\sigma^2} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\delta_1/2} \frac{[r_{u+}(\lambda)(1-V_{u-}(\lambda))]^{(-\infty,b)}(\psi_4(\lambda)+u_1)}{\lambda(\mu_-(u)-\lambda)\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)} e^{-\lambda x} d\lambda = J_3 - J_4.$$

Поскольку $[e^{-\lambda b} r_{u+}(\lambda)(1-V_{u-}(\lambda))]^{(-\infty,0)} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и $x - b > 0$, то

$$J_3 = \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\delta_1/2} \frac{\left[e^{-\lambda b} r_{u+}(\lambda)(1-V_{u-}(\lambda))\right]^{(-\infty,0)}(\mu_+(u)-\lambda)}{\lambda\mu_+(u)\psi_{1+}(0,u)\psi_{1-}(\lambda,u)} e^{-\lambda(x-b)} d\lambda = 0,$$

$$J_4 = \frac{2}{\sigma^2} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\delta_1/2} \frac{(\psi_4(\lambda)+u_1)(1-V_{u-}(\lambda))}{\lambda\psi_{1+}(\lambda,u)\psi_{1-}(\lambda,u)(\mu_+(u)-\lambda)(\mu_-(u)-\lambda)} e^{-\lambda x} d\lambda -$$

$$- \frac{2}{\sigma^2} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\delta_1/2} \frac{[r_{u+}(\lambda)(1-V_{u-}(\lambda))]^{[b,\infty)}(\psi_4(\lambda)+u_1)}{\lambda(\mu_-(u)-\lambda)\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)} e^{-\lambda x} d\lambda = \frac{2}{\sigma^2}(J_5 - J_6),$$

$$|J_5| \leqslant C_7 e^{-\delta_1 x/2} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\delta_1/2} \frac{|\lambda|^{1-p}}{|\mu_+(u)-\lambda||\mu_-(u)-\lambda|} |d\lambda| =$$

$$= C_7 e^{-\delta_1 x/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|i\mu+\delta_1/2|^{1-p}}{|i\mu+\delta_1/2-\mu_+(u)||i\mu+\delta_1/2-\mu_-(u)|} d\mu =$$

$$= C_7 e^{-\delta_1 x/2} |\mu_+(u)|^{1-p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\mu - \dfrac{i\delta_1}{2|\mu_+(u)|}\right|^{1-p} d\mu}{\left|\mu - i\dfrac{\delta_1/2-\mu_+(u)}{|\mu_+(u)|}\right|\left|\mu - i\dfrac{\delta_1/2-\mu_-(u)}{|\mu_+(u)|}\right|} \leqslant$$

$$\leqslant C_8 e^{-\delta_1 x/2} |u|^{-p/2}.$$

Последняя оценка следует из того, что $|\arg\mu_\pm(u)| \to \pi/4$ при $|u| \to \infty$, $u \in \bar{U}_\delta$ и $|\mu_\pm(u)| \geqslant C_9|u|^{1/2}$ (см. [7]). Переходим к оценке интеграла J_6. Здесь используется следующее соотношение, аналог которого рассмотрен в доказательстве леммы 5: при $f(\lambda) \in \mathfrak{B}(0, \delta_1)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \delta_1$

$$\left[\frac{f(\lambda)}{\lambda-\varepsilon}\right]^{[b,\infty)} = \frac{[f(\lambda)]^{[b,\infty)}}{\lambda-\varepsilon} - \frac{e^{(\lambda-\varepsilon)b}}{\lambda-\varepsilon}[f(\lambda)]^{(-\infty,b)}_{\lambda=\varepsilon}.$$

Используя это соотношение, получим

$$|J_6| = \frac{2}{\sigma^2}\left| \int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\delta_1/2} \frac{\left[\dfrac{\psi_{1+}(0,u)\,\mu_+(u)\,(1-V_{u-}(\lambda))\,(\lambda-\delta_1)}{\psi_{1+}(\lambda,u)\,(\mu_+(u)-\lambda)}\right]^{[b,\infty)}(\psi_4(\lambda)+u_1)}{\lambda(\lambda-\delta_1)(\mu_-(u)-\lambda)\,\psi_{1+}(0,u)\,\mu_+(u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)} e^{-\lambda x}d\lambda + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\delta_1/2} \frac{\left[\dfrac{\psi_{1+}(0,u)\,\mu_+(u)\,(1-V_{u-}(\lambda))\,(\lambda-\delta_1)}{\psi_{1+}(\lambda,u)\,(\mu_+(u)-\lambda)}\right]^{(-\infty,b)}_{\lambda=\delta_1}(\psi_4(\lambda)+u_1)\,e^{-\lambda x}}{\lambda(\lambda-\delta_1)(\mu_-(u)-\lambda)\,\psi_{1+}(0,u)\,\mu_+(u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)\,e^{-(\lambda-\delta_1)b}}\,d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}e^{-\delta_1 x/2} \int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=\delta_1/2} \frac{|\lambda|^{1-p}}{|\lambda-\delta_1|\,|\mu_-(u)-\lambda|}\,|d\lambda| \leqslant C_{11}e^{-\delta_1 x/2}|u|^{-p/2}.$$

Доказательство леммы в случае $\sigma^2>0$ закончено.

II. Пусть $\sigma^2=0$, $\gamma<0$. Тогда $u-\psi_3(\lambda)=\gamma(\lambda-\mu_-(u))$,

$$\frac{1}{r_{u+}(\lambda)} = \frac{\psi_{1+}(\lambda,u)}{\psi_{1+}(0,u)} = \frac{u-\psi(\lambda)}{u-\psi_3(\lambda)}\,\frac{1}{\psi_{1+}(0,u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)} =$$

$$= \frac{1}{\psi_{1+}(0,u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)} + \frac{\psi_2(\lambda)}{\gamma(\lambda-\mu_-(u))\,\psi_{1+}(0,u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)},$$

$$J_2 = \int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\delta_1/2} \frac{[r_{u+}(\lambda)(1-V_{u-}(\lambda))]^{(-\infty,b)}}{\lambda\psi_{1+}(0,u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)}\,e^{-\lambda x}d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\delta_1/2} \frac{[r_{u+}(\lambda)(1-V_{u-}(\lambda))]^{(-\infty,b)}\psi_2(\lambda)}{\gamma\lambda(\lambda-\mu_-(u))\,\psi_{1+}(0,u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)}\,e^{-\lambda x}d\lambda = J_7+J_8.$$

Как и в предыдущем случае, при $x>b$ $J_7=0$. В силу условия 3 $|\psi_2(\lambda)|\leqslant C_{12}$, поэтому

$$|J_8| \leqslant C_{13}e^{-\delta_1 x/2} \int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\delta_1/2} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|\,|\lambda-\mu_+(u)|} \leqslant C_{14}e^{-\delta_1 x/2}\frac{|\ln|u||}{|u|} \quad \text{(см.[7])}.$$

III. Пусть $\sigma^2=0$, $\gamma>0$. В этом случае $u-\psi_3(\lambda)=\gamma(\lambda-\mu_+(u))$,

$$\frac{1}{r_{u+}(\lambda)} = \frac{\psi_{1+}(\lambda,u)\,(\mu_+(u)-\lambda)}{\psi_{1+}(0,u)\,\mu_+(u)} = \frac{(u-\psi(\lambda))\,(\mu_+(u)-\lambda)}{(u-\psi_3(\lambda))\,\psi_{1+}(0,u)\,\mu_+(u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)} =$$

$$= \frac{\mu_+(u)-\lambda}{\psi_{1+}(0,u)\,\mu_+(u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)} + \frac{\psi_2(\lambda)}{\gamma\psi_{1+}(0,u)\,\mu_+(u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)}.$$

Как и в предыдущих случаях, $J_2=J_9+J_{10}$, где

$$J_9 = \int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\delta_1/2} \frac{[r_{u+}(\lambda)(1-V_{u-}(\lambda))]^{(-\infty,b)}(\mu_+(u)-\lambda)}{\lambda\psi_{1+}(0,u)\,\mu_+(u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)}\,e^{-\lambda x}d\lambda = 0.$$

В силу условий леммы

$$|J_{10}| = \left|\int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\delta_1/2} \frac{[r_{u+}(\lambda)(1-V_{u-}(\lambda))]^{(-\infty,b)}\psi_2(\lambda)}{\gamma\lambda\psi_{1+}(0,u)\,\mu_+(u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)}\,e^{-\lambda x}d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}e^{-\delta_1 x/2}|\mu_+(u)|^{-1} \int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\delta_1/2} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{1+r}} \leqslant C_{16}e^{-\delta_1 x/2}|u|^{-1/2}.$$

Лемма полностью доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 8. *Пусть выполняются условия* 1—3. *Если при* $\sigma^2=0$, $\gamma<0$ $|\psi_2(\lambda)|\leqslant C_{17}|\lambda|^{-r}$, $0<r<1$, $\lambda_-\leqslant \mathrm{Re}\,\lambda\leqslant\lambda_+$, $|\mathrm{Im}\,\lambda|>C_{18}$, *то равномерно по* $u\in\bar{U}_\delta$ $|\Pi_a(u,x)| = O\left(\dfrac{e^{-\delta_1 x/2}}{|u|^{\gamma_3}}\right)$, $\gamma_3>0$, $x<-a$.

Лемма 9. *Пусть выполняются условия 1—3. Тогда для любого множества* $A=(-a_1,\ b_1)\subset(-a,\ b)$

$$\left|uH(u,\ A)-u\int_0^\infty e^{-ut}\mathbf{P}(\xi(t)\in A)dt\right|=O\left(\frac{e^{-\delta_1\min(a,b)}}{|u|^{\gamma_4}}\right)$$

равномерно по $u\in\tilde{U}_\delta$, $\gamma_4>0$.

Доказательство следует из соотношения (3) и лемм 1, 2 с использованием формулы свертки для функций из V, если заметить, что в представлении

$$r_{u-}(\lambda)=\int_{-\infty}^{0}e^{\lambda x}dg(x,\ u)$$

в условиях леммы 8 имеет место равномерно по $u\in\tilde{U}_\delta$ оценка

$$\left|\int_{-\infty}^{x}dg(y,\ u)\right|=O\left(\frac{e^{\delta_1 x}}{|u|^{\gamma_5}}\right),\quad \gamma_5>0$$

и оценка $O\left(e^{\delta_1 x}\right)$, если при $\sigma^2=0$, $\gamma<0$ условия леммы не выполняются. Эти оценки аналогичны оценкам (19), (20) и получаются тем же методом, что и в [7].

2. Асимптотические разложения вероятностей

По формуле обращения интеграла Лапласа при $c>0$

$$\mathbf{P}(Y\in B,\ T<t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Pi(u,\ B)\,e^{tu}}{u}du,\quad B\subset(-\infty,\ -a]\cup[b,\ \infty);$$

$$\mathbf{P}(\xi(t)\in A,\ T>t)=\mathbf{P}(\xi(t)\in A)-\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Phi(u,\ A)\,e^{tu}}{u}du,\qquad A\subset(-a,\ b);$$

$$\Phi(u,\ A)=u\int_0^\infty e^{-ut}\mathbf{P}(\xi(t)\in A)\,dt-uH(u,\ A).$$

В этих интегралах подынтегральные функции аналитичны в полуплоскости $\operatorname{Re}u>0$, непрерывны и ограничены, включая границу $\operatorname{Re}u=0$, за исключением некоторой малой окрестности точки $u=0$. Поэтому в качестве контура интегрирования выберем мнимую ось. При этом лежащую на ней точку $u=0$ обойдем справа по окружности радиуса ε_3, $\varepsilon_3>0$ — произвольное д. м. число. Обозначим этот контур K_1. При выполнении условий лемм 7—9 легко установить, что

$$\left|\int_{\tilde{U}_\delta}\frac{\Pi(u,\ B)\,e^{tu}}{u}du\right|=O\left(e^{-\delta_1\min(a,b)}\right),\quad B\subset(-\infty,\ -a]\cup[b,\ \infty);$$

$$\left|\int_{\tilde{U}_\delta}\frac{\Phi(u,\ A)\,e^{tu}}{u}du\right|=O\left(e^{-\delta_1\min(a,b)}\right),\quad A\subset(-a,\ b).$$

Далее, если $\varepsilon(u)$ аналитическая в U_δ и непрерывная на границе U_δ функция, то в силу произвольности $\varepsilon_3>0$

$$\left|\int_{K_1\setminus\tilde{U}_\delta}\frac{\varepsilon(u)\,e^{tu}}{u}du\right|\leqslant C\sup_{u\in\tilde{U}_\delta}|\varepsilon(u)|\ln t.$$

Эта оценка получается, если положить $\varepsilon_3=1/t$.

Пусть $K_2 = K_1 \setminus \bar{U}_\delta$. Рассмотрим интеграл

$$\bar{J}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_2} \frac{F(u)\, e^{(k_1 a + k_2 b)\lambda_-(u)} \Pi_1(u)\, e^{tu}}{u e^{(k_3 a + k_4 b)\lambda_+(u)}} du, \tag{21}$$

где $F(u) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k u^{k/2}$ в окрестности нуля, k_1, k_2, k_3, $k_4 \geqslant 0$. Отметим, что в $U_{\varepsilon_1 \delta}$ имеют место разложения (см. [7])

$$\lambda_\pm(u) = \pm\alpha_1 \sqrt{u} + \alpha_2 u \pm \alpha_3 u^{3/2} + \ldots, \quad \alpha_1 = \sqrt{2/\psi''(0)}. \tag{22}$$

Здесь корень из положительного числа положителен. Пусть K — контур, полученный из контура $\left\{ |\arg u| = \frac{3\pi}{4}, \quad u \in K^1_{\varepsilon_1, \delta} \right\}$ искривлением внутрь $K^1_{\varepsilon_1, \delta}$ вблизи точки $u = 0$, $K_3 = \{u : u \in K^1_{\varepsilon_1, \delta}, |\operatorname{Im} u| = \delta\}$. В силу аналитичности подынтегральной функции в $K^1_{\varepsilon_1, \delta}$ в (21) K_2 можно заменить на $K \cup K_3$. Из разложений (22) следует при д. м. $\varepsilon_1 > 0$ и $\delta > 0$ существование такого $\gamma_5 = \gamma_5(\varepsilon) > 0$, что при $u \in K_3$

$$\operatorname{Re} \lambda_-(u) < -\gamma_5, \quad \operatorname{Re} \lambda_+(u) > \gamma_5.$$

Отсюда следует, что подынтегральная функция в (21) равномерно ограничена в K_3 величиной $O(\exp(-\gamma_5((k_1 + k_3)a + (k_2 + k_4)b)))$ в силу равномерной ограниченности $\Pi_1(u)$ (см. раздел 1). Таким образом,

$$\bar{J}(t) = J(t) + O(\exp(-\gamma_5((k_1 + k_3)a + (k_2 + k_4)b))),$$

где $J(t)$ получается из $\bar{J}(t)$ заменой k_2 на k.

Для $M \geqslant 1$ имеет место соотношение (см. [4])

$$\Pi_1(u) = \sum_{s=0}^{M-1} (1 - \mu^a(u) H_1(u)) (\mu^{b+a}(u) H_2(u))^s + \Pi_1(u) (\mu^{b+a}(u) \cdot H_2(u))^M.$$

Обозначим $\tau_1 = a/t$, $\tau_2 = b/t$, $\tau_3 = 1/t$, $\tilde{a}_1(u) = F(u)/u$, $\tilde{a}_2(u) = \tilde{a}_1(u) H_1(u)$, $\tilde{h}_{1s}(u) = (\tau_1 s + \tau_2 s)(\lambda_-(u) - \lambda_+(u)) + (k_1\tau_1 + k_2\tau_2)\lambda_-(u) - (k_3\tau_1 + k_4\tau_2) \times \lambda_+(u) + s\tau_3 \ln H_2(u) + u$, $\quad 0 \leqslant s \leqslant M$, $\quad \tilde{h}_{2s}(u) = \tilde{h}_{1s}(u) + \tau_1(\lambda_-(u) - \lambda_+(u))$, $0 \leqslant s \leqslant M - 1$. Тогда

$$J(t) = \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{s=0}^{M-1} (J_{1s}(t) - J_{2s}(t)) + J_M(t) \right],$$

где $J_{js}(t) = \int\limits_K \tilde{a}_j(u)\, e^{t\tilde{h}_{js}(u)} du$, $s = 0, 1, 2, \ldots, \quad M-1$, $j = 1, 2$ (в дальнейшем j принимает значения 1, 2),

$$J_M(t) = \int\limits_K \tilde{a}_1(u)\, \Pi_1(u)\, e^{t\tilde{h}_{1M}(u)} du.$$

Сначала рассмотрим случай, когда в разложении функции $F(u)$ (см. (21)) $f_0 = 0$. Заметим, что для $F_3(u, A)$ и $F_4(u, A)$ (теорема 2) это условие выполняется. Сделаем замену $z = \sqrt{u}$. Обозначим Γ образ K в плоскости z, $\eta(z) = H_2(z)$, $\psi_-(z) = \lambda_-(u)$, $\psi_+(z) = \lambda_+(u)$, $h_{js}(z) = \tilde{h}_{js}(u)$, $a_j(z) = 2z\tilde{a}_j(u)$, $s = 0, 1, \ldots, M - 1$, $h_{1M}(z) = \tilde{h}_{1M}(u)$. Тогда

$$J_{js}(t) = \int\limits_\Gamma a_j(z)\, e^{th_{js}(z)} dz.$$

В этом случае $a_j(z)$, $h_{js}(z)$ являются аналитическими в окрестности нуля, и дальнейшее применение модифицированного метода перевала из [2] проводится так же, как в [4]. Поэтому результаты приводим без подробных доказательств.

Пусть

$$F_1(z, y_1, y_2, \ldots, y_5) \equiv (y_1 + y_2)\left(\psi'_-(z) - \psi'_+(z)\right) +$$
$$+ y_3\eta'(z)/\eta(z) + y_4\left(k_1\psi'_-(z) - k_3\psi'_+(z)\right) +$$
$$+ y_5\left(k_2\psi'_-(z) - k_4\psi'_+(z)\right) + 2z = 0,$$
$$F_2(z, y_1, y_2, \ldots, y_5) \equiv F_1(z, y_1, \ldots, y_5) + y_4\left(\psi'_-(z) - \psi'_+(z)\right) = 0.$$

По теореме о неявной функции существуют решения этих уравнений: $z_1(y_1, \ldots, y_5)$, $z_2(y_1, \ldots, y_5)$, соответственно представимые в некоторой окрестности $\Delta = \{|y_i| < \tau,\ i = 1, 2, \ldots, 5\}$ в виде сходящихся рядов по степеням $y_1, y_2, \ldots, y_5$. Заметим, что

$$h'_{js}(z) = F_j(z, \tau_1 s, \tau_2 s, \tau_3 s, \tau_1, \tau_2).$$

Пусть $M - 1 = [\tau t/(a+b)]$. Тогда при $0 \leqslant s \leqslant M-1$ точка $(\tau_1 s, \tau_2 s, \tau_3 s, \tau_1, \tau_2) \in \Delta$. Для решений уравнений $h'_{js}(z) = 0$, $s = 0, 1, \ldots, M-1$, имеет место разложение

$$z_{js} \equiv z_{js}(\tau_1 s, \tau_2 s, \tau_3 s, \tau_1, \tau_2) = \alpha_1(s + j - 1 + (k_1 + k_3)/2)\tau_1 +$$
$$+ \alpha_1(s + (k_2 + k_4)/2)\tau_2 - s\eta_1\tau_3/2 + O((\tau_1 + \tau_2)^2 s^2).$$

Точки z_{js} являются точками перевала функций $h_{js}(z)$, $0 \leqslant s \leqslant M-1$. В окрестности нуля

$$h_{js}(z) = -\alpha_1 z[(2(s+j-1) + k_1 + k_3)\tau_1 + (2s + k_2 + k_4)\tau_2] +$$
$$+ s\eta_1 z + z^2[1 + O(s(\tau_1 + \tau_2))] + O(z^3),$$

следовательно,

$$h_{js}(z_{js}) = -[\alpha_1(s + j - 1 + (k_1 + k_3)/2)\tau_1 + \alpha_2(s + (k_2 + k_4)/2)\tau_2 -$$
$$- s\eta_1\tau_3/2]^2 + O((\tau_1 + \tau_2)^3 s^3), \quad h''_{js}(z_{js}) = 2 + O(s(\tau_1 + \tau_2)).$$

При указанном выборе M $J_M(t) = O\left(e^{-\gamma_3 t}\right)$, $\gamma_3 > 0$. Подобное утверждение доказано в [4], поэтому здесь на нем не будем останавливаться.

Введем обозначения:

$$Q_{jsi} \equiv Q_{jsi}(k_1, k_2, k_3, k_4, F) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{r=0}^{i} q_{2i,r}^{j,s}\left(-h_{js}^{(0)}\right)^{-r-i-1/2}\Gamma(r + i + 1/2),$$

где $q_{i,r}^{j,s}$ — коэффициент при z^i в произведении

$$\frac{1}{r!}\left(a_{js}^{(0)} + a_{js}^{(1)}z + \ldots\right)\left(h_{js}^{(1)}z + h_{js}^{(2)}z^2 + \ldots\right)^r,$$
$$a_{js}^{(k)} = a_{js}^{(k)}(z_{js})/k!, \quad h_{js}^{(k)} = h_{js}^{(k+2)}(z_{js})/(k+2)!, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Лемма 10. *Пусть* $a = o(t)$, $b = o(t)$, $a \to \infty$, $b \to \infty$, $(a+b)/\sqrt{t} \to \infty$ *при* $t \to \infty$. *Тогда для произвольного целого* $q \geqslant 1$

$$J(t) = \left[\sum_{i=1}^{q-1} t^{-i-1/2}\left(Q_{10i}e^{th_{10}(z_{10})} - Q_{20i}e^{th_{20}(z_{2s})}\right) + \right.$$
$$\left. + t^{-q-1/2}O\left(e^{-\gamma[a(k_1+k_3)+b(k_2+k_4)]^2/t}\right)\right]\left(1 + O\left(e^{-\gamma(a+b)^2/t}\right)\right), \quad \gamma > 0.$$

Лемма 11. *Пусть* $a = x_1\sqrt{t}$, $b = x_2\sqrt{t}$, $0 < x_j < \infty$. *Тогда для любого целого* $q \geqslant 1$

$$J(t) = \sum_{i=0}^{q-1} t^{-i-1/2}\sum_{r=0} t^{-r/2}p_{ri} + O\left(t^{-q-1/2}\right),$$

$$p_{ri} \equiv p_{ri}(k_1, k_2, k_3, k_4, F) =$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty}\left(q_r^{1,i}(s)\exp\left(-\alpha_1^2[x_1(s + (k_1 + k_3)/2) + x_2(s + (k_2 + k_4)/2)]^2\right) -\right.$$
$$\left. - q_r^{2i}(s)\exp\left(-\alpha_1^2[x_1(s + 1 + (k_1 + k_3)/2) + x_2(s + (k_2 + k_4)/2)]^2\right)\right),$$

$q_r^{j,i}(s)$ *определяются из разложения*

$$Q_{jsi}\exp\{th_{js}(z_{js})+\alpha_1^2[x_1(s+j-1+(k_1+k_3)/2)+x_2(s+(k_2+k_4)/2)]^2\}=$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}t^{-r/2}q_r^{j,i}(s).$$

Лемма 12. *Пусть* $a=x\sqrt{t}$, $b=o(a)\to\infty$, $t\to\infty$, $o<x<\infty$. *Тогда для любого целого* $q\geqslant 1$

$$J(t)=\sum_{i=0}^{q-1}t^{-i-1/2}\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty}\left(\tau_1\sqrt{t}\right)^{i_1}\left(1/\sqrt{t}\right)^{i_2}p_{i_1,i_2,i}+O\left(t^{-q-1/2}\right),\quad p_{i_1,i_2,i}\equiv$$
$$\equiv p_{i_1,i_2,i}(k_1,k_2,k_3,k_4,F)=\sum_{s=0}^{\infty}\left(q_{i_1,i_2}^{1,i}(s)\exp\{-\alpha_1^2x^2(s+(k_1+k_3)/2)^2\}-\right.$$
$$\left.-q_{i_1,i_2}^{2,i}(s)\exp\{-\alpha_1^2x^2(s+1+(k_2+k_4)/2)^2\}\right),$$

$q_{i_1,i_2}^{j,i}$ *определяются из разложений*

$$Q_{jsi}\exp\{th_{js}(z_{js})+\alpha_1^2x^2(s+j-1+(k_1+k_3)/2)^2\}=$$
$$=\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty}\left(\tau_1\sqrt{t}\right)^{i_1}\left(1/\sqrt{t}\right)^{i_2}q_{i_1,i_2}^{j,i}(s).$$

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай $b=x\sqrt{t}$, $a=o(b)$.

Теорема 2, леммы 10—12 вместе с полученными выше оценками дают п. а. р. вероятностей $\mathbf{P}(\xi(t)\in A,\ T>t)$, $A\subset(-a,\ b)$, в указанном спектре уклонений границ. Приведем, например, случай нормальных уклонений границ.

Теорема 3. *Пусть множество* $A=(-a_1,\ b_1)\subset(-a,\ b)$ *не зависит от* t, $a=x_1\sqrt{t}$, $b=x_2\sqrt{t}$, $0<x_j<\infty$. *Тогда для любого целого* $q\geqslant 1$

$$\mathbf{P}(\xi(t)\in A,\ T>t)=\mathbf{P}(\xi(t)\in A)-$$
$$-\sum_{i=0}^{q-1}t^{-i-1/2}\sum_{r=0}^{\infty}t^{-r/2}(p_{ri}(0,1,0,1,F_3(\cdot,A))-$$
$$-q_{ri}(0,1,0,1,F_4(\cdot,A)))+O\left(t^{-q-1/2}\right),$$

где q_{ri} *отличаются от* p_{ri} *только тем, что в их определении, начиная с* (21), *вместо* $H_1(u)$ *берется* $H_3(u)$, *a и b меняются местами.*

Вернемся к интегралу (21), и пусть в разложении функции $F(u)$ $f_0\neq 0$. Для $F_1(u,\ B)$ и $F_2(u,\ B)$ это условие выполняется. В этом случае после замены $\sqrt{u}=z$ функции $b_j(z)=za_j(z)=2z^2\tilde{a}_j(u)$ и $h_{js}(z)$ являются аналитическими в окрестности нуля и

$$J_{js}(t)=\int_{\Gamma}\frac{b_j(z)}{z}e^{th_{js}(z)}dz,$$
$$J(t)=\frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{s=0}^{M-1}(J_{1s}(t)-J_{2s}(t))+J_M(t)\right).$$

Дальнейшее вычисление интегралов $J_{js}(t)$ ведется по схеме работ [2, 6, 7]. Обозначим

$$g_{js}(z,\ z_{js})=h_{js}(z+z_{js})-h_{js}(z_{js})=z^2\sum_{k=0}^{\infty}h_{js}^{(k)}z^k,$$
$$h_{js}^{(k)}=h_{js}^{(k)}(z_{js})/(k+2)!.$$

Меняем контур интегрирования Γ в $J_{js}(t)$ так, чтобы не менялись концевые точки Γ, и измененный контур Γ_1 содержал отрезок $(z_{js}-i\rho,$

$z_{js}+i\rho)$ при некотором $\rho>0$. Тогда

$$J_{js}(t)=\int\limits_{z_{is}-i\rho}^{z_{js}+i\rho}\left(b_j(z)\,e^{th_{js}(z)}/z\right)dz+e^{th_{js}(z_{js})}O\left(e^{-\gamma_4 t}\right)=$$

$$=\int\limits_{z_{is}-i\rho}^{z_{js}+i\rho}\frac{b_j(z)-b_j(0)}{z}\,e^{th_{js}(z)}\,dz+\int\limits_{-i\rho}^{i\rho}\frac{b_j(0)}{z+z_{js}}\,e^{th_{js}(z+z_{js})}dz+$$

$$+e^{th_{js}(z_{js})}O\left(e^{-\gamma_4 t}\right)=J'_{js}(t)+J''_{js}(t)+e^{th_{js}(z)}O\left(e^{-\gamma_4 t}\right).$$

Здесь ограничимся случаем $a=x_1\sqrt{t}$, $b=x_2\sqrt{t}$. Рассмотрение остальных случаев не вносит принципиальных трудностей (см. [6]).

Пусть $p_{ri}^{(2)}(k_1,k_2,k_3,k_4,F)$ определяются так же, как $p_{ri}(k_1,k_2,k_3,k_4,F)$, но с функцией $\tilde{Q}_{jsi}$, полученной из Q_{jsi} заменой $a_j(z)$ на $(b_j(z)-b_j(0))/z$. Разложение $\frac{1}{2\pi i}\sum\limits_{s=0}^{M-1}J'_{js}(t)$ получается из леммы 11 в силу аналитичности $(b_j(z)-b_j(0))/z$ в окрестности нуля. Для $J''_{js}(t)$ имеет место следующее соотношение (см. [2, 6]):

$$\sum_{s=0}^{M-1}\left(J''_{1s}(t)-J''_{2s}(t)\right)=b_1(0)\sum_{s=0}^{M-1}\left(\int\limits_{-i\rho}^{i\rho}\frac{e^{th_{1s}(z_{1s})+tg_{1s}(z,z_{1s})}}{z+z_{1s}}\,dz-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{-i\rho}^{i\rho}\frac{e^{th_{2s}(z_{2s})-tg_{2s}(z,z_{2s})}}{z+z_{2s}}\,dz\right)=$$

$$=2\pi i b_1(0)\left[\sum_{s=0}^{M-1}\left(\Phi\left(|z_{1s}|\sqrt{2th_{1s}^{(0)}}\right)-\Phi\left(|z_{2s}|\sqrt{2th_{2s}^{(0)}}\right)\right)+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{q}t^{-i/2}\sum_{s=0}^{M-1}\left(e^{th_{1s}(z_{1s})}\Pi_{3i-1}^{(1)}\left(z_{1s}\sqrt{t}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-e^{th_{2s}(z_{2s})}\Pi_{3i-1}^{(2)}\left(z_{2s}\sqrt{t}\right)\right)\right]+t^{-\frac{q+1}{2}}\sum_{s=0}^{M-1}\left(r_{1sq}e^{th_{1s}(z_{1s})+C_{1s}tz_{1s}^3}-\right.$$

$$\left.-r_{2sq}e^{th_{2s}(z_{2s})+C_{20}tz_{2s}^3}\right)+O\left(e^{-\gamma_5 t}\right),\quad \gamma_5>0,\tag{23}$$

где $q\geqslant 1$ — произвольное целое число, $\Pi_i^{(j)}(u)$ — полиномы от u степени i с коэффициентами, допускающими разложения по степеням $\tau_1 s$, $\tau_2 s$, $\tau_3 s$, τ_1, τ_2, $0\leqslant s\leqslant M-1$, $b_1(0)=b_2(0)$,

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_t^\infty e^{-x^2/2}dx,\quad |r_{jsq}|=O\left(1,|z_{js}\sqrt{t}|^{3q+2}\right).$$

При $a=x_1\sqrt{t}$, $b=x_2\sqrt{t}$, $0<x_j<\infty$

$$\sum_{s=0}^{M-1}\left(\Phi\left(|z_{2s}|\sqrt{2th_{2s}^{(0)}}\right)-\Phi\left(|z_{1s}|\sqrt{2th_{1s}^{(0)}}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{s=0}^{M-1}\left(\exp\left\{-\frac{\left(|z_{1s}|\sqrt{2th_{1s}^{(0)}}\right)^2}{2}\right\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(|z_{1s}|\sqrt{2th_{1s}^{(0)}}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!!}-\right.$$

$$\left.-\exp\left\{-\frac{\left(|z_{2s}|\sqrt{2th_{2s}^{(0)}}\right)^2}{2}\right\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(|z_{2s}|\sqrt{2th_{2s}^{(0)}}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!!}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{s=0}^{M-1}\left(\exp\left\{-\alpha_1^2\left[x_1(s+(k_1+k_3)/2)+x_2(s+(k_2+k_4)/2)\right]^2\right\}\times\right.$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} g_r^{(1)}(s) - \exp\{-\alpha_1^2 [x_1(s+1-(k_1+k_3)/2) + x_2(s+$$

$$+(k_2+k_4)/2)]^2\} \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} g_r^{(2)}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{\infty} \left(g_r^{(1)}(s) \exp\{-\alpha_1^2 [x_1(s+(k_1+k_3)/2) + x_2(s+(k_2+k_4)/2)]^2\} -\right.$$

$$\left. - g_r^{(2)}(s) \exp\{-\alpha_1^2 [x_1(s+1+(k_1+k_3)/2) + x_2(s+(k_2+k_4)/2)]^2\} \right) +$$

$$+ O\left(e^{-\gamma_6 t}\right) = -\sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} p_r(k_1, k_2, k_3, k_4) + O\left(e^{-\gamma_6 t}\right), \ \gamma_6 > 0, \qquad (24)$$

$$\sum_{s=0}^{M-1} \Pi_{3i-1}^{(j)}\left(z_{js} \sqrt{t}\right) \exp\{t h_{js}(z_{js}) + \alpha_1^2 [x_1(s+j-1+(k_1+k_3)/2) +$$

$$+ x_2(s+(k_2+k_4)/2)]^2\} = \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} g_{1,r}^{j,i}(s),$$

где $g_{1,r}^{j,i}(s)$ — многочлены от x_1, x_2 и s степени по каждой переменной не более $3r$.

Пусть

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(g_{1,r}^{1,i}(s) \exp\{-\alpha_1^2 [x_1(s+(k_1+k_3)/2) + x_2(s+(k_2+k_4)/2)]^2\} -\right.$$

$$\left. - g_{1,r}^{2,i}(s) \exp\{-\alpha_1^2 [x_1(s+1+(k_1+k_3)/2) + x_2(s+(k_2+k_4)/2)]^2\} \right) =$$

$$= p_{ri}^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4, F). \qquad (25)$$

В (23)

$$h_{js}(z_{js}) - C_{18+j} z_{js}^3 = -z_{js}^2 (1 + O(s(\tau(t)))) + C_{18+j} z_{js}^3 =$$

$$= -z_{js}^2 (1 + O(s\tau(t))), \qquad \tau(t) = \max(\tau_1, \tau_2).$$

Выбором д. м. $\tau > 0$ можно добиться, чтобы

$$1 + O(s\tau(t)) \geqslant \gamma_7, \quad \gamma_7 > 0 \quad (\text{см. } [6]).$$

Итак, доказана следующая

Теорема 4. *Если* $a = x_1\sqrt{t}$, $b = x_2\sqrt{t}$, $0 < x_j < \infty$ *и выполняются условия леммы* 7, *то при* $x > b$ *для любого целого* $q \geqslant 1$

$$\mathbf{P}(b \leqslant Y < x, T < t) = 2F_1(0, [b, x)) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} p_r(0, 0, 0, 1) -\right.$$

$$- \sum_{i=1}^{q} t^{-i/2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} p_{ri}^{(1)}(0, 0, 0, 1, F_1(\cdot, [b, x))) \right) +$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{[(q-1)/2]} t^{-i-1/2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} p_{ri}^{(2)}(0, 0, 0, 1, F_1(\cdot, [b, x))) \right) \right\} + O\left(t^{(-q+1)/2}\right),$$

коэффициенты $p_{ri}^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4, F)$, $p_r(k_1, k_2, k_3, k_4)$ определяются формулами (24) и (25),

$$p_0(0, 0, 0, 1) = \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} \int_{-x_1}^{x_1} \exp\left\{-\frac{\alpha_1^2}{4}[x + (2s+1)(x_1+x_2)]^2\right\} dx.$$

Начиная с (21), заменив $\Pi_1(u)$ на $\Pi_2(u)$, можно выписать разложения для $\mathbf{P}(x < Y \leqslant -a, T < t)$, $x < -a$.

Автор пользуется случаем, чтобы выразить глубокую благодарность А. А. Боровкову и Б. А. Рогозину за ценные замечания, В. И. Лотову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боровков А. А.** Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин. I. II.— Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, № 2, 4, с. 137—171, 378—392.
2. **Боровков А. А.** Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 5, с. 645—694.
3. **Боровков А. А., Рогозин Б. А.** Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий.— Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, № 3, с. 401—430.
4. **Лотов В. И.** Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах.— Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, № 3, 4, с. 475—485, 873—879.
5. **Лотов В. И.** Об асимптотике распределений, связанных с выходом недискретного случайного блуждания из интервала (в печати).
6. **Лотов В. И.** Канд. дис. Москва: изд. ИМ АН СССР, 1977.
7. **Рогозин Б. А.** Распределение максимума процесса с независимыми приращениями.— Сиб. мат. журн., 1969, т. 10, № 6, с. 1334—1363.
8. **Рогозин Б. А.** О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, № 4, с. 656—670.
9. **Боровских Ю. В.** Полные асимптотические разложения для резольвенты полунепрерывного процесса с независимыми приращениями с поглощением и распределения вероятности разорения.— В кн.: Аналитические методы в теории вероятностей. Киев: Наукова думка, 1979, с. 10—21.
10. **Братийчук Н. С.** Полные асимптотические разложения для распределений моментов выхода процесса с независимыми приращениями из полосы. Препринт 81.88. Киев: изд. ИМ АН УССР, 1981.
11. **Боровков А. А.** О времени первого прохождения для одного класса процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, № 2, с. 360—364.
12. **Золотарев В. М.** Момент первого прохождения уровня и поведение на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями.— Теория вероят. и ее примен., 1964, т. 9, № 4, с. 724—733.
13. **Печерский Е. А.** Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и из полуинтервала.— Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 14, № 1, с. 104—119.
14. **Лукач Е.** Характеристические функции. Москва: Наука, 1979.
15. **Emery D. J.** Exit problem for a spectrally positive process.— Adv. Appl. Probab., 1973, v. 5, N 3, p. 498—521.

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

А. А. МОГУЛЬСКИЙ

1. Введение

Пусть $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, и пусть $\mathbf{M}\exp\{\lambda\xi_1\} < \infty$ при $|\lambda| \leqslant \delta$, $\delta > 0$. Обозначим через $s_n = s_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, непрерывную ломаную, построенную по точкам $(i/n, S_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, где $S_0 = 0$, $S_i = \xi_1 + \ldots + \xi_i$. Для функции $H(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, определим следующие подмножества пространства $C(0, 1)$ непрерывных вещественных функций $f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$A_H = \{f \in C(0, 1)\colon \inf_{0<t<1} \{f(t) - H(t)\} \leqslant 0\},$$

$$B_H = \{f \in C(0, 1)\colon \inf_{0<t<1} \{f(t) - H(t)\} > 0\}.$$

Будем, следуя А. А. Боровкову [1], называть задачу нахождения асимптотики вероятности

$$\mathbf{P}(s \cdot r^{-1}(n) \in C),\ C \subseteq C(0, 1), \tag{1.1}$$

в случае, когда она стремится к нулю, первой и второй граничной задачей в зависимости от того, является ли множество C вида A_H, $\inf\limits_{0<t<1} H(t) > 0$ или вида B_H, $H(0) < 0$, $\sup\limits_{0<t<1} H(t) > 0$. Этим задачам, восходящим в своих постановках к А. Н. Колмогорову [2], посвящено большое количество работ (см. [1—8] и библиографию там). В области больших уклоне-