ЛИТЕРАТУРА

1. **Боровков А. А.** Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин. I. II.— Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, № 2, 4, с. 137—171, 378—392.
2. **Боровков А. А.** Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 5, с. 645—694.
3. **Боровков А. А., Рогозин Б. А.** Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий.— Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, № 3, с. 401—430.
4. **Лотов В. И.** Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах.— Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, № 3, 4, с. 475—485, 873—879.
5. **Лотов В. И.** Об асимптотике распределений, связанных с выходом недискретного случайного блуждания из интервала (в печати).
6. **Лотов В. И.** Канд. дис. Москва: изд. ИМ АН СССР, 1977.
7. **Рогозин Б. А.** Распределение максимума процесса с независимыми приращениями.— Сиб. мат. журн., 1969, т. 10, № 6, с. 1334—1363.
8. **Рогозин Б. А.** О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, № 4, с. 656—670.
9. **Боровских Ю. В.** Полные асимптотические разложения для резольвенты полунепрерывного процесса с независимыми приращениями с поглощением и распределения вероятности разорения.— В кн.: Аналитические методы в теории вероятностей. Киев: Наукова думка, 1979, с. 10—21.
10. **Братийчук Н. С.** Полные асимптотические разложения для распределений моментов выхода процесса с независимыми приращениями из полосы. Препринт 81.88. Киев: изд. ИМ АН УССР, 1981.
11. **Боровков А. А.** О времени первого прохождения для одного класса процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, № 2, с. 360—364.
12. **Золотарев В. М.** Момент первого прохождения уровня и поведение на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями.— Теория вероят. и ее примен., 1964, т. 9, № 4, с. 724—733.
13. **Печерский Е. А.** Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и из полуинтервала.— Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 14, № 1, с. 104—119.
14. **Лукач Е.** Характеристические функции. Москва: Наука, 1979.
15. **Emery D. J.** Exit problem for a spectrally positive process.— Adv. Appl. Probab., 1973, v. 5, N 3, p. 498—521.

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

А. А. МОГУЛЬСКИЙ

1. Введение

Пусть $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, и пусть $\mathbf{M}\exp\{\lambda\xi_1\} < \infty$ при $|\lambda| \leqslant \delta$, $\delta > 0$. Обозначим через $s_n = s_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, непрерывную ломаную, построенную по точкам $(i/n, S_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, где $S_0 = 0$, $S_i = \xi_1 + \ldots + \xi_i$. Для функции $H(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, определим следующие подмножества пространства $C(0, 1)$ непрерывных вещественных функций $f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$A_H = \{f \in C(0, 1): \inf_{0<t<1} \{f(t) - H(t)\} \leqslant 0\},$$

$$B_H = \{f \in C(0, 1): \inf_{0<t<1} \{f(t) - H(t)\} > 0\}.$$

Будем, следуя А. А. Боровкову [1], называть задачу нахождения асимптотики вероятности

$$\mathbf{P}(s \cdot r^{-1}(n) \in C), \ C \subseteq C(0, 1), \tag{1.1}$$

в случае, когда она стремится к нулю, первой и второй граничной задачей в зависимости от того, является ли множество C вида A_H, $\inf_{0<t<1} H(t) > 0$ или вида B_H, $H(0) < 0$, $\sup_{0<t<1} H(t) > 0$. Этим задачам, восходящим в своих постановках к А. Н. Колмогорову [2], посвящено большое количество работ (см. [1—8] и библиографию там). В области больших уклонений (когда $r(n)/\sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$) первая и вторая граничные задачи существенно различны (на этих вопросах мы остановимся). Первая граничная задача решена достаточно полно [9—10], вторая — только в следующих двух частных случаях: 1) граница $H(t)$ линейна [8], 2) граница $H(t)$ отлична от $-\infty$ лишь в конечном числе точек (см., например, [10—12]) (тогда первая и вторая граничные задачи сводятся к нахождению вероятностей больших уклонений для сумм конечномерных случайных векторов). В настоящей работе предлагается достаточно полное решение второй граничной задачи для больших уклонений $r(n)$, ограниченных сверху последовательностью $o(1)n/\ln^4 n$.

Прежде чем остановиться на полученных результатах, обратимся к первой и второй граничным задачам с точки зрения основополагающей работы [1]. В ней получена «грубая» асимптотика вероятности (1.1), именно (и в частности) для множеств $C \subseteq C(0, 1)$ из достаточно широкого класса, включающего в себя множества вида A_H и B_H, для уклонений $r(n) = o(1)n$ установлено, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{r^2(n)} \ln \mathbf{P}(s_n/r(n) \in C) = v(H_0), \tag{1.2}$$

где

$$v(H_0) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{H}_0^2(t)\,dt;$$

функция $H_0 \in \overline{C}$ определяется соотношением

$$v(H_0) = \sup\{v(f)\colon\ f \in C,\ f(0) = 0\},\ H_0(0) = 0.$$

Функцию H_0 естественно называть наиболее вероятной траекторией в множестве C; таким образом, в силу (1.2) главный член асимптотики вероятности (1.1) определяется наиболее вероятной траекторией H_0. Оказывается, что в случаях $C = A_H$ и $C = B_H$ функция H_0 «целиком» (с точностью до степенного множителя) определяет вероятность (1.1). Нетрудно видеть, что в первой граничной задаче функция H_0 состоит из двух линейных кусков (здесь H_0 может определяться неоднозначно в силу того, что, как правило, множество A_H не является выпуклым); в упомянутых частных случаях 1 и 2 второй граничной задачи функция H_0 линейна или состоит из конечного числа линейных кусков соответственно. Таким образом, в первой граничной задаче и в исследованных частных случаях второй граничной задачи функция H_0 состоит из конечного числа линейных кусков; при этом вероятность (1.1) только степенным множителем отличается от последовательности

$$\exp\left\{n\int_0^1 \Lambda\left(\frac{r}{n}\dot{H}_0(t)\right)dt\right\} = \exp\left\{\sum_{j=2}^{\infty} \Lambda_j \left(\frac{r}{n}\right)^j \int_0^1 (\dot{H}_0(t))^j\,dt\right\}, \tag{1.3}$$

где $\Lambda(\alpha) = \sum\limits_{j=2}^{\infty} \Lambda_j \alpha^j$ — так называемая функция уклонений (числа Λ_j, которые выражаются через моменты случайной величины ξ_1, образуют так называемый ряд Крамера). Основным ограничением на функцию H в настоящей работе для множества B_H является следующее: функция $H_0 = H_{0,H}$ состоит из конечного числа кусков двух сортов — это либо линейные куски, либо куски с непрерывной отделенной от нуля второй производной. В этих предположениях вероятность (1.1) для множества $C = B_H$ отличается только степенным множителем от последовательности

$$\exp\left\{n\int_0^1 \Lambda\left(\frac{r}{n}\dot{H}_0(t)\right)dt + \left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{2/3} \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \left(\frac{r}{n}\right)^j \int_0^1 |\ddot{H}_0(t)|^{2/3} (\dot{H}_0(t))^j\,dt\right\}, \tag{1.4}$$

где числа σ_j, $j=0, 1, \ldots$, выражаются через моменты случайной величины ξ_1.

В силу принципа инвариантности в тех случаях, когда последовательность $r=r(n)$ стремится к бесконечности не очень быстро, вероятность (1.1) эквивалентна вероятности

$$\mathbf{P}(w/(r/\sqrt{n}) \in C), \tag{1.5}$$

где $w=w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,— винеровский процесс; из (1.3) и (1.4) можно усмотреть, что в первой и второй граничных задачах эта эквивалентность сохраняется для уклонений $r=o(n^{2/3})$ (см. также [7]). Таким образом, для $C=B_H$ вероятность (1.5) отличается только степенным множителем от последовательности

$$\exp\left\{\frac{r^2}{n}\Lambda_2\int\limits_0^1 \dot{H}_0^2(t)\,dt + \left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{2/3}\sigma_0\int\limits_0^1 |\ddot{H}_0(t)|^{2/3}\,dt\right\}.$$

Добавим, что в широких предположениях степенные члены во второй граничной задаче для винеровского процесса и ломаных совпадают и вычислены (теорема 2.2); решение второй граничной задачи для винеровского процесса (оно следует и из настоящей работы) впервые получено автором в [13—15]. Результаты настоящей работы анонсированы в [16] и опубликованы в сокращенном виде [17].

Несколько слов о методах работ [15] и настоящей. Первый шаг этих работ примерно одинаков и состоит в применении абсолютно непрерывного преобразования меры, соответствующей исходному блужданию. На этом шаге выделяется главный член искомой асимптотики; применяемое преобразование используется в большинстве работ о больших уклонениях и восходит к работе Г. Крамера [18]. Далее в работе [15] применяется еще одно абсолютно непрерывное преобразование, которое переводит винеровский процесс в неоднородный возвратный марковский процесс; как выяснилось, этот путь оказался неоправданно сложным, особенно при рассмотрении случайных ломаных, поэтому в настоящей работе на втором этапе доказательства используются подходящие оценки скорости сходимости в принципе инвариантности. При этом граница с нужной степенью точности приближается к кривой, состоящей из кусков парабол; это позволяет воспользоваться точными формулами для параболы, которые получены в разделе 4 настоящей работы.

2. Основная теорема

Обозначим $\varphi(\lambda)=\mathbf{M}e^{\lambda\xi}$; в задачах о больших уклонениях важную роль играет функция

$$\Lambda(\alpha)=\Lambda_\xi(\alpha)=\inf_\lambda\{-\alpha\lambda+\ln\varphi(\lambda)\}, \quad -\infty<\lambda<\infty, \tag{2.1}$$

которую, следуя А. А. Боровкову [1], будем называть функцией уклонений случайной величины ξ. Свойства функции уклонений были изучены в работе [1]; мы коротко повторим эти свойства. При $\mathbf{M}\xi=0$, $\mathbf{M}\xi^2=\sigma^2>0$ функция $\Lambda(\alpha)$ равна 0 в точке $\alpha=0$ и строго меньше 0 в остальных точках, абсолютно непрерывна для всех α из интервала (α_-, α_+), где $\alpha_+=\operatorname{vrai}\sup\xi$, $\alpha_-=\operatorname{vrai}\inf\xi$, вне интервала (α_-, α_+) функция $\Lambda(\alpha)$ равна $-\infty$. Производная $\dot{\Lambda}(\alpha)$ является невозрастающей, поэтому сама функция уклонений выпукла вверх. Обозначим

$$\lambda(\alpha)=-\dot{\Lambda}(\alpha); \tag{2.2}$$

оказывается, что функция $\lambda(\alpha)$ — единственное решение уравнения

$$\dot{\varphi}(\lambda)/\varphi(\lambda)=\alpha,$$

поэтому справедливо соотношение

$$\Lambda(\alpha)=-\alpha\lambda(\alpha)+\ln\varphi(\lambda(\alpha)). \tag{2.3}$$

В некоторой окрестности $\alpha = 0$ функции $\Lambda(\alpha)$ и $\lambda(\alpha)$ являются аналитическими, причем

$$\Lambda(\alpha) = -\frac{1}{2\sigma^2}\alpha^2 + \sum_{j=3}^{\infty}\Lambda_j\alpha^j, \quad \lambda(\alpha) = \frac{1}{\sigma^2}\alpha - \sum_{j=2}^{\infty}(j+1)\Lambda_{j+1}\alpha^j. \tag{2.4}$$

Рассмотрим далее функцию

$$\sigma^2(\alpha) \equiv \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(\frac{\varphi(\lambda+\lambda(\alpha))}{\varphi(\lambda(\alpha))}e^{-\lambda\alpha}\right)\Bigg|_{\lambda=0}. \tag{2.5}$$

Это тоже аналитическая функция, причем

$$\sigma^2(\alpha) = -[\ddot{\Lambda}(\alpha)]^{-1} = \sigma^2 + \sum_{j=1}^{\infty} D_j\alpha^j. \tag{2.6}$$

Наконец, вероятностный смысл функции уклонений иллюстрирует следующее утверждение: пусть Δ_α — интервал $(\alpha-\Delta, \alpha+\Delta)$, тогда

$$\lim_{\Delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln \mathbf{P}\left(\frac{\xi_1+\dots\xi_n}{n}\in\Delta_\alpha\right) = \Lambda(\alpha),$$

где случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и имеют общее распределение с величиной ξ, для которой построена функция уклонений. Все перечисленные свойства функции $\Lambda(\alpha)$ можно найти в [1], [19]. В качестве примера рассмотрим нормальную случайную величину с параметрами $(0, \sigma^2)$, для нее введенные функции имеют вид

$$\Lambda(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}, \quad \lambda(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma_2}, \quad \sigma^2(\alpha) = \sigma^2. \tag{2.7}$$

Функцией Эйри называют [20] единственное решение уравнения

$$\ddot{V}(x) = xV(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

удовлетворяющее условию

$$V(0) = \sqrt{\pi}3^{-1/3}/\Gamma(2/3), \quad \dot{V}(0) = -\sqrt{\pi}3^{-1/3}/\Gamma(1/3).$$

Обозначим

$$z(x) = V\left(2^{1/3}x + \lambda_0\right)\left(\int_0^\infty V^2\left(2^{1/3}t+\lambda_0\right)dt\right)^{-1/2}, \tag{2.8}$$

где $\lambda_0 < 0$ — максимальный нуль функции $V(x)$.

Напомним, что $\xi, \xi_1, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных величин, $\mathbf{M}\xi = 0$, $\mathbf{M}\xi^2 = 1$, $\mathbf{M}\exp\{\lambda\xi\} < \infty$ при $|\lambda| \leqslant \delta$, $\delta > 0$, $S_i = \xi_1 + \dots + \xi_i$.

Теорема 2.1. *Пусть функция* $H(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, *удовлетворяет условиям:* 1) $H(0) = 0$, 2) *третья производная* $H^{(3)}(t)$ *существует и непрерывна,* 3) $\sup\limits_{0<t<1}\ddot{H}(t) < 0$. *Пусть плотность* $p(t) = \dot{\mathbf{P}}(\xi < t)$ *существует, непрерывна и ограничена. Пусть последовательность* $r = r(n)$ *положительных чисел такова, что*

$$\lim_{n\to\infty} r/\sqrt{n} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r\ln^4 n/n = 0.$$

Тогда для любых $x > 0$, $y > 0$ *при* $n \to \infty$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}\left(S_i + \left(\frac{n^2}{3}\right)' > rH(i/n), \quad i = 1, \dots, n, \quad S_n + x\left(\frac{n^2}{r}\right)^{1/3} <\right.$$
$$\left. < rH(1) + y\left(\frac{n^2}{r}\right)^{1/3}\right) = |\ddot{H}(0)|^{1/6}|\ddot{H}(1)|^{1/6} z(x|\ddot{H}'(0)|^{1/3}) z(y|H(1)|^{1/3}) \times$$

$$\times \exp\left\{n\int_0^1 \Lambda\left(\frac{r}{n}\dot H(t)\right)dt - x\left(\frac{n^2}{r}\right)^{1/3}\lambda\left(\frac{r}{n}\dot H(0)\right) + y\left(\frac{n^2}{r}\right)^{1/3}\lambda\left(\frac{r}{n}\dot H(1)\right)\right\}\times$$

$$\times \exp\left\{\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{2/3}\frac{\lambda_0}{2^{1/3}}\int_0^1 |\ddot H(t)|^{2/3}\sigma^2\left(\frac{r}{n}\dot H(t)\right)dt\right\}(1+o(1)),$$

где функции z, Λ, λ, σ^2 *определены формулами* (2.8), (2.1) (2.2), (2.5) *соответственно.*

Уместно пояснить, почему для начала и «конца» нашего блуждания выбирается нормировка $(n^2/r)^{1/3}$. Дело в том, что именно в полосе около функции rH шириной $C(n^2/r)^{1/3}$, где C достаточно велико, и сосредоточены те траектории блуждания, которые дают основной вклад в изучаемую вероятность.

3. Абсолютно непрерывное преобразование

Условимся о следующем обозначении. Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ заданы случайные величины $\eta_i = \eta_i(\omega)$, $i = 1, 2$, $\omega \in \Omega$, и пусть для события $A \in \mathcal{F}$ через $I_A = I_A(\omega)$ обозначен индикатор A. Через $\mathbf{M}'(\eta_1; A, \eta_2 = x)$ будем обозначать следующее выражение:

$$d/dx\mathbf{M}(\eta_1 I_A I\{\eta_2 < x\});$$

если $\eta_1 \equiv 1$, то вместо $\mathbf{M}'(1; A, \eta_2 = x)$ будем писать $\mathbf{P}'(A, \eta_2 = x)$. В частности, нас будет интересовать функция

$$P_n(x, y) = P_n(H; x, y) \equiv$$
$$\equiv \mathbf{P}'(S_i + x > rH(i/n),\ i = 1, \ldots, n,\ S_n + x = rH(1) + y). \qquad (3.1)$$

Пусть $\mathbf{P} = \mathbf{P}_n$ — мера на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$ событий из $C(0, 1)$, соответствующая случайной ломаной $s_n = s_n(t)$, построенной по точкам $(i/n, S_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Зададим абсолютно непрерывное преобразование этой меры следующим образом: для любого $A \in \mathcal{B}$ положим

$$\widetilde{\mathbf{P}}'(s_n + x \in A,\ s_n(1) + x = rH(1) + y) \equiv$$
$$\equiv \prod_{i=1}^n \varphi^{-1}(\lambda(\alpha_i))\mathbf{M}'\left(e^{\sum_{i=1}^n \lambda(\alpha_i)\xi_i};\ s_n + x \in A,\ s_n(1) + x = rH(1) + y\right),$$

где $\alpha_i = \alpha_{i,n} \equiv r(H(i/n) - H((i-1)/n)$, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим далее наряду с величинами $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимые случайные величины $\tilde\xi_1, \ldots, \tilde\xi_n$, где распределение величины $\tilde\xi_i$ однозначно задается преобразованием Лапласа:

$$\tilde\varphi_i(\lambda) = \mathbf{M}e^{\lambda\tilde\xi_i} \equiv \varphi(\lambda + \lambda(\alpha_i))/\varphi(\lambda(\alpha_i)).$$

Пусть $\tilde s_n = \tilde s_n(t)$ — случайная ломаная, построенная по точкам $(i/n, \tilde S_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, где $\tilde S_0 = 0$, $\tilde S_i = \tilde\xi_1 + \ldots + \tilde\xi_i$. Тогда очевидно, что этой ломаной в $C(0, 1)$ соответствует распределение, совпадающее с $\widetilde{\mathbf{P}}$. Условимся математическое ожидание по мере $\widetilde{\mathbf{P}}$ обозначать буквой с волной.

С помощью введенного преобразования интересующая нас функция (3.1) представляется в виде

$$\mathbf{P}_n(x, y) = \exp\left\{\sum_{i=1}^n [\ln\varphi(\lambda(\alpha_i)) - \alpha_i\lambda(\alpha_i)]\right\}\widetilde{\mathbf{M}}'\left(\exp\left\{-\sum_{i=1}^n \lambda(\xi_i)(\xi_i - \alpha_i)\right\};\right.$$
$$\left.\inf_{1\leqslant i\leqslant n-1}(S_i - rH(i/n + x) > 0,\ S_n - rH(1) + x = y\right).$$

Обозначим далее

$$X_i = \xi_i - \alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ U_i = X_1 + \ldots + X_i,$$

так что $U_i + x = S_i - rH(i/n) + x$. Используя это обозначение и формулу (2.3), получаем

$$\mathbf{P}_n(x, y) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \Lambda(\alpha_i)\right\} \widetilde{\mathbf{M}}' \left(\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \lambda(\alpha_i) X_i\right\};\ \inf_{1\leqslant i\leqslant n-1} (U_i + x) > 0,\quad U_n + x = y\right).$$

Для произвольных чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ справедливо

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y_n \sum_{i=1}^{n} x_i - y_1 x_0 - \sum_{j=1}^{n-1} (y_{j+1} - y_j) \sum_{i=0}^{j} x_i.$$

Полагая $x_0 = x$, $y_i = \lambda(\alpha_i)$, $x_i = X_i$, $i = 1, \ldots, n$, получим на событии $\{U_n + x = y\}$ для $y > 0$ следующее соотношение:

$$-\sum_{i=1}^{n} \lambda(\alpha_i) X_i = \lambda(\alpha_1) x - \lambda(\alpha_n) y + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j (U_j + x),$$

где $\beta_j \equiv \lambda(\alpha_{j+1}) - \lambda(\alpha_j)$, $j = 1, \ldots, n-1$, поэтому

$$\mathbf{P}_n(x, y) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \Lambda(\alpha_i) + \lambda(\alpha_1) x - \lambda(\alpha_n) y\right\} \times$$
$$\times \widetilde{\mathbf{M}}' \left(\exp\left\{\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j (U_j + x)\right\};\ \inf_{1\leqslant j\leqslant n-1} (U_j + x) > 0,\quad U_n + x = y\right).$$

Обозначим

$$k = k(n) \equiv \left[\left(\frac{n^2}{r}\right)^{2/3}\right] \tag{3.2}$$

и в дальнейшем букву k будем использовать только для выражения (3.2). Тогда, очевидно,

$$P_n\left(x\sqrt{k}, y\sqrt{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} M_n(x, y) \times$$
$$\times \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \Lambda(\alpha_j) + \lambda(\alpha_1) x\sqrt{k} - \lambda(\alpha_n) y\sqrt{k}\right\}, \tag{3.3}$$

где

$$M_n(x, y) \equiv \widetilde{\mathbf{M}}' \left(e^{\sum_{i=1}^{n-1} \beta_j (U_j + x\sqrt{k})};\ \inf_{1\leqslant j\leqslant n-1} \left(U_j + x\sqrt{k}\right) > 0,\quad U_n/\sqrt{k} + x = y\right).$$

Условимся в дальнейшем для краткости опускать волну в обозначениях математического ожидания по мере $\widetilde{P}$; это не приведет к недоразумению, если иметь в виду, что там, где фигурируют случайные величины ξ_i, S_j, используется мера P, а там, где X_i, U_j,— мера $\widetilde{P}$.

4. Точные формулы для винеровского процесса

Отправным пунктом рассмотрений настоящего раздела будет следующая формула:

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \mathbf{P}(w(t) + \alpha > sH(t);\quad 0 \leqslant t \leqslant T,\quad w(T) + \alpha < sH(1) + \beta) =$$
$$= \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\int_0^T \dot{H}^2(t)dt + s\dot{H}(0)\alpha - s\dot{H}(T)\beta\right\} \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial\beta} \mathbf{M}\left(e^{s\int_0^T \ddot{H}(t)(w(t)+\alpha)dt};\ \inf_{0\leqslant t\leqslant T} (w(t) + \alpha) > 0,\quad w(T) + \alpha < \beta\right), \tag{4.1}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $s > 0$, $T > 0$, функция $H(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеет непрерывную вторую производную $\ddot{H}(t)$, $H(0)=0$, $\sup\limits_{0\leq t\leq T}\ddot{H}(t)<0$. Формулу (4.1) можно получить, например, из формулы (3.3); для этого нужно выбрать исходные случайные величины, нормальные с параметрами (0, 1), положить в (3.3) $x=\alpha\sqrt{n}/\sqrt{k}$, $y=\beta\sqrt{n}/\sqrt{k}$, $r=s\sqrt{n}$, воспользоваться формулами (2.7) и перейти к пределу по n. Обозначим для $\rho>0$, $t>0$

$$T_\rho(t;x,y)=\mathbf{M}'\left(e^{-\rho\int\limits_0^t(w(u)+x)du};\ \inf_{0\leq u\leq t}(w(u)+x)>0,\quad w(t)+x=y\right);$$

для функций $\varphi\in L_2(0,\infty)$ определим оператор

$$T_{\rho,t}\varphi(x)=\int\limits_0^\infty T_\rho(t;x,y)\varphi(y)\,dy.$$

Очевидно, что семейство $(T_{\rho,t})_{t\geq 0}$ образует однородную полугруппу самосопряженных вполне непрерывных операторов в $L_2(0,\infty)$. Поэтому по теореме Гильберта — Шмидта (см., например, [21, с. 245]) ядро оператора $T_{\rho,t}$ представляется в виде

$$T_\rho(t;x,y)=\sum_{j=1}^\infty e^{\lambda_j(\rho)t}\varphi_j(\rho;x)\varphi_j(\rho;y), \tag{4.2}$$

где $e^{\lambda_j(\rho)}$ и $\varphi_j(\rho,x)$ — соответственно j-е собственное число и j-й собственный вектор оператора $T_{\rho,1}$. Из соотношения

$$e^{\lambda_j(\rho)t}\varphi_j(\rho;x)=\mathbf{M}\left(e^{-\rho\int\limits_0^t(w(u)+x)du}\varphi_j(\rho;w(t)+x);\ \inf_{0\leq u\leq t}(w(u)+x)>0\right)$$

следует, что функция $\varphi_j(\rho;x)$ и число $\lambda_j(\rho)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{2}\ddot{\varphi}_j(\rho;x)=(\lambda_j(\rho)+\rho x)\varphi_j(\rho;x),\quad x>0, \tag{4.3}$$

и граничным условиям

$$\varphi_j(\rho;\ 0)=\varphi_j(\rho;\ \infty)=0. \tag{4.4}$$

Далее, поскольку функция Эйри $V(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{V}(x)=xV(x),\ -\infty<x<\infty,$$

и граничным условиям

$$V(0)=\sqrt{\pi}/(3^{1/3}\Gamma(2/3)),\quad V(\infty)=0,$$

то очевидно, что функцию $\varphi_j(\rho,x)$ и число $\lambda_j(\rho)$ удастся выразить через функцию $V(x)$ и ее нули соответственно. Для этого обозначим $\mu_1>\mu_2>\ldots$ $\ldots>\mu_n>\ldots$ все нули функции $V(x)$; известно [20], что все они простые, отрицательные, отрицательно и их счетное число. Отметим попутно, что при $x\to\infty$

$$\begin{gathered}V(x)=\frac{1}{2}x^{-1/4}e^{-s}(1+o(1)),\ \dot{V}(x)=-\frac{1}{2}x^{1/4}e^{-s}(1+o(1)),\\ \mu_n=-\left(\frac{3}{8}(4n-1)\pi\right)^{2/3}(1+o(1)),\ \sup_{-\infty<x<\infty}\{|V(x)|+|\dot{V}(x)|\}<\infty,\end{gathered} \tag{4.5}$$

где $s=(2/3)x^{3/2}$. Положим для $j=1,2,\ldots,x>0$

$$\lambda_j=\mu_j/2^{1/3},\ z_j(x)=c_jV(2^{1/3}x+\mu_j), \tag{4.6}$$

где числа $c_j>0$ выбраны так, что $\int\limits_0^\infty z_j^2(x)\,dx=1$. Тогда искомые число $\lambda_j(\rho)$ и функция $\varphi_j(\rho;x)$ имеют вид

$$\lambda_j(\rho)=\lambda_j\rho^{2/3},\ \varphi_j(\rho;\ x)=\rho^{1/6}z_j(\rho^{1/3}x),\ j=1,2,\ldots, \tag{4.7}$$

где числа λ_j и функции $z_j(x)$ определены в (4.6); в этом легко убедиться, проверяя, что так определенные числа и функции удовлетворяют уравнению (4.3) и условиям (4.4). Используя теперь (4.1), (4.2) и (4.7), можно выписать точную формулу для случая $\ddot{H}(t) = \text{const}$ (т. е. $H(t)$ — парабола).

Теорема 4.1. *Пусть $H(0) = 0$, $\ddot{H}(t) = c < 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда для любых $x > 0$, $y > 0$, $T > 0$, $s > 0$*

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{P}(w(t) + x > sH(t);\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ w(T) + x < sH(T) + y) =$$
$$= \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\int_0^T \dot{H}^2(t)\,dt + s\dot{H}(0)\,x - s\dot{H}(T)\,y\right\} \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j (sc)^{2/3} T} (sc)^{1/3} z_j\left((sc)^{1/3} x\right) z_j\left((sc)^{1/3} y\right),$$

где числа λ_j и функции $z_j(x)$ определены (4.6).

5. Лемма об аппроксимации

В настоящем разделе наряду с функцией $H(t)$ из теоремы 2.1 строится функция $G(t)$, состоящая из кусков парабол, так, что некоторые функционалы от этих функций близки с заданной точностью. Для заданного $0 < \Delta \leqslant 1/4$ пусть $m = m(\Delta) \equiv \max\{i = 3j\colon (i+1)\Delta \leqslant 1\}$; через $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m, \delta_{m+1}$ обозначим интервалы $(0, \Delta)$, $(\Delta, 2\Delta)$, $\ldots$, $(m\Delta - \Delta, m\Delta)$, $(m\Delta, 1)$ соответственно.

Лемма 5.1. *Пусть $H(0) = 0$ и для $0 < a \leqslant A < \infty$ выполняется*

$$-A \leqslant \ddot{H}(t) \leqslant -a,\quad |H^{(3)}(t)| \leqslant A,\quad |\dot{H}(t)| \leqslant A \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Тогда можно построить функцию $G(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $G(0) = 0$, $\dot{G}(0) = \dot{H}(0)$, такую, что при $t \in \delta_i$ выполняется $\ddot{G}(t) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, и для некоторого $C < \infty$, зависящего только от a и A, выполняются следующие соотношения:

1. $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\ddot{H}(t) - \ddot{G}(t)| \leqslant C\Delta$,
2. $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\dot{H}(t) - \dot{G}(t)| \leqslant C\Delta^2$,
3. $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |H(t) - G(t)| \leqslant C\Delta^3$,
4. $\left|\int_0^1 (\dot{H}^2(t) - \dot{G}^2(t))\,dt\right| \leqslant C\Delta^4$,
5. $\left|\int_0^1 (\dot{H}^i(t) - \dot{G}^i(t))\,dt\right| \leqslant i(i-1)\,C^{i-2}\Delta^3, \quad i = 3, 4, \ldots,$
6. $\left|\int_0^1 (|\ddot{H}(t)|^{2/3} - |\ddot{G}(t)|^{2/3})\,dt\right| \leqslant C\Delta^2$.

Доказательство. Условимся через $f(t) = O(\Delta^i)$ обозначать функции от t (в том числе и константы), которые допускают оценку $|f(t)| \leqslant C\Delta^i$, где число $C < \infty$ зависит только от a и A; буквой C будем обозначать различные константы, зависящие только от a и A.

Для построения функции $G(t)$ достаточно найти числа $a_1, \ldots, a_{m+1}$, $a_i = \ddot{G}(t)$ при $t \in \delta_i$. Числа $a_1, \ldots, a_m$ найдем из $m/3$ систем уравнений (и начальных условий $G(0) = 0$, $\dot{G}(0) = \dot{H}(0)$):

I_i: $G(3i\Delta) = H(3i\Delta)$,

II_i: $\dot{G}(3i\Delta) = \dot{H}(3i\Delta)$,

$$\mathrm{III}_i\colon \int\limits_{3(i-1)\Delta}^{3i\Delta} (\dot G^2(t) - \dot H^2(t))\,dt = 0,$$

$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m/3$. Число a_{m+1} найдем из условия $I_{m/3+1}$: $G(1) = H(1)$.

Докажем сначала существование решения систем $\mathrm{I}_i - \mathrm{III}_i$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, m/3$; очевидно, что достаточно рассмотреть уравнения $\mathrm{I}_1 - \mathrm{III}_1$. Перепишем эти уравнения в более удобном виде:

$$\mathrm{I}_1'\colon \Phi_1 \equiv 5a_1 + 3a_2 + a_3 = 2\frac{1}{\Delta^2}\int\limits_0^{3\Delta}\int\limits_0^t \ddot H(u)\,du\,dt = 9\ddot H(0) + O(\Delta),$$

$$\mathrm{II}_1'\colon \Phi_2 \equiv a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{3\Delta} \ddot H(u)\,du = 3\ddot H(0) + O(\Delta),$$

$$\mathrm{III}_1'\colon \Phi_3 \equiv 7a_1^2 + 4a_2^2 + a_3^2 + 9a_1a_2 + 3a_1a_3 + 3a_2a_3 = \frac{3}{\Delta^3}\int\limits_0^{3\Delta} \dot H^2(t)\,dt =$$

$$= 27\ddot H^2(0) + O(\Delta).$$

Непосредственно решая эту систему, убеждаемся, что

$$a_j = \ddot H(0) + O(\Delta),\ j = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.1}$$

Поскольку уравнение $I_{m/3+1}$ тоже имеет решение

$$a_{m/3+1} = \ddot H(m\Delta) + O(\Delta), \tag{5.2}$$

все числа $a_1, \ldots, a_{m+1}$ найдены, и функция $G(t)$ построена. Осталось убедиться, что свойства 1—6 имеют место.

Обозначим $\Delta_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3,\ \ldots,\ \Delta_{m/3} = \delta_{m-2} + \delta_{m-1} + \delta_m,\ \Delta_{m/3+1} = \delta_{m+1}$. Очевидно, достаточно доказать, что справедливы следующие соотношения:

1′. $\sup\limits_{t\in\Delta_i} |\ddot H(t) - \ddot G(t)| \leqslant C\Delta, \quad i = 1, \ldots, m/3+1,$

2′. $\sup\limits_{t\in\Delta_i} |\dot H(t) - \dot G(t)| \leqslant C\Delta^2, \quad i = 1, \ldots, m/3+1,$

3′. $\sup\limits_{t\in\Delta_i} |H(t) - G(t)| \leqslant C\Delta^3, \quad i = 1, \ldots, m/3+1,$

4′. $\left|\int\limits_{\Delta_{m/3+1}} (\dot H^2(t) - \dot G^2(t))\,dt)\right| \leqslant C\Delta^4,$

5′. $\left|\int\limits_{\Delta_i} (\dot H^j(t) - \dot G^j(t))\,dt\right| \leqslant C^{j-1}j(j-1)\Delta^4, \quad i = 1, \ldots, m/3+1, \quad j \geqslant 3,$

6′. $\left|\int\limits_{\Delta_i} (|\ddot H(t)|^{2/3} - |\ddot G(t)|^{2/3})\,dt\right| \leqslant C\Delta^3, \quad i = 1, \ldots, m/3,$

7′. $\left|\int\limits_{\Delta_{m/3+1}} (|\ddot H(t)|^{2/3} - |\ddot G(t)|^{2/3})\,dt\right| \leqslant C\Delta^2.$

Соотношение 1′ следует из формул (5.1) и (5.2); соотношение 2′ — из соотношения 1′; 3′ — из 2′; 7′ — из 1′. Поэтому осталось доказать соотношения 4′—6′. Начнем с 4′: пусть

$$L = \dot H(m\Delta) = \dot G(m\Delta),\ \dot G_0(t) = \dot G(t) - L,\ \dot H_0(t) = \dot H(t) - L,$$

тогда

$$\int\limits_{m\Delta}^{1} (\dot G^2(t) - \dot H^2(t))\,dt = \int\limits_{m\Delta}^{1} (\dot G_0^2(t) - \dot H_0^2(t))\,dt + 2L\int\limits_{m\Delta}^{1} (\dot H_0(t) - \dot G_0(t))\,dt\}.$$

Поскольку в силу $I_{m/3+1}$ выполняется

$$\int_{m\Delta}^{1} (\dot{H}_0(t) - \dot{G}_0(t))\,dt = 0,$$

получаем

$$\int_{m\Delta}^{1} (\dot{H}^2(t) - \dot{G}^2(t))\,dt = \int_{m\Delta}^{1} \left(\dot{H}_0^2(t) - \dot{G}_0^2(t)\right) dt.$$

Очевидно, далее, при $m\Delta \leqslant t \leqslant 1$

$$\dot{H}_0^2(t) = (\ddot{H}(m\Delta)\,t)^2 + O(\Delta^3),\ \dot{G}_0^2(t) = (\ddot{H}(m\Delta)\,t)^2 + O(\Delta^3),$$

поэтому соотношение $4'$ доказано:

$$\int_{m\Delta}^{1} (\dot{H}^2(t) - \dot{G}^2(t))\,dt = \int_{m\Delta}^{1} O(\Delta^3)\,dt = O(\Delta^4).$$

Для доказательства $5'$ понадобятся только соотношения (5.1) и (5.2), таким образом, $5'$ достаточно доказать для $i = 1$. Пусть $L = \dot{H}(0) = \dot{G}(0)$, $\dot{H}_0(t) = \dot{H}(t) - L$, $\dot{G}_0(t) = \dot{G}(t) - L$; тогда

$$\dot{H}^s(t) = (\dot{H}_0(t) + L)^s = \sum_{i=0}^{s} C_s^i L^{s-i} \dot{H}_0^s(t),$$

$$\dot{G}^s(t) = (\dot{G}_0(t) + L)^s = \sum_{i=0}^{s} C_s^i L^{s-i} \dot{G}_0^s(t).$$

Поэтому

$$A_s \equiv \left| \int_0^{3\Delta} (\dot{H}^s(t) - \dot{G}^s(t))\,dt \right| \leqslant \sum_{i=0}^{s} C_s^i A^{s-i} B_i,$$

где $B_i \equiv \left| \int_0^{3\Delta} (\dot{H}_0^i(t) - \dot{G}_0^i(t))\,dt \right|$. Поскольку

$$B_0 = 0,\ B_1 = H_0(3\Delta) - G_0(3\Delta) = 0,$$

то

$$A_s \leqslant \sum_{i=2}^{s} C_s^i A^{s-i} B_i. \tag{5.3}$$

Оценим B_i; для этого заметим, что при $0 \leqslant t \leqslant 3\Delta$

$$\dot{G}_0(t) = t\ddot{H}(0) + O(\Delta^2), \quad \dot{H}_0(t) = t\ddot{H}(0) + O(\Delta^2);$$

$$B_i = \int_0^{3\Delta} \sum_{j=0}^{i} C_i^j \left[(t\ddot{H}(0))^j O^{i-j}(\Delta^2) - (t\ddot{H}(0))^j O^{i-j}(\Delta^2) \right] dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{i-1} C_i^j \frac{1}{j+1} |\ddot{H}(0)|^j \Delta^{j+1} O^{i-j}(\Delta^2),$$

где $|\ddot{H}(0)| \leqslant A$. Продолжая вычисления, получаем

$$B_i \leqslant \Delta \cdot \Delta^2 \sum_{j=0}^{i-1} C_i^j \frac{1}{j+1} A^j \Delta^j O^{i-1-j}(\Delta^2) \leqslant 2\Delta^3 \left| \sum_{j=0}^{i-1} C_{i-1}^j A^j O^{i-1-j}(\Delta^2) \right|.$$

В последнем неравенстве мы использовали очевидное соотношение

$$\frac{1}{j+1} C_i^j \leqslant 2C_{i-1}^j, \quad 0 \leqslant j \leqslant i-1.$$

Таким образом, получили неравенство

$$B_i \leqslant 2\Delta^3 |A\Delta + O(\Delta^2)|^{i-1},$$

что дает

$$B_i \leqslant \Delta^3 (C\Delta)^{i-1}, \ i=2,\ 3,\ \ldots \tag{5.4}$$

Подставляя (5.4) в (5.3), получаем

$$A_s \leqslant \sum_{i=2}^{s} C_s^i \Delta^3 (C\Delta)^{i-1} A^{s-i} = \Delta^4 C \sum_{i-2=0}^{s-2} C_s^i (C\Delta)^{i-2} A^{s-2-(i-2)}.$$

Используя далее очевидное неравенство

$$C_s^i \leqslant s(s-1) C_{s-2}^{i-2}, \quad 0 \leqslant i-2 \leqslant s-2,$$

получаем

$$A_s \leqslant \Delta^4 Cs(s-1) \sum_{i-2=0}^{s-2} C_{s-2}^{i-2} (C\Delta)^{i-2} A^{(s-2)-(i-2)} = \Delta^4 Cs(s-1)(A + C\Delta)^{s-2}.$$

Соотношение 5′ доказано.

Докажем, наконец, 6′; его тоже достаточно проверить для $i=1$. Положим

$$\ddot{H}(t) = \ddot{H}(0) + \varepsilon(t),$$

где $|\varepsilon(t)| = O(\Delta)$. Поэтому

$$|\ddot{H}(t)|^{2/3} = |\ddot{H}(0)|^{2/3} + \frac{2}{3}\varepsilon(t)|\ddot{H}(0)|^{-1/3} + O(\Delta^2),$$

$$\int_0^{3\Delta} |\ddot{H}(t)|^{2/3} dt = 3\Delta |\ddot{H}(0)|^{2/3} + \frac{2}{3}|\ddot{H}(0)|^{-1/3} \int_0^{3\Delta} \varepsilon(t)\, dt + O(\Delta^3). \tag{5.5}$$

Положим далее $a_i = \ddot{H}(0) + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3$, так что $\varepsilon_i = O(\Delta)$. Тогда

$$\int_0^{3\Delta} |\ddot{G}(t)|^{2/3} dt = \sum_{i=1}^{3} \Delta |a_i|^{2/3} = |\ddot{H}(0)|^{2/3} 3\Delta + \frac{2}{3}|\ddot{H}(0)|^{-1/3} \times$$
$$\times \Delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + O(\Delta^3). \tag{5.6}$$

Воспользуемся теперь соотношением II_1

$$\dot{H}(3\Delta) = \dot{G}(3\Delta),$$

где

$$\dot{H}(3\Delta) = \dot{H}(0) + 3\Delta\ddot{H}(0) + \int_0^{3\Delta} \varepsilon(t)\, dt,$$

$$\dot{G}(3\Delta) = \dot{H}(0) + 3\Delta\ddot{H}(0) + \Delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Из последнего получаем, что

$$\int_0^{3\Delta} \varepsilon(t)\, dt = \Delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

поэтому, сравнивая (5.5) и (5.6), получаем нужную оценку в 6′:

$$\left| \int_0^{3\Delta} |\ddot{H}(t)|^{2/3} dt - \int_0^{3\Delta} |\ddot{G}(t)|^{2/3} dt \right| = O(\Delta^3).$$

Лемма 5.1 доказана.

6. Доказательство основной теоремы 2.1

Пусть $s = s(n) \equiv \min\{[\ln^2 n],\ [(r/\sqrt{n})^{1/9}]\}$. Число Δ из леммы 5.1 положим равным ks/n, где $k = k(n)$ задается (3.2). Таким образом,

$$\Delta = \left(\frac{\sqrt{n}}{r}\right)^{2/3} \min\left\{[\ln^2 n], \left[\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{1/9}\right]\right\}(1 + o(1)). \qquad (6.1)$$

Пусть $m = m(\Delta) \equiv \max\{i = 3j : (i+1)\Delta \leqslant 1\}$ и $\delta_1, \ldots, \delta_{m+1}$ — интервалы $(0, \Delta)$, $(\Delta, 2\Delta)$, $\ldots$, $(m\Delta, 1)$ соответственно. В силу леммы 5.1 можно построить функцию $G(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, которая на каждом из интервалов δ_i является куском параболы и, в частности, удовлетворяет соотношениям

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |G(t) - H(t)| \leqslant C\Delta^3, \quad G(0) = H(0), \quad G(1) = H(1).$$

В настоящем разделе через C будем обозначать константы, зависящие только от функции H и, возможно, от распределения случайной величины ξ_1. Пусть $\varepsilon = C\Delta^3$; нетрудно убедиться, что для всех $x > 0$, $y > 0$ справедливы следующие неравенства:

$$\mathbf{P}_n(G;\ \sqrt{k}x^+,\ \sqrt{k}y^+) \geqslant \mathbf{P}_n(H;\ \sqrt{k}x,\ \sqrt{k}y) \geqslant \mathbf{P}_n(G;\ \sqrt{k}x^-,\ \sqrt{k}y^-), \qquad (6.2)$$

где $x^\pm = x \pm r\varepsilon/\sqrt{k}$, $y^\pm = y \pm r\varepsilon/\sqrt{k}$, функция $\mathbf{P}_n(H;\ x,\ y)$ определена формулой (3.1). Поэтому для нахождения асимптотики $\mathbf{P}_n(H;\ \sqrt{k}x,\ \sqrt{k}y)$ достаточно вычислить поведение внешних членов в (6.2) и убедиться, что они асимптотически эквивалентны. Часть вычислений для функции H уже проделана; в результате этих преобразований получилась формула (3.3). Отправимся от этой формулы, считая, что все преобразования, предшествовавшие появлению этой формулы, сделаны по функции G, а не по функции H. Таким образом,

$$\mathbf{P}_n(G;\ \sqrt{k}\,x^\pm,\ \sqrt{k}\,y^\pm) = k^{-1/2} \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \Lambda(\alpha_j)\right\} \exp\{\lambda(\alpha_1)\sqrt{k}\,x^\pm -$$
$$- \lambda(\alpha_n)\sqrt{k}\,\lambda(\alpha_n)\}\,\mathbf{M}_n(x^\pm,\ y^\pm),$$

где числа α_i и β_i строятся по функции G. Используя свойства функций $\Lambda(\alpha)$ и $\lambda(\alpha)$, перечисленные в разделе 2, и свойства гладкости функции G, без труда убеждаемся, что

$$\sum_{i=1}^{n} \Lambda(\alpha_i) + \lambda(\alpha_1)\sqrt{k}\,x^\pm - \lambda(\alpha_n)\sqrt{k}\,y^\pm =$$
$$= n\int_0^1 \Lambda\left(\frac{r}{n}\dot{G}(t)\right)dt + x\sqrt{k}\,\lambda\left(\frac{r}{n}\dot{G}(0)\right) - y\sqrt{k}\,\lambda\left(\frac{r}{n}\dot{G}(1)\right) + o(1).$$

Далее, из леммы 5.1 следует, что

$$x\sqrt{k}\,\lambda\left(\frac{r}{n}\dot{G}(0)\right) - y\sqrt{k}\,\lambda\left(\frac{r}{n}\dot{G}(1)\right) =$$
$$= x\sqrt{k}\,\lambda\left(\frac{r}{n}\dot{H}(0)\right) - y\sqrt{k}\,\lambda\left(\frac{r}{n}\dot{H}(1)\right) + o(1). \qquad (6.3)$$

Поскольку на основании (2.4)

$$n\int_0^1 \Lambda\left(\frac{r}{n}\dot{G}(t)\right)dt = -\frac{r^2}{2n}\int_0^1 \dot{G}^2(t)\,dt + n\sum_{i=3}^{\infty} \Lambda_i\left(\frac{r}{n}\right)^i \int_0^1 \dot{G}^i(t)\,dt,$$

то с помощью утверждений 4 и 3 леммы 5.1 и выбора Δ (см. (6.1)) без труда получаем

$$n\int_0^1 \Lambda\left(\frac{r}{n}\dot{G}(t)\right)dt = n\int_0^1 \Lambda\left(\frac{r}{n}\dot{H}(t)\right)dt + o(1). \qquad (6.4)$$

В силу (6.3) и (6.4) для доказательства теоремы 2.1 достаточно показать, что

$$\mathbf{M}_n(x^{\pm}, y^{\pm}) = |\ddot{H}(0)|^{1/6} |\ddot{H}(1)|^{1/6} z_1(x|\ddot{H}(0)|^{1/3}) \times$$
$$\times z_1(y|\ddot{H}(1)|^{1/3}) \exp\left\{\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{2/3} \lambda_1 \int_0^1 |\ddot{H}(t)|^{2/3} \sigma^2\left(\frac{r}{n}\dot{H}(t)\right) dt\right\} \times (1 + o(1)), \tag{6.5}$$

где λ_1 и $z_1(x)$ определены в (4.6). Для этого придется ввести довольно много обозначений. Положим

$$U_{i,j} = X_i + \ldots + X_j,$$

так что $U_j = U_{1,j}$, где суммы $U_j = X_1 + \ldots + X_j$ были определены в разделе 3. Обозначим для $j = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\gamma_j = \gamma_{j,n} \equiv k\sqrt{k}\beta_{j,n}; \quad \gamma_n = \gamma_{n,n} = 0,$$

где числа β_j для функции G определены, как в разделе 2:

$$\beta_j \equiv \lambda(\alpha_{j+1}) - \lambda(\alpha_j), \ \alpha_j \equiv r(G(j/n) - G((j-1)/n)).$$

При этом

$$\gamma_j = \ddot{G}(j/n) + o(1) = \ddot{H}(j/n) + o(1), \ j = 1, \ldots, n-1.$$

Определим далее семейство функций аргументов $x > 0$, $y > 0$:

$$R^{(n)}(i, j; x, y) = \mathbf{M}'\left(e^{-\frac{1}{k}\sum\limits_{m=i}^{j}\gamma_m(U_{i,m}/\sqrt{k}+x)}; \ \inf_{i \leqslant m \leqslant j}(U_{i,m} + x\sqrt{k}) > 0, \ \frac{U_{i,j}}{\sqrt{k}} + x = y\right),$$

и семейство операторов из $L_2(0, \infty)$ в $L_2(0, \infty)$:

$$R^{(n)}(i, j)\varphi(x) = \int_0^\infty R^{(n)}(i, j; x, y)\varphi(y)\,dy.$$

Очевидно, что интересующая нас функция $\mathbf{M}_n(x, y)$ представляется в виде

$$\mathbf{M}_n(x, y) = R^{(n)}(1, n; x, y);$$

далее, для любых $1 \leqslant i \leqslant j < s \leqslant n$ справедливо

$$R^{(n)}(i, s)\varphi(x) = R^{(n)}(i, j) \cdot R^{(n)}(j+1, s)\varphi(x).$$

Таким образом, функция $\mathbf{M}_n(x, y)$, являясь ядром некоторого оператора, оказывается при этом сверткой ядер n операторов $R^{(n)}(1, 1), \ldots, R^{(n)}(n, n)$. Каждый из операторов $R^{(n)}(i, i)$ сходится при $n \to \infty$ к тождественному оператору, а оператор $R^{(n)}(1, n)$ — к нулевому. В силу принципа инвариантности суперпозиция любых k штук стоящих подряд операторов $R^{(n)}(i+1, i+1), \ldots, R^{(n)}(i+k, i+k)$ (число k определяется формулой (3.2)) сходится при $n \to \infty$ к некоторому невырожденному оператору, который определяется по винеровскому процессу. При этом оценка скорости сходимости порядка $O(\ln^4 k/\sqrt{k})$ позволяет от сумм перейти к винеровскому процессу.

Положим

$$\sigma^2(i,j) \equiv \mathbf{M}(X_i + \ldots + X_j)^2 = \sigma^2(\alpha_i) + \ldots + \sigma^2(\alpha_j),$$

где функция $\sigma^2(\alpha)$ определена формулой (2.5). Семейство функций

$$T_\rho(t; x, y) = \mathbf{M}'\left(e^{-\rho\int_0^t (w(u)+x)du}; \ \inf_{0 \leqslant u \leqslant t}(w(u) + x) > 0, \ w(t) + x = y\right)$$

введено и изучено в разделе 4. Оператор, соответствующий этому семейству, определим как

$$T_t\varphi(x) = T_{\rho,t}\varphi(x) \equiv \int_0^\infty T_\rho(t;\, x,\, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

Для $n = 1, 2, \ldots$ положим

$$N = N(n) \equiv \sup\{i \geqslant 1\colon\ (i+1)k \leqslant n\} \tag{6.6}$$

и введенные ранее операторы сгруппируем по k штук: $R_1^{(n)} \equiv R^{(n)}(1, k)$, $R_2^{(n)} \equiv R^{(n)}(k+1,\ 2k)$, $\ldots$, $R_{N+1}^{(n)} \equiv R^{(n)}(Nk+1,\, n)$; оператор $R_{N+1}^{(n)}$ состоит из $k' = n - Nk$ штук, где число k' колеблется от k до $2k-1$. Ядро оператора $R_i^{(n)}$ обозначим $R_i^{(n)}(x, y)$. Заметим, что в силу построения функции G (выбора Δ формулой (6.1)) числа $\gamma_{i,n}$ для $k(i-1) + 1 \leqslant j \leqslant ki$ совпадают между собой. Обозначим

$$\gamma^i = \gamma_n^i \equiv \gamma_{(i-1)k+1,n} = \ldots = \gamma_{ik,n}, \quad i = 1, \ldots, N;$$
$$\gamma^{N+1} = \gamma_n^{N+1} \equiv \gamma_{Nk+1,n} = \ldots = \gamma_{n-1,n}.$$

Введем далее операторы, с которыми будут сближаться операторы $R_1^{(n)}, \ldots$ $\ldots, R_{N+1}^{(n)}$:

$$T_i^{(n)} \equiv T_{\gamma_n^i, B_i^2}, \quad i = 1, \ldots, N+1,$$

$$B_i^2 \equiv \sigma^2(k(i-1)+1,\, ki)/k, \quad i = 1, \ldots, N; \quad B_{N+1}^2 \equiv \sigma^2(kN+1,\, n)/k.$$

Ядро оператора $T_i^{(n)}$ обозначим $T_i^{(n)}(x, y)$.

Рассмотрим далее функции

$$a_x^\pm = a_x^\pm(\cdot) \equiv R_1^{(n)}(x^\pm,\ \cdot) \in L_2(0, \infty),$$
$$b_y^\pm = b_y^\pm(\cdot) \equiv R_{N+1}^{(n)}(\cdot,\ y^\pm) \in L_2(0, \infty),$$

где $x^\pm$ и $y^\pm$ из формулы (6.2);

$$A^{(n)} \equiv R_2^{(n)} \ldots R_N^{(n)}.$$

Положим далее

$$a_x = a_x(\cdot) \equiv T_1^{(n)}(x,\ \cdot) \in L_2(0, \infty),$$
$$b_y = b_y(\cdot) \equiv T_{N+1}^{(n)}(\cdot,\ y) \in L_2(0, \infty),$$
$$A^{(0)} \equiv T_2^{(n)} \ldots T_N^{(n)}.$$

Тогда интересующие нас функции представляются в виде

$$\mathbf{M}_n(x^\pm,\ y^\pm) = (a_x^\pm,\ A^{(n)} b_y^\pm).$$

Следующие леммы 6.1—6.3 будут доказаны в разделе 7. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма $L_2(0, \infty)$.

Лемма 6.1. *Найдется число $C < \infty$ такое, что для* $1 \leqslant i \leqslant N+1$

$$\| T_i^{(n)} - R_i^{(n)} \| \leqslant C \ln^4 \mathrm{k}/\sqrt{\mathrm{k}}.$$

Лемма 6.2. *Для любых $x > 0$, $y > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \| a_x^\pm - a_x \| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \| b_y^\pm - b_y \| = 0.$$

Лемма 6.3. *Для любого вектора $\varphi \in L_2(0, \infty)$*

$$\lim_{n\to\infty} \| A^{(0)}\varphi / (\| T_2^{(n)} \| \ldots \| T_N^{(n)} \|) - \psi_0(\psi_1, \varphi) \| = 0.$$

Здесь

$$\psi_0 = \psi_0(x) \equiv \| T_1^{(n)} \| \, |\gamma_n^1|^{1/6} z_1\left(|\gamma_n^1|^{1/3} x\right),$$
$$\psi_1 = \psi_1(x) \equiv \| T_{N+1}^{(n)} \| \, |\gamma_n^{N+1}|^{1/6} z_1\left(|\gamma_n^{N+1}|^{1/3} x\right),$$

где функции $z_1(x)$ *определены формулой* (4.6).

С помощью этих лемм закончим доказательство теоремы 2.1. Очевидные вычисления дают для любого $\varphi \in L_2(0, \infty)$

$$A^{(n)}\varphi = A^{(0)}\varphi + \psi,$$

где

$$\psi = \sum_{i=2}^{N} R_2^{(n)} \ldots R_{i-1}^{(n)} \left(R_i^{(n)} - T_i^{(n)}\right) T_{i+1}^{(n)} \ldots T_N^{(n)} \varphi.$$

Для оценки нормы вектора ψ заметим, что в силу леммы 6.1 для $1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant N+1$

$$\left| \| R_i^{(n)} \| - \| T_i^{(n)} \| \right| \leqslant C \ln^4 k / \sqrt{k};$$

поэтому

$$\| \psi \| \leqslant \| \varphi \| \sum_{i=2}^{N} \| R_2^{(n)} \| \ldots \| R_{i-1}^{(n)} \| \| R_i^{(n)} - T_i^{(n)} \| \| T_{i+1}^{(n)} \| \ldots \| T_N^{(n)} \| \leqslant$$
$$\leqslant \| \varphi \| NC \ln^4 k / \sqrt{k} \cdot \prod_{i=2}^{N} \left(\| T_i^{(n)} \| + C \ln^4 k / \sqrt{k} \right).$$

Из последнего, очевидно, следует

$$\| \psi \| \Big/ \prod_{i=2}^{N} \| T_i^{(n)} \| \leqslant CN \ln^4 k / \sqrt{k} \cdot \exp\{CN \ln^4 k / \sqrt{k}\}.$$

Поскольку для последовательностей $r = r(n) = o(n/\ln^4 n)$ справедливо

$$N \ln^4 k / \sqrt{k} = n \ln^4 k / k \sqrt{k} \cdot (1 + o(1)) = o(1),$$

окончательно получаем

$$\| \psi \| = o(1) \| T_2^{(n)} \| \ldots \| T_N^{(n)} \|. \tag{6.7}$$

Далее, в силу леммы 6.3 из (6.7) следует, что для любого $\varphi \in L_2(0, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| A^{(n)}\varphi \Big/ \prod_{i=2}^{N} \| T_i^{(n)} \| - \psi_0 (\psi_1, \varphi) \right\| = 0.$$

Последнее вместе с леммой 6.2 позволяет утверждать, что для $x,\ y > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \mathbf{M}_n(x^\pm, y^\pm) \Big/ \prod_{i=2}^{N} \| T_i^{(n)} \| - (a_x, \psi_0)(\psi_1, b_y) \right| = 0.$$

Таким образом, мы получили

$$\mathbf{M}_n(x^\pm, y^\pm) = |\ddot{H}(0)|^{1/6} |\ddot{H}(1)|^{1/6} z_1(x |\ddot{H}(0)|^{1/3}) \times$$
$$\times z_1\left(y |\ddot{H}(1)|^{1/3}\right) \| T_1^{(n)} \| \ldots \| T_{N+1}^{(n)} \| (1 + o(1)),$$

поэтому для доказательства теоремы 2.1 достаточно убедиться, что

$$\prod_{i=1}^{N+1} \| T_i^{(n)} \| = \exp\left\{ \left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{2/3} \lambda_1 \int_0^1 |\ddot{H}(t)|^{2/3} \sigma^2\left(\frac{r}{n} \dot{H}(t)\right) dt \right\} \times (1 + o(1)). \tag{6.8}$$

Поскольку

$$\ln \| T_{N+1}^{(n)} \| = \lambda_1 (\gamma_n^{N+1})^{2/3} \frac{\sigma^2(Nk+1, n)}{k},$$

$$\ln \| T_i^{(n)} \| = \lambda_1 (\gamma_n^i)^{2/3} \frac{\sigma^2((i-1)k+1, ik)}{k}, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

справедливо

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{N+1}\|T_i^{(n)}\|\right)=\lambda_1\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{N}(\gamma_n^i)^{2/3}\sigma^2((i-1)k+1,\ ik)+\right.$$

$$\left.+(\gamma_n^{N+1})^{2/3}\sigma^2(kN+1,n)\right]=\lambda_1\frac{n}{k}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(\gamma_{i,n})^{2/3}\sigma^2(i,i)+\lambda_1\frac{1}{k}(\gamma_{n-1,n})^{2/3}\sigma^2(n,n)=$$

$$=\lambda_1 n\frac{\sqrt{k}}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\lambda\left(r\left(G\left(\frac{i+1}{n}\right)-G\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right)-\lambda\left(r\left(G\left(\frac{i}{n}\right)-G\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)\right)\right]^{2/3}\times$$

$$\times\sigma^2(i,i)+o(1).$$

Используя далее свойства гладкости функции G и свойства функций $\lambda(\alpha)$ (2.4) и $\sigma^2(\alpha)$ (2.6), без труда получаем

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{N+1}\|T_i^{(n)}\|\right)=\lambda_1\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{2/3}\int_0^1|\ddot G(t)|^{2/3}\sigma^2\left(\frac{r}{n}\dot G(t)\right)dt+o(1).$$

Далее, в силу оценок леммы 5.1 и выбора Δ убеждаемся, что

$$\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{2/3}\int_0^1|\ddot G(t)|^{2/3}\sigma^2\left(\frac{r}{n}\dot G(t)\right)dt=\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{2/3}\int_0^1|\ddot H(t)|^{2/3}\sigma^2\left(\frac{r}{n}\dot H(t)\right)dt+o(1),$$

т. е. (6.8) имеет место. Теорема 2.1 доказана.

7. Доказательство лемм 6.1—6.3

Будем использовать следующее утверждение [11, с. 263]:

Теорема 7.1. *Пусть $Y_1,\ldots,Y_k$ — независимые одинаково распределенные случайные величины,* $\mathbf{M}Y_1=0,\mathbf{M}Y_1^2=1,\ \beta_3\equiv\mathbf{M}|Y_1|^3<\infty$ *такие, что плотность* $\frac{d}{dt}\mathbf{P}(Y_1<t)$ *равномерно ограничена числом A. Тогда*

$$\sup_x\left|\frac{d}{dx}\mathbf{P}(Y_1+\ldots+Y_k<x\sqrt{k})-(2\pi)^{-1/2}e^{-\frac{x^2}{2}}\right|\leqslant C\frac{\beta_3}{\sqrt{k}}\max(1,A^3),$$

где $C<\infty$ — абсолютная константа.

В обозначениях, использованных в предыдущих разделах, сформулируем следующее утверждение.

Лемма 7.1. *Найдутся числа $0<c\leqslant C<\infty$ такие, что для всех $1\leqslant i\leqslant N+1$, $n=1,2,\ldots,$ $x>0$, $y>0$ справедливо*

$$|R_i^{(n)}(x,y)|\leqslant Ce^{-c(x+y)},\quad |T_i^{(n)}(x,y)|\leqslant Ce^{-c(x+y)}.$$

Доказательство. Через $0<c\leqslant C<\infty$ будем обозначать различные константы, не зависящие от n и i, $1\leqslant i\leqslant N+1$. Первое неравенство докажем для $i=1$; для остальных i, очевидно, доказательство аналогичное. Через $k/2$ будем обозначать $[k/2]$ — целую часть числа $k/2$. Поскольку

$$R_1^{(n)}(x,y)\equiv R^{(n)}(1,k;x,y)=\int_0^\infty R^{(n)}(1,k/2;x,z)R^{(n)}(k/2+1,k;z,y)\,dz,$$

по неравенству Коши имеем

$$|R_1^{(n)}(x,y)|\leqslant I_1^{1/2}I_2^{1/2},\tag{7.1}$$

где

$$I_1\equiv\int_0^\infty(R^n(1,k/2;x,z))^2dz,\quad I_2\equiv\int_0^\infty(R^{(n)}(k/2+1,k;z,y))^2dz.$$

Для оценки интеграла I_1 убедимся, что справедлива следующая оценка:

$$R^{(n)}(1,\ k/2;\ x,\ y) \leqslant Ce^{c\frac{r^3}{n^3}(x+y)}. \tag{7.2}$$

Для этого вернемся к исходным случайным величинам $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$R^{(n)}(1,\ k/2;\ x,\ y) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{k/2}\Lambda(\alpha_i) - x\sqrt{k}\lambda(\alpha_1) + y\sqrt{k}\lambda(\alpha_{k/2})\right\}\times$$

$$\times \mathbf{P}'\left(S_i + \sqrt{k}x > rG(i/n);\quad i = 1, \ldots, k/2;\quad S_{k/2}/\sqrt{k} + x =\right.$$

$$\left. = \frac{r}{\sqrt{k}}G((k/2)/n) + y\right) \leqslant \exp\left\{-\sum_{i=1}^{k/2}\Lambda(\alpha_i) - x\sqrt{k}\lambda(\alpha_1) + y\sqrt{k}\lambda(\alpha_{k/2})\right\}\times$$

$$\times \mathbf{P}'\left(S_{k/2}/\sqrt{k} + x = \frac{r}{\sqrt{k}}G((k/2)/n) + y\right). \tag{7.3}$$

Перейдем далее к новым случайным величинам $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_{k/2}$ и их суммам $\overline{U}_j = \overline{X}_1 + \ldots + \overline{X}_j$, положив

$$\mathbf{M}e^{\lambda\overline{X}_i} \equiv \varphi(\lambda + \lambda(\overline{\alpha}_i))\, e^{-\lambda\overline{\alpha}_i}/\varphi(\lambda(\overline{\alpha}_i)),$$

где $\overline{\alpha}_1 = \ldots = \overline{\alpha}_{k/2} \equiv rG((k/2)/n)/(k/2)$. Таким образом, случайные величины $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_{k/2}$ имеют одинаковое распределение. Получаем

$$\mathbf{P}'\left(S_{k/2}/\sqrt{k} + x = \frac{r}{\sqrt{k}}G((k/2)/n) + y\right) = \mathbf{P}'\left(\overline{U}_{k/2}/\sqrt{k} + x = y\right)\times$$

$$\times \exp\left\{\sum_{i=1}^{k/2}\Lambda(\overline{\alpha}_i) + x\sqrt{k}\lambda(\overline{\alpha}_1) - y\sqrt{k}\lambda(\overline{\alpha}_{k/2})\right\}. \tag{7.4}$$

Используя свойства гладкости функции $G(t)$, нетрудно показать, что

$$\left|\sum_{i=1}^{k/2}\Lambda(\alpha_i) - \sum_{i=1}^{k/2}\Lambda(\overline{\alpha}_i)\right| + x\sqrt{k}\,|\lambda(\alpha_1) - \lambda(\overline{\alpha}_1)| + y\sqrt{k}\,|\lambda(\alpha_{k/2}) - \lambda(\overline{\alpha}_{k/2})| \leqslant$$

$$\leqslant C + c\frac{r^3}{n^3}(x + y);$$

поэтому в силу (7.3) и (7.4) получаем

$$|R^{(n)}(1,\ k/2;\ x,\ y)| \leqslant Ce^{c\frac{r^3}{n^3}(x+y)}\mathbf{P}'\left(\frac{\overline{U}_{k/2}}{\sqrt{k}} + x = y\right).$$

Для получения оценки (7.2) достаточно доказать, что

$$\mathbf{P}'(\overline{U}_{k/2}/\sqrt{k} + x = y) \leqslant C. \tag{7.5}$$

В том случае, когда случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ограничены, плотность преобразованных случайных величин $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_{k/2}$ равномерно ограничена и оценка (7.5) следует из теоремы 7.1. В общем случае можно только утверждать, что для плотности $\overline{p}(t)$ случайной величины $\overline{X}_1$ справедлива оценка

$$\overline{p}(t) \leqslant C\exp\left\{c\frac{r}{n}|t|\right\}. \tag{7.6}$$

Выберем два числа $a > 0$, $b > 0$ так, чтобы

$$\alpha \equiv \max(a,\ b) = \frac{n}{rc}\frac{1}{6}\ln k, \qquad \mathbf{M}(\overline{X}_1;\ -b < \overline{X}_1 < a) = 0,$$

где число $c > 0$ из формулы (7.6). Введем следующие события:

$$A_0 = \left\{\min_{1 \leqslant i \leqslant k/2}\overline{X}_i > -b,\ \max_{1 \leqslant i \leqslant k/2}\overline{X}_i < a\right\},$$

$$A_1 = \left\{ \min_{1 \leqslant i \leqslant k/2} \overline{X}_i < -b, \min_{1 \leqslant i \leqslant k/2} |\overline{X}_i| \leqslant \ln^2 k \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \max_{1 \leqslant i \leqslant k/2} \overline{X}_i > a, \min_{1 \leqslant i \leqslant k/2} |\overline{X}_i| \leqslant \ln^2 k \right\},$$

$$A_j = \{(j-1) \ln^2 k \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant k/2} |\overline{X}_i| < j \ln^2 k\}, \quad j = 2, 3, \ldots$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P}' (\overline{U}_{k/2}/\sqrt{k} + x = y) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}'(A_j;\ \overline{U}_{k/2}/\sqrt{k} + x = y).$$

Оценим каждое слагаемое в правой части последнего равенства. На основании теоремы 7.1 в силу того, что на событии A_0 плотность $\overline{X}_i$ допускает оценку

$$\overline{p}(t) \leqslant Ce^{c\frac{r}{n}\alpha} \leqslant Ck^{\frac{1}{6}}; \quad -b < t < a,$$

имеем

$$\mathbf{P}'(A_0;\ \overline{U}_{k/2}/\sqrt{k} + x = y) \leqslant C.$$

Далее, на событии A_j, $j = 1, 2, \ldots$, плотность минимального по модулю элемента допускает оценку

$$\overline{p}(t) \leqslant Ce^{-c\frac{r}{n} j \ln^2 k},$$

поэтому для $j = 2, 3, \ldots$

$$\mathbf{P}'(A_j;\ \overline{U}_{k/2}/\sqrt{k} + x = y) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}' \left(\overline{U}_{k/2-1}/\sqrt{k} + x = z, \min_{1 \leqslant i \leqslant k/2-1} |\overline{X}_i| \geqslant (j-1) \ln^2 k\right) \times$$

$$\times \mathbf{P}' \left(\overline{X}_{k/2}/\sqrt{k} + z = y;\ |\overline{X}_{k/2}| < j \ln^2 k\right) dz \leqslant$$

$$\leqslant Cke^{c\frac{r}{n} j \ln^2 k} \mathbf{P} \left(\min_{1 \leqslant i \leqslant k/2-1} |\overline{X}_i| \geqslant (j-1) \ln^2 k \right) \leqslant$$

$$\leqslant Cke^{c\frac{r}{n} j \ln^2 k - c(j-1)(k/2-1) \ln^2 k} \leqslant Cke^{-cjk}.$$

Для $j = 1$ верна оценка

$$\mathbf{P}' \left(A_1;\ \overline{U}_{k/2}/\sqrt{k} + x = z\right) \leqslant Ck^2 e^{-c \ln^5 k},$$

которая устанавливается аналогичным образом. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}' \left(A_j;\ \overline{U}_{k/2}/\sqrt{k} + x = y\right) \leqslant Ck \left(ke^{-c \ln^5 k} + \sum_{j=2}^{\infty} e^{-cjk} \right) \leqslant C,$$

и соотношение (7.5) получено; оценка (7.2) получена тоже. Подставляя (7.2) в интеграл I_1, получаем

$$|I_1| \leqslant C \int_0^{\infty} R^{(n)}(1, k/2;\ x, z)\, e^{c\frac{r^3}{n^3}(x+z)} dz \leqslant$$

$$\leqslant Ce^{c\frac{r^3}{n^3}x} \mathbf{M} e^{-\frac{\rho}{k} \sum_{j=1}^{k/2} (U_j/\sqrt{k} + x) + c\frac{r^3}{n^3} U_{k/2}/\sqrt{k}} =$$

$$= Ce^{\left(c\frac{r^3}{n^3} - \rho(k/2)/k\right)x} \prod_{j=1}^{k/2} \mathbf{M} e^{\left(\frac{k-i}{k\sqrt{k}}\rho + c\frac{r^3}{n^3}\right) X_i} \leqslant Ce^{-\frac{\rho}{4}x}.$$

Таким образом, для первого интеграла I_1 в (7.1) получена оценка

$$|I_1| \leqslant Ce^{-cx}.$$

Обращаясь далее к блужданию

$$U_k = y, \quad U_{k-1}, \quad \ldots, \quad U_{k/2+1},$$

убеждаемся, что интеграл I_2 имеет ту же природу, что и интеграл I_1, и для него справедлива аналогичная оценка:

$$|I_2| \leqslant Ce^{-cy}.$$

Поэтому в силу (7.1) первое утверждение леммы 7.1 доказано. Поскольку второе утверждение доказывается аналогично (и значительно проще), лемма 7.1 доказана.

Следующее утверждение будет доказано в разделе 9.

Лемма 7.2. *Найдется число* $C < \infty$ *такое, что для всех* $1 \leqslant i \leqslant N+1$, $n = 1, 2, \ldots, x > 0, y > 0$

$$\left| R_i^{(n)}(x, y) - T_i^{(n)}(x, y) \right| \leqslant C \ln^3 k / \sqrt{k}.$$

С помощью лемм 7.1 и 7.2 докажем леммы 6.1—6.3.

Доказательство леммы 6.1. Поскольку $\| R_i^{(n)} - T_i^{(n)} \|^2 \leqslant I$, $I \equiv \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left(R_i^{(n)}(x, y) - T_i^{(n)}(x, y) \right)^2 dx dy$, достаточно оценить интеграл I. Пусть для $a > 0$

$$I_1 \equiv \int\limits_0^{a \ln k} \int\limits_0^{a \ln k} \left(R_i^{(n)}(x, y) - T_i^{(n)}(x, y) \right)^2 dx dy, \quad I_2 \equiv I - I_1.$$

В силу леммы 7.2

$$|I_1| \leqslant Ca^2 \ln^2 k \ln^6 k/k,$$

и в силу леммы 7.1

$$|I_2| \leqslant Ce^{-ac \ln k};$$

выбирая a достаточно большим, получаем нужную оценку:

$$|I| = |I_1| + |I_2| \leqslant C \ln^8 k/k.$$

Лемма 6.1 доказана. Лемма 6.2 является очевидным следствием лемм 7.1 и 7.2.

Доказательство леммы 6.3. Наряду с оператором (см. (4.2) и (4.3))

$$T_{\rho,t}\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j \rho^{2/3} t} \varphi_j(\rho; x) \; (\varphi_j(\rho; \cdot), \varphi(\cdot))$$

рассмотрим оператор

$$L_{\rho,t}\varphi(x) \equiv e^{\lambda_1 \rho^{2/3} t} \varphi_1(\rho; x) (\varphi_j(\rho; \cdot), \varphi(\cdot));$$

наряду с операторами $T_1^{(n)}, \ldots, T_{N+1}^{(n)}$ рассмотрим операторы $L_1^{(n)}, \ldots, L_{N+1}^{(n)}$, которые определим как

$$L_i^{(n)} \equiv L_{\rho_i, t_i},$$

где $\rho_i = \rho_i^{(n)}$, $t_i = t_i^{(n)}$ — параметры, которые определяют оператор $T_i^{(n)} = T_{\rho_i, t_i}$. В силу построения функции G по Δ (см. (6.1)) каждые последующие s операторов $T_1^{(n)}, \ldots, T_s^{(n)}$; $T_{s+1}^{(n)}, \ldots, T_{2s}^{(n)}$; ...; $T_{(m-1)s+1}^{(n)}, \ldots, T_{ms}^{(n)}$ и, наконец, остальные $T_{ms+1}^{(n)}, \ldots, T_N^{(n)}$ (число $m = m(\Delta)$ определено в начале раздела 4) совпадают между собой. Последняя $(m+1)$-я группа операторов состоит из $s' = N - sm$ штук, так что $s/2 \leqslant s' \leqslant 2s$. Это же верно для операторов $L_1^{(n)}, \ldots, L_N^{(n)}$. Положим

$$A_j \equiv \left(\left(L_{js+1}^{(n)}\right)^s - \left(T_{js+1}^{(n)}\right)^s \right) \left\| T_{js+1}^{(n)} \right\|^{-s}, \quad j = 1, \ldots, m;$$
$$A_{m+1} \equiv \left(\left(L_{ms+1}^{(n)}\right)^{s'} - \left(T_{ms+1}^{(n)}\right)^{s'} \right) \left\| T_{ms+1}^{(n)} \right\|^{-s'}.$$

Отметим, что нормы операторов $L_i^{(n)}$ и $T_i^{(n)}$ совпадают и равны $\| T_i^{(n)} \| = \exp\{\lambda_1 \rho_i^{2/3} t_i\}$; нормы операторов A_j равны

$$\| A_j \| = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)\rho_{js+1}^{2/3} t_{js+1} s}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad \| A_{m+1} \| = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)\rho_{ms+1}^{2/3} t_{ms+1} s'}.$$

Таким образом, в силу оценки $\sup\limits_{1 \leqslant j \leqslant m+1} \| A_j \| \leqslant C e^{-cs}$ получаем, что для любой функции $\varphi \in L_2(0, \infty)$

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{T_2^{(n)} \ldots T_N^{(n)} \varphi}{\| T_2^{(n)} \| \ldots \| T_N^{(n)} \|} - \frac{L_2^{(n)} \ldots L_N^{(n)} \varphi}{\| T_2^{(n)} \| \ldots \| T_N^{(n)} \|} \right\| = 0 \tag{7.7}$$

(тут используются те же рассуждения, что и при выводе оценки (6.7)).

Очевидно далее, что

$$\frac{L_2^{(n)} \ldots L_N^{(n)} \varphi(x)}{\prod\limits_{j=2}^{N} \| T_j^{(n)} \|} = \varphi_1(\rho_1; x) \prod_{j=1}^{m} (\varphi_1(\rho_{js}; \cdot), \varphi_1(\rho_{js+1}; \cdot)) (\varphi_1(\rho_{ms+1}; \cdot), \varphi(\cdot)). \tag{7.8}$$

В силу выбора функции G (и гладкости функции H) справедливо

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} | \rho_{js} - \rho_{js+1} | \leqslant C\Delta.$$

Далее, поскольку

$$(\varphi_1(\rho; \ \cdot), \ \ \varphi_1(\rho; \ \cdot)) \equiv 1,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} (\varphi_1(\tilde{\rho}; \cdot), \varphi_1(\rho; \cdot)) \Big|_{\tilde{\rho} = \rho} = 0,$$

и поэтому

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} | (\varphi_1(\rho_{js}; \cdot), \varphi_1(\rho_{js+1}; \cdot)) - 1 | \leqslant C\Delta^2.$$

Из (7.8) в силу последнего следует

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{L_2^{(n)} \ldots L_N^{(n)} \varphi(x)}{\prod\limits_{j=2}^{N} \| T_j^{(n)} \|} - \varphi_1(\rho_1; x)(\varphi_1(\rho_{sm+1}; \cdot), \varphi(\cdot)) \right\| = 0,$$

что вместе с (7.7) и доказывает лемму 6.3.

8. Решение второй граничной задачи

Для заданной функции $H(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, через $B_H \subseteq C(0, 1)$ мы обозначили (см. разд. 1) множество функций $f \in C(0, 1)$, которые для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$ лежат выше $H(t)$. Наиболее вероятная траектория $H_0(t)$ в B_H единственным образом определяется из соотношения $H_0(0) = 0$,

$$\int_0^1 \dot{H}_0^2(t)\, dt = \inf \left\{ \int_0^1 \dot{f}^2(t)\, dt \colon f(0) = 0, \ f \in B_H \right\}. \tag{8.1}$$

Пусть существуют q интервалов $\Delta_i = (t_{2i-2}, t_{2i-1})$, $i = 1, \ldots, q$, такие, что $H_0(t) > H(t)$ при $t \in \bigcup\limits_{i=1}^{q} \Delta_i$; при $t \notin \bigcup\limits_{i=1}^{q} \Delta_i$ выполняется $H_0(t) = H(t)$. Длину интервала Δ_i обозначим $|\Delta_i| = t_{2i-1} - t_{2i-2}$; расстояние между соседними интервалами Δ_i и Δ_{i+1} обозначим $\delta_i = t_{2i} - t_{2i-1}$ (предполагается, что $t_1 < t_2 < \ldots < t_{2q-1}$). Теорема 2.1 и леммы, используемые при ее доказательстве, позволяют достаточно полно решить вторую граничную задачу в области больших уклонений $r = r(n) = o(n/\ln^4 n)$. Асимптотика искомой вероятности будет как бы «набираться» из произведений «асимптотик» на отдельных интервалах; при этом будет играть роль (в вычислении констант) вид предшествующего и последующего интервалов. Понятно, что различных подслучаев будет довольно много, поэтому мы ограничимся формулировкой результата в одном частном случае; остальные частные случаи (в рамках предположений из теоремы 2.1) выглядят аналогично. Напомним, что $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, $\mathbf{M}\xi_1^2 = 1$, $\mathbf{M}\exp\{\lambda\xi_1\} < \infty$ при $|\lambda| \leqslant \delta$, $\delta > 0$, $S_i = \xi_1 + \ldots + \xi_i$,

$$\Lambda(\alpha) = \inf_{\lambda}\{-\alpha\lambda + \ln \mathbf{M}e^{\lambda\xi_1}\}, \quad \sigma^2(\alpha) = -\left[\frac{d^2}{d\alpha^2}\Lambda(\alpha)\right]^{-1},$$

числовая последовательность $r = r(n)$ удовлетворяет условиям:

$$\lim_{n\to\infty} r/\sqrt{n} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r\ln^4 n/n = 0. \tag{8.2}$$

Теорема 8.1. *Пусть плотность $p(t) = \dot{\mathbf{P}}(\xi_1 < t)$ непрерывна и ограничена. Пусть, кроме того, функция $H(t)$ удовлетворяет условиям:* 1) $H(0) < 0$; 2) $t_{2q-1} = 1$; 3) $|\Delta_i| > 0$, $i = 1, \ldots, q$; 4) $\delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, q-1$; 5) *функция $H^{(3)}(t)$ непрерывна при* $t \notin \bigcup_{i=1}^{q} \Delta_i$; 6) *функция $\ddot{H}(t)$ непрерывна в некоторой окрестности множества* $[0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \Delta_i$; 7) $\inf\left\{\ddot{H}(t)\colon t \notin \bigcup_{i=1}^{q} \Delta_i\right\} < 0$. *Тогда при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(S_i > rH(i/n);\ i = 1, \ldots, n) =$$
$$= \Lambda^{q-1}\prod_{i=1}^{q-1}|\Delta_i|^{-1/2}\prod_{i=1}^{2q-2}|\ddot{H}(t_i)|^{-1/6}\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{-(q-1)/3}\times$$
$$\times\exp\left\{n\int_0^1\Lambda\left(\frac{r}{n}H_0(t)\right)dt + \left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{2/3}\frac{\lambda_0}{2^{1/3}}\int_0^1|\ddot{H}_0(t)|^{2/3}\times\right.$$
$$\left.\times\sigma^2\left(\frac{r}{n}\dot{H}_0(t)\right)dt\right\}\times(1 + o(1)),$$

где $\Lambda = 2^{-17/20}\sqrt{\pi}\left[\int_0^{\infty}\left(V^2(2^{1/3}x + \lambda_0)\right)dx\right]^{-1}$, λ_0 — *наибольший нуль функции Эйри* $V(x)$ (см. [20]).

Замечание 8.1. Аналогичные утверждения справедливы и в решетчатом случае, когда общее распределение слагаемых ξ_i имеет носитель в точках вида (jh), $-\infty < j < \infty$. При этом доказательства в абсолютно непрерывном и решетчатом случаях отличаются только в тех местах, где используется локальная предельная теорема. В частности, если в теореме 8.1 условие существования гладкой плотности заменить условием решетчатости, то утверждение теоремы 8.1 сохранится без изменения.

Замечание 8.2. Для однородного процесса с независимыми приращениями $\xi(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, утверждения о поведении вероятности $\mathbf{P}(\xi(nt) > rH(t);\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ выглядят совершенно аналогично соответствующим утверждениям для сумм как в абсолютно непрерывном, так и в решетчатом случае. При этом функции $\Lambda(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$ и $\sigma(\alpha)$ строятся по случайной величине $\xi(1)$. Доказательства для процессов выполняются по той же схеме, что и для сумм; в частности, абсолютно непрерывное преобразование для процесса удобно получить с помощью предельного перехода, как это сделано в разделе 4 для винеровского процесса.

Пусть $F_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,— эмпирическая функция распределения, построенная по простой выборке объема n из равномерного на отрезке $[0, 1]$ распределения. Хорошо известно (см., например, [1]), что процесс $F_n(t) - t$ имеет то же распределение, что и процесс $n^{-1}\eta(nt)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, при условии, что $n^{-1}\eta(n) = 0$, где $\eta(t)$ — пуассоновский процесс со сносом: $\mathbf{M} \exp\{\lambda\eta(t)\} = \exp\{t(e^\lambda - 1 - \lambda)\}$. Нетрудно убедиться, что при $-1 < \alpha < \infty$

$$\Lambda_{\eta(1)}(\alpha) = \alpha - (\alpha + 1)\ln(\alpha + 1), \quad \lambda_{\eta(1)}(\alpha) = \ln(\alpha + 1), \quad \sigma^2_{\eta(1)}(\alpha) = \alpha + 1,$$

поэтому в силу замечаний 8.1 и 8.2 справедлива

Теорема 8.2. *Пусть функция $H(t)$ удовлетворяет условиям $H(0) < 0$, $H(1) < 0$ и функция $H_0(t)$ находится из соотношений: $H_0(0) = H_0(1) = 0$,*

$$\int_0^1 \dot H_0^2(t)\,dt = \inf\left\{\int_0^1 \dot f^2(t)\,dt : f(0) = f(1) = 0, \quad f(t) \geqslant H(t);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\right\}.$$

Пусть, кроме того, выполнены условия 1)—7) теоремы 8.1 и числовая последовательность $r = r(n)$ удовлетворяет (8.2). Тогда при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(n(F_n(t) - t) > rH(t);\ 0 \leqslant t \leqslant 1) = \Lambda^{q-1} \prod_{i=1}^{q} |\Delta_i|^{-1/2} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{2q-2} |\ddot H(t_i)|^{-1/6} \left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{-(q-1)/3} \exp\left\{-n\int_0^1 \left(\frac{r}{n}\dot H_0(t) + 1\right)\ln\left(\frac{r}{n}\dot H_0(t) + 1\right)dt\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{2/3} \frac{\lambda_0}{2^{1/3}} \int_0^1 |\ddot H_0(t)|^{2/3}\left(\frac{r}{n}\dot H_0(t) + 1\right)dt\right\} \times (1 + o(1)),$$

где λ_0, Λ — из теоремы 8.1.

Замечание 8.3. Условие Крамера $\mathbf{M}e^{\lambda\xi_1} < \infty$ при $|\lambda| \leqslant \delta$, $\delta > 0$, можно ослабить, заменив его, например, условием $\mathbf{M}e^{\lambda|\xi_1|^\beta} < \infty$ при $|\lambda| \leqslant \delta$, $\delta > 0$, $\beta > 0$. Используя далее технику срезок, можно получить аналоги теорем 2.1, 8.1, в которых вместо функций $\Lambda(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$ и $\sigma^2(\alpha)$ будут фигурировать части рядов (2.4) и (2.6), представляющие эти функции, а последовательность $r = r(n)$ будет ограничена сверху последовательностью $o(1)n^{1/(2-\beta)}$, $0 < \beta < 1$.

Замечание 8.4. В доказательстве теорем 2.1 и 8.1 «почти» не используется то обстоятельство, что слагаемые $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены; более того, на первом шаге доказательства свойство одинаковой распределенности утрачивается. Поэтому предложенным методом можно получить соответствующие утверждения и для разнораспределенных слагаемых, и для схемы серий $\xi_{1,n}, \ldots, \xi_{n,n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство теоремы 8.1 в основном подготовлено доказательством теоремы 2.1 и не требует привлечения дополнительных идей; поэтому мы проведем его менее подробно. Для краткости будем считать, что $q = 2$; случай $q > 2$ доказывается совершенно аналогично. Итак, при $q = 2$ отрезок $[0, 1]$ разбивается на три части: $\Delta_1 = [0, t_1)$, $\delta = [t_1, t_2]$ и $\Delta_2 = (t_2, 1]$, где $0 < t_1 < t_2 < 1$, и при $t \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ выполняется $H_0(t) > H(t)$; при $t \in \delta - H_0(t) = H(t)$. Тут основное преобразование нужно выполнять по функции $H_0(t)$, которая определена формулой (8.1). Обозначим $i_1 = \sup\{i \geqslant 1 : i < nt_1\}$, $i_2 = \inf\{i \leqslant n : t > nt_2\}$; в результате преобразования случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ переходят в случайные величины $X_1, \ldots, X_n$, уже разнораспределенные; в силу того, что $\dot H_0(t) = \dot H_0(0)$ при $0 \leqslant t < t_1$ и $\dot H_0(t) = \dot H_0(1)$ при $t_2 > t \geqslant 1$, величины $X_1, \ldots, X_{i_1}$ имеют одно распределение, и величины $X_{i_2}, \ldots, X_n$ обладают тем же свойством. Как и ранее, суммы будем обозначать $U_{ij} = X_i + \ldots + X_j$. Пусть $s = s(n) \equiv r/\sqrt{n}$; обозначим

$$A_n(x_1) \equiv \mathbf{P}'\left(\frac{U_{1i}}{\sqrt{n}} > s\left(H(i/n) - \frac{i}{i_1}H(i_1/n)\right);\quad i = 1, \ldots, i_1,\ \frac{U_{1,i_1}}{\sqrt{n}} = x_1\right),$$

$$B_n(x_2) \equiv \mathbf{P}\left(\frac{U_{i_2,i}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}x_2 > s(H(j/n) - H(i_2/n));\quad i = i_2, \ldots, n\right),$$

$$C_n(x_1,\ x_2) \equiv \mathbf{M}'\left(e^{\sqrt{k}\sum\limits_{j=i_1+1}^{i_2-1}\beta_j\left(\frac{U_{i_1+1,j}}{\sqrt{k}}+x_1\right)};\right.$$

$$\left.\inf_{i_1+1<j<i_2+1}\left\{\frac{U_{i_1+1,j}}{\sqrt{k}} + x_1\right\} > 0,\quad \frac{U_{i_1+1,i_2-1}}{\sqrt{k}} + x_1 = x_2\right).$$

В результате преобразования искомая вероятность представляется в виде

$$\mathbf{P}(S_i > rH(i/n);\ i = 1, \ldots, n) = \exp\left\{n\sum_{i=1}^{n}\Lambda(\alpha_i)\right\}\times$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^\infty A_n(x_1)\,C_n(x_1,\ x_2)\,B_n(x_2)\,dx_1dx_2. \tag{8.3}$$

В силу теоремы 2.1 справедливо

$$C_n(x_1,\ x_2) = \varphi_1(|\ddot{H}(t_1)|;\ x_1)\cdot\varphi_1(|\ddot{H}(t_2)|;\ x_2)\times$$

$$\times\exp\left\{s^{2/3}\lambda_1\int_{t_1}^{t_2}|\ddot{H}(t)|^{2/3}\sigma^2(s\dot{H}(t))\,dt\right\}\times(1 + o(1)), \tag{8.4}$$

где $\varphi_1(\rho;\ x) = \rho^{1/6}z(\rho^{1/3}x)$. Далее, используя теорему 7.1, можно показать, что

$$A_n(x_1) = \mathbf{P}'\left(w(t) > s\left(H(t) - \frac{t}{t_1}H(t_1)\right);\quad 0 \leqslant t \leqslant t_1,\quad w(t_1)\cdot s^{1/3} = x_1\right)\times$$

$$\times(1 + o(1)) = A(|\ddot{H}(t_1)|;\ x_1)\cdot\frac{s^{-1/3}}{\sqrt{2\pi t_1}}\times(1 + o(1)), \tag{8.5}$$

где

$$A(\rho;\ x) \equiv \mathbf{P}\left(w(t) + x > -\frac{1}{2}\rho t^2;\ 0 \leqslant t < \infty\right).$$

Аналогично устанавливается, что

$$B_n(x_2) = \mathbf{P}\left(w(t) - w(t_2) + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}x_2 > s(H(t) - H(t_2));\quad t_2 \leqslant t \leqslant 1\right)\times$$

$$\times(1 + o(1)) = A(|\ddot{H}(t_2)|;\ x_2)\times(1 + o(1)). \tag{8.6}$$

Используя далее (8.6), (8.5) и (8.4) и делая предельный переход в интеграле (8.3) (предельный переход обосновывается с помощью леммы 7.1), получаем соотношение

$$\sqrt{2\pi t_1}s^{1/3}\exp\left\{-n\int_0^1\Lambda(s\dot{H}_0(t))\,dt - s^{2/3}\lambda_1\int_0^1|\ddot{H}_0(t)|^{2/3}\sigma^2(s\dot{H}_0(t))\,dt\right\}\times$$

$$\times\mathbf{P}(S_i > rH(i/n);\ 1 \leqslant i \leqslant n) = \int_0^\infty\varphi_1(|\ddot{H}(t_1)|;\ x)A(|\ddot{H}(t_1)|;\ x)\,dx\times$$

$$\times\int_0^\infty\varphi_1(|\ddot{H}(t_2)|;\ x)\,A(|\ddot{H}(t_2)|;\ x)dx\times(1 + o(1)). \tag{8.7}$$

Далее, очевидно

$$A(\rho;\ x) = A(1;\ \rho^{1/3}x),$$

поэтому правая часть в (8.7) имеет вид

$$|\ddot{H}(t_1)|^{-1/6}|\ddot{H}(t_2)|^{-1/6}\left(\int\limits_0^\infty z(x)\,A(1;\,x)\,dx\right)^2, \tag{8.8}$$

где функция $z(x)$ определена (2.8), $A(1;\ x) = \mathbf{P}(\omega(t) + x > -t^2/2;\ 0 \leqslant \leqslant t < \infty)$. Осталось вычислить интеграл в (8.8), который мы обозначим $\Lambda_0^{1/2}$; очевидно, что

$$\Lambda_0^{1/2} = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^\infty z(x)\,\mathbf{P}\Big(w(t) > -x - \frac{1}{2}t^2;\ 0 \leqslant t \leqslant T\Big)\,dx.$$

Поэтому, используя точную формулу из теоремы 4.1, получаем

$$\Lambda_0^{1/2} = \lim_{T\to\infty} e^{\lambda_1 T - T^{3/6}}\int\limits_0^\infty z(y)\,e^{Ty}dy.$$

Используя далее формулы (4.5), с помощью метода Лапласа легко находим

$$\Lambda_0^{1/2} = \sqrt{2\pi}\,2^{-5/3}\left(\int\limits_0^\infty V^2\left(2^{1/3}x + \lambda_0\right)dx\right)^{-1/2},$$

где $V(x)$ — из (2.8). Теорема 8.1 доказана.

9. Технические леммы

Цель настоящего раздела — доказать лемму 7.2; тут мы будем использовать обозначения, которые были введены ранее. В частности, в силу леммы 5.1 наряду с функцией H построена функция G, причем построение выполнялось по числу $\Delta = \Delta(n)$, которое определено (6.1). По функции G и последовательности $r = r(n)$ построены случайные величины $X_{1,\,n}, \ldots, X_{n,\,n}$; $\mathbf{M}X_{i,n} = 0$, $\mathbf{M}X_{i,n}^2 = \sigma_{i,n}^2$, $i = 1, \ldots, n$. В настоящем разделе нам придется иметь дело с набором $k = k(n) \equiv [(n^2/r)^{2/3}]$ штук этих величин, взятых подряд:

$$X_{\varkappa+1,\,n},\ \ldots,\ X_{\varkappa+k,\,n},\quad \varkappa = (j-1)k,\ j = 1,\ \ldots,\ N+1, \tag{9.1}$$

где число $N = N(n)$ определено (6.6) и при $n \to \infty$ ведет себя, как n/k. В силу того, что, как правило, число n не будет кратным k, в последней группе будет не k элементов, а k', где $k \leqslant k' \leqslant 2k - 1$. Очевидно, что все утверждения, полученные в настоящем разделе для группы из k элементов, справедливы и для группы из k' элементов.

Произвольный набор (9.1) обозначим для краткости $Y_1, \ldots, Y_k$; суммы будем обозначать $V_{i,\,j} = Y_i + \ldots + Y_j$. Обозначим далее

$$B^2(i,\,j) \equiv k^{-1}\left(\mathbf{M}Y_i^2 + \ldots + \mathbf{M}Y_j^2\right),\quad \mathbf{M}(i,\,j;\,x,\,y) = \mathbf{M}_\rho(i,\,j;\,x,\,y) \equiv$$

$$\equiv \mathbf{M}'\left(e^{-\rho\frac{1}{k}\sum\limits_{m=i}^{j}\left(V_{i,m}/\sqrt{k}+x\right)};\ \inf_{i\leqslant m\leqslant j}\left(V_{i,m} + x\sqrt{k}\right) > 0,\ \ \frac{V_{i,j}}{\sqrt{k}} + x = y\right).$$

Как и ранее, через C будем обозначать различные константы, не зависящие от n и $\varkappa$. В новых обозначениях лемма 7.2 будет иметь вид:

Лемма 9.1. *Для некоторого $C < \infty$, не зависящего от n и $\varkappa$, для всех $x > 0$, $y > 0$ справедливо*

$$|M(1,\ k;\ x,\ y) - M(B^2(1,\ k);\ x,\ y)| \leqslant C\ln^3 k/\sqrt{k},$$

где функция $M(t;\,x,\,y) = M_\rho(t;\,x,\,y)$ определена в разделе 4.

Доказательство. Семейства $M(i,\,j;\,x,\,y)$ и $M(B^2(i,\,j);\,x,\,y)$ обладают полугрупповым свойством, поэтому

$$I \equiv M(1, k; x, y) - M(B^2(1, k); x, y) =$$
$$= \int_0^\infty (M(1, k/2; x, z) \cdot M(k/2+1, k; z, y) -$$
$$- M(B^2(1, k/2); x, z) - M(B^2(k/2+1, k); z, y))\, dz,$$

где через $k/2$ обозначим $[k/2]$. Пусть

$$I_1 \equiv \int_0^\infty (M(1, k/2; x, z) - M(B^2(1, k/2); x, z)) M(B^2(k/2+1, k); z, y)\, dz,$$

$$I_2 \equiv \int_0^\infty M(1, k/2; x, z)(M(k/2+1, k; z, y) - M(B^2(k/2+1, k), z, y))\, dz;$$

тогда, очевидно,

$$I = I_1 + I_2. \tag{9.2}$$

Интеграл I_1 оценим с помощью интегрирования по частям:

$$I_1 = -\int_0^\infty L(k; x, z) \frac{\partial}{\partial z} M(B^2(1, k/2); z, y)\, dz,$$

где

$$L(k; x, z) \equiv \int_0^z (M(1, k/2; x, \tilde{z}) - M(B^2(1, k/2); x, \tilde{z}))\, d\tilde{z}.$$

Поэтому

$$|I_1| \leqslant \sup_{x,y>0} |L(k; x, y)| \int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial z} M(B^2(1, k/2); z, y) \right| dz.$$

В силу формулы (4.2) и соотношений (4.5) справедливо

$$\int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial z} M(B^2(1, k/2); z, y) \right| dz \leqslant C,$$

поэтому

$$|I_1| \leqslant C \sup_{x,y>0} |L(k; x, y)|. \tag{9.3}$$

Тут мы прервем на время доказательство леммы 9.1 и докажем некоторое промежуточное утверждение. Обозначим

$$F^+(i, j; x, y) = \int_0^y M(i, j; x, \tilde{y})\, d\tilde{y}, \quad F^+(t; x, y) = \int_0^y M(t; x, \tilde{y})\, d\tilde{y},$$

$$F^-(i, j, x, y) = \int_0^x M(i, j; \tilde{x}, y)\, d\tilde{x}, \quad F^-(t; x, y) = \int_0^x M(t; \tilde{x}, y)\, d\tilde{x}.$$

Лемма 9.2. *Для некоторого числа $C < \infty$, не зависящего от n и $\varkappa$, для всех $x > 0$, $y > 0$ справедливо*

$$|F^\pm(1, k; x, y) - F^\pm(B^2(1, k); x, y)| \leqslant C \ln k/\sqrt{k}.$$

Доказательство основано на теореме А. И. Саханенко [22], в которой результат работы [23] распространяется на случай неодинаково распределенных слагаемых.

Теорема 9.1. [22]. *Пусть $Z_1, \ldots, Z_k$ — независимые случайные величины с нулевым средним, и пусть для некоторых чисел $s > 0$ и $L < \infty$ выполняется следующее неравенство:*

$$\mathbf{M}|Z_i|^3 \exp\{s|Z_i|\} \leqslant L\mathbf{M}Z_i^2, \quad 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{9.4}$$

Тогда случайные величины $Z_1, \ldots, Z_k$ можно задать на одном вероятностном пространстве с гауссовскими независимыми величинами $T_1, \ldots, T_k$, для которых $\mathbf{M}T_i = \mathbf{M}Z_i$, $\mathbf{M}T_i^2 = \mathbf{M}Z_i^2$, $i = 1, \ldots, k$, таким образом, что для всех $x > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant k} \left| \sum_{j \leqslant i} Z_j - \sum_{j \leqslant i} T_j \right| > C(N/t + x)\right) \leqslant \exp\{-tx\},$$

где $t = \min(s, 1/L)$, $N = 1 + \ln\left(t^2 \sum_{i=1}^{k} \mathbf{M}Z_i^2 + 1\right)$, *$C$ — абсолютная константа.*

Очевидно, что для случайных величин $Y_1, \ldots, Y_k$ условие (9.4) выполнено с константами s и L, не зависящими от n и $\varkappa$. Поэтому в силу теоремы 9.1 будем считать, что случайные величины $Y_1, \ldots, Y_k$ соответствующим образом заданы на одном вероятностном пространстве с гауссовскими случайными величинами $W_1, \ldots, W_k$; последние будем считать приращениями винеровского процесса:

$$W_i = w(kB^2(1, i)) - w(kB^2(1, i-1)), \quad i = 1, \ldots, k,$$

где $B^2(1, 0) = 0$. Для $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\mathbf{P}(\varepsilon) = \mathbf{P}_k(\varepsilon) \equiv \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant kB^2(1,k)} |v_k(t) - w(t)| > \varepsilon\sqrt{k}\right),$$

где $v_k(t)$, $0 \leqslant t \leqslant B^2(1, k)$, — ломаная, построенная по точкам $(kB^2(1, i), V_{1,i})$, $i = 0, 1, \ldots, k$, где $B^2(1, 0) = 0$, $V_{1,0} = 0$. Пусть, далее, $w_k(t)$, $0 \leqslant t \leqslant kB^2(1, k)$,— ломаная, построенная по точкам $(kB^2(1, i), w(kB^2(1, i)))$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Тогда, очевидно,

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant kB^2(1,k)} |v_k(t)/\sqrt{k} - w_k(t)/\sqrt{k}| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |V_{1,i}/\sqrt{k} - w(k, B^2(1, i))/\sqrt{k}| +$$
$$+ \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \sup_{kB^2(1,i-1) \leqslant t \leqslant kB^2(1,i)} |w(t) - w_k(t)|/\sqrt{k}.$$

Поскольку

$$|kB^2(i, i) - 1| = |kB^2(1, i) - kB^2(1, i-1) - 1| \leqslant Cr/n,$$

то получаем

$$\mathbf{P}_k(\varepsilon) \leqslant k\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 2} \left| w(t) - \frac{t}{2} w(2) \right| > \sqrt{k}\varepsilon/2\right) + \mathbf{P}_k^1(\varepsilon/2), \tag{9.5}$$

где

$$\mathbf{P}_k^1(\varepsilon) \equiv \mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant k} |V_{1,k} - w(k, B^2(1, i))| / \sqrt{k} > \varepsilon\right).$$

Легко видеть далее, что

$$\begin{aligned} e^{-2\rho\varepsilon} F^+(B^2(1, k);\ x - \varepsilon,\ y - 2\varepsilon) - \mathbf{P}_k(\varepsilon) &\leqslant \\ \leqslant F^+(1, k;\ x, y) &\leqslant \\ \leqslant e^{2\rho\varepsilon} F^+(B^2(1, k);\ x + \varepsilon,\ y + 2\varepsilon) + \mathbf{P}_k(\varepsilon). \end{aligned} \tag{9.6}$$

Выберем в (9.6) число $\varepsilon = C(N/t + \ln k/t)/\sqrt{k}$, где числа C, t, N — из формулировки теоремы 9.1; в силу (9.5) и теоремы 9.1 получаем $\mathbf{P}_k(\varepsilon) \leqslant C \exp\{-\ln k\} = C/k$. Далее, поскольку $|1 - \exp\{\pm 2\rho\varepsilon\}| \leqslant C \ln k/\sqrt{k}$ и в силу того, что $\sup_{x>0, y>0} |(\partial^2/\partial x \partial y) F^+(B^2(1, k); x, y)| \leqslant C$ (это следует из (4.2) и (4.5)), справедливо

$$|F^+(B^2(1, k);\ x \pm \varepsilon,\ y \pm 2\varepsilon) - F^+(B^2(1, k);\ x, y)| \leqslant C \ln k/\sqrt{k},$$

часть леммы 9.2, относящаяся к функциям F^+, доказана. Так как доказательство для функций F^- совершенно аналогично, то лемма 9.2 доказана.

Вернемся теперь к доказательству леммы 9.1, которое прервали на формуле (9.3); в силу леммы 9.2 справедливо

$$|L(k;\ x,\ y)| \leqslant C \ln k/\sqrt{k},$$

поэтому мы получили оценку

$$|I_1| \leqslant C \ln k/\sqrt{k}. \tag{9.7}$$

Займемся теперь оцениванием интеграла I_2 в формуле (9.2). Обозначим для краткости

$$A(k;\ z,\ y) = M(k/2+1,\ k;\ z,\ y) - M(B^2(k/2+1,\ k);\ z,\ y),$$

так что

$$I_2 = \int_0^\infty M(1,\ k/2;\ x,\ z)\, A(k;\ z,\ y)\, dz.$$

На траекториях блуждания

$$x,\ V_{1,1}/\sqrt{k}+x,\ V_{1,2}/\sqrt{k}+x,\ \ldots,\ V_{1,k}/\sqrt{k}+x$$

введем функционал

$$\eta = \eta(x) \equiv \inf\{i \geqslant 0 : V_{1,i}/\sqrt{k}+x \geqslant a/\sqrt{\ln k}\}$$

— момент первого достижения уровня $a/\sqrt{\ln k}$.

Тогда

$$I_2 = I_{2,1} + I_{2,2}, \tag{9.8}$$

где

$$I_{2,1} \equiv \int_{z=0}^\infty \int_{t=a/\sqrt{\ln k}}^\infty \sum_{i=0}^{k/4} \mathbf{M}'\left(e^{-\frac{\rho}{k}\sum_{j=1}^{i}(V_{1,j}/\sqrt{k}+x)};\ \inf_{1\leqslant j\leqslant i}(V_{1,j}/\sqrt{k}+x) > 0,\quad \eta = i,\quad V_{1,i}/\sqrt{k}+x = t\right) M(i+1,\ k/2;\ t,\ z)\, A(k;\ z,\ y)\, dz,\, dt;$$

$$I_{2,2} \equiv \int_0^\infty \mathbf{M}'\left(e^{-\frac{\rho}{k}\sum_{j=1}^{k/2}(V_{1,j}/\sqrt{k}+x)};\ \inf_{1\leqslant j\leqslant k/2}(V_{1,j}/\sqrt{k}+x) > 0,\quad V_{1,k/2}/\sqrt{k} + x = z,\ \eta > k/4\right) A(k;\ z,\ y)\, dz.$$

Начнем оценивать $I_{2,2}$; имеем

$$|I_{2,2}| \leqslant \mathbf{P}\left(\inf_{1\leqslant i\leqslant k/4}(V_{1,i}/\sqrt{k}+x) > 0,\ \eta > k/4\right) \times \sup_{x,y>0} M(k/4+1,\ k/2;\ x,\ y) \int_0^\infty |A(k;\ z,\ y)|\, dz.$$

В силу леммы 7.1 справедливо

$$\sup_{x,y>0} |M(k/2+1,\ k/2;\ x,\ y)| \leqslant C;$$

далее, очевидно

$$\int_0^\infty |A(k;\ z,\ y)|\, dz \leqslant \int_0^\infty M(k/2+1, k; z, y) dy + \int_0^\infty M(B^2(k/2+1,\ k);\ z,\ y)\, dy \leqslant C,$$

поэтому

$$|I_{2,2}| \leqslant C\mathbf{P}\left(\inf_{1\leqslant i\leqslant k/4}(V_{1,i}/\sqrt{k}+x) > 0,\ \sup_{1\leqslant i\leqslant k/4}(V_{1,i}/\sqrt{k}+x) \leqslant a/\sqrt{\ln k}\right).$$

Известно (см., например, [24]), что при $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left(\inf_{0\leqslant t\leqslant 1}(w(t)+x)>0,\ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}(w(t)+x)<\varepsilon\right)\leqslant Ce^{-\frac{\pi^2}{4\varepsilon^2}};$$

используя это неравенство и оценку скорости сходимости в принципе инвариантности для полосы [25], получаем, возможность выбрать $a>0$, не зависящее от n и от $\varkappa$, такое, что для него справедливо

$$|I_{2,2}|\leqslant C/\sqrt{k}. \tag{9.9}$$

Обратимся теперь к слагаемому $I_{2,2}$ в (9.8), в котором число $a>0$ фиксировано в соответствии с (9.9). Обозначим для краткости

$$c_i(x,t)\equiv\mathbf{M}'\left(e^{-\frac{\rho}{k}\sum_{j=1}^{i}(V_{1,j}/\sqrt{k}+x)};\ \inf_{1\leqslant j\leqslant i}\left(V_{1,j}/\sqrt{k}+x\right)>0,\quad \eta= = i,\ V_{1,i}/\sqrt{k}+x=t\right),$$

так что

$$I_{2,1}=\int_{z=0}^{\infty}\int_{t=a/\sqrt{\ln k}}^{\infty}\sum_{i=0}^{k/4}c_i(x,t)\,M(i+1,k/2;t,z)\,A(k;z,y)\,dzdt.$$

Пусть $m=m(k)\equiv[k/\ln^3 k]$; обозначим далее

$$N^+(i,j;x,y)\equiv\mathbf{M}'\left(e^{-\frac{\rho}{k}\sum_{p=i}^{j}(V_{i,p}/\sqrt{k}+x)};\quad V_{i,j}/\sqrt{k}+x=y\right),$$

$$N^-(i,j;x,y)\equiv N^+(i,j;x,y)-M(i,j;x,y).$$

Тогда справедливо соотношение

$$I_{2,1}=I^+_{2,1}+I^-_{2,1}, \tag{9.10}$$

где

$$I^{\pm}_{2,1}\equiv\int_{z=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty}\int_{t=a/\sqrt{\ln k}}^{\infty}\sum_{i=0}^{k/4}c_i(x,t)\,N^{\pm}(i+1,i+m;t,u)\times$$
$$\times M(i+m+1,k/2;u,z)\,A(k;z,y)\,dzdudt.$$

Лемма 9.3. *Для* $t\geqslant a/\sqrt{\ln k}$

$$\sup_{0\leqslant i\leqslant k/4}\int_0^{\infty}N^-(i+1,i+m;t,u)\,du\leqslant C\ln^{5/2}k/\sqrt{k}.$$

Доказательство. Пусть

$$A^{(m)}(t)\equiv\int_0^{\infty}N^-(i+1,i+m;t,u)\,du;$$

поскольку

$$A^{(m)}(t)=\mathbf{M}\left(e^{-\rho\left(\frac{m}{k}\right)^{3/2}\frac{1}{m}\sum_{j=i+1}^{i+m}\left(\frac{V_{i+1,j}}{\sqrt{m}}+t\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right)};\quad\inf_{i+1\leqslant j\leqslant i+m}\left(\frac{V_{i+1,j}}{\sqrt{m}}+t\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right)<0\right),$$

то, рассуждая, как при доказательстве леммы 9.2, можно показать, что

$$\left|A^{(m)}(t)-A(t)\right|\leqslant C\frac{\ln m}{\sqrt{m}}=C\frac{\ln^{5/2}k}{\sqrt{k}}, \tag{9.11}$$

где

$$A(t) \equiv \mathbf{M}\left(e^{-\rho\left(\frac{m}{k}\right)^{3/2}\int\limits_0^{B^2}\left(w(u)+t\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right)du};\ \inf_{0\leqslant u\leqslant B^2}\left(w(u)+t\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right)<0\right),$$

$$B^2 \equiv B^2(i+1,\ i+m)\frac{k}{m} \leqslant C.$$

Далее, по неравенству Коши

$$A(t) \leqslant \mathbf{M}^{1/2}\left(e^{-2\rho\left(\frac{m}{k}\right)^{3/2}\int\limits_0^{B^2}\left(w(u)+t\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right)du}\right) \times \mathbf{P}^{1/2}\left(\inf_{0\leqslant u\leqslant B^2}\left(w(u)+t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)<0\right) \leqslant$$

$$\leqslant C\mathbf{P}^{1/2}\left(\inf_{0\leqslant u\leqslant B^2}\left(w(u)+t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)<0\right).$$

Полагая далее t равным минимальному значению $a/(\ln k)^{1/2}$, получаем при $t \geqslant a/(\ln k)^{1/2}$

$$A(t) \leqslant C\mathbf{P}^{1/2}\left(\inf_{0\leqslant u\leqslant c} w(u) < -a\ln k\right).$$

Поскольку (см., например, [1])

$$\mathbf{P}\left(\inf_{0\leqslant u\leqslant c} w(u) < -a\ln k\right) \leqslant Ce^{-\frac{a^2}{4}\ln^2 k},$$

получаем для $t \geqslant a/(\ln k)^{1/2}$

$$A(t) \leqslant C/k.$$

Последнее вместе с (9.11) доказывает лемму 9.3.

Возвратимся теперь к формуле (9.10). В силу леммы 9.3

$$|I_{2,1}^-| \leqslant C\ln^{5/2}k/\sqrt{k}, \tag{9.12}$$

поэтому нам осталось оценить величину $I_{2,1}^+$. Обозначим $\varphi(\sigma^2, t) \equiv (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp\{-t^2/(2\sigma^2)\}$ плотность нормального распределения с параметрами $(0, \sigma^2)$.

Лемма 9.4. *Для некоторых чисел* $a = a(x, k)$ и $b = b(x, k)$, *удовлетворяющих условиям*

$$0 < (1+C)^{-1} \leqslant a,\ b \leqslant (1+C) < \infty,$$

для всех $0 \leqslant i \leqslant k/4$, $x > 0$, $y > 0$ *справедливо*

$$\left|N^+(i+1,\ i+m;\ x,\ y) - a\varphi\left(b;\ \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}(x-y)\right)\right| \leqslant C\frac{\ln^3 k}{\sqrt{k}}e^{c\frac{r^3}{n^3}(x+y)},$$

где, как и ранее, константы c, $C < \infty$ *не зависят от* n *и* $\varkappa$.

Доказательство леммы 9.4 повторяет рассуждения, которые использовались при выводе оценки (7.2) (см. доказательство леммы 7.1), основанные на переходе к одинаково распределенным случайным величинам и применении затем теоремы 7.1; поэтому мы его опускаем.

Вернемся к формуле (9.10) и оценим $I_{2,1}^+$ из этой формулы. Имеем

$$|I_{2,1}^+| \leqslant J^+ + J^-, \tag{9.13}$$

где

$$J \equiv \int\limits_{z=0}^{\infty}\int\limits_{u=0}^{\infty}\int\limits_{t=a/\sqrt{\ln k}}^{\infty}\sum_{i=0}^{k/4} c_i(x, t)\,L^{\pm}(t, u)\times$$

$$\times M(i+m+1,\ k/2;\ u,\ z)\,A(k;\ z,\ y)\,dzdudt,$$

$$L^+(t,\ u) \equiv a\varphi(b;\ (t-u)\sqrt{k}/\sqrt{m}),$$
$$L^-(t,\ u) \equiv |L^+(t,\ u) - N^+(i+1,\ i+m;\ t,\ u)|.$$

В силу лемм 9.4 и 7.1 справедливо

$$|J^-| \leqslant C \ln^3 k/\sqrt{k}, \tag{9.14}$$

поэтому осталось оценить J^+. С помощью интегрирования по частям по переменному u получаем

$$J^+ = -\int\limits_{z=0}^{\infty}\int\limits_{u=0}^{\infty}\int\limits_{t=a/\sqrt{\ln k}}^{\infty}\sum_{i=0}^{k/4} c_i(x,\ t)\frac{\partial}{\partial u}L^+(t,\ u)\times$$
$$\times F^-(i+m+1,\ k/2;\ u,\ z)\,A(k;\ z,\ y)\,dzdtdu,$$

где функция $F^-(i,\ j;\ x,\ y)$ определена перед леммой 9.2. Далее выполним интегрирование по частям по переменной z:

$$J^+ = \int\limits_{z=0}^{\infty}\int\limits_{u=0}^{\infty}\int\limits_{t=a/\sqrt{\ln k}}^{\infty}\sum_{i=0}^{k/4} c_i(x,\ t)\frac{\partial}{\partial u}L^+(t,\ u)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial z}F^-(i+m+1,\ k/2;\ u,\ z)\,B(k;\ z,\ y)\,dzdudt, \tag{9.15}$$

где $\quad B(k;\ z,\ y) \equiv \int\limits_0^z A(k;\ \tilde{z},\ y)\,d\tilde{z}.$

Лемма 9.5. *Для* $0 \leqslant i \leqslant k/4$

$$\sup_{u\geqslant 0}\int\limits_0^{\infty}\left|\frac{\partial}{\partial z}F^-(i+m+1,\ k/2;\ u,\ z)\right|dz \leqslant C.$$

Доказательство. Обозначим $d = i+m$, $k/2 - d = p$,

$$\eta_1 = -\frac{\rho}{k}\sum_{j=d+1}^{k/2} V_{d+1,j}/\sqrt{k},\quad \eta_2 = \inf_{d+1\leqslant j\leqslant k/2} V_{d+1,j}/\sqrt{k},\quad \eta_3 = V_{d+1,k/2}/\sqrt{k},$$

так что

$$M(d+1,\ k/2;\ u,\ z) = \mathbf{M}'\left(e^{\eta_1 - \rho\frac{p}{k}u};\ \eta_2 + u > 0,\ \eta_3 + u = z\right).$$

Имеем для любого $\delta > 0$

$$\left|\int\limits_0^u \mathbf{M}'\left(e^{\eta_1-\rho\frac{p}{k}\tilde{u}};\ \eta_2+\tilde{u}>0,\ \eta_3+\tilde{u}=z\right)d\tilde{u} -\right.$$
$$\left.-\int\limits_0^u \mathbf{M}'\left(e^{\eta_1-\rho\frac{p}{k}\tilde{u}};\ \eta_2+\tilde{u}>0,\ \eta_3+\tilde{u}=z+\delta\right)d\tilde{u}\right| \leqslant$$
$$\leqslant\left|\int\limits_{-\delta}^0 \mathbf{M}'\left(e^{\eta_1-(\tilde{u}+\delta)\rho\frac{p}{k}};\ \eta_2+\tilde{u}+\delta>0,\ \eta_3+\tilde{u}=z\right)d\tilde{u}\right| +$$
$$+\left|\int\limits_{u-\delta}^u \mathbf{M}'\left(e^{\eta_1-(\tilde{u}+\delta)\rho\frac{p}{k}};\ \eta_2+\tilde{u}+\delta>0,\ \eta_3+\tilde{u}=z\right)d\tilde{u}\right| +$$
$$+\left|\int\limits_0^u \mathbf{M}'\left(e^{\eta_1-\rho\frac{p}{k}\tilde{u}};\ \eta_2+\tilde{u}>0,\ \eta_3+\tilde{u}=z\right)d\tilde{u} -\right.$$
$$\left.-\int\limits_0^u \mathbf{M}'\left(e^{\eta_1-\rho\frac{p}{k}\tilde{u}-\rho\delta\frac{p}{k}};\ \eta_2+\tilde{u}>0,\ \eta_3+\tilde{u}=z\right)d\tilde{u}\right| +$$

$$+\left|\int_0^u \mathbf{M}'\left(e^{\eta_1-\rho\frac{p}{k}(\tilde{u}+\delta)};\ \eta_2+\tilde{u}>0,\ \eta_3+\tilde{u}=z\right)d\tilde{u}-\right.$$

$$\left.-\int_0^u \mathbf{M}'\left(e^{\eta_1-\rho\frac{p}{k}(\tilde{u}+\delta)};\ \eta_2+\tilde{u}+\delta>0,\ \eta_3+\tilde{u}=z\right)d\tilde{u}\right|.$$

Деля далее неравенство на δ и устремляя δ к нулю, получаем

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\int_0^u M(d+1,\ k/2;\ \tilde{u},\ z)\,d\tilde{u}\right|\leqslant \mathbf{P}'(\eta_3=z)+\mathbf{P}'(\eta_3+u=z)+$$

$$+\rho\frac{p}{k}\int_0^u \mathbf{M}'\left(e^{\eta_1-\frac{p}{k}\tilde{u}};\ \eta_2+\tilde{u}>0,\ \eta_3+\tilde{u}=z\right)d\tilde{u}+$$

$$+\mathbf{P}'(\eta_2\geqslant -u;\ \eta_3-\eta_2=z).$$

Интегрируя далее полученное неравенство по z, получаем

$$\int_0^\infty\left|\frac{\partial}{\partial z}F^-(d+1,\ k/2;\ u,\ z)\right|dz\leqslant 1+1+$$

$$+\rho\frac{p}{k}\int_0^u \mathbf{M}'\left(e^{\eta_1-\rho\frac{p}{k}\tilde{u}};\ \eta_2+\tilde{u}>0\right)d\tilde{u}+\mathbf{P}(\eta_2\geqslant -u)\leqslant 1+1+C+1=C;$$

третье слагаемое в средней части последнего неравенства оценивается в силу утверждения леммы 7.1. Лемма 9.5 доказана.

Возвращаясь к формуле (9.15), получаем в силу леммы 9.2

$$|B(k;\ z,\ y)|\leqslant C\ln k/\sqrt{k};$$

далее, в силу леммы 9.5 получаем

$$|J^+|\leqslant C\int_{u=0}^{\infty}\int_{t=a/\sqrt{\ln k}}^{\infty}\sum_{i=0}^{k/4}c_i(x,\ t)\frac{\partial}{\partial u}L^+(t,\ u)\,dt\,du\times\ln k/\sqrt{k};$$

поскольку

$$\int_0^\infty\left|\frac{\partial}{\partial u}L^+(t,\ u)\right|du\leqslant C\sqrt{k}/\sqrt{m}=C\ln^{3/2}k,$$

получаем

$$|J^+|\leqslant C\ln^{5/2}k/\sqrt{k}. \qquad (9.16)$$

Собирая вместе формулы (9.2), (9.8), (9.10), (9.12), получаем

$$|I|\leqslant|I_1|+|I_{2,2}|+|I_{2,1}^-|+|I^+|+|I^-|;$$

поэтому в силу (9.7), (9.9), (9.12), (9.14), (9.16) справедливо

$$|I|\leqslant C\ln^3 k/\sqrt{k}.$$

Лемма 9.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боровков А. А.** Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах.— Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, № 4, с. 635—654.
2. **Колмогоров А. Н.** Eine Verallgemeinerung der Laplace-Ljapounoffsshen Satres.— Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук, 1931, с. 959—962.

3. **Боровков А. А., Королюк В. С.** О результатах асимптотического анализа в задачах с границами.— Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, № 2, с. 255—265.
4. **Groenboom P., Oosterhoff J., Rwymgart F. H.** Large deviations theorems for empirical probability measures.— Ann. Prob., 1979, v. 7, N 4, p. 553—586.
5. **Bahadur R. R., Zabel S. L.** Large deviations of the sample mean in general vector spaces.— Ann. Probab., 1979, v. 7, N 4, p. 587—621.
6. **Боровков А. А., Могульский А. А.** О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах. I, II.— Сиб. мат. журн., 1978, т. 19, № 5, с. 988—1004; 1980, т. 21, № 5, с. 12—26.
7. **Боровков А. А.** Скорость сходимости и большие уклонения в принципе инвариантности.— Тр. междунар. мат. конгресса, 1981, Хельсинки, с. 12—26.
8. **Боровков А. А.** Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 5, с. 645—695.
9. **Боровков А. А.** Некоторые результаты анализа больших уклонений в граничных задачах.— ДАН СССР, 1963, т. 151, № 2, с. 247—250.
10. **Боровков А. А.** Анализ больших уклонений в граничных задачах с произвольными границами. I, II.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 2, с. 253—289; 1964, т. 5, № 4, с. 750—767.
11. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
12. **Боровков А. А., Рогозин Б. А.** О центральной предельной теореме в многомерном случае.— Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, № 1, с. 61—69.
13. **Могульский А. А.** О вероятностях больших уклонений для винеровского процесса.— Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, № 3, с. 668—669.
14. **Могульский А. А.** Большие уклонения для винеровского процесса.— Тез. докладов 12 Европейского совещ. статистиков, Варна, 1979, с. 164.
15. **Могульский А. А.** Большие уклонения для винеровского процесса.— В кн.: Предельные теоремы и смежные вопросы. Новосибирск: Наука, 1980, с. 25—49.
16. **Могульский А. А.** О больших уклонениях для траекторий случайных блужданий.— Тез. докладов Третьей Вильн. конф. по теории вероятн., Вильнюс, 1981, с. 214—215.
17. **Могульский А. А.** Вероятности больших уклонений для случайных блужданий. Препринт. Новосибирск: изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1980.
18. **Крамер Г.** Об одной новой предельной теореме теории вероятностей.— Успехи мат. наук, 1944, с. 166—184.
19. **Боровков А. А.** Теория вероятностей. М.: Наука, 1976.
20. **Яковлева Г. Д.** Таблицы функций Эйри и их производных. М.: Наука, 1969.
21. **Колмогоров А. И., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
22. **Саханенко А. И.** Неулучшаемые оценки скорости сходимости в принципе инвариантности. Тез. докладов коллоквиума по непараметр. стат. оцениванию. Будапешт, 1980, с. 141.
23. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** On approximation of partial sums of independent RV's and the sample D.F.II.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1976, v. 34, N 1, p. 33—58.
24. **Могульский А. А.** Малые уклонения в пространстве траекторий.— Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, № 4, с. 755—765.
25. **Нагаев С. В.** О скорости сходимости в одной граничной задаче. I.— Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, № 2, с. 179—199.