$$\int\limits_m^\infty \frac{\beta(x)}{x\log x}\,dx \underset{m\to\infty}{\sim} c_3\left(\log^{(r)}m\right)^{-\varepsilon}, \tag{66}$$

где, по определению, $\prod\limits_{k\leqslant i\leqslant m} = 1$ при $k > m$ (случай $r = 1$).

Поскольку при $n\to\infty$ порядок малости в (65) не меньше, чем в (66), то для распределения (64) верхняя и нижняя оценки имеют один и тот же порядок $(\log^{(r)} n)^{-\varepsilon}$. Кроме того, из результатов первого раздела и соотношения (54) следует, что в этих условиях

$$H_1(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \psi(\varepsilon)\,\varepsilon^{-1},$$

где $\psi(\varepsilon) = c_4\varphi(1/\varepsilon)$. Неравенство (44) следует из (59), (63)—(66). Теорема доказана.

Замечание. Из определения $m^*(n)$, (59) и (63) следует, что если функция $\beta(x)$ в (61) медленно меняется при $x\to\infty$ (т. е. энтропия $H_1(\varepsilon)$ близка к критической), то оценка скорости сходимости в (4) при $\mathscr{B} = \mathscr{A}$ для любого дискретного распределения по существу определяется величиной интеграла $\int\limits_{\sqrt{n}}^\infty \beta(x)\,(x\log x)^{-1}dx$, от которого, кроме существования, ничего не требуется. Так что скорость сходимости в (4) в рассматриваемой общности может быть сколь угодно малой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dudley R. M.** Limit theorems for empirical measures.— Second Vilnius Conf. on Probab. Theory and Math. Statist., Abstracts of Communic., Vilnius, 1977, v. 3, p. 40—41.
2. **Dudley R. M.** Central limit theorems for empirical measures.— Ann. Probab., 1978, v. 6, N 6, p. 899—929.
3. **Борисов И. С.** К вопросу о точности приближения в центральной предельной теореме для эмпирических мер.— Сиб. мат. журн., 1983, т. 24, № 6, с. 14—25.
4. **Ферник К.** Регулярность траекторий гауссовских случайных функций.— В кн.: Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения. М.: Мир, 1978, с. 63—132.
5. **Борисов И. С.** Аппроксимация эмпирических полей, построенных по векторным наблюдениям с зависимыми координатами.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 5, с. 31—41.
6. **Philipp W., Pinzur L.** Almost sure approximation theorems for the multivariate empirical process.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1980, B. 54, N 1, S. 1—13.
7. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1975, B. 32, N 1/2, S. 111—133.
8. **Yurinskiĭ V. V.** Exponential inequalities for sums of random vectors.— J. Multivar. Anal., 1976, v. 6, N 4, p. 473—499.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ НА ПОЛУОСИ И ПОЛОЖЕНИЯ В ПОСЛЕДНИЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ ПРОЦЕССА С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ, УПРАВЛЯЕМОГО ЦЕПЬЮ МАРКОВА

В. С. ЛУГАВОВ

1. Введение

Рассматривается однородный по времени и аддитивный по первой компоненте двумерный марковский процесс

$$\mathscr{L}_t = \{\xi_t,\ \varkappa_t;\ t\geqslant 0\},\quad \xi_0 = 0.$$

Вторая координата $\{\varkappa_t;\ t\geqslant 0\}$ есть однородный марковский процесс, принимающий значения $1, 2, \ldots, N$, а первая координата $\{\xi_t;\ t\geqslant 0\}$

является процессом с условно независимыми при фиксированном $\varkappa_t$ приращениями (см. [1]). Эволюция процесса задается матрицей

$$\Psi(s,\ t)=\|\mathbf{M}(\exp\{-s(\xi_{t+u}-\xi_u)\};\ \varkappa_{t+u}=j|\varkappa_u=i)\|,\ \ u\geqslant 0.$$

Матрица $\Psi(s,\ t)$ (см. [2]) имеет вид $\Psi(s,\ t)=\exp(tA(s))$, где

$$A(s)=\begin{Vmatrix}-g_1+K_1(s) & g_{12}\Psi_{12}(s)\ldots g_{1N}\Psi_{1N}(s)\\ g_{21}\Psi_{21}(s) & -g_2+K_2(s)\ldots g_{2N}\Psi_{2N}(s)\\ g_{N1}\Psi_{N1}(s) & g_{N2}\Psi_{N2}(s)\ldots -g_N+K_N(s)\end{Vmatrix}. \qquad (1.1)$$

Здесь $g_{ij}\geqslant 0$; $g_i=\sum\limits_{j=1}^{N}g_{ij}$; $\Psi_{ij}(s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-sx}dF_{ij}(x)$; F_{ij} — распределение скачка процесса ξ_t в момент перехода процесса $\varkappa_t$ из состояния i в состояние j; $K_l(s)$ — кумулянты, соответствующие однородным процессам с независимыми приращениями:

$$K_l(s)=-sb_l+\frac{s^2\sigma_l^2}{2}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-sx}-1+\frac{sx}{1+x^2}\right)S_l(dx). \qquad (1.2)$$

Если $\int\limits_{|x|<1}S_l(dx)<\infty$, то представление (1.2) переписывается в виде

$$K_l(s)=-sa_l+\frac{s^2\sigma_l^2}{2}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-sx}-1\right)S_l(dx),$$

где a_l называется коэффициентом сноса. Если $\sigma_l^2=0$ и S_l — конечная мера, то $K_l(s)$ называется кумулянтой обобщенного пуассоновского процесса.

Положим

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x>0,\\ 0 \text{ при } x\leqslant 0\end{cases}$$

и введем функционал

$$L_t=\int\limits_0^t\varphi(\xi_u)\,du,$$

где L_t — время, проведенное процессом $\{\xi_u,\ 0\leqslant u\leqslant t\}$ на положительной полуоси; аналогично можно определить L_t^x — время, проведенное процессом $\{\xi_u,\ 0\leqslant u\leqslant t\}$ на полуоси (x,∞).

Граничные функционалы L_t, L_t^x изучались в работах [3], [4], где при дополнительных ограничениях на $\mathscr{L}_t$ были получены интегральные преобразования производящих функций L_t и L_t^x. Основной результат данной статьи состоит в получении преобразования над совместным распределением ξ_t, $\varkappa_t$, L_t^x без дополнительных ограничений на $\mathscr{L}_t$. В статье используется схема дискретной аппроксимации процессов с непрерывным временем (см. [5, 6, 7]), в [5], в частности, при $N=1$ получено преобразование над совместным распределением случайных величин $(\xi_t,\ L_t)$. Также использованы результаты работы [8], где содержатся интегральные преобразования над совместным распределением времени, проведенном на полуоси $(x,\ \infty)$, и положением в последний момент времени случайного блуждания, управляемого цепью Маркова.

2. Факторизационные тождества для сумм случайных величин, заданных на конечной цепи Маркова

Рассмотрим однородную двумерную марковскую цепь $(S_n,\ \varkappa_n)_{n=0}^{\infty}$, вторая координата которой $\{\varkappa_n\}_{n=0}^{\infty}$ — однородная цепь Маркова с пространством состояний $\{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$. Матрица, задающая эволюцию процесса $\{S_n, \varkappa_n\}_{n=0}^{\infty}$ при любом $y \in R$, имеет вид

$$\Psi(s) = \|\mathbf{M}(\exp\{-s(S_{n+1}-S_n)\};\ \varkappa_{n+1}=j|S_n=y,\ \varkappa_n=i)\|.$$

Структура матрицы $\Psi(s)$ изучена в работе [10].

Пусть в дальнейшем $S_0=0$, Δ_n^x — число элементов последовательности $S_1, \ldots, S_n$ больших $x\left(\Delta_0^x=0\right)$, I — единичная матрица порядка N,

$$U_{ij}^x(s, \omega, n) = \mathbf{M}\left(e^{-s(S_n-x)}\omega^{\Delta_n^x};\quad \varkappa_n = j\,|\,\varkappa_0 = i\right),$$

$$U_n^x(s, \omega) = \left\|U_{ij}^x(s, \omega, n)\right\|_{i,j=\overline{1,N}},\quad U_0^x(s, \omega) = e^{sx}I,$$

$$U^x(s, \omega, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n U_n^x(s, \omega).$$

Введем также оператор проектирования

$$T_{\{\alpha,\beta\}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}\mu(dx)\right) = \int_{\{\alpha,\beta\}} e^{-sx}\mu(dx),\ T_{(-\infty,0]} \equiv T_0^*,\ T_{(0,\infty)} \equiv T_0.$$

При этих обозначениях из теоремы 5 работы [8] следует

Теорема 1. *При* $\operatorname{Re}(s)=0$, $|\rho|<1$, $|\rho\omega|<1$

$$U^x(s, \omega, \rho) = \begin{cases} \left[T_0\{U_0^x(s, \omega)\left[\Psi^-(s, \omega, \rho)\right]^{-1}\}\right] \times \left[\Psi^+(s, \omega, \rho)\right]^{-1} \times \\ \qquad \times [I-\rho\Psi(s)]^{-1} \quad \textit{при} \quad x<0, \\ \left[T_0^*\{U_0^x(s, \omega)\Psi^+(s, \omega, \rho)\}\right] \times \left[\Psi^+(s, \omega, \rho)\right]^{-1} \times \\ \qquad \times [I-\rho\Psi(s)]^{-1} \quad \textit{при} \quad x\geqslant 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где при $\operatorname{Re}(s)=0$

$$[I-\rho\Psi(s)]^{-1}[I-\rho\omega\Psi(s)] = \Psi^+(s, \omega, \rho)\Psi^-(s, \omega, \rho) \tag{2.2}$$

и $\Psi^+(s, \omega, \rho)$, $\Psi^-(s, \omega, \rho)$ *удовлетворяют следующим условиям*:

A_1. *Матрица* $\Psi^+(s, \omega, \rho)$ *при* $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$ *имеет обратную* $[\Psi^+(s, \omega, \rho)]^{-1}$; $\Psi^+(s, \omega, \rho)$ *и* $[\Psi^+(s, \omega, \rho)]^{-1}$ *при* $\operatorname{Re}(s)\geqslant 0$ *ограничены и непрерывны*; *при* $\operatorname{Re}(s)>0$ *регулярны*; $\Psi^+(\infty, \omega, \rho)=I$.

A_2. *Матрица* $\Psi^-(s, \omega, \rho)$ *при* $\operatorname{Re}(s)\leqslant 0$ *имеет обратную* $[\Psi^-(s, \omega, \rho)]^{-1}$; $\Psi^-(s, \omega, \rho)$ *и* $[\Psi^-(s, \omega, \rho)]^{-1}$ *при* $\operatorname{Re}(s)\leqslant 0$ *ограничены и непрерывны*; *при* $\operatorname{Re}(s)<0$ *регулярны*.

Представление (2.2) реализует так называемую факторизацию матрицы $[I-\rho\Psi(s)]^{-1}[I-\rho\omega\Psi(s)]$ (см. также [10, 11]). Из теоремы Лиувилля следует, что условия A_1, A_2 и (2.2) определяют $\Psi^+(s, \omega, \rho)$ и $\Psi^-(s, \omega, \rho)$ единственным образом.

Теорема 1 при $x=0$ доказана в работе [9]. Заметим, что в работе [8] утверждения (133), (134), которые можно было бы использовать для вывода теоремы 1 ошибочны: они противоречат теореме 5 этой же работы.

Дадим вероятностную интерпретацию компонентам факторизации $\Psi^+(s, \omega, \rho)$, $\Psi^-(s, \omega, \rho)$. Покажем, что имеет место

Лемма 1. *Справедливы следующие соотношения*:

$$\Psi^+(s, \omega, \rho) =$$

$$= I + (1-\omega)\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\|\mathbf{M}\left(e^{-sS_k}\delta(S_k>0)\,\omega^{\sum_{i=1}^{k-1}\delta(S_k<S_i)};\ \varkappa_k = j\,|\,\varkappa_0 = i\right)\right\|, \tag{2.3}$$

$$\Psi^-(s, \omega, \rho) =$$

$$= I + (1-\omega)\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\|\mathbf{M}\left(e^{-sS_k}\delta(S_k\leqslant 0)\,\omega^{\sum_{i=1}^{k-1}\delta(S_i>0)};\ \varkappa_k = j\,|\,\varkappa_0 = i\right)\right\|, \tag{2.4}$$

$$\left[\Psi^+(s, \omega, \rho)\right]^{-1} =$$

$$= I - (1-\omega) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_k} \delta(S_k > 0)\, \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_i > 0)};\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\|, \quad (2.5)$$

$$[\Psi^-(s, \omega, \rho)]^{-1} =$$

$$= I - (1-\omega) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_k} \delta(S_k \leqslant 0)\, \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_k < S_i)};\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\|, \quad (2.6)$$

где $\delta(X)$ — *индикатор события* X.

Доказательство. Обозначим через A, B, C, D матрицы, стоящие в правых частях соотношений (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) соответственно.

Проверим, что имеет место равенство

$$[I - \rho\Psi(s)]^{-1}[I - \rho\omega\Psi(s)] = A \times B. \quad (2.7)$$

Для левой части соотношения (2.7) имеем

$$[I - \rho\Psi(s)]^{-1}[I - \rho\omega\Psi(s)] = [I - \rho\Psi(s)]^{-1}[I - \rho\Psi(s) + \rho(1-\omega)\Psi(s)] =$$
$$= I + (1-\omega) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\| \mathbf{M}\left(e^{-sS_k};\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i\right) \right\|.$$

Правая часть соотношения (2.7) преобразуется следующим образом:

$$A \times B = I + (1-\omega) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\| \mathbf{M} \left[e^{-sS_k} \left(\omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_i > 0)} \delta(S_k \leqslant 0) + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_k < S_i)} \delta(S_k > 0) \right);\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right] \right\| +$$
$$+ (1-\omega)^2 \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \sum_{\substack{m, n \geqslant 1 \\ m+n=k}} \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_m} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{m-1} \delta(S_m < S_i)} \delta(S_m > 0);\ \varkappa_m = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\| \times$$
$$\times \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_n} \delta(S_n \leqslant 0)\, \omega^{\sum\limits_{i=1}^{n-1} \delta(S_i > 0)};\ \varkappa_n = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\|.$$

Последнее слагаемое этого равенства равно

$$(1-\omega)^2 \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \sum_{m=1}^{k-1} \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_k} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{m-1} \delta(S_m < S_i)} \delta(S_m > 0) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times\, \omega^{\sum\limits_{i=m+1}^{k-1} \delta(S_i > S_m)} \delta(S_k \leqslant S_m);\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\|.$$

Таким образом, надо проверить

$$I + (1-\omega) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\| \mathbf{M}\left(e^{-sS_k};\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i\right) \right\| =$$
$$= I + (1-\omega) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\| \mathbf{M} \left[e^{-sS_k} \left(\delta(S_k \leqslant 0)\, \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_i > 0)} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_k < S_i)} \delta(S_k > 0) \right);\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right] \right\| +$$
$$+ (1-\omega)^2 \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \sum_{m=1}^{k-1} \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_k} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{m-1} \delta(S_m < S_i) + \sum\limits_{i=m+1}^{k-1} \delta(S_i > S_m)} \delta(S_m > 0) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times\, \delta(S_k \leqslant S_m);\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\|.$$

Для этого достаточно убедиться, что при $k \geqslant 2$ имеет место равенство

$$1 = \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_i > 0)} \delta(S_k \leqslant 0) + \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_k \leqslant S_i)} \delta(S_k > 0) +$$

$$+ (1-\omega) \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{m-1} \delta(S_m \leqslant S_i) + \sum\limits_{i=m+1}^{k-1} \delta(S_i > S_m)} \delta(S_m > 0)\, \delta(S_k \leqslant S_m). \quad (2.8)$$

Пусть $S_k > 0$, соотношение (2.8) в этом случае примет вид

$$1 = \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_k \leqslant S_i)} + (1-\omega) \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{m-1} \delta(S_m \leqslant S_i) + \sum\limits_{i=m+1}^{k-1} \delta(S_i > S_m)} \delta(S_k \leqslant S_m).$$

Рассмотрим все индексы $l_j < k$ у $S_{l_j} \geqslant S_k$, $j = 1, \ldots, r$, тогда достаточно доказать, что

$$1 = \omega^r + (1-\omega) \sum_{j=1}^{r} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{l_j-1} \delta(S_{l_j} \leqslant S_i) + \sum\limits_{i=l_j+1}^{k-1} \delta(S_i > S_{l_j})}. \quad (2.9)$$

Пусть $(p_1, \ldots, p_r)$ — перестановка индексов $l_1, \ldots, l_r$: $S_{p_1} \leqslant \ldots \leqslant S_{p_r}$, причем если $S_{p_i} = S_{p_{i+1}}$, то $p_i > p_{i+1}$. Тогда справедливость (2.9) следует из равенства

$$\sum_{j=1}^{r} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{p_j-1} \delta(S_{p_j} \leqslant S_i) + \sum\limits_{i=p_j+1}^{k-1} \delta(S_i > S_{p_j})} = \sum_{j=1}^{r} \omega^{r-j} = \frac{1-\omega^r}{1-\omega}.$$

Пусть $S_k \leqslant 0$ и l_j такие, что $l_j < k$, $S_{l_j} > 0$, $j = 1, \ldots, r$. Тогда соотношение (2.8) вновь преобразуется в (2.9). На этом доказательство (2.7) заканчивается.

Проверим далее, что $C \times A = I$. Для этого достаточно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_k} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_k \leqslant S_i)} \delta(S_k > 0);\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_k} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_i > 0)} \delta(S_k > 0);\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\| +$$

$$+ (1-\omega) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_k} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_i > 0)} \delta(S_k > 0);\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\| \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_k} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_k \leqslant S_i)} \delta(S_k > 0);\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\|$$

или после простых преобразований

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_k} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_k \leqslant S_i)} \delta(S_k > 0);\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_k} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta(S_i > 0)} \delta(S_k > 0);\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\| +$$

$$+ (1-\omega) \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \sum_{m=1}^{k-1} \left\| \mathbf{M} \left(e^{-sS_k} \omega^{\sum\limits_{i=1}^{m-1} \delta(S_i > 0) + \sum\limits_{i=m+1}^{k-1} \delta(S_k \leqslant S_i)} \delta(S_m > 0)\, \delta(S_k > S_m);\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i \right) \right\|.$$

Для справедливости последнего соотношения достаточно, чтобы при $k \geqslant 2$ выполнялось равенство

$$\omega^{\sum_{i=1}^{k-1}\delta(S_k \leqslant S_i)}\delta(S_k > 0) = \omega^{\sum_{i=1}^{k-1}\delta(S_i>0)}\delta(S_k > 0) +$$

$$+ (1-\omega)\sum_{m=1}^{k-1}\omega^{\sum_{i=1}^{m-1}\delta(S_i>0)}\delta(S_m > 0)\,\delta(S_k > S_m)\,\omega^{\sum_{i=m+1}^{k-1}\delta(S_k \leqslant S_i)}. \quad (2.10)$$

Очевидно, при $S_k \leqslant 0$ равенство (2.10) выполняется. Пусть $S_k > 0$. Обозначим через l_i $(i = 1, \ldots, r;\ l_1 < \ldots < l_r)$ индексы тех сумм S_{l_i}, для которых $\delta(S_{l_i} > 0)\,\delta(S_k > S_{l_i}) = 1$. Положим

$$p_1 = \sum_{j=1}^{l_1-1}\delta(S_j > 0), \quad p_2 = \sum_{j=l_1+1}^{l_2-1}\delta(S_j > 0), \ldots$$

$$\ldots, p_r = \sum_{j=l_{r-1}+1}^{l_r-1}\delta(S_j > 0), \quad p_{r+1} = \sum_{j=l_r+1}^{k-1}\delta(S_j > 0).$$

Тогда проверяемое соотношение (2.10) может быть преобразовано следующим образом:

$$\omega^{\sum_{j=1}^{r+1}p_j} = \omega^{r+\sum_{j=1}^{r+1}p_j} + (1-\omega)\sum_{i=1}^{r}\omega^{\left(i-1+\sum_{j=1}^{i}p_j\right)+\sum_{j=i+1}^{r+1}p_j}.$$

Как нетрудно заметить, последнее соотношение справедливо. Таким образом, равенство $C \times A = I$ доказано.

Далее докажем, что $B \times D = I$ или, что эквивалентно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \mathrm{M}\left(e^{-sS_k}\delta(S_k \leqslant 0)\,\omega^{\sum_{i=1}^{k-1}\delta(S_i>0)};\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \mathrm{M}\left(e^{-sS_k}\delta(S_k \leqslant 0)\,\omega^{\sum_{i=1}^{k-1}\delta(S_k \leqslant S_i)};\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i\right) +$$

$$+ (1-\omega)\sum_{k=2}^{\infty}\rho^k\sum_{m=1}^{k-1}\mathrm{M}\left(e^{-sS_k}\omega^{\sum_{i=1}^{m-1}\delta(S_i>0)}\delta(S_m \leqslant 0)\,\times\right.$$

$$\left.\times\,\omega^{\sum_{i=m+1}^{k-1}\delta(S_k \leqslant S_i)}\delta(S_k \leqslant S_m);\ \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = i\right).$$

Для доказательства справедливости последнего соотношения достаточно рассмотреть случай $S_k \leqslant 0$ и показать, что при $k \geqslant 2$ имеет место равенство

$$\omega^{\sum_{i=1}^{k-1}\delta(S_i>0)} = \omega^{\sum_{i=1}^{k-1}\delta(S_k \leqslant S_i)} +$$

$$+ (1-\omega)\sum_{m=1}^{k-1}\omega^{\sum_{i=1}^{m-1}\delta(S_i>0)+\sum_{i=m+1}^{k-1}\delta(S_k \leqslant S_i)}\delta(S_m \leqslant 0)\,\delta(S_k \leqslant S_m). \quad (2.11)$$

Обозначим через l_i $(i = 1, \ldots, r;\ l_1 < \ldots < l_r)$ индексы тех сумм S_{l_i}, для которых $\delta(S_{l_i} \leqslant 0)\,\delta(S_k \leqslant S_{l_i}) = 1$. Положим

$$p_1 = \sum_{j=1}^{l_1-1}\delta(S_j > 0), \qquad p_2 = \sum_{j=l_1+1}^{l_2-1}\delta(S_j > 0), \ldots$$

$$\ldots, p_r = \sum_{j=l_{r-1}+1}^{l_r-1}\delta(S_j > 0), \quad p_{r+1} = \sum_{j=l_r+1}^{k-1}\delta(S_j > 0).$$

Тогда (2.11) преобразуется в соотношение

$$\omega^{\sum\limits_{j=1}^{r+1} p_j} = \omega^{r+\sum\limits_{j=1}^{r+1} p_j} + (1-\omega)\sum_{i=1}^{r} \omega^{\sum\limits_{j=1}^{i} p_j + \left(r-i+\sum\limits_{j=i+1}^{r+1} p_j\right)},$$

которое легко проверяется. Таким образом, $B \times D = I$.

Далее, как нетрудно показать, матрицы A, C и B, D удовлетворяют соответственно условиям a_1 и a_2.

На этом доказательство леммы закончено.

3. Вспомогательные результаты

Отнесем однородный процесс с независимыми приращениями к типу A_+, A_-, A_0, если он является обобщенным пуассоновским процессом соответственно с положительным, отрицательным или нулевым сносом. Остальные однородные процессы с независимыми приращениями отнесем к типу B. Значение i ($i \in \{1, \ldots, N\}$) координаты $\varkappa_t$ отнесем к множеству a_+, если в представлении (1.1) $K_i(s)$ является кумулянтой процесса типа A_+. По аналогии определим множества a_-, a_0, b. Таким образом, множество значений координаты $\varkappa_t$ разбивается на четыре непересекающихся подмножества a_+, a_-, a_0, b.

Лемма 2. *Пусть $u > 0$, $k \in b$, тогда для произвольного x*

$$\mathbf{P}\{\xi_u = x \mid \varkappa_0 = k\} = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\left\|\mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_u}; \varkappa_u = j \mid \varkappa_0 = i\right)\right\| = \left\|\mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_t}; \varkappa_t = j \mid \varkappa_0 = i\right)\right\| \times$$
$$\times \left\|\mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_{u-t}}; \varkappa_{u-t} = j \mid \varkappa_0 = i\right)\right\|.$$

Отсюда

$$\mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_u} \mid \varkappa_0 = k\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_t}; \varkappa_t = i \mid \varkappa_0 = k\right)\mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_{u-t}}; \varkappa_{u-t} = j \mid \varkappa_0 = i\right).$$

Из этого равенства следует

$$\left|\mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_u} \mid \varkappa_0 = k\right)\right| \leqslant N \sum_{j=1}^{N} \left|\mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_t}; \varkappa_t = j \mid \varkappa_0 = k\right)\right|.$$

Пусть t достаточно мало, тогда

$$\mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_u} \mid \varkappa_0 = k\right)\Big| \leqslant N\left\{\left|\mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_t}; \varkappa_t = k \mid \varkappa_0 = k\right)\right| + \varepsilon/2\right\} \leqslant$$
$$\leqslant N\left\{\left|\mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_t}; \ \forall s \in [0, t]\, \varkappa_s = k \mid \varkappa_0 = k\right)\right| + \varepsilon\right\}.$$

Будем считать, что $\mathbf{P}\{\varkappa_0 = k\} \neq 0$. Тогда

$$N\left\{\left|\mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_t}; \ \forall s \in [0, t]\, \varkappa_s = k \mid \varkappa_0 = k\right)\right| + \varepsilon\right\} \leqslant$$
$$\leqslant N\left\{\left|\mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_t} \mid \forall s \in [0, t]\, \varkappa_s = k\right)\right| + \varepsilon\right\}.$$

Обозначим $f(\lambda) = \mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_u} \mid \varkappa_0 = k\right)$, $f_t(\lambda) = \mathbf{M}\left(e^{i\lambda\xi_t} \mid \forall s \in [0, t]\, \varkappa_s = k\right)$.

Таким образом, мы показали, что

$$|f(\lambda)| \leqslant N\{|f_t(\lambda)| + \varepsilon\}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant N^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f_t(\lambda)|^2 d\lambda + N^2(2\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Так как $k \in b$, то $f_t(\lambda)$ — характеристическая функция непрерывной функции распределения, и, следовательно (см. [12, с. 393]),

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f_t(\lambda)|^2 d\lambda = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant N^2(2\varepsilon+\varepsilon^2).$$

Поскольку ε произвольно, то лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $0\leqslant s\leqslant t<u$, $i\in\{1,\ldots,N\}$, *тогда* $\mathbf{P}\{\xi_t=\xi_u,\ \varkappa_\alpha\in b$ *при некотором* $\alpha\in[t,u]\mid\varkappa_s=i\}=0$.

Доказательство. Пусть θ — множество рациональных чисел из интервала (t,u), тогда $\mathbf{P}\{\xi_t=\xi_u,\ \varkappa_\alpha\in b$ при некотором $\alpha\in[t,u]\mid\varkappa_s=i\}\leqslant$ $\leqslant\sum_{k\in b}\sum_{l\in\theta}\mathbf{P}\{\xi_t=\xi_u,\ \varkappa_l=k\mid\varkappa_s=i\}$. Для того чтобы правая часть этого неравенства равнялась нулю, достаточно, чтобы $\mathbf{P}\{\xi_t=\xi_u,\ \varkappa_l=k\mid\varkappa_t=j\}=$ $=0$. Справедливость последнего равенства следует из леммы 2, однородности рассматриваемого процесса $\{\xi_t,\ \varkappa_t\}$ по времени и аддитивности его по первой компоненте.

В дальнейшем условимся через $\mathbf{P}_i\{\cdot\}$ обозначать $\mathbf{P}\{\cdot\mid\varkappa_0=i\}$.

Лемма 4. *Для почти всех* $s>0$, $0\leqslant\alpha\leqslant s$, $i\in\{1,\ldots,N\}$

$$\mathbf{P}_i\{\xi_s=0,\ \varkappa_\alpha\in a_+\cup a_-\}=0.$$

Для доказательства леммы нам потребуются следующие обозначения:

W — объединение множества, на котором сосредоточены дискретные компоненты спектральных мер S_l при $l\in a_+\cup a_-\cup a_0$, с множеством точек разрыва функций распределения F_{ij} $(i,\ j\in\{1,\ldots,N\})$ скачков процесса ξ_t в моменты перехода управляющей цепи из одного состояния в другое;

W^+ — аддитивная группа, порожденная множеством W;

R_l^s — событие, заключающееся в том, что на отрезке $[0,s]$ происходит l переходов управляющей цепи;

K_b^s — событие, состоящее в том, что $\forall u\in[0,s]$ $\varkappa_u\equiv b$;

α_i — коэффициенты сносов процессов из $A_+\cup A_-\cup A_0$ (индекс i указывает, что рассматривается процесс, соответствующий состоянию i).

Доказательство. В силу лемм 2, 3 достаточно рассмотреть случай $i\equiv b$ и доказать

$$\mathbf{P}_i\{\xi_s=0,\ \varkappa_\alpha\in a_+\cup a_-,\ K_b^s\}=0.$$

Имеем

$$\mathbf{P}_i\{\xi_s=0,\ \varkappa_\alpha\in a_+\cup a_-,\ K_b^s\}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{P}_i\{\xi_s=0,\ \varkappa_\alpha\in a_+\cup a_-,\ K_b^s,\ R_l^s\}.$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части. Если $i\in a_0$, то оно равно нулю, так как события $\{\varkappa_\alpha\in a_+\cup a_-\}$ и R_0^s в этом случае несовместны. Для того чтобы оно равнялось нулю при $i\in a_+\cup a_-$ достаточно, чтобы $-\alpha_i s\equiv W^+$.

Рассмотрим остальные слагаемые. При $l\geqslant 1$ имеем

$$\mathbf{P}_i\{\xi_s=0,\ \varkappa_\alpha\in a_+\cup a_-,\ R_l^s,\ K_b^s\}\leqslant\mathbf{P}_i\Big\{\exists p_1,\ldots,p_l\in a_0\cup a_-\cup a_+:\{i,p_1,\ldots$$

$$\ldots,p_l\}\cap(a_-\cup a_+)\neq\varnothing,\ \alpha_i\tau_i+S(0,\tau_i)+\alpha_{p_1}\tau_{p_1}+S(\tau_i,\tau_i+\tau_{p_1})+\ldots+$$

$$+\alpha_{p_{l-1}}\tau_{p_{l-1}}+S(\tau_i+\ldots+\tau_{p_{l-2}},\tau_i+\ldots+\tau_{p_{l-1}})+\alpha_{p_l}\Big(s-\tau_i-\sum_{j=1}^{l-1}\times$$

$$\left.\left.\times\tau_{p_j}\right) + S\left(\tau_i + \ldots + \tau_{p_{l-1}}, s\right) + \gamma_{ip_1} + \gamma_{p_1p_2} + \ldots + \gamma_{p_{l-1}p_l} = 0\right\},$$

где $\tau_i, \ldots, \tau_i + \tau_{p_1} + \ldots + \tau_{p_{l-1}}$ — моменты переходов управляющей цепи $\varkappa_t$, $S(\alpha, \beta)$ — сумма скачков процесса ξ_t за время (α, β), γ_{ij} — величина скачка процесса ξ_t в момент перехода управляющей цепи из состояния i в состояние j.

Если среди чисел $\alpha_i, \alpha_{p_1}, \ldots, \alpha_{p_{l-1}}, \alpha_{p_l}$ найдутся различные, то правая часть последнего неравенства равна нулю, так как случайные величины $\tau_i\left(\alpha_i - \alpha_{p_l}\right) + S(0, \tau_i), \tau_{p_{l-1}}\left(\alpha_{p_{l-1}} - \alpha_{p_l}\right) + S\left(\tau_i + \ldots + \tau_{p_{l-2}}, \tau_i + \ldots + \tau_{p_{l-1}}\right)$, $S\left(\tau_i + \ldots + \tau_{p_{l-1}}, s\right)$, $\gamma_{ip_1}, \ldots, \gamma_{p_{l-1}p_l}$ независимы и хотя бы одна из первых l случайных величин имеет непрерывное распределение. Нетрудно видеть, что правая часть последнего неравенства равна нулю и в случае $\alpha_i = \alpha_{p_1} = \ldots = \alpha_{p_l} \neq 0$, если $\alpha_{p_l} s \overline{\in} W^+$. Поскольку W^+ счетно, то лемма доказана.

Из леммы 4 нетрудно вывести следующее утверждение.

Лемма 5. *При почти всех* $s - t$, $0 \leqslant u \leqslant t < s$, $i \in \{1, \ldots, N\}$ $\mathbf{P}\{\xi_t = \xi_s, \exists \alpha \in [t, s]\colon \varkappa_\alpha \in \alpha_+ \cup \alpha_- \mid \varkappa_u = i\} = 0$.

Далее, наряду с процессом $\mathscr{L}_t = \{\xi_t, \varkappa_t;\ t \geqslant 0\}$ рассмотрим процессы $\mathscr{L}_t^{(n)} = \{\xi_t^n, \varkappa_t^n;\ t \geqslant 0\}$, где $\xi_t^n = \xi_{k2^{-n}}, \varkappa_t^n = \varkappa_{k2^{-n}}$ при $k2^{-n} \leqslant t < (k+1)2^{-n}$. Положим $M_t = \int\limits_0^t \varphi(\xi_t - \xi_u)\,du$ — время, проведенное процессом на полуоси $(-\infty, \xi_t)$,

$$L^n(t) = \int\limits_0^t \varphi\left(\xi_u^n\right) du, \quad M^n(t) = \int\limits_0^t \varphi\left(\xi_t^n - \xi_u^n\right) du,$$

где функция $\varphi(x)$ определена во введении.

Рассмотрим также функцию

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 1/m, \\ mx & \text{при } 0 < x \leqslant 1/m, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0 \end{cases}$$

и определим следующие функционалы:

$$L_m(t) = \int\limits_0^t \varphi_m(\xi_u)\,du, \quad L_m^n(t) = \int\limits_0^t \varphi_m\left(\xi_u^n\right) du,$$

$$M_m^n(t) = \int\limits_0^t \varphi_m\left(\xi_t^n - \xi_u^n\right) du, \quad M_m(t) = \int\limits_0^t \varphi_m(\xi_t - \xi_u)\,du.$$

Лемма 6. $\forall \varepsilon > 0 \ \lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}_i\left\{\left|L_m^n(u) - L^n(u)\right| > \varepsilon\right\} = 0.$

Введем обозначения:

$$\mathbf{M}_i(\cdot) = \mathbf{M}(\cdot \mid \varkappa_0 = i), \quad \eta(x, n, m) = \varphi_m\left(\xi_x^n\right) - \varphi\left(\xi_x^n\right),$$

$S(x, y)$ — событие, заключающееся в том, что в интервале (x, y) процесс $\varkappa_t$ имеет скачок.

$\bar{S}(x, y)$ — дополнение к событию $S(x, y)$.

Доказательство. Введем случайную величину

$$\gamma_u = \min\{u, \min\{t\colon \varkappa_t \in a_0\}\}.$$

При p: $u/p < \varepsilon/2$ имеем

$$\mathbf{P}_i\left\{\left|\int\limits_0^u \eta(x, n, m)\,dx\right| > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \mathbf{P}_i\left\{\left|\int\limits_0^u \eta(x, n, m)\,dx\right| > \varepsilon,\ \gamma_u \in [ku/p,\ (k+1)\,u/p]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \mathbf{P}_i\left\{\int\limits_0^{ku/p} |\eta(x, n, m)|\,dx + \int\limits_{ku/p}^{(k+1)u/p} |\eta(x, n, m)|\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(k+1)u/p}^{u} |\eta(x, n, m)|\,dx > \varepsilon,\quad \gamma_u \in [ku/p, (k+1)\,u/p]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p-1} \mathbf{P}_i\left\{\int\limits_0^{ku/p} |\eta(x, n, m)|\,dx > \varepsilon/4,\ \gamma_u \in [ku/p,\ (k+1)\,u/p]\right\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{p-2} \mathbf{P}_i\left\{\int\limits_{(k+1)u/p}^{u} |\eta(x, n, m)|\,dx > \varepsilon/4,\ \gamma_u \in [ku/p, (k+1)\,u/p]\right\} \equiv A + B.$$

Оценим B:

$$B \leqslant 4\varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{p-2} \mathbf{M}_i\left(\int\limits_{(k+1)u/p}^{u} |\eta(x, n, m)|\,dx;\quad \gamma_u \in [ku/p, (k+1)\,u/p]\right) \leqslant$$

$$\leqslant 4\varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{p-2} \int\limits_{(k+1)u/p}^{u} \mathbf{P}_i\{0 < \xi_x^n \leqslant 1/m,\quad \gamma_u \in [ku/p, (k+1)\,u/p]\}\,dx.$$

Переходя в последнем неравенстве к двойному пределу последовательно при $n \to \infty$, $m \to \infty$, получим

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{p-2} \mathbf{P}_i\left\{\int\limits_{(k+1)u/p}^{u} |\eta(x, n, m)|\,dx > \varepsilon/4,\quad \gamma_u \in [ku/p,\ (k+1)\,u/p]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 4\varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{p-2} \int\limits_{(k+1)u/p}^{u} \mathbf{P}_i\{\xi_x = 0,\quad \gamma_u \in [ku/p,\ (k+1)\,u/p]\}\,dx = 0.$$

Последнее равенство имеет место в силу лемм 3, 5, поскольку $\{\gamma_u \in [ku/p,\ (k+1)u/p\} \subseteq \{\exists t \leqslant x\colon\ \varkappa_t \in a_- \cup a_+ \cup b\}$ при $x \geqslant (k+1)u/p$.

Оценим A:

$$A \leqslant 4\varepsilon^{-1} \sum_{k=1}^{p-1} \int\limits_0^{ku/p} \mathbf{P}_i\{0 < \xi_x^n \leqslant 1/m,\quad \gamma_u \in [ku/p,\ (k+1)\,u/p]\}\,dx.$$

Оценим подынтегральное выражение в последнем неравенстве:

$$\mathbf{P}_i\{0 < \xi_x^n \leqslant 1/m,\quad \gamma_u \in [ku/p,\ (k+1)\,u/p]\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}_i\{0 < \xi_x^n \leqslant 1/m,\quad \forall t \leqslant x\quad \varkappa_t \in a_0\} \leqslant \mathbf{P}_i\{S([x2^n]/2^n, x)\} +$$

$$+ \mathbf{P}_i\{0 < \xi_x \leqslant 1/m\} + \mathbf{P}_i\{\xi_x \neq \xi_x^n,\quad \forall_t < x\quad \varkappa_t \in a_0,\ \overline{S}([x2^n]/2^n, x)\},$$

Переходя к пределу в крайних членах неравенства последовательно при $n \to \infty$, $m \to \infty$, получим, что почти всюду двойной предел рассматриваемого подынтегрального выражения равен нулю. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{p-1} \mathbf{P}_i\left\{\int\limits_0^{ku/p} |\eta(x, n, m)|\,dx > \varepsilon/4,\quad \gamma_u \in [ku/p,\ (k+1)\,u/p]\right\} = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. $L_m^n(u) \xrightarrow[\mathbf{P}_i]{} L_m(u)$.

Доказательство.

$$\forall\varepsilon>0\quad \mathbf{P}_i\{|L_m^n(u)-L_m(u)|>\varepsilon\}\leqslant\varepsilon^{-1}\int\limits_0^u \mathbf{M}_i|\varphi_m(\xi_t^n)-\varphi_m(\xi_t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^{-1}\int\limits_0^u \mathbf{M}_i(|\varphi_m(\xi_t^n)-\varphi_m(\xi_t)|;\ |\xi_t^n-\xi_t|<\delta)\,dt+$$

$$+\varepsilon^{-1}\int\limits_0^u \mathbf{M}_i(|\varphi_m(\xi_t^n)-\varphi_m(\xi_t)|;\ |\xi_t^n-\xi_t|\geqslant\delta)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^{-1}\left(m\delta u+\int\limits_0^u \mathbf{P}_i\{|\xi_t^n-\xi_t|\geqslant\delta\}\,dt\right).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, а затем устремляя δ к нулю, получим утверждение леммы.

Аналогично можно доказать следующее утверждение:

Лемма 8. $L_m(u)\xrightarrow[\mathbf{P}_i]{}L_u$.

Лемма 9. $L^n(u)\xrightarrow[\mathbf{P}_i]{}L_u$.

Доказательство следует из лемм 6, 7, 8, а также из неравенства

$$\mathbf{P}_i\{|L^n(u)-L_u|>\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}_i\{|L^n(u)-L_m^n(u)|>\varepsilon/3\}+$$
$$+\mathbf{P}_i\{|L_m^n(u)-L_m(u)|>\varepsilon/3\}+\mathbf{P}_i\{|L_m(u)-L_u|>\varepsilon/3\}.$$

Лемма 10. $\forall\varepsilon>0\ \lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}_i\{|\mathbf{M}_m^n(u)-M^n(u)|>\varepsilon\}=0.$

Доказательство. Введем обозначения:

$$r(u,t,m,n)=\varphi(\xi_u^n-\xi_t^n)-\varphi_m(\xi_u^n-\xi_t^n),$$
$$\gamma_u^*=\min\{u,\max\{s:\varkappa_s\in a_-\cup a_+\cup b\}\}.$$

При p: $u/p<\varepsilon/2$ имеем

$$\mathbf{P}_i\left\{\left|\int\limits_0^u r(u,t,m,n)\,dt\right|>\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{p-1}\mathbf{P}_i\left\{\left|\int\limits_0^{ku/p} r(u,t,m,n)\,dt\right|>\varepsilon/4,\quad \gamma_u^*\in[ku/p,\ (k+1)u/p]\right\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{p-2}\mathbf{P}_i\left\{\left|\int\limits_{(k+1)u/p}^u r(u,t,m,n)\,dt\right|>\varepsilon/4,\quad \gamma_u^*\in[ku/p,\ (k+1)u/p]\right\}\equiv C+D.$$

Оценим D:

$$\sum_{k=0}^{p-2}\mathbf{P}_i\left\{\left|\int\limits_{(k+1)u/p}^u r(u,t,m,n)\,dt\right|>\varepsilon/4,\quad \gamma_u^*\in[ku/p,\ (k+1)u/p]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 4\varepsilon^{-1}\sum_{k=0}^{p-2}\int\limits_{(k+1)u/p}^u \mathbf{P}_i\{0<\xi_u^n-\xi_t^n\leqslant 1/m,\quad \forall s\in[t,u]\ \ \varkappa_s\in a_0\}\,dt.$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в правой части последнего неравенства. Имеем

$$\mathbf{P}_i\{0<\xi_u^n-\xi_t^n\leqslant 1/m,\quad \forall s\in[t,u]\ \ \varkappa_s\in a_0\}\leqslant\mathbf{P}_i\{S[[t2^n]/2^n,t]\}+$$
$$+\mathbf{P}_i\{S[[u2^n]/2^n,u]\}+\mathbf{P}_i\{0<\xi_u^n-\xi_t^n\leqslant 1/m,\quad \forall s\in[t,u]\ \ \varkappa_s\in a_0,$$
$$\bar S[[t2^n]/2^n,t],\ \bar S[[u2^n]/2^n,u]\}.$$

Напомним, что здесь, как и в лемме 6, $S[a, b]$ — событие, заключающееся в том, что в интервале $[a, b]$ процесс $\varkappa_t$ имеет скачок; $\bar{S}[a, b]$ — дополнение к событию $S[a, b]$.

Аналогично тому, как это делалось при оценке A в лемме 6, можно показать, что правая часть последнего неравенства не больше суммы

$$\mathbf{P}_i\{S[[t2^n]/2^n, t]\} + \mathbf{P}_i\{S[[u2^n]/2^n, u]\} + \mathbf{P}_i\{0 < \xi_u - \xi_t \leqslant 1/m\} +$$
$$+ \mathbf{P}_i\{\xi_t^n \neq \xi_t,\ \varkappa_s \in a_0 \text{ при } s \in [[t2^n]/2^n, t],\ \bar{S}[[t2^n]/2^n, t]\} +$$
$$+ \mathbf{P}_i\{\xi_u^n \neq \xi_u,\ \varkappa_s \in a_0 \text{ при } s \in [[u2^n]/2^n, u],\ \bar{S}[[u2^n]/2^n, u]\}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_i\{0 < \xi_u^n - \xi_t^n \leqslant 1/m,\ \forall s \in [t, u]\ \ \varkappa_s \in a_0\} = 0,$$

а следовательно, и

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{p-2}\mathbf{P}_i\left\{\left|\int_{(k+1)u/p}^{u} r(u, t, m, n)\,dt\right| > \varepsilon/4,\ \ \gamma_u^* \in [ku/p, (k+1)u/p]\right\} = 0.$$

Оценим C. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$C = \sum_{k=1}^{p-2}\mathbf{P}_i\left\{\left|\int_0^{ku/p} r(u, t, m, n)\,dt\right| > \varepsilon/4,\ \ \gamma_u^* \in [ku/p, (k+1)u/p]\right\} +$$
$$+ \mathbf{P}_i\left\{\left|\int_0^{(p-1)u/p} r(u, t, m, n)\,dt\right| > \varepsilon/4,\ \ \gamma_u^* \in [(p-1)u/p, u]\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 4\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{p-2}\int_0^{ku/p}\mathbf{P}_i\{0 < \xi_u^n - \xi_t^n \leqslant 1/m,\ \ \gamma_u^* \in [ku/p, (k+1)u/p]\} +$$
$$+ \mathbf{P}_i\left\{\left|\int_0^{(p-1)u/p} r(u, t, m, n)\,dt\right| > \varepsilon/4,\ \ \exists s \in [(p-1)u/p, u]\ \ \varkappa_s \overline{\in} a_0\right\} +$$
$$+ \mathbf{P}_i\left\{\left|\int_0^{(p-1)u/p} r(u, t, m, n)\,dt\right| > \varepsilon/4,\ \ \forall s \in [0, u]\ \ \varkappa_s \in a_0\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 4\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{p-2}\int_0^{ku/p}\mathbf{P}_i\{0 < \xi_u^n - \xi_t^n \leqslant 1/m,\ \ \exists s \in]t, u]\ \ \varkappa_s \overline{\in} a_0\}\,dt +$$
$$+ \int_0^{(p-1)u/p}\mathbf{P}_i\{0 < \xi_u^n - \xi_t^n \leqslant 1/m,\ \ \exists s \in [t, u]\ \ \varkappa_s \overline{\in} a_0\}\,dt +$$
$$+ \int_0^{(p-1)u/p}\mathbf{P}_i\{0 < \xi_u^n - \xi_t^n \leqslant 1/m,\ \ \forall s \in [0, u]\ \ \varkappa_s \in a_0\}\,dt.$$

Переходя к двойному пределу в крайних членах этой цепочки неравенств, получим

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p-1}\mathbf{P}_i\left\{\left|\int_0^{ku/p} r(u, t, m, n)\,dt\right| > \varepsilon/4,\ \ \gamma_u^* \in [ku/p, (k+1)u/p]\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 4\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{p-2}\int_0^{ku/p}\mathbf{P}_i\{\xi_u - \xi_t,\ \ \exists s \in [t, u]\ \ \varkappa_s \overline{\in} a_0\}\,dt +$$
$$+ \int_0^{(p-1)u/p}\mathbf{P}_i\{\xi_u = \xi_t,\ \ \exists s \in [t, u]\ \ \varkappa_s \overline{\in} a_0\}\,dt +$$
$$+ \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_0^{(p-1)u/p}\mathbf{P}_i\{0 < \xi_u^n - \xi_t^n \leqslant 1/m,\ \ \forall s \in [0, u]\ \ \varkappa_s \in a_0\}\,dt.$$

Первые два слагаемые в правой части последнего неравенства равны нулю в силу лемм 3, 5. Равенство нулю третьего слагаемого следует из неравенств этой леммы, оценивающих D.

Совершенно аналогично леммам 7, 9, доказываются

Лемма 11. $M_m^n(u) \xrightarrow[\mathrm{P}_i]{} M_m(u)$.

Лемма 12. $M^n(u) \xrightarrow[\mathrm{P}_i]{} M_u$.

4. Факторизационные тождества для процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова

Теорема 2. *При* μ, $\nu > 0$ *существуют матрицы* $Q^+(s, \mu, \nu)$ *и* $Q^-(s, \mu, \nu)$ *такие, что*

$$[\mu I - A(s)]^{-1}[(\mu+\nu)I - A(s)] = Q^+(s, \mu, \nu)Q^-(s, \mu, \nu) \tag{4.1}$$

при $\operatorname{Re}(s) = 0$, *где* $Q^+(s, \mu, \nu)$ *и* $Q^-(s, \mu, \nu)$ *удовлетворяют условиям:*

Γ_1. *Матрица* $Q^+(s, \mu, \nu)$ *имеет обратную* $[Q^+(s, \mu, \nu)]^{-1}$ *при* $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$; $Q^+(s, \mu, \nu)$ *и* $[Q^+(s, \mu, \nu)]^{-1}$ *ограничены и непрерывны при* $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$; *регулярны при* $\operatorname{Re}(s) > 0$; $Q^+(\infty, \mu, \nu) = I$.

Γ_2. *Матрица* $Q^-(s, \mu, \nu)$ *имеет обратную* $[Q^-(s, \mu, \nu)]^{-1}$ *при* $\operatorname{Re}(s) \leqslant 0$; $Q^-(s, \mu, \nu)$ *и* $[Q^-(s, \mu, \nu)]^{-1}$ *ограничены, непрерывны при* $\operatorname{Re}(s) \leqslant 0$; *регулярны при* $\operatorname{Re}(s) < 0$.

$Q^+(s, \mu, \nu)$ и $Q^-(s, \mu, \nu)$ *условиями* Γ_1, Γ_2 *и* (4.1) *определяются однозначно и*

$$Q^+(s, \mu, \nu) = I + \nu \int_0^\infty e^{-(\mu+\nu)t}\mathrm{M}\left(e^{-s\xi_t + \nu M_t}\delta(\xi_t > 0);\quad \varkappa_t = j \mid \varkappa_0 = i\right)dt,$$

$$Q^-(s, \mu, \nu) = I + \nu \int_0^\infty e^{-\mu t}\mathrm{M}\left(e^{-s\xi_t - \nu L_t}\delta(\xi_t \leqslant 0);\quad \varkappa_t = j \mid \varkappa_0 = i\right)dt,$$

$$[Q^+(s, \mu, \nu)]^{-1} = I - \nu \int_0^\infty e^{-\mu t}\mathrm{M}\left(e^{-s\xi_t - \nu L_t}\delta(\xi_t > 0);\quad \varkappa_t = j \mid \varkappa_0 = i\right)dt,$$

$$[Q^-(s, \mu, \nu)]^{-1} = I - \nu \int_0^\infty e^{-(\mu+\nu)t}\mathrm{M}\left(e^{-s\xi_t + \nu M_t}\delta(\xi_t \leqslant 0);\quad \varkappa_t = j \mid \varkappa_0 = i\right)dt.$$

Доказательство. Рассмотрим процессы $\mathscr{L}_t^{(n)} = \{\xi_t^n, \varkappa_t^n;\ t \geqslant 0\}$ и положим при $n = 1, 2, \ldots$ $\Psi^{(n)}(s) \equiv \Psi(s, 2^{-n}) = \exp(2^{-n}A(s))$. Через $\Psi^{+(n)}(s, \rho, \omega)$, $\Psi^{-(n)}(s, \rho, \omega)$ обозначим компоненты левой факторизации матрицы $[I - \rho\Psi^{(n)}(s)]^{-1}[I - \rho\omega\Psi^{(n)}(s)]$, т. е.

$$[I - \rho\Psi^{(n)}(s)]^{-1}[I - \rho\omega\Psi^{(n)}(s)] = \Psi^{+(n)}(s, \rho, \omega)\Psi^{-(n)}(s, \rho, \omega) \tag{4.2}$$

при $\operatorname{Re}(s) = 0$, где $\Psi^{+(n)}(s, \rho, \omega)$ и $\Psi^{-(n)}(s, \rho, \omega)$ удовлетворяют соответственно условиям A_1, A_2 теоремы 1. Выражения для компонент факторизации даны в лемме 1. Домножая обе части равенства (4.2) на $(1-\rho)(1-\omega\rho)^{-1}$, полагая

$$\omega = \exp\left(-\nu 2^{-n}\right),\quad \rho = \exp\left(-\mu 2^{-n}\right)\quad (\nu, \mu > 0),$$
$$S_k^{(n)} = \xi_{k2^{-n}},\quad \varkappa_k^{(n)} = \varkappa_{2k^{-n}}$$

и переходя к пределу при $n \to \infty$ (справедливость предельного перехода будет доказана ниже), получим:

$$[I - \rho\Psi^{(n)}(s)]^{-1}[I - \rho\omega\Psi^{(n)}(s)](1-\rho)(1-\omega\rho)^{-1} =$$
$$= \left(1 - e^{-\mu 2^{-n}}\right)2^n \times \sum_{k=0}^{\infty} 2^n e^{-\mu k 2^{-n}}\Psi\left(s, k2^{-n}\right)\left[\left(1 - e^{-(\mu+\nu)2^{-n}}\right)2^n \times\right.$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-n} e^{-(\mu+\nu)2^{-n}} \Psi\left(s, k2^{-n}\right)\Bigg]^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(\mu+\nu)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \Psi(s, t)\, dt \times$$

$$\times \left[\int_0^{\infty} e^{-(\mu+\nu)t} \Psi(s, t)\, dt\right]^{-1} = \mu(\mu+\nu)^{-1} [\mu I - A(s)]^{-1} [(\mu+\nu) I - A(s)]$$

(напомним, что $\Psi(s, t) = \exp(tA(s))$),

$$\Psi^{+(n)}(s, \rho, \omega) = I + \left(1 - e^{-\nu 2^{-n}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu k 2^{-n}} \mathbf{M}\Bigg(e^{-sS_k^{(n)}} \delta\left(S_k^{(n)} > 0\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\nu 2^{-n} \sum_{i=1}^{k-1} \delta\left(S_k^{(n)} \leqslant S_i^{(n)}\right)\right); \quad \varkappa_k^{(n)} = j \mid \varkappa_0^{(n)} = i\Bigg) \xrightarrow[n\to\infty]{} I + \nu \int_0^{\infty} e^{-(\mu+\nu)t} \times$$

$$\times \mathbf{M}\left(e^{-s\xi_t + \nu M_t} \delta(\xi_t > 0); \quad \varkappa_t = j \mid \varkappa_0 = i\right) dt \equiv Q^+(s, \mu, \nu), \quad \Psi^{-(n)}(s, \rho, \omega) =$$

$$= I + \left(1 - e^{-\nu 2^{-n}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu k 2^{-n}} \mathbf{M}\Bigg(e^{-sS_k^{(n)}} \delta\left(S_k^{(n)} \leqslant 0\right) \exp\Bigg(-\nu 2^{-n} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{k-1} \delta\left(S_i^{(n)} > 0\right)\Bigg); \ \varkappa_k^{(n)} = j \mid \varkappa_0^{(n)} = i\Bigg) \xrightarrow[n\to\infty]{} I + \nu \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \times$$

$$\times \mathbf{M}\left(e^{-s\xi_t - \nu L_t} \delta(\xi_t \leqslant 0); \ \varkappa_t = j \mid \varkappa_0 = i\right) dt \equiv Q^-(s, \mu, \nu).$$

Аналогично

$$[Q^+(s, \mu, \nu)]^{-1} \equiv \lim_{n\to\infty} \left[\Psi^{+(n)}\left(s, e^{-\mu 2^{-n}}, e^{-\nu 2^{-n}}\right)\right]^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Bigg[I - \left(1 - e^{-\nu 2^{-n}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu k 2^{-n}} \mathbf{M}\Bigg(e^{-sS_k^{(n)}} \exp\left(-\nu 2^{-n} \sum_{i=1}^{k-1} \delta\left(S_i^{(n)} > 0\right)\right) \times$$

$$\times \delta\left(S_k^{(n)} > 0\right); \ \varkappa_k^{(n)} = j \mid \varkappa_0^{(n)} = i\Bigg)\Bigg] = I - \nu \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \mathbf{M}\Big(e^{-s\xi_t - \nu L_t} \delta(\xi_t > 0); \ \varkappa_t =$$

$$= j \mid \varkappa_0 = i\Big)\, dt, \quad [Q^-(s, \mu, \nu)]^{-1} \equiv \lim_{n\to\infty} \left[\Psi^{-(n)}\left(s, e^{-\mu 2^{-n}}, e^{-\nu 2^{-n}}\right)\right]^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Bigg[I - \left(1 - e^{-\nu 2^{-n}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu k 2^{-n}} \mathbf{M}\Bigg(e^{-sS_k^{(n)}} \delta\left(S_k^{(n)} \leqslant 0\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\nu 2^{-n} \sum_{i=1}^{k-1} \delta\left(S_k^{(n)} \leqslant S_i^{(n)}\right)\right); \quad \varkappa_k^{(n)} = j \mid \varkappa_0^{(n)} = i\Bigg)\Bigg] =$$

$$= I - \nu \int_0^{\infty} e^{-(\mu+\nu)t} \mathbf{M}\left(e^{-s\xi_t + \nu M_t} \delta(\xi_t \leqslant 0); \ \varkappa_t = j \mid \varkappa_0 = i\right) dt.$$

Обсудим сейчас возможность предельного перехода.

Для справедливости предельного перехода

$$\Psi^{-(n)}(s, \rho, \omega) \to Q^-(s, \mu, \nu) \text{ при } n \to \infty$$

достаточно, чтобы

$$\mathbf{M}_i\left(\exp\left(-s\xi_u^n - \nu L^n(u)\right) \delta\left(\xi_u^n \leqslant 0\right) \delta\left(\varkappa_u^n = j\right)\right) \to$$

$$\to \mathbf{M}_i\left(\exp\left(-s\xi_u - \nu L_u\right) \delta\left(\xi_u \leqslant 0\right) \delta\left(\varkappa_u = j\right)\right) \text{ при } n \to \infty \text{ для п. в. } u. \quad (4.3)$$

Пусть $s = s_1 + is_2 (\operatorname{Im} s_1 = \operatorname{Im} s_2 = 0, \ s_1 \leqslant 0)$, тогда

$$e^{-s\xi_u^n} = e^{-s_1\xi_u^n} \cos\left(s_2\xi_u^n\right) - ie^{-s_1\xi_u^n} \sin\left(s_2\xi_u^n\right).$$

Имеем:

$$\mathbf{P}_i\left\{\left|\operatorname{Re}\left(e^{-s\xi_u^n}\delta(\xi_u^n\leqslant 0)\right)-\operatorname{Re}\left(e^{-s\xi_u}\delta(\xi_u\leqslant 0)\right)\right|>\varepsilon\right\}=$$

$$=\mathbf{P}_i\left\{\left|\operatorname{Re}\left(e^{-s\xi_u^n}\delta(\xi_u^n\leqslant 0)\right)-\operatorname{Re}\left(e^{-s\xi_u}\delta(\xi_u\leqslant 0)\right)\right|>\varepsilon,\right.$$

$$\left.\delta(\xi_u^n\leqslant 0)=\delta(\xi_u\leqslant 0)\right\}+\mathbf{P}_i\{|\delta(\xi_u^n\leqslant 0)-\delta(\xi_u\leqslant 0)|=1\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{P}_i\left\{\left|\operatorname{Re}\left(e^{-s\xi_u^n}\right)-\operatorname{Re}\left(e^{-s\xi_u}\right)\right|>\varepsilon,\ \xi_u^n\leqslant 0,\ \xi_u\leqslant 0\right\}+$$

$$+\mathbf{P}_i\{|\delta(\xi_u^n\leqslant 0)-\delta(\xi_u\leqslant 0)|=1\}\leqslant\mathbf{P}_i\{|\xi_u^n-\xi_u|>\gamma(\varepsilon)>0\}+$$

$$+\mathbf{P}_i\{|\delta(\xi_u^n\leqslant 0)-\delta(\xi_u\leqslant 0)|=1\}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $x\leqslant 0$ $(s_1\leqslant 0)$ функция $e^{-s_1x}\cos(s_2x)$ равномерно непрерывна. Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re}\left(e^{-s\xi_u^n}\delta(\xi_u^n\leqslant 0)\right)\xrightarrow[\mathbf{P}_i]{}\operatorname{Re}\left(e^{-s\xi_u}\delta(\xi_u\leqslant 0)\right).$$

Далее, в силу равномерной непрерывности функции $e^{-\nu x}$ при $x\in[0,u]$ имеем

$$\mathbf{P}_i\left\{\left|e^{-\nu L^n(u)}-e^{-\nu L_u}\right|>\varepsilon\right\}\leqslant\mathbf{P}_i\{|L^n(u)-L_u|>r(\varepsilon)>0\},$$

а отсюда в силу леммы 9

$$e^{-\nu L^n(u)}\xrightarrow[\mathbf{P}_i]{}e^{-\nu L_u}.$$

Наконец, поскольку случайные величины $\operatorname{Re}\left(e^{-s\xi_u^n}\delta(\xi_u^n\leqslant 0)\right)$, $\exp(-\nu L^n(u))$, $\delta(\varkappa_u^n=j)$ ограничены, то

$$\operatorname{Re}\left(\exp(-s\xi_u^n-\nu L^n(u))\,\delta(\xi_u^n\leqslant 0)\,\delta(\varkappa_u^n=j)\right)\to$$

$$\xrightarrow[\mathbf{P}_i]{}\operatorname{Re}(\exp(-s\xi_u-\nu L_u)\,\delta(\xi_u\leqslant 0)\,\delta(\varkappa_u=j)).$$

Отсюда в силу равномерной интегрируемости по n $\operatorname{Re}\left(e^{-s\xi_u^n-\nu L^n(u)}\delta(\xi_u^n\leqslant 0)\,\delta(\varkappa_u^n=j)\right)$ следует (см. [13 с 51]), что

$$\mathbf{M}_i\left(\operatorname{Re}\left(\exp(-s\xi_u^n-\nu L^n(u))\,\delta(\xi_u^n\leqslant 0)\,\delta(\varkappa_u^n=j)\right)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbf{M}_i(\operatorname{Re}(\exp(-s\xi_u-$$

$$-\nu L_u)\,\delta(\xi_u\leqslant 0)\,\delta(\varkappa_u=j))).$$

Аналогично $\mathbf{M}_i\left(\operatorname{Im}\left(\exp(-s\xi_u^n-\nu L^n(u))\ \delta(\xi_u^n\leqslant 0)\,\delta(\varkappa_u^n=j)\right)\right)\to$ $\to\mathbf{M}_i(\operatorname{Im}(\exp(-s\xi_u-\nu L_u)\,\delta(\xi_u\leqslant 0)\,\delta(\varkappa_u=j)))$ при $n\to\infty$. Таким образом, предельный переход

$$\Psi^{-(n)}(s,\rho,\omega)\to Q^-(s,\mu,\nu)\ \text{при}\ n\to\infty$$

доказан. Для справедливости предельного перехода

$$\Psi^{+(n)}(s,\rho,\omega)\to Q^+(s,\mu,\nu)\ \text{при}\ n\to\infty$$

достаточно, чтобы для почти всех u

$$\mathbf{M}_i\left(\exp(-s\xi_u^n+\nu M^n(u))\,\delta(\xi_u^n>0)\,\delta(\varkappa_u^n=j)\right)\to$$

$$\to\mathbf{M}_i(\exp(-s\xi_u+\nu M_u)\,\delta(\xi_u>0)\,\delta(\varkappa_u=j))\ \text{при}\ n\to\infty. \tag{4.4}$$

Справедливость этой сходимости следует из леммы 12 и рассуждений, аналогичных тем, которые мы приводили при доказательстве (4.3). Справедливость предельных переходов

$$[\Psi^{\pm(n)}(s,\rho,\omega)]^{-1}\to[Q^\pm(s,\mu,\nu)]^{-1}\ \text{при}\ n\to\infty$$

следует из (4.3) и (4.4).

Матрицы $Q^+(s, \mu, \nu)$, $Q^-(s, \mu, \nu)$, очевидно, удовлетворяют условиям Γ_1, Γ_2 и (4.1). Из теоремы Лиувилля следует, что эти условия определяют матрицы однозначно.

Из теорем 1, 2 следует

Теорема 3. *При* $\mu, \nu > 0$, $\operatorname{Re}(s) = 0$

$$\left\| \int\limits_0^\infty e^{-\mu t} \mathbf{M}\left(e^{-s\xi_t - \nu L_t^x};\ \varkappa_t = j \mid \varkappa_0 = i\right) dt \right\| =$$

$$= \begin{cases} [T(x, 0]\{[Q^-(s, \mu, \nu)]^{-1}\}] \times [Q^+(s, \mu, \nu)]^{-1}[\mu I - A(s)]^{-1} & \text{при } x < 0, \\ [T[0, x]\{Q^+(s, \mu, \nu)\}] \times [Q^+(s, \mu, \nu)]^{-1}[\mu I - A(s)]^{-1} & \text{при } x \geqslant 0, \end{cases}$$

где $Q^\pm(s, \mu, \nu)$ *определены в теореме* 2.

Пусть $\overline{L}_t^x$ — *время, проведенное процессом* $\{\xi_u,\ 0 \leqslant u \leqslant t\}$ *на полуоси* $[x, \infty)$. Тогда из теоремы 3 нетрудно получить

Следствие. *При* $\mu, \nu > 0$, $\operatorname{Re}(s) = 0$

$$\left\| \int\limits_0^\infty e^{-\mu t} \mathbf{M}\left(e^{-s\xi_t - \nu \overline{L}_t^x};\ \varkappa_t = j \mid \varkappa_0 = i\right) dt \right\| =$$

$$= \begin{cases} [T[x, 0]\{[Q^-(s, \mu, \nu)]^{-1}\}] \times [Q^+(s, \mu, \nu)]^{-1}[\mu I - A(s)]^{-1} & \text{при } x \leqslant 0, \\ [T[0, x)\{Q^+(s, \mu, \nu)\}] \times [Q^+(s, \mu, \nu)]^{-1}[\mu I - A(s)]^{-1} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Пусть далее $N = 1$, $x = 0$. Рассмотрим безгранично делимую факторизацию функции $u/(u - A(s))$ (см. [6]):

$$u/(u - A(s)) = \Psi_{u+}(s)\Psi_{u-}(s).$$

Выражения для компонент факторизации $\Psi_{u+}(s)$, $\Psi_{u-}(s)$ даны в работе [5]. Тогда имеет место представление

$$[\mu - A(s)]^{-1}[\mu + \nu - A(s)] = \frac{\mu + \nu}{\mu} \times \frac{\Psi_{\mu+}(s)\Psi_{\mu-}(s)}{\Psi_{(\mu+\nu)+}(s)\Psi_{(\mu-\nu)-}(s)}.$$

Пусть

$$H(\mu, \nu) = \lim_{s \to \infty} \frac{\Psi_{\mu+}(s)}{\Psi_{(\mu+\nu)+}(s)} = \exp\left\{\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\mu u}}{u}\left(e^{-\nu u} - 1\right)\mathbf{P}\{\xi_u > 0\}\, du\right\}.$$

Тогда из теоремы 3 следует, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-\mu t} \mathbf{M}\left(e^{-s\xi_t - \nu L_t}\right) dt = [Q^+(s, \mu, \nu)]^{-1}[\mu - A(s)]^{-1} =$$

$$= \mu^{-1}\Psi_{(\mu+\nu)+}(s) \times H(\mu, \nu)\, \Psi_{\mu-}(s).$$

Последнее соотношение совпадает с тождеством (2.7) работы [5].

Автору стала известна работа Д. В. Гусака [14], в которой найдены выражения для $s\int\limits_0^\infty e^{-st}\mathbf{M}\left(e^{-\mu L_t^x}\right) dt$ и $\sum\limits_{n=1}^\infty u^n \mathbf{M} z^{\Delta_n^x}$ (соответственно теорема 1 и теорема 2). Теорема 1 работы [14] следует из теоремы 3 (при $s = 0$, $N = 1$) и теоремы 2 (при $N = 1$) данной работы. Аналогично теорема 2 из [14] следует из теоремы 1 и леммы 1 данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ежов И. И., Скороход А. В.** Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I.— Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, № 1, с. 314.
2. **Ежов И. И., Скороход А. В.** Марковские процессы, однородные по второй компоненте. II.— Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, № 4, с. 679—690.
3. **Пересыпкина С. И.** О времени пребывания над нулевым уровнем однородного процесса с независимыми приращениями, заданного на цепи Маркова.— В кн.:

Исследования по теории случайных процессов. Киев: изд. Ин-та математики АН УССР, 1976, с. 130—134.
4. **Пересыпкина С. И., Гусак Д. В.** О времени пребывания над уровнем одного класса управляемых случайных процессов.— Укр. мат. журн., 1978, т. 30, № 3, с. 352—357.
5. **Печерский Е. А., Рогозин Б. А.** О совместном распределении случайных величин, связанных с флуктуациями процесса с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, № 3, с. 431—444.
6. **Рогозин Б. А.** О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, № 4, с. 656—669.
7. **Могульский А. А.** Факторизационные тождества для процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова.— Теория вероятн. и мат. статистика, 1974, вып. 11, с. 86—96.
8. **Takâcs L.** On fluctuations of sums of random variables.— Studies in probability and ergodic theory Advances in mathematics supplementary stadies, 1978, v. 2, p. 45—93.
9. **Семенов А. Т.** Время пребывания на полуоси полумарковского случайного блуждания.— Лит. мат. сб., 1975, т. 15, № 4, с. 191—198.
10. **Пресман Э. Л.** Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, т. 4, № 33, с. 861—900.
11. **Боровков А. А.** Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
12. **Лукач Е.** Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
13. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
14. **Гусак Д. В.** О времени пребывания над уровнем для одного класса случайных процессов. Тез. Междунар. конф. по теории вероятн. и мат. статистике. Т. 1. Вильнюс, 1981.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ

А. Л. МИРОШНИКОВ

1. Введение

Пусть R^d — d-мерное евклидово пространство, $E \subset R^d$, $\overline{0} \in E$, E — выпуклое множество из R^d, для которого определен функционал Минковского:

$$p_E(x) = \inf\{\alpha > 0;\ x \in \alpha E\},\quad x \in R^d,\quad E = \{x \in R^d;\ p_E(x) \leqslant 1\}.$$

Пусть ξ — случайный вектор в R^d. Под вектором $\tilde{\xi}$ мы будем понимать вектор $\tilde{\xi} = \xi' - \xi''$, у которого ξ' и ξ'' независимы и одинаково распределены с вектором ξ. Если $\mathbf{P}(\cdot)$ — распределение ξ, то $\tilde{\mathbf{P}}(\cdot)$ — распределение $\tilde{\xi}$.

Введем характеристику $U(\xi,\ E)$ — интегральную функцию концентрации случайного вектора ξ:

$$U(\xi, E) = \int\limits_{R^d} \exp\{-p_E(x)\}\,\tilde{\mathbf{P}}(dx),$$

определение которой принадлежит Ананьевскому [1]. Для интегральной функции концентрации приведем следующие результаты.

Теорема А (Ананьевский). *Справедливы следующие оценки:*

1. $0 < U(\xi, E) \leqslant 1$;
2. Если $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > 0$, то $U(\xi,\ \lambda_1 E) \geqslant U(\xi,\ \lambda_2 E)$;
3. $\mathbf{M}(p_E(\tilde{\xi}) \wedge 1)^2 \geqslant (1 - U(\xi,\ E))^2$;
4. $U(\xi, E) \leqslant \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-k}(kd^2+1)^d\right) Q(\xi, E)$,

где E — выпуклое, замкнутое, ограниченное, симметричное с непустой внутренностью множество; если a и b — числа, то $a \wedge b = \min(a,\ b)$; $Q(\xi,\ E)$ — функция концентрации (Леви) случайного вектора ξ на R^d и $Q(\xi, E) = \sup\limits_{y \in R^d} \mathbf{P}(\xi \in y + E)$.