Исследования по теории случайных процессов. Киев: изд. Ин-та математики АН УССР, 1976, с. 130—134.
4. Пересыпкина С. И., Гусак Д. В. О времени пребывания над уровнем одного класса управляемых случайных процессов.— Укр. мат. журн., 1978, т. 30, № 3, с. 352—357.
5. Печерский Е. А., Рогозин Б. А. О совместном распределении случайных величин, связанных с флуктуациями процесса с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, № 3, с. 431—444.
6. Рогозин Б. А. О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, № 4, с. 656—669.
7. Могульский А. А. Факторизационные тождества для процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова.— Теория вероятн. и мат. статистика, 1974, вып. 11, с. 86—96.
8. Takâcs L. On fluctuations of sums of random variables.— Studies in probability and ergodic theory Advances in mathematics supplementary stadies, 1978, v. 2, p. 45—93.
9. Семенов А. Т. Время пребывания на полуоси полумарковского случайного блуждания.— Лит. мат. сб., 1975, т. 15, № 4, с. 191—198.
10. Пресман Э. Л. Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, т. 4, № 33, с. 861—900.
11. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
12. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
13. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
14. Гусак Д. В. О времени пребывания над уровнем для одного класса случайных процессов. Тез. Междунар. конф. по теории вероятн. и мат. статистике. Т. 1. Вильнюс, 1981.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ

А. Л. МИРОШНИКОВ

1. Введение

Пусть R^d — d-мерное евклидово пространство, $E \subset R^d$, $\overline{0} \in E$, E — выпуклое множество из R^d, для которого определен функционал Минковского:

$$p_E(x) = \inf\{\alpha > 0;\ x \in \alpha E\},\quad x \in R^d,\quad E = \{x \in R^d;\ p_E(x) \leqslant 1\}.$$

Пусть ξ — случайный вектор в R^d. Под вектором $\tilde{\xi}$ мы будем понимать вектор $\tilde{\xi} = \xi' - \xi''$, у которого ξ' и ξ'' независимы и одинаково распределены с вектором ξ. Если $\mathbf{P}(\cdot)$ — распределение ξ, то $\tilde{\mathbf{P}}(\cdot)$ — распределение $\tilde{\xi}$.

Введем характеристику $U(\xi, E)$ — интегральную функцию концентрации случайного вектора ξ:

$$U(\xi, E) = \int\limits_{R^d} \exp\{-p_E(x)\}\,\tilde{\mathbf{P}}(dx),$$

определение которой принадлежит Ананьевскому [1]. Для интегральной функции концентрации приведем следующие результаты.

Теорема А (Ананьевский). *Справедливы следующие оценки:*

1. $0 < U(\xi, E) \leqslant 1$;
2. Если $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > 0$, то $U(\xi, \lambda_1 E) \geqslant U(\xi, \lambda_2 E)$;
3. $\mathbf{M}(p_E(\tilde{\xi}) \wedge 1)^2 \geqslant (1 - U(\xi, E))^2$;
4. $U(\xi, E) \leqslant \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-k}(kd^2 + 1)^d\right) Q(\xi, E)$,

где E — выпуклое, замкнутое, ограниченное, симметричное с непустой внутренностью множество; если a и b — числа, то $a \wedge b = \min(a, b)$; $Q(\xi, E)$ — функция концентрации (Леви) случайного вектора ξ на R^d и $Q(\xi, E) = \sup\limits_{y \in R^d} \mathbf{P}(\xi \in y + E)$.

В данной работе исследуется поведение интегральной функции концентрации для $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные векторы в R^d. Первые оценки такого рода получены Энгером (см. [2]). Но надо заметить, что Энгер нигде не вводит явно такую интегральную характеристику концентрации, а только использует ее в качестве вспомогательной величины для оценки функции концентрации Леви.

Определим некоторый класс Ω выпуклых множеств из R^d. Пусть $x \in R^d$, $x = (x_1, \ldots, x_d), (x, y) = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$, $y \in R^d$, $|x| = (x, x)^{1/2}$.

Допустим $\mathbf{A}$ — класс таких выпуклых множеств из R^d, для которых $p_E(x) = \sum_{i=1}^{m} |A_i x|$, где $A_1, \ldots, A_m$ — произвольные линейные операторы в R^d, тогда $\mathbf{\Omega}$ — класс таких выпуклых множеств из R^d, являющихся предельными для множества из класса $\mathbf{A}$ в том смысле, что существует последовательность $\{E_k\}_{k \in N}$ множеств из $\mathbf{A}$: $p_{E_k}(x) \to p_E(x)$, для всех $x \in R^d$ при $k \to \infty$. Множество $\left\{x \in R^d;\ \sum_{i=1}^{d} |x_i| \leqslant 1\right\} \in \mathbf{\Omega}$. Множество $\left\{x \in R^d;\ \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i| \leqslant 1\right\} \notin \mathbf{\Omega}$ при $d \geqslant 3$. Из результатов Энгера вытекает

Теорема В. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — *независимые случайные векторы в* R^d. *Пусть* $E \in \Omega$, $\lambda \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, *тогда* $U(S_n, \lambda E) \leqslant C\lambda \times \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(p_E(\tilde{\xi}_k) \wedge \lambda_k)^2\right)^{-1/2}$ *и*

$$U(S_n, \lambda E) \leqslant C\lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 (1 - U(\xi_k, \lambda_k E))^2\right)^{-1/2}. \qquad (*)$$

Неравенство (*) следует из теоремы А.

Здесь и далее, если особо не оговорено, C — абсолютная постоянная. Если возьмем более широкий класс выпуклых множеств, то получим зависимость оценок такого рода от размерности пространства.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные векторы в R^d, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Тогда справедлива

Теорема С (Ананьевский). Если $E \subset R^d$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество, симметричное и с непустой внутренностью, то

$$U(S_n, E) \leqslant Cd \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} (kd^2 + 1)^d\right) \left(\sum_{k=1}^{n} (1 - U(\xi_k, E))^2\right)^{-1/2}.$$

Этот результат следует из теоремы А и работы Энгера.

Теорема Д (Энгер). *Если* E — *выпуклое, симметричное множество в* R^d, $\lambda \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k$, *то*

$$Q(S_n, \lambda E) \leqslant Cd\lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(p_E(\tilde{\xi}_k) \wedge \lambda_k)^2\right)^{-1/2}.$$

Теорема Е (Энгер). *Если* E — *ограниченное, поглощающее, симметричное, выпуклое множество в* R^d, *то*

$$Q(S_n, \lambda E) \leqslant C(d) \inf_{u>0} \frac{\lambda^d + u^d}{u^d + \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_i^E(u)\right)^{d/2}},$$

где $\chi_i^E(u) = \inf\limits_{p_{E^*}(t)=1} \int\limits_{p_E(x) \leqslant u} (t, x)^2 \tilde{\mathbf{P}}_i(dx)$, $E^* = \{t \in R^d;\ |(t, x)| \leqslant 1,$

$\forall x \in E\}$, $E=\{x\in R^d;\ p_E(x)\leqslant 1\}$, $\widetilde{\mathbf{P}}_i(\cdot)$ — распределение вектора $\widetilde{\xi}_i$.

Интегральная функция концентрации представляет собой многомерную характеристику одной из одномерных обобщенных функций концентрации (см. [1]), следовательно, оценки для $U(S_n, E)$, данные в теоремах A, B, C, являются многомерными аналогами неравенств типа Колмогорова — Рогозина (см. [3—8]). Основной целью этой работы является получение оценок интегральной функции концентрации локального типа (оценок типа Кестена) (см. [8—14]).

Из этих результатов вытекают все упоминавшиеся выше оценки (теоремы A, B, C, Д, E).

2. Формулировка основных результатов

Теорема 1. *Пусть $\xi, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные векторы в R^d,*

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\quad \lambda\geqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}\lambda_k,\quad E\in\mathbf{\Omega},$$

тогда

$$U(S_n,\lambda E)\leqslant C\lambda\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}(p_E(\widetilde{\xi}_k)\wedge\lambda_k)^2U^{-2}(\xi_k,\lambda E)\right)^{-1/2}.$$

Следствие 1.1. *В условиях теоремы 1 для одинаково распределенных случайных величин ξ_k при $\lambda_k=\lambda_0$, $k=\overline{1,n}$,*

$$U(S_n,\lambda E)\leqslant C\frac{\lambda}{\lambda_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{U(\xi_1,\lambda E)}{1-U(\xi_1,\lambda_0 E)}.$$

Теорема 2. *Пусть E — выпуклое, симметричное множество в R^d. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные векторы в R^d,*

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\quad \lambda\geqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}\lambda_k,$$

тогда

$$U(S_n,\lambda E)\leqslant Cd\lambda\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}(p_E(\widetilde{\xi}_k)\wedge\lambda_k)^2\right)^{-1/2}.$$

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые элементы в H, $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. Класс **A** строится из множеств вида

$$E=\left\{x\in H;\ p_E(x)=\sum_{i=1}^{m}\|A_ix\|\leqslant 1\right\},$$

где A_i, $i=\overline{1,m}$,— линейные ограниченные операторы в H.

Аналогично конечномерному случаю строится класс $\underline{\mathbf{\Omega}}$ (см. [2]).

Теорема 3. *В сепарабельном гильбертовом пространстве H для $E\in\mathbf{\Omega}$, $\lambda\geqslant\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\lambda_k$ имеем*

$$U(S_n,\lambda E)\leqslant C\lambda\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}(p_E(\widetilde{\xi}_k)\wedge\lambda_k)^2U^{-2}(\xi_k,\lambda E)\right)^{-1/2}.$$

Следствие 3.1. *В условиях теоремы 3 для одинаково распределенных элементов в H при $\lambda_k=\lambda_0$ для $k=\overline{1,n}$ получим*

$$U(S_n,\lambda E)\leqslant C\frac{\lambda}{\lambda_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{U(\xi_1,\lambda E)}{1-U(\xi_1,\lambda_0 E)}.$$

Теорема 4. *Если E — ограниченное поглощающее симметричное, выпуклое множество в R^d, то*

$$U(S_n,\lambda E)\leqslant C(d)\inf_{u>0}\frac{\lambda^d+u^d}{u^d+\left(\sum_{i=1}^{n}\chi_i^E(u)\right)^{d/2}},$$

и если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *одинаково распределены, то*

$$U(S_n, \lambda E) \leqslant C(d) \inf_{n>0} \frac{\lambda^d + u^d}{\left(\chi_1^E(u)\right)^{d/2}} n^{-d/2}.$$

3. Доказательство вспомогательных результатов

Лемма 1. *Пусть* ξ_1 *и* ξ_2 — *независимые случайные векторы в* R^d, $E \in \Omega$, *тогда* $U(\xi_1+\xi_2, E) \leqslant U(\xi_1, E) \wedge (U(\xi_2, E)$.

Доказательство. Пусть $E \in \mathbf{A}$, тогда, как следует из [2], $\exp\{-p_E(x)\}$ — характеристическая функция некоторой вероятностной меры $\mu(\cdot)$. Следовательно, если ξ_1 и ξ_2 — два независимых случайных вектора в R^d, $\widetilde{\mathbf{P}}_1(\cdot)$ — распределение $\widetilde{\xi}_1$, $\widetilde{\mathbf{P}}(\cdot)$ — распределение $\widetilde{\xi}_1+\widetilde{\xi}_2$, то

$$U(\xi_1+\xi_2, E) = \int_{R^d} \exp\{-p_E(x)\} \widetilde{\mathbf{P}}(dx) =$$

$$= \int_{R^d}\int_{R^d} \cos(t, x) \widetilde{\mathbf{P}}(dx) \mu(dt) = \int_{R^d} |f_1(t)|^2 |f_2(t)|^2 \mu(dt) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{R^d} |f_1(t)|^2 \mu(dt) = \int_{R^d}\int_{R^d} \cos(t, x) \widetilde{\mathbf{P}}_1(dx) \mu(dt) = \int_{R^d} e^{-p_E(x)} \widetilde{\mathbf{P}}_1(dx) = U(\xi_1, E),$$

где $f_1(t)$ — характеристическая функция ξ_1, а $f_2(t)$ — характеристическая функция ξ_2. Следовательно, для $E \in \mathbf{A}$, $U(\xi_1+\xi_2, E) \leqslant U(\xi_1, E)$ и аналогично следует $U(\xi_1+\xi_2, E) \leqslant U(\xi_2, E)$.

Лемма 1 доказана для $E \in \mathbf{A}$. Рассмотрим последовательность множеств $\{E_k\}_{k\in N} \in \mathbf{A}$ для всех k таких, что $p_{E_k}(x) \to p_E(x)$ при $k \to \infty$ для всех $x \in R^d$. Так как лемма 1 выполняется для множеств E_k, то, устремляя $k \to \infty$, распространяем результат на класс Ω.

Лемма 2. *Пусть* $E \in \Omega$, $p_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, $\sum_{k=1}^n p_k^{-1} = 1$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — *независимые случайные векторы в* R^d, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $\widetilde{S}_m^{(k)} = \sum_{i=1}^m \widetilde{\xi}_k^{(i)}$, *где* $\widetilde{\xi}_k^{(i)}$, $i = \overline{1, m}$, *независимые случайные векторы, одинаково распределенные с вектором* $\widetilde{\xi}_k$. *Здесь* $\widetilde{\mathbf{P}}_n(\cdot)$ — *распределение вектора* $\widetilde{S}_n$, $\widetilde{\mathbf{P}}_m^{(k)}$ — *распределение вектора* $\widetilde{S}_m^{(k)}$, $[\cdot]$ — *целая часть числа, тогда*

$$\int_{R^d} e^{-p_E(x)} \widetilde{\mathbf{P}}_n(dx) \leqslant \sum_{k=1}^n p_k^{-1} \int_{R^d} e^{-p_E(x)} \widetilde{\mathbf{P}}_{[p_k]}^{(k)}(dx) \quad \textit{или}$$

$$U(S_n, E) \leqslant \sum_{k=1}^n p_k^{-1} U\left(S_{[p_k]}^{(k)}, E\right), \ \sum_{k=1}^n p_k^{-1} = 1.$$

Доказательство. Мы докажем лемму 2 для множеств из класса $\mathbf{A}$, так как для класса Ω оценки будут следовать с помощью простого предельного перехода, как и в доказательстве леммы 1.

Пусть $E \in \mathbf{A}$, тогда $\exp\{-p_E(x)\} = \int_d \cos(t, x) \mu(dt)$, где $\mu(\cdot)$ — некоторая вероятностная мера в R^d. Имеем

$$\int_{R^d} e^{-p_E(x)} \widetilde{\mathbf{P}}_n(dx) = \int_{R^d} \prod_{k=1}^n |f_k(t)|^2 \mu(dt),$$

где $f_k(t)$ — характеристическая функция случайного вектора ξ_k. Пусть $p_k > 0$ и $\sum_{k=1}^n p_k^{-1} \equiv 1$, тогда по неравенству Гельдера получим

$$\int_{R^d} \prod_{k=1}^n |f_k(t)|^2 \mu(dt) \leqslant \prod_{k=1}^n \left(\int_{R^d} |f_k(t)|^{2[p_k]} \mu(dt)\right)^{p_k^{-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k^{-1} \int_{R^d} |f_k(t)|^{2[p_k]} \mu(dt) = \sum_{k=1}^{n} p_k^{-1} \int_{R^d} \int_{R^d} \cos(t, x)\, \widetilde{\mathbf{P}}^{(k)}_{[p_k]}(dx)\, \mu(dt) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k^{-1} \int_{R^d} e^{-p_E(x)} \widetilde{\mathbf{P}}^{(k)}_{[p_k]}(dx) = \sum_{k=1}^{n} p_k^{-1} U\left(S^{(k)}_{[p_k]}, E\right),$$

и доказательство леммы закончено.

Лемма 3. *Пусть* ξ — *случайный вектор в* R^d, $E \in \mathbf{\Omega}$, *тогда* $Q(\widetilde{\xi}, \lambda E) \leqslant eU(\xi, \lambda E)$.

Доказательство. Для простоты положим $\lambda = 1$ и $E \in \mathbf{A}$, тогда для произвольного $y \in R^d$ $\mathbf{P}(\widetilde{\xi} \in y + E) = \int_E \widetilde{\mathbf{P}}_y(dx)$, где $\widetilde{\mathbf{P}}_y(\cdot)$ — распределение случайного вектора $\widetilde{\xi} - y$. Имеем

$$\int_E \widetilde{\mathbf{P}}_y(dx) \leqslant e \int_E e^{-p_E(x)} \widetilde{\mathbf{P}}_y(dx) \leqslant e \int_{R^d} e^{-p_E(x)} \widetilde{\mathbf{P}}(dx) = e \int_{R^d} \int_{R^d} \cos(t, x) \times$$

$$\times \widetilde{\mathbf{P}}_y(dx)\, \mu(dt) \leqslant e \int_{R^d} \int_{R^d} \cos(t, x)\, \widetilde{\mathbf{P}}_0(dx)\, \mu(dt) = eU(\xi, E).$$

Теперь перейдем к классу $\mathbf{\Omega}$. Возьмем $\delta > 0$ и $E_{k,\delta} = (1+\delta)F_k$, где $E_k \in \mathbf{A}$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что $p_{E_k}(x) \to p_E(x)$ при $k \to \infty$ для любого $x \in R^d$.

Тогда $E \subset \liminf\limits_{k\to\infty} E_{k,\delta}$ и $\lim\limits_{\delta\to 0} \lim\limits_{k\to\infty} p_{E_{k,\delta}}(x) = p_E(x)$, и

$$\mathbf{P}(\widetilde{\xi} \in y + E) \leqslant \mathbf{P}\left(\widetilde{\xi} \in y + \varliminf_{\delta\to 0} \varliminf_{k\to\infty} E_{k,\delta}\right) \leqslant \varliminf_{\delta\to 0} \varliminf_{k\to\infty} \mathbf{P}(\widetilde{\xi} \in y + E_{k,\delta}) \leqslant$$

$$\leqslant e \varliminf_{\delta\to 0} \varliminf_{k\to\infty} \int_{R^d} e^{-p_{E_{k,\delta}}(x)} \widetilde{\mathbf{P}}_0(dx) = e \int_{R^d} e^{-p_E(x)} \widetilde{\mathbf{P}}_0(dx) = eU(\xi, E),$$

и лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* ξ — *случайный вектор в* R^d, $E \in \mathbf{\Omega}$, $x \in R^d$,

$$U_x(\xi, E) = \int_{R^d} e^{-p_E(y)} \widetilde{\mathbf{P}}_x(dy),$$

где $\widetilde{\mathbf{P}}_x(\cdot)$ — *распределение случайного вектора* $\widetilde{\xi} + x$, *тогда*

$$\sup_{x\in R^d} U_x(\xi, E) = U(\xi, E).$$

Доказательство. Очевидно, что $U(\xi, E) \leqslant \sup\limits_{x\in R^d} U_x(\xi, E)$, с другой стороны, возьмем произвольное $x \in R^d$, $E \in \mathbf{A}$, и $\exp\{-p_E(y)\}$ — характеристическая функция с некоторой вероятностной мерой $\mu(\cdot)$, т. е. $e^{-p_E(y)} = \int_{R_d} \cos(t, y)\, \mu(dt)$, следовательно,

$$U_x(\xi, E) = \int_{R^d} \int_{R^d} \cos(t, y)\, \widetilde{\mathbf{P}}_x(dy)\, \mu(dt),$$

где внутренний интеграл есть характеристическая функция случайного вектора $\widetilde{\xi}$, умноженная на $e^{i(t,x)}$. Оценивая этот интеграл по модулю, получим

$$U_x(\xi, E) \leqslant \int_{R^d} \int_{R^d} \cos(t, y)\, \widetilde{\mathbf{P}}_0(dy)\, \mu(dt) = U(\xi, E).$$

Осталось предельным переходом перейти к классу $\mathbf{\Omega}$ и лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — *независимые случайные векторы в* R^d, *одинаково распределенные с вектором* ξ,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad E \in \mathbf{\Omega}, \quad \lambda \geqslant \lambda_0,$$

тогда

$$U(S_n, \lambda E) \leqslant C \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda \frac{U(\xi, \lambda E)}{\sqrt{\mathbf{M}(p_E(\tilde{\xi}) \wedge \lambda_0)^2}}. \tag{1}$$

Доказательство. Доказательство леммы разобьем на несколько частей.

1. Если $n = 1$, то неравенство (1) следует из оценки

$$U(\xi, \lambda E) \leqslant \frac{\lambda}{\lambda_0} U(\xi, \lambda E) \leqslant \lambda \frac{U(\xi, \lambda E)}{\sqrt{\mathbf{M}(p_E(\tilde{\xi}) \wedge \lambda_0)^2}}.$$

Если $Q(\tilde{\xi}, \lambda E) \geqslant 1/2$, то — из теоремы B, так как при $\lambda_0 = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$U(S_n, \lambda E) \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}} \lambda (\mathbf{M}(p_E(\tilde{\xi}) \wedge \lambda_0)^2)^{-1/2} \leqslant 2C \frac{\lambda}{\sqrt{n}} Q(\tilde{\xi}, \lambda E) \times$$
$$\times (\mathbf{M}(p_E(\tilde{\xi}) \wedge \lambda_0)^2)^{-1/2} \leqslant 2eC \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \frac{U(\xi, \lambda E)}{\sqrt{\mathbf{M}(p_E(\tilde{\xi}) \wedge \lambda_0)^2}},$$

где последнее неравенство следует из леммы 3.

Следовательно, будем предполагать, что $n \geqslant 2$ и $Q(\tilde{\xi}, \lambda E) < 1/2$, и проводить доказательство для $E \in \mathbf{A}$, так как к классу $\mathbf{\Omega}$ можно перейти предельным переходом.

2. Положим $A_k = \left\{x \in R^d;\ k < \frac{p_E(x)}{\lambda} \leqslant k + 1\right\}$, $B_m = m\lambda E$, $E = \{x \in R^d;\ p_E(x) \leqslant 1\}$. Пусть целое $m \geqslant 2$ и случайный вектор ξ таковы, что $\mathbf{P}(\tilde{\xi} \in B_m) \geqslant 1/2$, но $\mathbf{P}(\tilde{\xi} \in B_{m-1}) < 1/2$. Обозначим событие $D = \{\tilde{\xi} \in B_m\}$, тогда $\mathbf{P}(D) \geqslant 1/2$, и, если $\bar{D}$ обозначить дополнение к событию D, то $\mathbf{P}(\bar{D}) \leqslant 1/2$.

Пусть Q — распределение случайного вектора S, независимого от случайного вектора $\tilde{\xi}$, тогда

$$\mathbf{P}(S + \tilde{\xi} \in A_k) = \int_{R^d} \mathbf{P}(\tilde{\xi} \in A_k - x) Q(dx) = \int_{R^d} \mathbf{P}(\{\tilde{\xi} \in A_k - x\} \cap D) Q(dx) +$$
$$+ \int_{R^d} \mathbf{P}(\{\tilde{\xi} \in A_k - x\}/\bar{D}) \mathbf{P}(\bar{D}) Q(dx) \leqslant \int_{R^d} \mathbf{P}(\{\tilde{\xi} \in A_k - x\} \cap D) Q(dx) +$$
$$+ \frac{1}{2} \mathbf{P}(S + \tilde{\xi}' \in A_k). \tag{2}$$

Здесь случайный вектор $\tilde{\xi}'$ не зависит от S и имеет распределение

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}' \in \beta) = \mathbf{P}(\tilde{\xi} \in \beta/\bar{D}),$$

где β — борелевское множество в R^d.

Пусть $a \vee b = \max(a, b)$. Оценим интеграл в формуле (2):

$$\int_{R^d} \mathbf{P}(\{\tilde{\xi} \in A_k - x\} \cap D) Q(dx) \leqslant \int_{2(m \vee (k+1))\lambda E} \mathbf{P}(\{\tilde{\xi} \in A_k - x\} \cap$$
$$\cap \{\tilde{\xi} \in B_m\}) Q(dx) \leqslant \int_{2(m \vee (k+1))\lambda E} [\mathbf{P}(\tilde{\xi} \in A_k - x) \wedge \mathbf{P}(\xi \in B_m)] Q(dx).$$

Действительно, $\mathbf{P}(\{\tilde{\xi} \in A_k - x\} \cap \{\tilde{\xi} \in B_m\}) = 0$, если $x \notin A_k - B_m = \{y - z;\ y \in A_k,\ z \in B_m\}$. Если F — симметричное выпуклое множество такое, что $F = \{x \in R^d;\ p_F(x) \leqslant 1\}$, то $F - F \subset 2F$, так как при $x \in F - F$ следует, что $x=y-z$, где $y\in F$, $z\in F$, и $p_F(x)=p_F(y-z)\leqslant p_F(y)+p_F(-z)= = p_F(y)+p_F(z)\leqslant 2$, т. е. $p_F(x)\leqslant 2$ и, следовательно, $x\in 2F$. Осталось заметить, что $A_k\subset (k+1)\lambda E=B_{k+1}$. Таким образом, мы получили неравенство

$$\mathbf{P}(S+\tilde{\xi}\in A_k)\leqslant \int\limits_{2(m\vee(k+1))\lambda E} [\mathbf{P}(\tilde{\xi}\in A_k-x)\wedge \mathbf{P}(\tilde{\xi}\in B_m)]\,Q(dx)+ + \frac{1}{2}\mathbf{P}(S+\tilde{\xi}'\in A_k). \quad (3)$$

3. Положим $\tilde{S}_n^{(0)}=\tilde{S}_n$, $\tilde{S}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{\xi}_k$, $\tilde{S}_n^{(j)}=\sum\limits_{k=1}^{n-j}\tilde{\xi}_k+\sum\limits_{k=n-j+1}^{n}\tilde{\xi}'_k$, $j= =1,\ldots,n-1$. Случайные векторы $\tilde{\xi}_1,\ldots,\tilde{\xi}_n$, $\tilde{\xi}'_1,\ldots,\tilde{\xi}'_n$ взаимно независимы, а также $\tilde{\xi}_k$, $k=\overline{1,n}$, одинаково распределены с вектором $\tilde{\xi}$, а $\tilde{\xi}'_k$, $k=\overline{1,n}$, одинаково распределены с вектором $\tilde{\xi}'$. Положив в неравенстве (3) $S=\tilde{S}_{n-1}$ и $\tilde{\xi}=\tilde{\xi}_n$, получим

$$\mathbf{P}(\tilde{S}_{n-1}+\tilde{\xi}_n\in A_k)\leqslant \int\limits_{2(m\vee(k+1))\lambda E} [\mathbf{P}(\tilde{\xi}_n\in A_k-x)\wedge \mathbf{P}(\tilde{\xi}_n\in B_m)]\times \times \tilde{\mathbf{P}}_{n-1}(dx)+\frac{1}{2}\mathbf{P}(\tilde{S}'_n\in A),$$

где $\tilde{\mathbf{P}}_{n-1}(\cdot)$ — распределение $\tilde{S}_{n-1}$. Применим снова неравенство (3) для оценки $\mathbf{P}(\tilde{S}_n^{(')}\in A_k)$, положив в неравенстве (3)

$$S=\tilde{S}_n^{(')}-\tilde{\xi}_{n-1},\quad \tilde{\xi}=\tilde{\xi}_{n-1}.$$

Еще раз применим неравенство (3) для оценки

$$\mathbf{P}(\tilde{S}_n^{(2)}\in A_k),\ \text{положив}\ S=\tilde{S}_n^{(2)}-\tilde{\xi}_{n-2},\ \tilde{\xi}=\tilde{\xi}_{n-2},$$

после $(n-1)$-кратного применения этой процедуры получим

$$\mathbf{P}(\tilde{S}_n\in A_k)\leqslant \sum_{j=0}^{n-2}2^{-j}D_j(n,k)+\frac{1}{2^{n-1}}\mathbf{P}(\tilde{S}_n^{(n-1)}\in A_k).$$

Здесь $D_j(n,k)=\int\limits_{2(m\vee(k+1))\lambda E}[\mathbf{P}(\tilde{\xi}\in A_k-x)\wedge \mathbf{P}(\tilde{\xi}\in B_m)]\,\tilde{L}_n^{(j)}(dx)$,

где $\tilde{L}_n^{(j)}(\cdot)$ — распределение величины

$$\tilde{S}_n^{(j)}-\tilde{\xi}_{n-j}=\sum_{k=1}^{n-j-1}\tilde{\xi}_k+\sum_{k=n-j+1}^{n}\tilde{\xi}'_k,\quad j=0,\ldots,n-1,$$

$\tilde{L}_n^{(0)}(\cdot)=\tilde{\mathbf{P}}_{n-1}(\cdot)$, $\tilde{L}_n^{(n-1)}(\cdot)$ — распределение $\sum\limits_{k=2}^{n}\tilde{\xi}'_k$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(\tilde{S}_n\in A_k)\leqslant \sum_{j=0}^{n-2}2^{-j}D_j(n,k)+\frac{1}{2^{n-1}}\int\limits_{R^d}\mathbf{P}(\tilde{\xi}\in A_k-x)\,\tilde{L}_n^{(n-1)}(dx). \quad (4)$$

4. Из неравенства (4) получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\mathbf{P}(\tilde{S}_n\in A_k)\leqslant \sum_{k=0}^{m-1}e^{-k}\sum_{j=0}^{n-2}2^{-j}\int\limits_{2m\lambda E}\mathbf{P}(\tilde{\xi}\in A_k-x)\,\tilde{L}_n^{(j)}(dx)+ + \sum_{k=m}^{\infty}e^{-k}\sum_{j=0}^{n-2}2^{-j}\mathbf{P}(\tilde{\xi}\in B_m)\int\limits_{2(k+1)\lambda E}\tilde{L}_n^{(j)}(dx)+ + \sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}2^{-n+1}\int\limits_{R^d}\mathbf{P}(\tilde{\xi}\in A_k-x)\,\tilde{L}_n^{(n-1)}(dx).$$

Оценим величины

$$I_1(j) = \sum_{k=0}^{m-1} e^{-k} \int_{2m\lambda E} \mathbf{P}\left(\tilde{\xi} \in A_k - x\right) \tilde{L}_n^{(j)}(dx),$$

$$I_2(j) = \sum_{k=m}^{\infty} e^{-k} \int_{2(k+1)\lambda E} \tilde{L}_n^{(j)}(dx)\, \mathbf{P}\left(\tilde{\xi} \in B_m\right),$$

$$I_3 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} 2^{-n+1} \int_{R^d} \mathbf{P}\left(\tilde{\xi} \in A_k - x\right) \tilde{L}_n^{(n-1)}(dx).$$

5. Начнем с оценки величины I_3. Имеем

$$I_3 = 2^{-n+1} \int_{R^d} \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \mathbf{P}\left(\tilde{\xi} \in A_k - x\right)\right] \tilde{L}_n^{(n-1)}(dx) =$$

$$= 2^{-n+1} \int_{R^d} \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \int_{A_k} \tilde{\mathbf{P}}_x(dy)\right] \tilde{L}_n^{(n-1)}(dx),$$

где $\mathbf{P}_x(\cdot)$ — распределение $\tilde{\xi} + x$, следовательно,

$$I_3 \leqslant 2^{-n+1} \int_{R^d} \left[\sum_{k=0}^{\infty} e \int_{A_k} e^{-\frac{p_E(y)}{\lambda}} \tilde{\mathbf{P}}_x(dy)\right] \tilde{L}_n^{(n-1)}(dx) =$$

$$= 2^{-n} 2e \int_{R^d} U_x(\xi, \lambda E)\, \tilde{L}_n^{(n-1)}(dx) \leqslant (\text{по лемме } 4) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-n} 2eU(\xi, \lambda E) \int_{R^d} \tilde{L}_n^{(n-1)}(dx) = 2^{-n} 2eU(\xi, \lambda E).$$

Таким образом, $I_3 \leqslant \dfrac{C_3}{\sqrt{n}} U(\xi, \lambda E)$.

6. Оценим $I_1(j)$

$$I_1(j) = \int_{2m\lambda E} \left[\sum_{k=0}^{m-1} e^{-k} \int_{k < \frac{p_E(y)}{\lambda} \leqslant k+1} \tilde{\mathbf{P}}_x(dy)\right] \tilde{L}_n^{(j)}(dx) \leqslant$$

$$\leqslant e \int_{2m\lambda E} \left[\int_{\frac{p_E(y)}{\lambda} \leqslant m} e^{-\frac{p_E(y)}{\lambda}} \tilde{P}_x(dy)\right] \tilde{L}_n^{(j)}(dx) \leqslant e \int_{2m\lambda E} \left[\int_{R^d} e^{-\frac{p_E(y)}{\lambda}} \tilde{\mathbf{P}}_x(dy)\right] \times$$

$$\times \tilde{L}_n^{(j)}(dx) \leqslant eU(\xi, \lambda E) \int_{2m\lambda E} \tilde{L}_n^{(j)}(dx),$$

где последнее неравенство следует из леммы 4. Следовательно,

$$I_1(j) \leqslant eU(\xi, \lambda E)\, Q\left(\tilde{S}_n^{(j)} - \tilde{\xi}_{n-j}, 2m\lambda E\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^2 U(\xi, \lambda E)\, U\left(\sum_{k=1}^{n-j-1} \xi_k + \sum_{k=n-j+1}^{n} \xi_k', 2m\lambda E\right) \leqslant (\text{по лемме } 1) \leqslant$$

$$\leqslant e^2 U(\xi, \lambda E)\, U(S_{n-j-1}, 2m\lambda E).$$

Тогда из теоремы B получим

$$I_1(j) \leqslant e^2 U(\xi, \lambda E)\, U(S_{n-j-1}, 2m\lambda E) \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{2m}{m-1} \frac{1}{\sqrt{n-j-1}} \frac{U(\xi, \lambda E)}{\sqrt{\mathbf{M}\left(\frac{p_E(\tilde{\xi})}{(m-1)\lambda} \wedge 1\right)^2}}.$$

Следовательно,

$$I_1(j) \leqslant \frac{C}{\sqrt{n-j-1}} \frac{U(\xi, \lambda E)}{\sqrt{1-\mathbf{P}(\tilde{\xi} \in (m-1)\lambda E)}} \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{n-j-1}} U(\xi, \lambda E).$$

Последнее неравенство следует из того, что

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi} \in B_{m-1}) < \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$I_1(j) \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{n-j-1}} U(\xi, \lambda E).$$

7. Оценим $I_2(j)$:

$$I_2(j) \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} e^{-(k-m)} \int\limits_{B_m} e^{-\frac{p_E(y)}{\lambda}} \tilde{\mathbf{P}}(dy) \int\limits_{2(k+1)\lambda E} \tilde{L}_n^{(j)}(dx) \leqslant$$

$$\leqslant U(\xi, \lambda E) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \int\limits_{2(k+m+1)\lambda E} \tilde{L}_n^{(j)}(dx) \leqslant U(\xi, \lambda E) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \int\limits_{2(k+1)(m+1)\lambda E} \tilde{L}_n^{(j)}(dx) \leqslant$$

$$\leqslant eU(\xi, \lambda E) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \int\limits_{2(k+1)(m+1)\lambda E} e^{-\frac{p_E(x)}{2(k+1)(m+1)\lambda}} \tilde{L}_n^{(j)}(dx).$$

Следовательно,

$$I_2(j) \leqslant eU(\xi, \lambda E) \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i} U\left(\sum_{k=1}^{n-j-1} \xi_k + \sum_{k=n-j+1}^{n} \xi_k', 2(i+1)(m+1)\lambda E\right).$$

По лемме 1 имеем

$$I_2(j) \leqslant eU(\xi, \lambda E) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} U(S_{n-j-1}, 2(k+1)(m+1)\lambda E).$$

Из теоремы B следует

$$I_2(j) \leqslant eU(\xi, \lambda E) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \frac{C}{\sqrt{n-j-1}} \frac{2(k+1)(m+1)\lambda}{(m-1)\lambda} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\mathbf{M}\left(\frac{p_E(\tilde{\xi})}{(m-1)\lambda} \wedge 1\right)^2}} \leqslant CU(\xi, \lambda E) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}(k+1) \frac{1}{\sqrt{n-j-1}} \leqslant$$

$$\leqslant CU(\xi, \lambda E) \frac{1}{\sqrt{n-j-1}},$$

так как

$$\mathbf{M}\left(\frac{p_E(\tilde{\xi})}{(m-1)\lambda} \wedge 1\right)^2 \geqslant \int\limits_{p_E(x) > \lambda(m-1)} \tilde{\mathbf{P}}(dx) = 1 - \mathbf{P}(\tilde{\xi} \in B_{m-1}) \geqslant \frac{1}{2},$$

$$\text{и } \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}(k+1) < C.$$

Таким образом,

$$I_2(j) \leqslant C_2 \frac{U(\xi, \lambda E)}{\sqrt{n-j-1}}.$$

8. Следовательно, мы имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \mathbf{P}(\tilde{S}_n \in A_k) \leqslant \sum_{j=0}^{n-2} 2^{-j} \frac{C_1}{\sqrt{n-j-1}} U(\xi, \lambda E) +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-2} 2^{-j} \frac{C_2}{\sqrt{n-j-1}} U(\xi, \lambda E) + \frac{C_3}{\sqrt{n}} U(\xi, \lambda E) \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}} U(\xi, \lambda E),$$

так как

$$\sum_{j=0}^{n-2} 2^{-j} \frac{1}{\sqrt{n-j-1}} \leqslant \frac{C_4}{\sqrt{n}}.$$

Окончательно

$$U(S_n, \lambda E) = \int_{R^d} \exp\left\{-\frac{p_E(x)}{\lambda}\right\} \widetilde{\mathbf{P}}_n(dx) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} \exp\left\{-\frac{p_E(x)}{\lambda}\right\} \widetilde{\mathbf{P}}_n(dx) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \int_{A_k} \widetilde{\mathbf{P}}_n(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in A_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\sqrt{n}} U(\xi, \lambda E) \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}} \frac{\lambda}{\lambda_0} U(\xi, \lambda E) \leqslant C\lambda \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{U(\xi, \lambda E)}{\sqrt{\mathbf{M}\left(p_E(\widetilde{\xi}) \wedge \lambda_0\right)^2}}.$$

Предельным переходом лемма обобщается на класс $\mathbf{\Omega}$. Доказательство закончено.

4. Доказательство основных теорем

Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим для $k = 1, 2, \ldots, n$ величины

$$p_k = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\left(p_E(\widetilde{\xi}_k) \wedge \lambda_k\right)^2 U^{-2}(\xi_k, \lambda E)}{\mathbf{M}\left(p_E(\widetilde{\xi}_k) \wedge \lambda_k\right)^2 U^{-2}(\xi_k, \lambda E)}, \quad \lambda \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k.$$

Очевидно,

$$p_k \geqslant 1 \text{ и } \sum_{k=1}^{n} p_k^{-1} \equiv 1.$$

По лемме 2 имеем

$$U(S_n, \lambda E) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k^{-1} U\left(S_{[p_k]}^{(k)}, \lambda E\right).$$

Тогда по лемме 5 получим

$$U(S_n, \lambda E) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k^{-1} C\lambda \frac{1}{\sqrt{p_k}} \frac{U(\xi_k, \lambda E)}{\sqrt{\mathbf{M}\left(p_E(\widetilde{\xi}_k) \wedge \lambda_k\right)^2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k^{-1} C\lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\left(p_E(\widetilde{\xi}_k) \wedge \lambda\right)^2 U^{-2}(\xi_k, \lambda E)\right)^{-1/2},$$

и так как $\sum_{k=1}^{n} p_k^{-1} = 1$, то теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1.1 следует из теоремы 1 и теоремы А (п. 3).

Доказательство теоремы 2. Оценим интегральную функцию концентрации $U(S_n, \lambda E)$ через функцию концентрации Леви:

$$U(S_n, \lambda E) = \int_{R^d} \exp\left\{-\frac{p_E(x)}{\lambda}\right\} \widetilde{\mathbf{P}}_n(dx) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k < \frac{p_E(x)}{\lambda} \leqslant k+1} \exp\left\{-\frac{p_E(x)}{\lambda}\right\} \widetilde{\mathbf{P}}_n(dx) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \int\limits_{k < \frac{p_E(x)}{\lambda} \leqslant k+1} \widetilde{\mathbf{P}}_n(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \int_{(k+1)\lambda E} \widetilde{\mathbf{P}}_n(dx) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} Q(\widetilde{S}_n, (k+1)\lambda E) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} Q(S_n, (k+1)\lambda E).$$

Следовательно, из теоремы Д получим

$$U(S_n, \lambda E) \leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) e^{-k} \lambda d \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}(p_E(\widetilde{\xi}_j) \wedge \lambda_j)^2 \right)^{-1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\lambda d \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(p_E(\widetilde{\xi}_k) \wedge \lambda_k)^2 \right)^{-1/2},$$

и доказательство закончено.

Результат теоремы, несмотря на простоту доказательства, существенно улучшает оценку из теоремы С.

Теперь перейдем к бесконечномерному пространству и докажем теорему 3.

Доказательство теоремы 3. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим за H_d подпространство с базисом $e_1, \ldots, e_d$, P_d — проекция H на H_d.

Рассмотрим следующие величины:

$$\xi_{d,k} = P_d \xi_k, \quad S_{d,n} = \sum_{k=1}^{n} \xi_{d,k},$$

$A_1, \ldots, A_m$ — ограниченные линейные операторы в H,

$$E_d = \left\{ x \in H;\ \sum_{j=1}^{m} \| P_d A_j P_d x \| \leqslant 1 \right\}.$$

Так как $\xi_{d,k}$ можно рассматривать как d-мерные случайные векторы со значениями в H_d, то для H_d имеем

$$U(S_n, \lambda E_d) = \mathbf{M} \exp\{-p_{E_d}(\widetilde{S}_n)/\lambda\} = \mathbf{M} \exp\{-p_{E_d}(\widetilde{S}_{d,n})/\lambda\} = U(S_{d,n}, \lambda E_d),$$

так как $\widetilde{S}_{d,n} = P_d \widetilde{S}_n$,

$$p_{E_d}(x) = \sum_{j=1}^{m} \| P_d A_j P_d x \| = \sum_{j=1}^{m} \| P_d A_j P_d (P_d x) \| = p_{E_d}(P_d(x))$$

для любого $x \in H$ и, следовательно, из теоремы 1 получим

$$U(S_n, \lambda E_d) \leqslant C\lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(p_{E_d}(\widetilde{\xi}_k) \wedge \lambda_k)^2 U^{-2}(\xi_k, \lambda E_d) \right)^{-1/2}.$$

Нам остается заметить, что, как следует из [2],

$$p_{E_d}(x) \to p_E(x) \text{ при } d \to \infty \text{ для всех } x \in H,$$

где

$$E = \left\{ x \in H,\ \sum_{j=1}^{m} \| A_j x \| \leqslant 1 \right\}.$$

Переход к классу Ω не представляет затруднений, и доказательство заканчивается.

Доказательство следствия 3.1 будет получено, если мы проведем доказательство, аналогичное теореме 3, но вместо теоремы 1, используем оценку из следствия 1.1.

Доказательство теоремы 4. Используем следующие неравенства:

$$U(S_n, \lambda E) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k < \frac{p_E(x)}{\lambda} \leqslant k+1} \exp\left\{-\frac{p_E(x)}{\lambda}\right\} \widetilde{\mathbf{P}}_n(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} Q(S_n, \lambda(k+1)E) \leqslant (\text{из теоремы } E) \leqslant C(d) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \times$$

$$\times \inf_{u>0} \frac{(\lambda^d + u^d)(k+1)^d}{u^d + \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_i^E(u)\right)^{d/2}} \leqslant C(d) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}(k+1)^d \inf_{n>0} \frac{\lambda^d + u^d}{u^d + \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_i^E(u)\right)^{d/2}},$$

но $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}(k+1)^d \leqslant C(d) < \infty$ для любого фиксированного d, и если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены, то

$$u^d + \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_i^E(u)\right)^{d/2} \geqslant n^{d/2}\left(\chi_1^E(u)\right)^{d/2},$$

и теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую признательность и благодарность Б. А. Рогозину за постоянный интерес и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ананьевский С. М.** Функции концентрации сумм независимых случайных величин. Дис. Л.: ЛГУ, 1980.
2. **Enger J.** Bounds for the concentration functions of a sum of independent random vectors with values in a Euclidean or a Hilbert space. Thesis. Uppsala: Uppsala Univ., 1975.
3. **Kolmogorov A.** Sur les propriétés des fonctions de concentrations de M. P. Lévy. Ann. Inst. H. Poincaré, 1958, t. XVI, N 1, p. 27—34.
4. **Рогозин Б. А.** Об одной оценке функций концентрации.— Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, № 1, с. 103—105.
5. **Рогозин Б. А.** Об увеличении рассеивания сумм независимых случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, № 1, с. 106—108.
6. **Esseen C. G.** On the Kolmogorov — Rogozin inequality for the concentration functions.— Z. Wahrscheinlichkeiststheorie verw. Geb., 1966, t. 5, N 4, p. 210—216.
7. **Esseen C. G.** On the concentration function of a sum of independent random variables.— Z., Wahrscheinlichkeiststheorie verw. Geb., 1968, 9, 4, p. 290—308.
8. **Хенгартнер В., Теодореску Ф.** Функции концентрации. М.: Наука, 1980.
9. **Kesten H.** A sharper form of the Doeblin — Lévi — Kolmogorov — Rogozin inequality for concentration functions, Math. Scand., 1969, t. 25, N 1, p. 133—144.
10. **Kesten H.** Sums of independent random variables without moment conditions.— Ann. Math. Statist., 1972, t. 43, N 3, p. 701—732.
11. **Постникова Л. П., Юдин А. А.** Аналитический метод оценок функции концентраций.— Тр. Ордена Ленина Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, CXLIII, с. 143—151.
12. **Постникова Л. П., Юдин А. А.** Усиленная форма неравенства для функции концентрации.— Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. XXIII, № 2, с. 376—379.
13. **Halász G.** Estimates for the concentration of sums of independent random variables.— Третья междунар. Вильн. конф. по теории вероятн. и мат. статистике (тезисы докладов). Вильнюс, 1981, с. 123.
14. **Мирошников А. Л., Рогозин Б. А.** Неравенства для функций концентрации.— Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, № 1, с. 178—183.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. В. ПОЖИДАЕВ

1. Формулировка основного результата и некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений

В работе изучается предельное поведение при $\varepsilon \to 0$ решения задачи Коши параболического типа со случайными коэффициентами:

$$\left.\begin{array}{c} Qw \equiv \partial w/\partial t - \left(b^{ij}(x, t) + a^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega)\right) w_{x_i x_j} = f(x, t), \\ w(0, x) = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$x \in R^n, \quad t \in [0, T], \quad T < \infty.$$

Предельное поведение решения задачи (1) рассматривается при следующих предположениях.