ТЕОРЕМА ОБ ОТЩЕПЛЕНИИ РАДИКАЛА ДЛЯ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР НАД КОЛЬЦОМ ГЕНЗЕЛЯ

В. Н. ЖЕЛЯБИН

Хорошо известна классическая теорема Веддербёрна — Мальцева о расщеплении ассоциативной конечномерной алгебры в сумму радикала и полупростой подалгебры и о единственности такого расщепления. Аналоги этой теоремы были доказаны затем для альтернативных [12], йордановых [9] алгебр и алгебр из ряда других многообразий, близких к ассоциативным [3, 4]. В 1951 г. Адзумая [5] обобщил теорему Веддербёрна — Мальцева, доказав ее для ассоциативных алгебр над локальным кольцом Гензеля, являющихся модулями конечного типа. В [2] автор доказал аналог теоремы Адзумаи об отщеплении радикала для альтернативных алгебр над локальным кольцом Гензеля с 1/2.

В настоящей статье рассматривается вопрос о расщеплении йордановых алгебр над локальным кольцом Гензеля. Оказывается, что и в этом случае справедлив аналог теоремы Адзумаи. Точная формулировка соответствующего результата дана в теореме 4.1.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже всюду K — ассоциативно-коммутативное кольцо с 1 и 1/2, J — йорданова алгебра с 1, являющаяся конечно порожденным K-модулем, $\mathcal{J}(A)$ — квазирегулярный радикал ассоциативной (альтернативной, йордановой) алгебры A. Для $a, b, c, \ldots \in J$ через R_a, U_a, $U_{a,b}$ мы будем обозначать оператор правого умножения на элемент a, $2R_a^2 - R_{a^2}$ и $R_aR_b + R_bR_a - R_{ab}$, а через $K[a, b, c, \ldots]$ — K-алгебру, порожденную элементами $a, b, c, \ldots$. Пусть элемент $x \in K[a]$, $x = \Sigma\alpha_j a^j$. Положим $x_i[a] = \sum_j \alpha_j a^{2j+i}$, где $\alpha_j \in K$, $i = 0, 1$, тогда $x = x_0[a] + x_1[a]$.

Предложение 1.1. *Пусть $\mathcal{P}$ — множество максимальных идеалов кольца K. Тогда*

1) $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} pJ \subseteq \mathcal{J}(J)$;

2) *существует такое натуральное число n, что* $[\mathcal{J}(J)]^n \subseteq \bigcap_{p\in\mathcal{P}} pJ$.

Доказательство. Пусть $p \in \mathcal{P}$. Через $I(p)$ обозначим идеал алгебры J, являющийся полным прообразом квазирегулярного радикала алгебры J/pJ.

Рассмотрим идеал $I = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} I(p)$. Ясно, что $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} pJ \subseteq I$. Покажем, что I — квазирегулярный идеал алгебры J. Пусть x — элемент из I. Тогда для любого $p \in \mathcal{P}$ образ элемента $\overline{1-x}$ в алгебре J/pJ обратим. Следовательно, $J/pJ = (J/pJ)U_{\frac{1}{\overline{1-x}}}$, где $\overline{1-x}$ — образ элемента $1-x$. Отсюда следует, что

$$J = JU_{1-x} + pJ$$

для любого $p \in \mathcal{P}$. В силу следствия теоремы 5 из [5] получим, что $J = JR_{1-x}$. Это означает обратимость элемента $1-x$, т. е. элемент x квазирегулярен. Следовательно, идеал I квазирегулярен, а поэтому $I \subseteq \mathcal{J}(J)$.

Докажем включение 2. Пусть алгебра J порождается как K-модуль n элементами. Тогда для любого идеала $p \in \mathcal{P}$ размерность алгебры J/pJ над полем K/p не больше, чем n. Следовательно, $(\mathcal{J}(J/pJ))^n = 0$. Отсюда $(\mathcal{J}(J))^n \subseteq pJ$ и поэтому $[\mathcal{J}(J)]^n \subseteq \bigcap\limits_{p \in \mathcal{P}} pJ$. Предложение 1.1 доказано.

Предложение 1.2. *Если $x \in J$, x — квазирегулярен с квазиобратным x', то $x' \in K[1, x]$.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $B = K[x', x, 1]$. Алгебра B ассоциативна (см. теорему 14.7 [1]) и конечно порождена как K-модуль (см. [1], лемма 5.7). Следовательно, ввиду теоремы 9 из [5] получаем, что $x' \in K[1, x]$. Предложение 1.2 доказано.

Следствие 1.1. *Для любой подалгебры B алгебры J, $B \cap \mathcal{J}(J) \subseteq \mathcal{J}(B)$.*

Далее, всегда K — локальное кольцо Гензеля с максимальным идеалом p (определение кольца Гензеля см. в [5]).

Лемма 1.1. *Пусть I — идеал в алгебре J. Тогда если $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ — система попарно ортогональных идемпотентов в фактор-алгебре J/I, то в J существует система попарно ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ таких, что $\varepsilon(e_i) = \bar{e}_i$, где ε — канонический гомоморфизм J на J/I.*

Доказательство. Пусть $\bar{e}$ — идемпотент в алгебре $\bar{J} = J/I$ и c — элемент из J такой, что $\varepsilon(c) = \bar{e}$. Рассмотрим алгебру $S = K[c]$. Так как $\bar{e} \in S/S \cap I$, то S содержит такой идемпотент e, что $\varepsilon(e) = \bar{e}$ (см. теорему 20 [5]).

Пусть теперь $\bar{e}_1$ — идемпотент в $\bar{J}$, ортогональный к $\bar{e}$. Рассмотрим алгебру $J_0(e)$ — нулевую пирсовскую компоненту относительно идемпотента e. Так как $J_0(e)$ совпадает с множеством элементов вида $a - 2ae + aU_e$, где a — произвольный элемент из J, то

$$\bar{J}_0(\bar{e}) = J_0(e)/I \cap J_0(e).$$

Пусть c — элемент из $J_0(e)$ такой, что $\varepsilon(c) = \bar{e}_1$; элемент c всегда существует, так как $\bar{e}_1 \in \bar{J}_0(\bar{e})$. Рассмотрим подалгебру $K\langle c\rangle$ в $J_0(e)$, порожденную полиномами от c без свободных членов. Так как фактор-алгебра $K\langle c\rangle/I \cap K\langle c\rangle$ содержит идемпотент e_1, то в $K\langle c\rangle$ существует идемпотент e_1 такой, что $\varepsilon(e_1) = \bar{e}_1$ (см. теорему 21 [5]). Ясно, что $ee_1 = 0$.

Предположим, что $e_1, \ldots, e_k$ — попарно ортогональные идемпотенты в J, причем $\varepsilon(e_i) = \bar{e}_i$. Тогда $f = \sum\limits_1^k e_i$ является идемпотентом в J и $\varepsilon(f)\bar{e}_{k+1} = 0$. Из вышедоказанного следует существование идемпотента e_{k+1}, ортогонального к f, и $\varepsilon(e_{k+1}) = e_{k+1}$. Докажем, что $e_ie_{k+1} = 0$ для любого $i = 1, \ldots, k$. Действительно, в силу тождества 3.22 из [1] и равенства $e_i = e_if$ имеем, с одной стороны,

$$e_ie_{k+1} = [(ff)e_i]e_{k+1} = (e_ie_{k+1})f.$$

С другой стороны,

$$e_ie_{k+1} = [(e_if)f]e_{k+1} = -[(e_ie_{k+1})f]f + (e_ie_{k+1})f.$$

Следовательно, $e_ie_{k+1} = 0$, и доказательство леммы завершается очевидной индукцией.

Лемма 1.2. *Пусть e_1 и e_2 — ортогональные идемпотенты в J. Тогда e_1, e_2 связаны (строго связаны) в том и только в том случае, когда их образы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ связаны (строго связаны) в алгебре $\bar{J} = J/\mathcal{J}(J)$.*

Доказательство. Если e_1, e_2 связаны (строго связаны) в J, то $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ связаны (строго связаны) в $\bar{J}$.

Обратно, пусть $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ связаны в алгебре $\bar{J}$. Тогда существует элемент $\bar{u}_{12} \in \bar{J}_{12}$, который обратим в алгебре $\bar{J}U_{\bar{u}}$, где $\bar{u} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$. Рассмотрим алгебру JU_u, где $u = e_1 + e_2$. Хорошо известно, что идеал $\mathcal{J}(J)U_u$ является квазирегулярным радикалом алгебры JU_u и $\bar{J}U_{\bar{u}} = JU_{\bar{u}}/(\mathcal{J}(J)U_u$. Пусть элемент $v \in JU_u$ является прообразом элемента $\bar{u}_{12}$. Тогда элемент $v_{12} = 2vU_{e_1,e_2} \in J_{12}$, и его образ в алгебре $\bar{J}U_{\bar{u}}$ совпадает с элементом

$\bar{u}_{12}$. Так как $\bar{u}_{12}$ обратим в $\bar{J}U_{\bar{u}}$, то v_{12} обратим в JU_u (см. лемму 10 гл. 14 [1]).

Пусть теперь $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ строго связаны в $\bar{J}$. Докажем, что e_1, e_2 строго связаны в J. Не уменьшая общности, можно считать, что $e_1 + e_2 = 1$. Пусть $\bar{u}_{12}$ — элемент из $\bar{J}_{12}$ такой, что $\bar{u}_{12}^2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 = 1$. Тогда элемент $\frac{1}{2}(\bar{1} - \bar{u}_{12})$ является идемпотентом.

Через u_{12} обозначим элемент из J_{12}, являющийся прообразом элемента $\bar{u}_{12}$. Рассмотрим алгебру $S = K\left[\frac{1}{2}(1 - u_{12})\right]$. Так как алгебра $S/\mathcal{J}(J) \cap \cap S$ содержит идемпотент $\frac{1}{2}(\bar{1} - \bar{u}_{12})$, то в S содержится идемпотент e, образ которого в алгебре $\bar{J}$ совпадает с $\frac{1}{2}[\bar{1} - \bar{u}_{12}]$.

Представим элемент e в виде суммы $g_0 + g_1$, где $g_i = e_i[u_{12}]$, $i = 0, 1$. Ясно, что $g_0 \in J_{11} + J_{22}$, $g_1 \in J_{12}$. Покажем, что $g_0 = 1/2$. Пусть $u = e_1 - e_2$. Тогда $u^2 = 1$. Так как $(eu)u = (g_0e_1 - g_0e_2)u = g_0e_1 + g_0e_2 = g_0$, то $eU_u = g_0 - g_1$. В силу тождества 3.47 из [1] имеем $(eU_u)^2 = eU_u$. Следовательно,

$$g_0 + g_1 = g_0^2 + 2g_0g_1 + g_1^2,$$
$$g_0 - g_1 = g_0^2 - 2g_0g_1 + g_1^2.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим, что $g_1 = 2g_0g_1$. Рассмотрим образ элемента g_1 в алгебре $\bar{J}$. В силу предложения 1.1 алгебру $\bar{J}$ можно рассматривать как алгебру над полем K/p. Ясно, что образ элемента g_1 имеет вид $\bar{\alpha}\bar{u}_{12}$, где $\bar{\alpha} \in K/p$. Так как образ элемента e в алгебре $\bar{J}$ не лежит в $\overline{K}/\bar{p}$, то $\bar{\alpha}$ не равен нулю. Следовательно, $\bar{\alpha}\bar{u}_{12}$ обратим в $\bar{J}$. Отсюда следует, что g_1 обратим в S. Таким образом, получаем, что $g_0 = 1/2$. Пусть $v = 1 - 2e$. Ясно, что $v \in J_{12}$ и $v^2 = 1$. Следовательно, идемпотенты e_1, e_2 строго связаны. Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Пусть алгебра $J/\mathcal{J}(J)$ изоморфна $H(\bar{D}_n, j_{\bar{a}})(H(\bar{D}_n, j_1))$ — йордановой матричной алгебре порядка $n \geqslant 3$. Тогда J изоморфна йордановой матричной алгебре $H(D_n, j_a)$ (соответственно $H(D_n, j_1)$). Кроме того, D конечно порождена как K-модуль, $\mathcal{J}(J) \simeq H(\mathcal{J}(D)_n, j_a)$ (соответственно $H(\mathcal{J}(D)_n, j_1)$), где $\mathcal{J}(D)$ — квазирегулярный радикал алгебры D и $\bar{D} \simeq D/\mathcal{J}(D)$.*

Доказательство теоремы 1.1 аналогично теореме 10 из [9, с. 151].

Лемма 1.3. *Пусть $\bar{J} = J/\mathcal{J}(J)$ — простая сепарабельная алгебра над полем $\bar{K} = K/p$. Обозначим через $\bar{Z}$ центр алгебры $\bar{J}$. Тогда в алгебре J содержатся алгебры J_1 и Z такие, что $J_1/J_1 \cap \mathcal{J}(J) = \bar{J}$* и *$Z/pZ = \bar{Z}$, причем Z лежит в центре алгебры J_1 и является локальным кольцом Гензеля.*

Доказательство. Так как $\bar{J}$ — простая сепарабельная алгебра, то существует элемент $\bar{a} \in \bar{J}$ такой, что $\bar{Z} = \bar{K}[1, \bar{a}]$. Пусть элемент b из J является прообразом элемента $\bar{a}$. Рассмотрим алгебру $S = K[1, b]$. Ясно, что $S/S \cap \mathcal{J}(J) = \bar{Z}$. Следовательно, в S существует неразветвленная подалгебра Z такая, что $Z/pZ = \bar{Z}$, причем $Z = K[1, a]$, где a является прообразом в S элемента $\bar{a}$ (см. теорему 29 [5]). В силу теоремы 23 из [5] Z — локальное кольцо Гензеля.

Пусть $\bar{F}$ — конечное сепарабельное расширение поля $\bar{K}$, являющееся полем разложения для $\bar{Z}$. Тогда $\bar{Z} \otimes_{\bar{K}} \bar{F} = \bar{e}_1\bar{F} \dotplus \ldots \dotplus \bar{e}_n\bar{F}$, где $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ — попарно ортогональные идемпотенты. Рассмотрим алгебру $Z \otimes_K F$, где F — конечное регулярное неразветвленное расширение кольца K такое, что $F/pF = \bar{F}$ (см. [5, теорема 28]). Так как $Z \otimes_K F/p(Z \otimes_K F) = \bar{Z} \otimes_{\bar{K}} \bar{F}$, то в алгебре $Z \otimes_K F$ существует система попарно ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ таких, что e_i является прообразом $\bar{e}_i$ (см. теорему 24 [5]).

В силу следствия из теоремы 5 [5] имеем

$$Z\otimes_K F = e_1F + \ldots + e_nF.$$

Рассмотрим алгебры $J\otimes_K F$ и $\bar{J}\otimes_{\bar{K}}\bar{F}$. Так как кольцо F с единицей, то можно считать, что J является подалгеброй в $J\otimes_K F$. Ясно, что $J\otimes_K F/\mathcal{J}(J)\otimes_K F \supset J\otimes_K F$ и J, $Z\otimes_K F$ переходят при этом гомоморфизме в $\bar{J}$, $\bar{Z}\otimes_{\bar{K}}\bar{F}$.

Пусть

$$J_1 = \{x\in J \mid (x, z_1, z_2) = 0,\ z_1, z_2 \in Z\}$$

— централизатор кольца Z в алгебре J. Докажем, что J_1 — искомая подалгебра. Так как линейно независимый базис F над K является линейно независимым базисом $J\otimes_K F$ над J, то множество $J_1\otimes_K F$ является централизатором кольца $Z\otimes_K F$ в алгебре $J\otimes_K F$. Следовательно, $x\in J_1\otimes_K F$ тогда и только тогда, когда $(x, e_i, e_j) = 0$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что $J_1\otimes_K F = (J\otimes_K F)U_{e_1} \dotplus \ldots \dotplus (J\otimes_K F)U_{e_n}$. Следовательно, $J_1\otimes_K F$ — алгебра. Так как кольцо F регулярно над K, то J_1 является алгеброй. Покажем, что J_1 — конечно порожденный K-модуль. Действительно, так как алгебра $J_1\otimes_K F$ конечно порождена как K-модуль, то алгебра $J_1\otimes_K F/p(J_1\otimes_K F) = J_1/pJ_1\otimes_K F$ конечномерна над $\bar{K}$. Пусть $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s$ — базис J_1/pJ_1 над $\bar{K}$. Тогда $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s$ является базисом $J_1/pJ_1\otimes_K \bar{F}$ над $\bar{F}$. Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — элементы из J_1, являющиеся прообразами элементов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s$. Тогда в силу теоремы 6 из [5] и регулярности F над K получаем, что $a_1, \ldots, a_s$ порождают J как K-модуль.

Обозначим через $\bar{J}_1$ образ алгебры J_1 при гомоморфизме J на $\bar{J}$. Ясно, что

$$\bar{J}_1\otimes_{\bar{K}}\bar{F} = (\bar{J}\otimes_{\bar{K}}\bar{F})U_{\bar{e}_1} \dotplus \ldots \dotplus (\bar{J}\otimes_{\bar{K}}\bar{F})U_{\bar{e}_n}.$$

Так как $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ — центральные идемпотенты и их сумма равна единице, то $\bar{J}_1\otimes_{\bar{K}}\bar{F} = \bar{J}\otimes_{\bar{K}}\bar{F}$. Следовательно, $\bar{J}_1 = \bar{J}$, т. е. алгебра J_1 искомая. Лемма доказана.

Пусть Φ — произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с 1, A — альтернативная Φ-алгебра с 1, M — альтернативный A-бимодуль. Тогда положим

$$Z_A(M) = \{m\in M \mid [m, a] = (m, a, b) = 0 \text{ для всех } a, b\in A\},$$

где $[m, a] = ma - am$, $(m, a, b) = (ma)b - m(ab)$. Далее, пусть $U = U(A)$ — универсальная мультипликативная обертывающая алгебра для алгебры A (см. [9, с. 88]) и пара (λ, ρ) — ее универсальная мультипликативная специализация. Заметим, что A и M естественным образом можно рассматривать как правые ассоциативные U-модули.

Предложение 1.3. *Для любого унитального A-бимодуля M имеет место изоморфизм Φ-модулей:*

$$\mathrm{Hom}_U(A, M) \simeq Z_A(M).$$

Доказательство. Пусть $f\in \mathrm{Hom}_U(A, M)$ и $m = f(1)$. Тогда для любых a, b из A имеем

$$ma = f(1)a^\rho = f(a) = f(1\cdot a^\lambda) = f(1)a^\lambda = am,$$

$$(m, a, b) = f(1)(a^\rho b^\rho - (ab)^\rho) = f(1(a^\rho b^\rho - (ab)^\rho) = f((1, a, b)) = 0.$$

Значит, $f(1)\in Z_A(M)$. Пусть теперь $m\in Z_A(M)$. Легко показать, что отображение $f: A\to M$, заданное формулой $f(a) = ma$, является элементом из $\mathrm{Hom}_U(A, M)$, причем $f(1) = m$. Искомый изоморфизм φ зададим следующим образом: $\varphi: f\to f(1)$. Нетрудно проверить, что φ — действительно изоморфизм. Предложение доказано.

Лемма 1.4. *Пусть альтернативная Φ-алгебра A является проективным U-модулем и $M\xrightarrow{f}N\to 0$ — точная последовательность унитальных A-бимодулей. Тогда $Z_A(M)\xrightarrow{f}Z_A(N)\to 0$ — точная последовательность Φ-модулей.*

Доказательство. Пусть φ — отображение $\mathrm{Hom}_U(A, M)$ в $\mathrm{Hom}_U(A, N)$, заданное следующим образом: $\varphi: \psi \to f \circ \psi$, где $f \circ \psi$ — суперпозиция отображений f и ψ. Ясно, что φ является Φ-модульным гомоморфизмом, а ввиду проективности U-модуля A, φ — эндоморфизм. Следовательно, в силу предложения 1.3 последовательность Φ-модулей $Z_A(M) \xrightarrow{f} Z_A(N) \to 0$ точна.

Пусть α, β, γ — обратимые элементы из кольца Φ. Рассмотрим альтернативную алгебру $C = C(\alpha, \beta, \gamma)$ (см. [1, с. 44]). Легко показать, что в C можно выбрать такой линейно независимый над Φ базис $1, e_1, \ldots, e_7$, что

$$e_i e_j = -e_j e_i, \quad i \neq j,$$

$$e_i^2 = \alpha_i 1,$$

где α_i — обратимый элемент из K. Алгебры типа $C(\alpha, \beta, \gamma)$ будем называть алгебрами Кэли — Диксона.

Теорема 1.2. *Пусть A — альтернативная Φ-алгебра с единицей и $C = C(\alpha, \beta, \gamma)$ — подалгебра Кэли — Диксона с той же единицей. Предположим, что $1/2 \in \Phi$ и алгебра A — конечно порождена как Φ-модуль. Тогда $A \simeq C \otimes_K Z(A)$, где $Z(A)$ — центр алгебры A.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любых элементов $a \in A$, $c \in C$, $z \in Z_C(A)$ ассоциатор $(a, c, z) = 0$. Пусть $1, e_1, \ldots, e_7$ — вышеуказанный базис алгебры C. Тогда ввиду тождеств 2.16, 2.16′ и 2.17′ из [1] имеем $[e_i, (a, e_i, z)] = (a, e_i[e_i z]) = 0$ и $e_i(a, e_i, z) = -(a, e_i, z)e_i$. Следовательно, $2e_i(a, e_i, z) = 0$ и ввиду обратимости элемента e_i получаем, что $(a, e_i, z) = 0$. Поэтому для любого $c \in C$ $(a, c, z) = 0$. Отсюда следует, что для любых $c, c_1 \in C$, $z, z_1 \in Z_C(A)$ имеем $(cz)(cz_1) = (cc_1)(zz_1)$. Из тождества 7.6 [1] вытекает равенство $(zz_1)c = c(zz_1)$ для любых $z, z_1 \in Z_C(A)$ и любого $c \in C$.

Пусть $f(x, y, z, t)$ — функция Клейнфелда (см. [1, с. 167]). Тогда в силу определения множества $Z(A)$ получаем, что $f(c, c_1, z, z_1) = 0$ для любых $z, z_1 \in Z_C(A)$ и $c, c_1 \in C$. Так как $f(x, y, z, t)$ — кососимметрическая функция своих аргументов (см. [1, лемма 7.2]), то $f(z, z_1, c, c_1) = f(c, c_1, z, z_1) = 0$. Следовательно, $(zz_1, c, c_1) = 0$. Из всего этого вытекает, что $Z_C(A)$ является подалгеброй алгебры A.

Рассмотрим Φ-модуль $A_1 = CZ_C(A)$. Очевидно, что A_1 — подалгебра в A. Покажем, что $A_1 = A$. Пусть p — произвольный максимальный идеал в Φ, и алгебры U, $\overline{U}$ являются универсальными мультипликативными обертывающими алгебр C, C/pC. Тогда $U/pU \simeq \overline{U}$ (см. теорему 11 [9, с. 88]). Так как C/pC — алгебра Кэли — Диксона над полем Φ/p, то $\overline{U}$ — сепарабельная алгебра над Φ/p. Следовательно, U — сепарабельная Φ-алгебра (см. теорему 7.1 [8]). Поскольку алгебра C регулярна над Φ, то C проективна как Φ-модуль. Поэтому в силу предложения 2.3 из [8] C является проективным U-модулем. Рассмотрим алгебры A, $\overline{A} = A/pA$ как C-бимодули. Тогда канонический гомоморфизм f алгебры A на $\overline{A}$ можно рассматривать как гомоморфизм C-бимодулей, и поэтому в силу леммы 1.4 последовательность Φ-модулей $Z_C(A) \xrightarrow{\varphi} Z_C(\overline{A}) \to 0$ точна. Пусть теперь $\overline{A}_1$, $\overline{C}$ — образы алгебр A_1 и C в алгебре $\overline{A}$. Тогда очевидно, что $Z_C(\overline{A}) = Z_{\overline{C}}(\overline{A})$. По теореме 1 из [10] $\overline{A} = \overline{C}Z_C(\overline{A})$, и поэтому $\overline{A} = \overline{A}_1$. Следовательно, $A = A_1 + pA$, а в силу следствия теоремы 5 из [5] $A = A_1$.

Теперь покажем, что $A \simeq C \otimes_\Phi Z_C(A)$. Нетрудно заметить, что элементы $1, e_1, \ldots, e_7$ линейно независимы над $Z_C(A)$ и поэтому легко установить изоморфизм между алгебрами A_1 и $C \otimes_\Phi Z_C(A)$. Пусть теперь a, b c — произвольные элементы из C и u, v, w — произвольные элементы из $Z_C(A)$. Тогда в алгебре $C \otimes_\Phi Z_C(A)$ выполнимо равенство $[a, b]c \otimes (u, v, w) + (a, b, c) \otimes (u(vw) - v(uw)) = 0$ (см. доказательство леммы 2 [10]). Полагая $c = 1$, получим $[a, b] \otimes (u, v, w) = 0$. Выберем элементы a, b так, чтобы коммутатор $[a, b]$ был обратим в C. Тогда ассоциатор $(u, v, w) = 0$ и, следовательно, алгебра $Z_C(A)$ ассоциативна. Отсюда следует, что в алгебре $C \otimes_K Z_C(A)$ выполнимо равенство $(a, b, c) \otimes (u(vw) - v(uw)) = 0$. Выбирая элементы a, b, c так, чтобы ассоциатор (a, b, c) был обратим в C, и полагая $w = 1$, получим $uv = vu$, т. е. алгебра $Z_C(A)$ коммутативна. Теперь уже легко показать, что $Z_C(A) = Z(A)$. Теорема доказана.

2. ОТЩЕПЛЕНИЕ РАДИКАЛА В СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ

Будем называть K-алгебру A *регулярной*, если A является свободным конечно порожденным K-модулем, и *точной*, если A — точный K-модуль. Напомним, что регулярная ассоциативная алгебра A называется *алгеброй Адзумаи* над K, если $A \otimes_K A^\circ \simeq K_n$, где A° — алгебра, антиизоморфная A, K_n — полная матричная алгебра порядка n.

Йорданова (ассоциативная, альтернативная) K-алгебра A называется *неразветвленной* над K, если $\mathcal{J}(A) = J(K)A$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что K — локальное кольцо Гензеля с максимальным идеалом p, все рассматриваемые алгебры содержат единицу и конечно порождены как K-модули. Через $\bar{K}$ будем обозначать поле вычетов K/p.

Лемма 2.1. *Пусть J — точная K-алгебра и $\bar{J} = J/\mathcal{J}(J)$ — алгебра невырожденной симметрической билинейной формы над полем $\bar{K}$. Тогда в J содержится регулярная неразветвленная подалгебра J_0 такая, что $\bar{J} = J_0/pJ_0$, причем J_0 является алгеброй невырожденной симметрической билинейной формы над K.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ — канонический базис алгебры $\bar{J}$. Тогда

$$\bar{a}_i\bar{a}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \bar{\alpha}_i\bar{1}, & i = j, \ \bar{a}_i \in \bar{K}, \end{cases}$$

причем можно считать, что либо $\bar{\alpha}_i$ — единица поля $\bar{K}$, либо уравнение $x^2 - \bar{\alpha}_i = 0$ неразрешимо в $\bar{K}$. Действительно, если уравнение $x^2 - \bar{\alpha}_i = 0$ разрешимо в $\bar{K}$, то существует элемент β из $\bar{K}$ такой, что $\beta^2 = \bar{\alpha}_i$. Поэтому элемент $\bar{a}_i$ можно заменить элементом $\beta^{-1}\bar{a}_i$, для которого $(\beta^{-1}\bar{a}_i)^2 = \bar{1}$.

Обозначим через a — прообраз элемента $\bar{a}_1$. Рассмотрим алгебру $S = K[1, a]$. В силу следствия 1.1 идеал $S \cap \mathcal{J}(J)$ квазрегулярен в S. Ясно, что $\bar{a}_1 \in S/S \cap \mathcal{J}(J)$. Ввиду ограничения на элемент $\bar{\alpha}_1$ в алгебре S содержится элемент a_1, являющийся прообразом элемента $\bar{a}_1$ такой, что $a_1^2 = \alpha_1 1$, где $\alpha \in K$ (см. [5, теорема 20 и лемма 4]).

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — такие элементы из J, что a_i являются прообразом $\bar{a}_i$ и

$$a_ia_j = \begin{cases} \alpha_i 1 & \text{при } i = j, \ \alpha_i \in K, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

все α_i обратимы в K. Пусть a' из J — прообраз элемента $\bar{a}_{k+1}$. Рассмотрим элемент $a = a' \prod_{i=1}^{k} \left(\mathrm{id} - \alpha_i^{-1} R^2_{a_i}\right)$. Ясно, что образ элемента a в алгебре $\bar{J}$ равен $\bar{a}_{k+1}$. В силу соотношения 3.25 из [1] имеем

$$\left(\mathrm{id} - \alpha_i^{-1} R^2_{a_i}\right) R_{a_j} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j, \ i, j \leqslant k, \\ \alpha_i^{-1} R_{a_j} R^2_{a_i} & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $aa_i = 0$ для $i = 1, \ldots, k$. Рассмотрим алгебру $S = K[1, a]$. Тогда в S содержится элемент a_{k+1}, являющийся прообразом элемента $\bar{a}_{k+1}$ такой, что $a^2_{k+1} = \alpha_{k+1} 1$, где $\alpha_{k+1} \in K$. Представим элемент a_{k+1} в виде суммы $g_0 + g_1$, где $g_i = \Sigma\beta_k a^{2k+i}$, $i = 0, 1$, и покажем, что $g_0 = 0$.

Так как $aa_1 = 0$, то в силу тождества 3.22 из [1] для любого натурального s имеем $a^{2s-1}a_1 = 0$ и

$$(a^{2s}a_1)a_1 = [(a^{2s-1}a)a_1]a_1 = \alpha_1 a^{2s}.$$

Следовательно, для любого натурального s

$$a^s U_{a_1} = \begin{cases} \alpha_1 a^s, \text{ когда } s \text{ четно}, \\ -\alpha_1 a^s \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$a_{k+1}U_{a_1} = \alpha_1 (g_0 - g_1).$$

Возводя элементы a_{k+1} и $a_{k+1}U_{a_1}$ в квадрат, получим

$$\alpha_{k+1}1 = g_0^2 + 2g_0g_1 + g_1^2,$$

$$\alpha_{k+1}\alpha_1^2 = \alpha_1^2 (g_0^2 - 2g_0g_1 + g_1^2).$$

Так как α_1 обратим в K, то $\alpha_{k+1}1 = g_0^2 - 2g_0g_1 + g_1^2$. Следовательно, $g_0g_1 = 0$. Аналогично тому, как это делалось в лемме 1.2, доказывается, что g_1 обратим в S, т. е. $g_0 = 0$. А тогда $a_ia_{k+1} = 0$ для любого $i = 1, \ldots, k$.

Таким образом, в алгебре J можно найти такие элементы $a_1, \ldots, a_n$, что a_i — прообраз элемента $\bar{a}_i$ и

$$a_ia_j = \begin{cases} \alpha_i 1 \text{ при } i = j, \alpha_i \in K, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$$

Рассмотрим подалгебру J_0, порожденную элементами $1, a_1, \ldots, a_n$. Нетрудно показать, что J_0 — искомая подалгебра. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть (A, j) — точная ассоциативная K-алгебра с инволюцией j и фактор-алгебра $(A/\mathcal{J}(A), j)$ является коммутативной композиционной алгеброй над $\bar{K}$. Тогда (A, j) содержит коммутативную регулярную неразветвленную композиционную подалгебру (A_0, j) такую, что $A_0/(pA_0, j) = (A/\mathcal{J}(A), j)$.*

Доказательство. Так как $(A/\mathcal{J}(A), j)$ — коммутативная композиционная K-алгебра, то $\dim_{\bar{K}} A/\mathcal{J}(A) \leqslant 2$. Если $\dim_{\bar{K}} A/\mathcal{J}(A) = 1$, то $(A_0, j) = (K, j)$. Пусть поэтому $\dim_{\bar{K}} A/\mathcal{J}(A) = 2$ и $\{\bar{1}, \bar{u}\}$ — такой базис алгебры $A/\mathcal{J}(A)$, что $\bar{u}^2 = \bar{\alpha}1$, где $\bar{\alpha} \in K$ и $\bar{u}^j = -\bar{u}$.

Пусть элемент a из A является прообразом элемента $\bar{u}$. Рассмотрим алгебру $S = [1, b]$, где $b = 1/2(a - a^j)$. Тогда в алгебре S найдется такой элемент u, что $u^2 = \alpha 1$, где $\alpha \in K$ (см. доказательство леммы 2.1), причем если $\bar{\alpha}$ — единица поля $\bar{K}$, то можно считать, что α — единица кольца K. Действительно, в этом случае $\bar{\alpha}$ является корнем уравнения $x^2 - \bar{\alpha} = 0$. Следовательно, уравнение $x^2 - \alpha = 0$ разрешимо в K (см. лемму 4 [5]). Пусть β — такой элемент из K, что $\beta^2 = \alpha$. Тогда $(\beta^{-1}u)^2 = 1$ и вместо элемента u можно взять элемент $\beta^{-1}u$.

Представим u в виде суммы $g_0 + g_1$, где $g_i = u_i[b]$. Тогда $u^j = g_0 - g_1$. Следовательно,

$$\alpha 1 = g_0^2 + 2g_0g_1 + g_1^2,$$

$$\alpha 1 = g_0^2 - 2g_0g_1 + g_1^2.$$

Отсюда следует, что $g_0g_1 = 0$. Так как g_1 обратим в S, то $g_0 = 0$. Поэтому $u^j = -u$ и подалгебра $A_0 = K[1, u]$ — искомая. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть (A, j) — точная ассоциативная K-алгебра с инволюцией j и фактор-алгебра $A/(\mathcal{J}(A), j)$ является центральной простой алгеброй с инволюцией над полем $\bar{K}$. Тогда алгебра (A, j) содержит такую подалгебру с инволюцией (A_0, j), что $A_0/pA_0 = A/\mathcal{J}(A)$, причем справедливо одно из следующих утверждений:*

1) $A_0 = B \oplus B^j$, где B — алгебра Адзумаи над K и j — инволюция, переставляющая компоненты;

2) A_0 — *алгебра Адзумаи над* K.

Доказательство. Так как алгебра $(A/\mathcal{J}(A),\ j)$ — центральная простая алгебра с инволюцией над полем $\bar{K}$, то алгебра $A/\mathcal{J}(A)$ является одной из следующих (см. [9]):

1. Прямая сумма двух идеалов $B+B^j$, где B — центральная, простая $\bar{K}$-алгебра и $(a, b)^j=(b, a)$ для любых a и b из B.

2. Алгебра $A/\mathcal{J}(A)$ — центральная простая $\bar{K}$-алгебра.

3. Алгебра $A/\mathcal{J}(A)$ проста, и ее центр является квадратичным расширением поля $\bar{K}$.

Разберем случай 1. Пусть $\bar{e}_1$ — единица алгебры B. Тогда $\bar{e}_1^j$ — единица алгебры B^j, причем $\bar{e}_1+\bar{e}_1^j=\bar{1}$. Рассмотрим элемент $\bar{u}=\bar{e}_1-\bar{e}_1^j$, тогда $\bar{u}^2=\bar{1}$. Пусть элемент v из A является прообразом элемента $\bar{u}$. Рассмотрим в алгебре A подалгебру $S=K\left[1, \frac{1}{2}(v-v^j)\right]$. Так как $(S/S\cap\cap\mathcal{J}(A),\ j)$ — коммутативная композиционная $\bar{K}$-алгебра, то из доказательства леммы 2.2 вытекает существование такого элемента u из S, что $u^2=1$ и $u^j=-u$, причем образ элемента u в алгебре $A/\mathcal{J}(A)$ равен $\bar{u}$. Пусть $e_1=\frac{1}{2}(1+u), e_2=\frac{1}{2}(1-u)$. Тогда e_1, e_2 — ортогональные идемпотенты и $e_1={}^je_2$. Рассмотрим алгебру e_1Ae_1. Так как $e_1Ae_1/e_1\mathcal{J}(A)e_1=B$, то в алгебре e_1Ae_1 содержится алгебра Адзумаи A_1 (см. лемму 6 [5]). Тогда A_1^j—подалгебра Адзумаи в алгебре e_2Ae_2. Очевидно, что $A_0==A_1+A_1^j$ — искомая подалгебра.

Теперь рассмотрим случай 3. Пусть поле $\bar{P}$ — центр алгебры $A/\mathcal{J}(A)$. Так как $\bar{P}$ — квадратичное расширение поля $\bar{K}$, то $\bar{P}$ имеет базис 1, $\bar{u}$ такой, что $\bar{u}^2=\bar{\alpha}1$ и $\bar{u}^j=-\bar{u}$. Аналогично тому, как это делалось в первом случае, в алгебре A существует регулярная неразветвленная коммутативная композиционная K-алгебра P такая, что $P/pP=\bar{P}$. В силу теоремы 23 из [5] алгебра P является локальным кольцом Гензеля.

Пусть Q — множество элементов из A, коммутирующих с элементами из P. Тогда алгебра Q содержит P-алгебру Адзумаи A_1 такую, что $A_1/pA_1=A/\mathcal{J}(A)$ (см. доказательство теоремы 33 [5]). Так как алгебра Q замкнута относительно инволюции j, то A_1^j содержится в Q. По теореме 33 из [5] алгебры A_1 и A_1^j сопряжены в Q, т. е. существует элемент $x=1+n$, где $n\in\mathcal{J}(Q)$, такой, что $A_1=xA_1x^{-1}$. Пусть φ — изоморфизм алгебры A_1 на A_1^j такой, что $a^\varphi=xax^{-1}$. Рассмотрим антиизоморфизм π алгебры A_1 на A_1, заданный $a^\pi=a^{\varphi j}$ для произвольного элемента a из A_1. Ясно, что для любого $b\in P$ $b^\pi=b^j$.

Докажем, что справедлива

Лемма 2.3. *Существует такой элемент* a_0 *из* A_1, *что отображение* $a\to a^g=a_0a^\pi a_0^{-1}$ является инволюцией алгебры A_1.

Доказательство. Рассмотрим изоморфизм π^2. Так как π^2 оставляет неподвижными элементы из P, то π^2 — внутренний изоморфизм (см. теорему 18 [5]). Следовательно, существует такой элемент $t\in A_1$, что для любого $a\in A_1$ $a^{\pi^2}=tat^{-1}$. Ясно, что $a^{\pi^2}-a\in pA_1$. Поэтому t сравним с единицей по модулю pA_1. Пусть теперь a — произвольный элемент из A_1. Тогда, с одной стороны, $a^{\pi^3}=(a^\pi)^{\pi^2}=ta^\pi t^{-1}$, с другой стороны, $a^{\pi^3}=(a^{\pi^2})^\pi=(t^{-1})^\pi a^\pi t^\pi$. Следовательно, $t^\pi t\in P$. Так как $(t^\pi t)^\pi==t^\pi t^{\pi^2}=t^\pi t$, то $t^\pi t=\alpha 1,\ \alpha\in K$.

Пусть $\bar{F}$ — конечное сепарабельное расширение поля $\bar{P}$, являющееся полем расщепления для алгебры A_1/pA_1, и $\bar{Z}$ — конечное сепарабельное расширение поля $\bar{K}$ такое, что $\bar{F}=\bar{Z}\otimes_{\bar{K}}\bar{P}$. Тогда

$$A_1/pA_1\otimes_{\bar{K}}\bar{Z}\simeq(A_1/pA_1\otimes_{\bar{P}}\bar{P})\otimes_{\bar{K}}\bar{Z}\simeq A_1/pA_1\otimes_{\bar{P}}\bar{F}=\bar{F}_n,$$

где $\bar{F}_n$ — полная матричная алгебра порядка n. В силу теоремы 28 из [5] существует конечное регулярное неразветвленное расширение Z

кольца K такое, что $Z/pZ=\overline{Z}$. Рассмотрим алгебру $A_1\otimes_K Z$. По теореме 25 из [5] $A_1\otimes_K Z$ содержит матричную алгебру F_n, где $F=P\otimes_K Z$. Очевидно, что $A_1\otimes_K Z=F_n+p(A_1\otimes_K Z)$. Поэтому $A_1\otimes_K Z=F_n$ (см. [5; следствие к теореме 5]). Продолжим π до антиизоморфизма алгебры $A_1\otimes_K Z$ так, чтобы элементы кольца Z оставались неподвижными. Обозначим этот антиизоморфизм также через π. Пусть ε — канонический гомоморфизм $A_1\otimes_K Z$ на $A_1/pA_1\otimes_{\overline{K}}\overline{Z}$. Рассмотрим отображение $\bar{h}$ алгебры $A_1/pA_1\otimes_{\overline{K}}\overline{Z}$ на себя, заданное следующим образом: $a^{\varepsilon\bar{h}}=a^{\pi\varepsilon}$, где $a\in A_1\otimes_K Z$. Так как идеал $pA_1\otimes_K Z$ под действием отображения π переходит в себя, то отображение $\bar{h}$ задано корректно. Легко видеть, что $\bar{h}$ является инволюцией. Так как $\overline{F}$ — алгебра с инволюцией j, то отображение $*:X\to(X^j)'$, где $(X^j)'$ — матрица из $\overline{F}_n$, полученная из матрицы X применением к каждому ее члену инволюции j и транспонированием, является, как легко видеть, инволюцией алгебры $\overline{F}_n$. Аналогичным образом можно задать инволюцию на алгебре F_n, которую мы обозначим также через $*$. Нетрудно показать, что для любого x из $\overline{F}_n$ $x^{\bar{h}}=\overline{w}x^*\overline{w}^{-1}$, где $\overline{w}\in\overline{F}_n$, причем $\overline{w}^*=\pm\overline{w}$. Пусть w из $A_1\otimes_K Z$ — такой прообраз элемента w, что $w^*=\pm w$. Тогда для любого x из $A_1\otimes_K Z$ отображение $h:x\mapsto wx^*w^{-1}$ является инволюцией алгебры $A_1\otimes_K Z$.

Так как отображение πh является автоморфизмом алгебры $A_1\otimes_K Z$, оставляющим неподвижными элементы из F, то он внутренний, т. е. существует элемент $y\in A_1\otimes_K Z$ такой, что для любого $x\in A_1\otimes_K Z$ $x^{\pi h}=yxy^{-1}$. Ясно, что y сравним с единицей по модулю $pA_1\otimes_K Z$. Подействовав на равенство $x^{\pi h}=yxy^{-1}$ инволюцией h, получим $x^\pi=(y^{-1})^h x^h y^h$ или $x^h=y_1x^\pi y_1^{-1}$, где $y_1=y^h$. Отсюда следует, что

$$x=(x^h)^h=y_1(y_1x^\pi y_1^{-1})^\pi y_1^{-1}=y_1(y_1^{-1})^\pi x^{\pi^2}y_1^\pi y_1^{-1}=y_1(y_1^{-1})^\pi txt^{-1}y_1^\pi y_1^{-1}.$$

Следовательно, $y_1(y_1^{-1})^\pi t=z\in F$ и $t=y_1^\pi y_1^{-1}z$. Покажем существование такого элемента $y_2\in A_1\otimes_K Z$, что $t=\beta^{-1}y_2^\pi y_2^{-1}$, где $\beta\in K$. Действительно, имеем $t^\pi=(y_1^\pi y_1^{-1}z)^\pi=(y_1^{-1})^\pi y_1^{\pi^2}z^\pi=(y_1^{-1})^\pi ty_1t^{-1}z^\pi$. Следовательно, $t^\pi t=(y_1^{-1})^\pi ty_1z^\pi=(y_1^{-1})^\pi y_1^\pi y_1^{-1}zy_1z^\pi=zz^\pi$. Так как элемент t сравним с единицей по модулю pA_1, то элемент $\alpha=t^\pi t$ сравним с единицей кольца K по модулю p. Поэтому в K существует элемент β, сравнимый с единицей по модулю p, такой, что $\beta^2=\alpha$ (см. лемму 4 [5]). Пусть $z_1=\beta^{-1}z$. Тогда $z_1z_1^\pi=1$. Ясно, что z_1 сравним с единицей по модулю pF. Отсюда следует, что K-алгебра $K[1, z_1]$ является локальным кольцом Гензеля и в ней существует элемент z_2, сравнимый с единицей по модулю pF, такой, что $z_2^2=z_1$ (см. теорему 23 и лемму 4 [5]). Так как $z_1z_1^\pi=1$, то $z_2z_2^\pi=1$. Следовательно, элемент $y_2=y_1z_2^{-1}$ — искомый.

Пусть $\{1, w_1, \ldots, w_n\}$ — линейно независимый базис алгебры Z над K. Тогда $y_2=a_0\otimes 1+\sum_{i=1}^n a_i\otimes w_i$. Так как y_2 сравним с единицей по модулю $A_1\otimes_K Z$, то a_0 сравним с единицей по модулю pA_1 и $a_i\in pA_1$, $i=1, \ldots, n$. Из равенства $ty_2=\beta^{-1}y_2^\pi$ получаем, что $ta_0=\beta^{-1}a_0^\pi$. Следовательно, отображение g, заданное формулой $a^g=a_0a^\pi a_0^{-1}$ является инволюцией в A_1. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $u=a_0(x^{-1})^j$, тогда $a^g=ua^ju^{-1}$. Подействовав на обе части последнего равенства инволюцией j, получим $a^{gj}=(u^{-1})^jau^j$. С другой стороны, $a=(a^g)^g=ua^{gj}u^{-1}=u(u^{-1})^jau^ju^{-1}$. Следовательно, $u=cu^j$, где $c=u(u^{-1})^j$ коммутирует со всеми элементами из A_1. Рассмотрим элемент $\frac{1}{2}(u+u^j)=\frac{1}{2}(c+1)u^j$, тогда, очевидно, $a^{gj}=\left[\frac{1}{2}(u+u^j)\right]^{-1}a\left[\frac{1}{2}(u+u^j)\right]$ и $a^g=\left[\frac{1}{2}(u+u^j)\right]a^j\left[\frac{1}{2}(u+u^j)\right]^{-1}$. Ясно, что элемент $\frac{1}{2}(u+u^j)$ сравним с единицей по модулю $\mathcal{J}(Q)$. Пусть

$B=K\left[1, \frac{1}{2}\left(u+u^j\right)\right]$. Как это неоднократно делалось, в алгебре B найдем элемент v такой, что $v^2=\frac{1}{2}\left(u+u^j\right)$. Тогда Алгебра $A_0=vA_1v^{-1}$ — искомая. Случай 2 доказывается аналогично. Теорема доказана.

В дальнейшем нам понадобится также

Предложение 2.1. *Пусть A — точная альтернативная алгебра с инволюцией j. Если фактор-алгебра $(A/\mathcal{J}(A), j)$ является композиционной алгеброй над $\bar{K}$, то в алгебре A содержится такая регулярная неразветвленная подалгебра A_0, замкнутая относительно инволюции j, что $A_0/pA_0=A/\mathcal{J}(A)$.*

Доказательство. Разберем отдельно два случая. Если алгебра $\bar{A}=A/\mathcal{J}(A)$ ассоциативна, то возможно следующее:

1) $\bar{A}=\bar{K}$,

2) $\bar{A}=\bar{K}\oplus\bar{K}$,

3) $\bar{A}$ — сепарабельное квадратичное расширение поля $\bar{K}$,

4) $\bar{A}$ — алгебра обобщенных кватернионов.

Поскольку все случаи доказываются аналогично, проведем доказательство в случае 4). Пусть $\bar{1}, \bar{u}, \bar{v}, \overline{uv}$ — такой базис алгебры $\bar{A}$, что $\bar{u}^2=\bar{\alpha}\bar{1}$, $\bar{v}^2=\bar{\beta}\bar{1}$, $\overline{uv}=-\overline{vu}$, $\bar{u}^j=-\bar{u}$, $\bar{v}^j=-\bar{v}$, где $\bar{\alpha}, \bar{\beta}\in\bar{K}$. Пусть элементы u, v из A являются прообразами элементов $\bar{u}$, $\bar{v}$ и пусть $B=K[1, u^j-u, v^j-v]$. Ясно, что алгебра B замкнута относительно инволюции j. В силу леммы 5.7 [1] алгебра B конечно порождена как K-модуль. Так как $B\cap\mathcal{J}(A)$ — квазирегулярный идеал алгебры B (см. предложение 3 [7]) и $B/B\cap\mathcal{J}(A)=\bar{A}$, то по теореме 2.1 алгебра B содержит искомую подалгебру A_0.

Рассмотрим случай, когда $\bar{A}$ — алгебра Кэли — Диксона. Тогда $\bar{A}=\bar{D}+\bar{w}\bar{D}$, где $\bar{D}$ — алгебра обобщенных кватернионов, $\bar{w}^j=-\bar{w}$ и $\bar{w}^2=\bar{\gamma}\bar{1}$. Как и в первом случае в алгебре A найдем такую регулярную неразветвленную подалгебру D, замкнутую относительно инволюции j, что $D/pD=\bar{D}$. Рассуждения в доказательстве леммы 2 из [2] позволяют заключить, что в A содержится алгебра Кэли — Диксона $D+wD$, где $w^2=\gamma 1$, $\gamma\in K$ и w — прообраз элемента $\bar{w}$. Пусть $B=K[1, w^j-w]$. Согласно лемме 2.2 в B существует такой элемент w_1, что $w_1^2=\gamma_1$ и $w_1^j=-w_1$, причем $w_1=\Sigma\alpha_i w^{2i+1}$. С помощью тех же рассуждений, что и в лемме 2 [2], нетрудно убедиться, что алгебра $A_0=D+w_1D$ — искомая.

Напомним, что специальная йорданова алгебра J называется *рефлексивной*, если J — алгебра симметрических элементов ассоциативной алгебры A с инволюцией j, причем алгебра A является универсальной ассоциативной обертывающей для J.

Прежде чем формулировать следующую теорему, сделаем одно замечание. Пусть F — произвольное поле характеристики $\neq 2$ и J — центральная, простая, специальная, рефлексивная алгебра над F степени 3. Тогда J порождается двумя элементами. Действительно, в случае, когда J — тело, это следует из рассуждений при доказательстве леммы 2 [9, с. 429]. Рассмотрим случай, когда J — расщепляемая алгебра. Пусть, например, $J=F_3^{(+)}$. Тогда легко проверить, что элементы e_{12}, $e_{13}+e_{31}+e_{23}$, где e_{ij} — матричные единицы в F_3, порождают J. Остальные случаи разбираются аналогично.

Теорема 2.2. *Пусть J — йорданова K-алгебра. Предположим, что $\bar{J}=J/\mathcal{J}(J)$ — специальная сепарабельная $\bar{K}$-алгебра. Тогда J содержит неразветвленную над K подалгебру J_0 такую, что $J_0/pJ_0=\bar{J}$, причем алгебра J_0 является конечной прямой суммой алгебр одного из следующих типов.*

1. *Алгебра невырожденной симметрической билинейной формы.*
2. *Алгебра $A^{(+)}$, где A — алгебра Адзумаи над центром.*
3. *Алгебра $H(A, j)$, где A — алгебра Адзумаи над центром с инволюцией j.*

Доказательство. Так как алгебра $\bar{J}$ сепарабельна над $\bar{K}$, то $\bar{J}$ — конечная прямая сумма простых алгебр, т. е. $\bar{J}=\bar{J}_1+\ldots+\bar{J}_n$. Пусть $\bar{e}_i$ — единица алгебры $\bar{J}_i$. Тогда $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ — попарно ортогональные идемпотенты и $\bar{e}_1+\ldots+\bar{e}_n=1$. В силу леммы 1.1 в алгебре J существует система попарно ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ такая, что e_i является прообразом $\bar{e}_i$. Ясно, что $e_1+\ldots+e_n=1$. Следовательно,

$$J=\sum_{i=1}^{n} JU_{e_i}+\mathcal{J}(J).$$

Рассмотрим алгебру JU_{e_i}. Так как $\bar{J}_i=JU_{e_i}/\mathcal{J}(J)U_{e_i}$, то в силу леммы 1.3 в JU_{e_i} существует подалгебра J_1 и локальное кольцо Гензеля Z, лежащее в центре J_1, такие, что $\bar{J}_1=J_1/J_1\cap\mathcal{J}(J)$ и $\bar{Z}=Z/pZ$, где Z — центр алгебры $\bar{J}_i$.

Рассмотрим J_1 как алгебру над Z. Покажем, что в J_1 содержится неразветвленная над K подалгебра J_{0i}, являющаяся алгеброй одного из указанных в теореме типов, причем $J_{0i}/pJ_{0i}=\bar{J}_i$. Действительно, так как $\bar{J}_i$ — специальная простая, то $\bar{J}_i$ — либо алгебра симметрической билинейной формы над $\bar{Z}$, либо $\bar{J}_i$ — рефлексивная алгебра. Если имеет место первое предположение, то все доказано (см. лемму 2.1).

Пусть алгебра $\bar{J}_i$ рефлексивна, например, $\bar{J}=H(\bar{A}, j)$ и $(\bar{A}, j)$ есть $\bar{B}\oplus\bar{B}^j$, где $\bar{B}$ — центральная простая над $\bar{Z}$ алгебра, j — инволюция, переставляющая компоненты. Пусть $\bar{F}$ — конечное сепарабельное расширение поля $\bar{Z}$, являющееся полем расщепления для $\bar{B}$. Тогда, как хорошо известно, $\bar{J}_i\otimes_{\bar{Z}}\bar{F}=\bar{F}_n^{(+)}$. Следовательно, $\bar{J}_i\otimes_{\bar{Z}}\bar{F}=H\left(\bar{D}_n, j_{\bar{a}}\right)$.

Пусть F — конечное регулярное неразветвленное расширение кольца Z такое, что $F/pF=\bar{F}$. Рассмотрим алгебру $J_1\otimes{}_ZF$. Так как $J_1\otimes{}_ZF$ — конечно порожденный Z-модуль, то в силу предложения 1.1 $p(J_1\otimes{}_ZF)=$ $=pZ(J_1\otimes{}_ZF)$ — квазирегулярный идеал алгебры $J_1\otimes{}_ZF$, и существует такое натуральное число n, что

$$[\mathcal{J}(J)\otimes{}_ZF]^n\subseteq[\mathcal{J}(J)]^n\otimes{}_ZF\subseteq pZ(J\otimes{}_ZF).$$

Следовательно, $\mathcal{J}(J)\otimes{}_ZF$ — квазирегулярный идеал алгебры $J_1\otimes{}_ZF$. Ясно, что

$$J_1\otimes_Z F/\mathcal{J}(J_1)\otimes_Z F=\bar{J}_i\otimes_{\bar{Z}}\bar{F}.$$

Тогда ввиду теоремы 1.1 имеем $J_1\otimes{}_ZF=H(D_n, j_a)$.

Если $n>3$, то $J_1\otimes{}_ZF$ и, следовательно, J_1 — специальная йорданова алгебра. Ввиду следствия из теоремы 6 [9, с. 143] алгебра $J_1\otimes{}_ZF$ рефлексивна. В силу регулярности F над Z и теоремы 8 [9, с. 78] получаем, что алгебра J_1 рефлексивна. Следовательно, $J_1=H(A, j)$. Так как алгебра $A\otimes{}_ZF$ является универсальной ассоциативной обертывающей алгебры $J_1\otimes{}_ZF$, то алгебры $A\otimes{}_ZF$ и D_n изоморфны (см. теорему 1, [9, с. 65]). Поэтому ввиду теоремы 1.1 алгебра $A/\mathcal{J}(A)\otimes_{\bar{Z}}F$ изоморфна алгебре D_n. Но тогда нетрудно показать, что алгебры $(\bar{A}, j)$ и $(A/\mathcal{J}(A), j)$ изоморфны как алгебры с инволюцией. Поэтому существование искомой подалгебры J_{0i} следует из теоремы 2.1.

Пусть, наконец, $n=3$. Тогда в силу сделанного выше замечания алгебра $\bar{J}_i$ двупорождена. Пусть элементы $\bar{a}$, $\bar{b}$ порождают $\bar{J}_i$. Обозначим через a, b прообразы элементов $\bar{a}$, $\bar{b}$ в алгебре J_1. Рассмотрим алгебру $J'=Z[1, a, b]$. Ввиду леммы 5.7 [1] J' — конечно порожденный Z-модуль. Так как J' — специальная рефлексивная йорданова алгебра и $J'/J'\cap\mathcal{J}(J_1)=\bar{J}_i$, то, применяя вышеизложенные рассуждения к алгебре J', найдем подалгебру J_{0i} и в этом случае. Остальные случаи разбираются аналогично.

Пусть $J_0=\sum_{i=1}^{n}J_{0i}$, тогда очевидно, что J_0 — искомая подалгебра. Теорема доказана.

Отметим, что для ассоциативных алгебр с инволюцией имеет место следующий аналог теоремы Адзумаи.

Теорема 2.3. *Пусть (A, j) — ассоциативная K-алгебра с инволюцией j, и фактор-алгебра $(A/\mathcal{J}(A), j)$ является сепарабельной алгеброй над полем $\bar{K}$. Тогда алгебра (A, j) содержит такую неразветвленную над K подалгебру (A_0, j), что $A_0/pA_0 = A/\mathcal{J}(A)$, причем алгебра (A_0, j) — конечная прямая сумма алгебр с инволюцией одного из следующих типов.*

1. *Алгебра $B \oplus B^j$, где B — алгебра Адзумаи над центром, j — инволюция, переставляющая компоненты.*

2. *Алгебра (B, j), где B такая же, как в 1.*

Доказательство. Рассмотрим йорданову алгебру $J = H(A, j)$. Так как $\mathcal{J}(J) = J \cap \mathcal{J}(A)$ (см. [11], теорему 3), то нетрудно понять, что фактор-алгебра $\bar{J} = J/J(A)$ является сепарабельной алгеброй над полем $\bar{K}$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — попарно ортогональные идемпотенты такие, как в доказательстве теоремы 2.2. Рассмотрим алгебры JU_{e_i} и e_iAe_i. Ясно, что $JU_{e_i} \subseteq H(e_iAe_i, j)$. Пусть $a \in H(e_iAe_i, j)$. Тогда $a = e_ibe_i = a^j = a_ib^ja_i$. Следовательно, $a = \frac{1}{2}e_i(b + b^j)e_i \in JU_{e_i}$. Поэтому $JU_{e_i} = H(e_iAe_i j)$.

По лемме 1.3 алгебра JU_{e_i} содержит такую подалгебру J_i и локальное кольцо Гензеля Z, лежащее в центре алгебры J_1, что $J_1/J_1 \cap \cap \mathcal{J}(JU_{e_i})$ и $Z/pZ = \bar{Z}$ — центр алгебры $\bar{J}$. Используя тождество 3.1 [1] и определение множества J_i (см. доказательство леммы 1.3), нетрудно показать, что $J_i = H(A_i, j)$, где A_i — множество элементов из e_iAe_i, коммутирующих с элементами из Z. Далее, так как $J_1 \cap \mathcal{J}(JU_{e_1}) = J_1 \cap \cap \mathcal{J}(A_1)$, то $\bar{J}_i = H(A_i/\mathcal{J}(A_i), j)$. Следовательно, фактор-алгебра $(A_i/\mathcal{J}(A_i), j)$ является центральной простой алгеброй с инволюцией над полем $\bar{Z}$ (см. [9]). Применяя теорему 2.1 к Z-алгебре (A_i, j), получим, что в (A_i, j) содержится подалгебра (A_{0i}, j) одного из указанных в теореме типов. Но тогда, как легко видеть, подалгебра $(A_0, j) = \sum_{i=1}^{n} (A_{0i}, j)$ — искомая.

3. КУБИЧЕСКИЕ АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

Ассоциативную K-алгебру A с 1 будем называть *кубической* над K, если на A определены линейная формула $t: A \to K$ и кубическая форма $n: A \to K$, допускающая композицию (т. е. $n(ab) = n(a)n(b)$ для любых $a, b \in A$), такие, что всякий элемент a из A удовлетворяет равенству

$$a^3 - t(a)a^2 + \frac{1}{2}(t(a)^2 - t(a^2))a - n(a)1 = 0.$$

Например, матричная алгебра K_3 в силу теоремы Гамильтона — Кэли является кубической над K, при этом $t(a)$ — обычный след матрицы a, $n(a) = \det(a)$ — определитель.

Далее мы вновь предполагаем, что K — кольцо Гензеля с максимальным идеалом p, $\bar{K} = K/p$.

Лемма 3.1. *Пусть A — ассоциативная точная K-алгебра такая, что фактор-алгебра $\bar{A} = A/pA$ является 9-мерной центральной простой алгеброй над $\bar{K}$. Пусть F — локальное ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей и максимальным идеалом m. Предположим, что K — подкольцо кольца F и фактор-кольцо $F/m = \bar{K}$. Тогда $A \otimes_K F$ — кубическая алгебра над F.*

Доказательство. Так как $\bar{A}$ — центральная простая алгебра над $\bar{K}$, то $\bar{A} = D_n$ — полная матричная алгебра над телом D. Ввиду ограничения на размерность алгебры $\bar{A}$ либо $D = \bar{K}$ и $n = 3$, либо $n = 1$. Если справедливо первое, то $A = K_3$ (см. теорему 2.5 и следствие теоремы 5 из [5]), поэтому $A \otimes_K F = F_3$, и в этом случае лемма доказана.

Пусть $\bar{A}$ — тело, $\bar{Z}$ — конечное сепарабельное расширение поля $\bar{K}$, являющееся полем расщепления для $\bar{A}$. Тогда $\bar{A}\otimes_{\bar{K}}\bar{Z}=\bar{Z}_3$. Пусть Z — конечное регулярное неразветвленное расширение кольца K такое, что $Z/pZ=\bar{Z}$. Тогда в силу теоремы 25 из [5] $A\otimes_K Z=Z_3$. Полагая $Z_F=Z\otimes_K F$, получим, что $A\otimes_K Z_F=(Z_F)_3$. Поэтому $A\otimes_K Z_F$ — кубическая алгебра над Z_F, т. е. для любого элемента x из $A\otimes_K Z_F$ существуют такие элементы $t(x)$, $t(x^2)$, $n(x)$ из Z_F, что

$$x^3=t(x)x^2-\frac{1}{2}(t^2(x)-t(x^2))x+n(x)1.$$

Пусть $A_F=A\otimes_K F$. Тогда очевидно, что $A_F\otimes_F Z_F=(Z_F)_3$. В силу леммы 6 [5] алгебра A регулярна над K, поэтому алгебра A_F регулярна над F и $A_F/mA_F=\bar{A}$. Рассмотрим произвольный элемент a из A_F, образ которого $\bar{a}$ в алгебре $\bar{A}$ не лежит в поле $\bar{K}$. Тогда элементы $\bar{a}^2$, $\bar{a}$, $\bar{1}$ линейно независимы над $\bar{K}$. Дополним их элементами $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_6$ до базиса алгебры $\bar{A}$. Пусть $b_1,\ldots,b_6$ — прообразы в A_F элементов $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_6$. Тогда 1, a, a^2, $b_1,\ldots$ $\ldots,b_6$ — линейно независимый базис алгебры A (см. теорему 6 из [5]). Отсюда следует, что $1\otimes1$, $a\otimes1$, $a^2\otimes1$, $b_1\otimes1,\ldots,b_6\otimes1$ — линейно независимый над Z_F базис алгебры $A_F\otimes_F Z_F$. Так как $a^3\in A_F$, то $a^3\otimes1=$ $=\sum_{i=0}^{2}\alpha_i(a^i\otimes1)+\sum_{i=1}^{6}\beta_i(b_i\otimes1)$, где α_i, $\beta_i\in F$. С другой стороны, $a^3\otimes1=$ $=t(a\otimes1)(a^2\otimes1)-\frac{1}{2}(t^2(a\otimes1)-t(a^2\otimes1))(a\otimes1)+n(a\otimes1)(1\otimes1)$. В силу единственности разложения $a^3\otimes1$ по базису $1\otimes1$, $a\otimes1$, $a^2\otimes1$, $b_1\otimes1,\ldots,b_6\otimes1$ получим, что $b_i=0$, $i=1,\ldots,6$, $\alpha_0=n(a\otimes1)$, $\alpha_2=$ $=t(a\otimes1)$.

Пусть $a_1,\ldots,a_9$ — такой линейно независимый базис алгебры A, что $a_1=1$. Тогда образы элементов a_i и a_i+a_j в алгебре A не лежат в поле K для произвольных $i=2,\ldots,9$; $j=1,\ldots,9$ (см. теорему 6 из [5]). Следовательно, элементы $t(a_i^2\otimes1)$ и $t((a_i+a_j)^2\otimes1)$ лежат в F. Отсюда и из линейности функции $t(x)$ следует, что $t((a_i\circ a_j)\otimes1)\in F$, где $a_i\circ a_j=$ $=a_ia_j+a_ja_i$. Поэтому для любых α, $\beta\in F$ справедливо включение

$$t((\alpha a_i+\beta a_j)^2\otimes1)\in F.$$

Пусть теперь a — произвольный элемент из A_F. Тогда в алгебре $A_F\otimes_F Z$:

$$a^3\otimes1=t(a\otimes1)(a^2\otimes1)-\frac{1}{2}(t^2(a\otimes1)-t(a^2\otimes1))(a\otimes1)+n(a\otimes1)(1\otimes1).$$

Так как $a=\sum_{i=1}^{9}\alpha_ia_i$, то $t(a\otimes1)$, $t(a^2\otimes1)\in F$. В силу регулярности алгебры Z получаем, что $n(a\otimes1)\in F$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть A — ассоциативная точная K-алгебра с инволюцией j, фактор-алгебра A/pA которой является простой 9-мерной над центром алгеброй с инволюцией j второго рода, кольцо F такое же, как в лемме 3.1. Тогда $A\otimes_K F$ — алгебра с инволюцией j_1, кубичная над центром, и для функций $t(x)$ и $n(x)$ справедливы равенства:*

$$t\left(a^{j_1}\right)=t(a)^{j_1},\ n\left(a^{j_1}\right)=n(a)^{j_1}\ \text{для всех } a \text{ из } A\otimes_K F.$$

Доказательство. Используя рассуждения при доказательстве теоремы 2.1 и следствие теоремы 5 из [5], нетрудно заметить, что A — регулярная K-алгебра, центр P которой является квадратичным расширением кольца K. Очевидно, что на алгебре $A\otimes_K F$ можно задать инволюцию j_1 так, чтобы для всех a из A $(a\otimes1)^{j_1}=a^j\otimes1$. Так как $A\otimes_K F\simeq$ $\simeq(A\otimes_P P)\otimes_K F\simeq A\otimes_P(P\otimes_K F)$ и так как $P\otimes_K F$ — локальное кольцо с максимальным идеалом $P\otimes_K m$ и $P\otimes_K F/P\otimes_K m=P/pP\otimes_{\bar{K}}\bar{K}\simeq P/pP$, то ввиду леммы 3.1 алгебра $A\otimes_K F$ кубична над $P\otimes_K F$. Докажем последнее утверждение леммы. Пусть $\bar{P}$ — центр алгебры A/pA. Поскольку алгебра A/pA проста и девятимерна над $\bar{P}$, то либо $A/pA=\bar{P}_3$, либо A/pA является телом. Если верно первое, то $A=P_3$, и поэтому $A\otimes_K F=$ $=(P\otimes_K F)_3$. Пусть $*$ — инволюция алгебры $(P\otimes_K F)_3$, заданная так же, как в доказательстве леммы 2.3. Ввиду теоремы 18 из [5] для всех a из $A\otimes_K F: (a^j)^* = xax^{-1}$, поэтому $a^j = (x^{-1})^* a^* x^*$. Из последнего равенства легко получить равенства $t(a^j) = t(a)^j$, $n(a^j) = n(a)^j$.

Пусть A/pA — тело. Легко понять, что алгебра A регулярна над P, поэтому алгебра $A\otimes_K F$ регулярна над $P\otimes_K F$. Следовательно, $A\otimes_K F/ /m(A\otimes_K F) = A/pA$. Пусть a — элемент из $A\otimes_K F$, образ которого в алгебре A/pA не равен нулю. Тогда с помощью рассуждений из леммы 3.1 убеждаемся, что элементы 1, a, a^2 линейно независимы над $P\otimes_K F$. Применяя инволюцию к равенству

$$\left(a^{j_1}\right)^3 - t\left(a^{j_1}\right)\left(a^{j_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[t\left(a^{j_1}\right)^2 - t(a^2)^{j_1}\right]a^{j_1} - n\left(a^{j_1}\right) = 0,$$

получаем равенства $t\left(a^{j_1}\right) = t(a)^{j_1}$, $n\left(a^{j_1}\right) = n(a)^{j_1}$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — линейно независимый базис алгебры $A\otimes_K F$ над $P\otimes_K F$ и пусть $a = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ — произвольный элемент из $A\otimes_K F$. Тогда $t\left(a_i^{j_1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{j_1} t\left(e_i^{j_1}\right) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i t\times \times(e_i))^{j_1} = t(a)^{j_1}$. Теперь уже легко показать, что $n\left(a^{j_1}\right) = n(a)^{j_1}$.

Предложение 3.1. *Пусть ассоциативная алгебра A удовлетворяет условиям леммы* 3.1 *и пусть* $\frac{1}{3}\in K$. *Тогда* $A = K1 + M$, где M — *K-модуль, порожденный коммутаторами.*

Доказательство. Пусть $\bar{Z}$ — поле расщепления алгебры $\bar{A}$ и $\bar{a}$ — элемент алгебры $\bar{A}$, след $t(\bar{a})$ которого равен нулю. Тогда след элемента $\bar{a}\otimes 1$ равен нулю в алгебре $\bar{A}\otimes_{\bar{K}}\bar{Z}$. Следовательно, $\bar{a}\otimes 1 = XY - YX$ для некоторых матриц X, Y из $\bar{A}\otimes_{\bar{K}}\bar{Z}$. Откуда

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i[\bar{a}_i, \bar{b}_i],$$

где $\bar{a}_i, \bar{b}_i\in\bar{A}$ и $\bar{\alpha}_i\in\bar{K}$. Для произвольного $\bar{a}$ из $\bar{A}$ след элемента $\bar{a} - \frac{1}{3}t(\bar{a})\bar{1}$ равен нулю, поэтому $\bar{A} = \bar{K}\cdot\bar{1} + \bar{M}$, где $\bar{M}$ — $\bar{K}$-модуль, порожденный коммутаторами. Отсюда уже следует, что

$$A = K1 + M + pA,$$

где M — K-модуль из A, порожденный коммутаторами. В силу следствия из теоремы 5 (см. [5]) $A = K\cdot 1 + M$. Предложение доказано.

Пусть ассоциативная алгебра A является кубической алгеброй над K. Для любых элементов a и b из A положим

$$\tilde{a} = \frac{1}{2}(t(a)\cdot 1 - a),$$

$$\hat{a} = t(a)\cdot 1 - 2a,$$

$$a\times b = ab - \frac{1}{2}t(a)b - \frac{1}{2}t(b)a + \frac{1}{2}(t(a)t(b) - t(ab))1,$$

где через ab обозначено произведение элементов a и b в йордановой алгебре $A^{(+)}$. Произведение элементов a и b в алгебре A будем обозначать через $a\cdot b$.

Лемма 3.3. *Пусть J — произвольная йорданова алгебра с единицей, содержащая подалгебру $K_3^{(+)}$ с той же самой единицей. Предположим, что η — такой K-модульный гомоморфизм кубической матричной алгебры K_3 в J, что для любых элементов a, $b\in K_3$*

$$(a^\eta b) = (\tilde{b}\cdot a)^\eta.$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$[(1^\eta)^2 a]b = (1^\eta)^2(\widehat{a\cdot\tilde{b}}).$$

Доказательство. Пусть e_{ij} — матричные единицы алгебры K_3. Рассмотрим элементы e_{11}^{η} и e_{22}^{η}. Так как $e_{11}^{\eta}e_{22}=e_{11}^{\eta}e_{33}=\frac{1}{2}e_{11}^{\eta}$ и $e_{22}^{\eta}e_{11}=$ $=e_{22}^{\eta}e_{33}=\frac{1}{2}e_{22}^{\eta}$, то $e_{11}^{\eta}\in J_{23}$, $e_{22}^{\eta}\in J_{13}$, следовательно, $e_{11}^{\eta}e_{22}^{\eta}\in J_{12}$.

Докажем, что для любых матриц a и b из K_3 справедливо равенство

$$[(e_{11}^{\eta}e_{22}^{\eta})\,a]\,b=(e_{11}^{\eta}e_{22}^{\eta})(\widehat{\tilde{a}\cdot\tilde{b}}). \tag{*}$$

Ясно, что это равенство достаточно доказывать для матричных единиц. Положим $u=e_{11}^{\eta}e_{22}^{\eta}$ и докажем следующие равенства:

$$ue_{12}=ue_{21}=ue_{13}=ue_{23}=0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}&(ue_{31})\,e_{12}=-\frac{1}{2}\,ue_{32},\\ &(ue_{31})\,e_{12}=0,\ (ue_{31})\,e_{13}=\frac{1}{4}\,u,\\ &(ue_{32})\,e_{12}=0;\ (ue_{32})\,e_{21}=-\frac{1}{2}ue_{31},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$(ue_{31})e_{23}=0, \tag{3}$$

$$(ue_{31})e_{32}=0,\quad (ue_{32})e_{13}=0, \tag{4}$$

$$(ue_{32})\,e_{23}=\frac{1}{4}\,u, \tag{5}$$

$$(ue_{32})e_{31}=0, \tag{6}$$

$$(ue_{32})e_{32}=0. \tag{7}$$

Докажем, что $ue_{12}=0$, остальные равенства из (1) доказываются аналогично. Так как $e_{11}^{\eta}=-2e_{21}^{\eta}e_{12}$, то с учетом тождества 3.22 из [1] и равенства $e_{12}^{2}=0$ получаем, что

$$ue_{12}=-2\left[(e_{21}^{\eta}e_{12})\,e_{22}^{\eta}\right]e_{12}=-2\,(e_{21}^{\eta}e_{12})(e_{22}^{\eta}e_{12})=e_{11}^{\eta}\,(e_{22}^{\eta}e_{12}).$$

Отсюда следует, что элемент ue_{12} лежит в $J_{22}+J_{33}$. С другой стороны, $e_{11}^{\eta}=-2e_{31}^{\eta}e_{13}$. Поскольку $e_{12}e_{13}=0$, $e_{31}^{\eta}e_{12}=0$, $e_{11}^{\eta}e_{12}=0$ и $e_{22}^{\eta}e_{13}=0$, то ввиду тождества 3.22 из [1] $ue_{12}=-2[(e_{31}^{\eta}e_{22}^{\eta})e_{12}]\,e_{13}$. Очевидно, $e_{31}^{\eta}\in$ $\in J_{12}$, а тогда $ue_{12}\in J_{11}+J_{33}$. Так как $u\in J_{12}$, то $ue_{12}\in J_{11}+J_{22}$. Таким образом, ue_{12} является элементом трех множеств, пересечение которых равно 0, значит, $ue_{12}=0$. Аналогично доказываются равенства (2).

Ввиду равенства б) из упражнения 2 (см. [1, с. 396])

$$(ue_{31})\,e_{12}=(ue_{12})\,e_{31}-u\,(e_{31}e_{12})=-\frac{1}{2}\,ue_{32},$$

что доказывает первое равенство из (2). Остальные доказываются аналогично.

Равенство (3) следует из тождества 3.22 [1], равенства (2) и равенств $e_{11}^{\eta}e_{23}=e_{22}^{\eta}e_{13}=0$. Докажем равенства (4). Так как $(ue_{31})e_{32}\in$ $\in J_{22}+J_{33}$, то $[(ue_{31})e_{32}]e_{11}=0$. Ввиду равенства (2) из упражнения 2 (см. [1, с. 396]) и равенства $e_{32}e_{31}=0$ имеем

$$[(ue_{31})e_{32}]e_{22}=[u(e_{31}e_{32})]e_{22}=0.$$

Учитывая равенства $e_{11}^{\eta}e_{32}^{\eta}=0$, $e_{22}^{\eta}e_{31}=0$ и тождество 3.22 из [1], получаем, что

$$(ue_{31})\,e_{32}=(e_{11}^{\eta}e_{31})(e_{22}^{\eta}e_{32})\in J_{11}+J_{22}.$$

Следовательно, $(ue_{31})e_{32}=0$. Равенство (5) следует из тождества 3.22 [1], включения $u\in J_{12}$ и равенств $e_{11}^{\eta}e_{23}=e_{22}^{\eta}e_{23}=0$.

Ввиду тождества 3.22 [1] и равенств $ue_{11}=\frac{1}{2}u$, $e_{31}e_{11}=\frac{1}{2}\,e_{31}$, $e_{32}e_{31}=$

$=0$ имеем

$$[(ue_{23})e_{31}]e_{11} = -\frac{1}{2}(ue_{31})e_{32} + \frac{1}{2}(ue_{32})e_{31}.$$

Из равенства (3) следует, что $[(ue_{32})e_{31}]e_{11} = \frac{1}{2}(ue_{23})e_{31}$. Так как $(ue_{32})u_{31} \in J_{11} + J_{33}$, то $(ue_{32})e_{31} = 0$ и равенство (6) доказано. Наконец, равенство (7) следует из тождества 3.22 [1] и равенств $e_{11}^{\eta}e_{32} = e_{32}^{\eta}e_{32} = e_{32}^{2} = 0$.

С помощью равенств (1)—(7) равенство (*) легко проверяется непосредственно. Аналогично равенству (*) доказываются равенства, полученные из (*) заменой $e_{11}^{\eta}e_{22}^{\eta}$ на $e_{11}^{\eta}e_{33}^{\eta}$, либо $e_{11}^{\eta}e_{22}^{\eta}$ на $e_{22}^{\eta}e_{33}^{\eta}$.

Теперь докажем, что $(e_{11}^{\eta})^2 = 0$. В самом деле, $e_{11}^{\eta} = -2e_{21}^{\eta}e_{12}$, ввиду тождества 3.22 [1] и равенств $e_{11}^{\eta}e_{12} = e_{12}^{2} = 0$ имеем

$$(e_{11}^{\eta})^2 = (-2e_{21}^{\eta}e_{12})^2 = 2\left[(e_{21}^{\eta})e_{12}\right]e_{12}.$$

Из включения $e_{21}^{\eta} \in J_{13}$ следует, что $(e_{11}^{\eta})^2 \in J_{11} + J_{22}$. С другой стороны, $e_{11}^{\eta} = -2e_{31}^{\eta}e_{13}$. Точно так же устанавливается, что $(e_{11}^{\eta})^2 \in J_{11} + J_{33}$, но, как отмечалось ранее, $(e_{11}^{\eta})^2 \in J_{22} + J_{33}$, следовательно, $(e_{11}^{\eta})^2 = 0$. Аналогично доказывается, что $(e_{22}^{\eta})^2 = 0$, $(e_{33}^{\eta})^2 = 0$.

Так как $1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$, то ввиду линейности гомоморфизма η справедливо

$$(1^{\eta})^2 = \sum_{i,j}(e_{ii}^{\eta}e_{jj}^{\eta}).$$

Поэтому для любых a и b из K_3 $\left[(1^{\eta})^2 a\right]b = (1^{\eta})^2\left(\widehat{\tilde{a}\cdot\tilde{b}}\right)$. Лемма доказана.

В дальнейшем мы неоднократно будем использовать следующее хорошо известное тождество йордановых алгебр (см., например, [9]):

$$(x,\ yz,\ t) = (x,\ z,\ t)y + (x,\ y,\ t)z. \qquad (**)$$

Лемма 3.4. *Пусть J — произвольная йорданова K-алгебра, где $\frac{1}{6} \in K$, и пусть A — ассоциативная алгебра, удовлетворяющая условиям леммы 3.1. Если $A^{(+)}$ является подалгеброй в J и существует такой элемент u из J, что для любых a и b из A*

$$(ua)b = u\left(\widehat{\tilde{a}\cdot\tilde{b}}\right),\quad (u^2a)b = u^2\left(\widehat{\tilde{a}\cdot\tilde{b}}\right),$$

то для любых натуральных чисел k и l справедливы равенства

$$(a,\ u^{3k},\ b) = 0, \qquad (1)$$

$$(a,\ u^{l},\ u^{3k}) = (a,\ u^{3k},\ u^{l}) = 0, \qquad (2)$$

$$(u^{3k},\ a,\ b) = 0, \qquad (3)$$

$$(u^{3k},\ u^{l}a,\ b) = 0, \qquad (4)$$

$$\left(u^{3k+1}a\right)b = u^{3k+1}\left(\widehat{\tilde{b}\cdot\tilde{a}}\right), \qquad (5)$$

$$\left(u^{3k+2}a\right)b = u^{3k+2}\left(\widehat{\tilde{a}\cdot\tilde{b}}\right), \qquad (6)$$

$$\left(a, u^{3k+1}, b\right) = \frac{1}{2}u^{3k+1}[a, b], \qquad (7)$$

$$\left(a, u^{3k+2}, b\right) = \frac{1}{2}u^{3k+2}[b, a]. \qquad (8)$$

Доказательство. Используя условия леммы и равенство $t([a, b]) = 0$, нетрудно показать, что

$$(a, u, b) = \frac{1}{2}u[a, b],\quad (a, u^2, b) = \frac{1}{2}u^2[b, a],$$

откуда в силу тождества (**) имеем

$$(a, u^3, b) = u\,(a, u^2, b) + u^2\,(a, u, b) = \frac{1}{2}\,u\,([b, a]\,u^2) + \frac{1}{2}\,u^2\,([a, b]\,u) = 0.$$

Поэтому для любого натурального числа k $(a, u^{3k}, b) = 0$, тем самым равенство (1) доказано.

Так как $(a, u^2, b) = 2u(a, u, b)$, то $u^2[a, b] = -2u[a, b]u$. Согласно предложению 3.1

$$au^2 = t(a)u^2 - 2(au)u. \qquad (9)$$

Если $t(a) = 0$, то ввиду тождества 3.22 [1] и равенства (9)

$$u^4a = ((uu)u^2)a = -2((au)u^2)u + 2(ua)u^3 + {} + u^2au^2 = 2(ua)u^3 + 2u^2au^2$$

и

$$au^3 = -2((au)u)u + 3uau^2 = 4uau^2, \qquad (10)$$

откуда следует, что $(au^3)u = 2u^2au^2$. По теореме 3.8 из [1] $(au^3)u = (au)u^3$. Тогда $u^4a = u(u^3a)$ и, значит, $(u, u^3, a) = 0$. Элементарной индукцией показывается, что $(u, u^{3k}, a) = 0$ для любого натурального k. Из теоремы 3.8 и тождества 7.6 [1] следует, что $(u^{3k}, u, a) = 0$. Поэтому для любого натурального l $(a, u^l, u^{3k}) = (a, u^{3k}, u^l) = 0$, и в силу предложения 3.1 равенство (2) доказано. Ввиду равенства (10) для произвольного элемента a из A имеем

$$au^3 = 4uau^2 - t(a)u^3. \qquad (11)$$

Теперь докажем, что $(u^3, a, b) = 0$ для любых a и b из A. Если $t(a) = t(b) = 0$, то $\tilde{a} = -\frac{1}{2}a$, $\tilde{b} = -\frac{1}{2}b$. Ввиду тождества 3.23 из [1] и равенств (1), (11)

$$(u^3a)\,b = -((ub)\,a)\,u^2 - ((u^2b)\,a)\,u + ((ab)\,u)\,u^2 + ((au^2)\,u)\,b + ((u^2b)\,u)\,a =$$

$$= -\frac{1}{4}u\,(\widehat{a\cdot b})\,u^2 - \frac{1}{4}u\,(\widehat{b\cdot a})\,u^2 + \frac{1}{4}u^3\,(ab) + \frac{1}{4}\,u^3t(ab) + \frac{1}{4}\,(u^3a)\,b + \frac{1}{4}\,(u^3b)\,a =$$

$$= \frac{1}{2}\,u^3\,(ab) + \frac{1}{2}\,(au^3)\,b,$$

откуда следует, что $u^3(ab) = (u^3a)b$. Равенство (3) будем доказывать индукцией по k. Для $k = 1$ равенство (3) только что доказано. Предположим, что $(u^{3(k-1)}, a, b) = 0$. Тогда в силу тождества (**) и равенства (2) $(u^{3(k-1)}, u^l, a, b) = 0$ для любого натурального l. Поэтому

$$(u^{3k}a)b = ((u^{3(k-1)}u^3)a)b = (u^{3(k-1)}(u^3a))b =$$
$$= u^{3(k-1)}((u^3a)b) = u^{3(k-1)}(u^3(ab)) = u^{3k}(ab),$$

и равенство (3) доказано. Равенство (4) следует из тождества (**) и равенств (2), (3). Используя равенства (2), (4), можно записать:

$$(u^{3k+1}a)\,b = (u^{3k}\,(ua))\,b = u^{3k}\,((ua)\,b) = u^{3k}\,(u(\widehat{\tilde{b}\cdot\tilde{a}})) = u^{3k+1}\,(\widehat{\tilde{b}\cdot\tilde{a}}),$$

что доказывает равенство (5). Аналогично доказывается равенство (6). Равенства (7) и (8) являются очевидными следствиями равенств (5) и (6).

4. ТЕОРЕМА ОБ ОТЩЕПЛЕНИИ РАДИКАЛА (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Пусть μ — обратимый элемент кольца K, A — ассоциативная кубическая алгебра над K. Обозначим через (A, μ) совокупность всех упорядоченных троек (a_1, a_2, a_3), $a_i \in A$, с операцией покомпонентного сложения и умножения на скаляр и следующим умножением:

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)\,(b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1b_1 + \widetilde{a_2\cdot b_3} + \widetilde{b_2\cdot a_3},\ \tilde{a}_1\cdot b_2 + a_2\cdot\tilde{b}_1 + \mu\,\widehat{a_3\times b_3},$$
$$b_3\cdot\tilde{a}_1 + a_3\cdot\tilde{b}_1 + \mu^{-1}\,(\widetilde{a_2\times b_2})).$$

Нетрудно проверить, что $B=(A, \mu)$ является йордановой алгеброй. Пусть

$$A_0=\{(a, 0, 0)|a\in A\},$$
$$A_1=\{(0, a, 0)|a\in A\},$$
$$A_2=\{(0, 0, a)|a\in A\}.$$

Тогда $B=A_0\dotplus A_1\dotplus A_2$ — прямая сумма K-модулей. Легко видеть, что A_0 — подалгебра, изоморфная $A^{(+)}$. Рассмотрим два отображения η_1, η_2 алгебры A и B, определяемые равенствами

$$a^{\eta_1}=(0, a, 0),$$

$$a^{\eta_2}=(0, 0, a).$$

Ясно, что для произвольного b из A_0 справедливы соотношения

$$a^{\eta_1}b=(\tilde{b}\cdot a)^{\eta_1},\quad a^{\eta_2}b=(a\cdot\tilde{b})^{\eta_2},$$

т. е. A_1 и A_2 являются A_0-бимодулями, при этом

$$B=A_0\dotplus 1^{\eta_1}A_0\dotplus 1^{\eta_2}A_0.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что кольцо K всегда содержит элемент 1/6.

Лемма 4.1. *Предположим, что J — точная йорданова алгебра над K, причем фактор-алгебра $\bar{J}=J/\mathcal{J}(J)$ является центральной алгеброй с делением типа $(\bar{A}, \bar{\mu})$ над полем $\bar{K}$. Тогда алгебра содержит такую регулярную неразветвленную над K подалгебру J_0 типа (A, μ), что $J_0/pJ_0=J/\mathcal{J}(J)$.*

Доказательство. Так как J — алгебра типа $(\bar{A}, \bar{\mu})$, то в $\bar{J}$ содержится центральная простая двупорожденная подалгебра $\bar{A}_0$, изоморфная $\bar{A}^{(+)}$, где $\bar{A}$ — центральная простая девятимерная ассоциативная алгебра.

Рассуждая, как в теореме 2.2, в алгебре J можно найти такую регулярную неразветвленную над K подалгебру A_0, что $A_0/pA_0=\bar{A}_0$, причем A_0 изоморфна алгебре $A^{(+)}$, где A — ассоциативная алгебра Адзумаи над K и $A/pA=\bar{A}$. Отождествим алгебры A_0 и $A^{(+)}$. Пусть U, $\bar{U}$ — универсальные мультипликативные обертывающие алгебры алгебр $A^{(+)}$ и $\bar{A}^{(+)}$ соответственно. Так как $A^{(+)}$ — конечно порожденный K-модуль, то U тоже является конечно порожденным K-модулем. В силу теоремы 11 [9, с. 88] фактор-алгебра U/pU изоморфна $\bar{U}$ и, следовательно, K-алгебра U сепарабельна (см. теорему 7.1 из [8]).

Пусть A_1 — $A^{(+)}$-бимодуль, введенный выше. Будем рассматривать K-модули J, A_1, $\bar{J}$ как правые U-модули. Канонический гомоморфизм φ алгебры J на алгебру $\bar{J}$ является гомоморфизмом U-модулей. Ясно, что существует U-модульный гомоморфизм $\bar{\psi}$ из A_1 в $\bar{J}$. Из регулярности K-модуля A_1 следует его проективность как K-модуля, а тогда в силу предложения 2.3 из [8] модуль A_1 проективен как U-модуль. Поэтому существует U-модульный гомоморфизм π из A_1 в J_1, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\bar{\psi}"'] & J \arrow[d, "\varphi"] \\
 & \bar{J}
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Обозначим через η суперпозиции гомоморфизмов η_1 и π, где η_1 — гомоморфизм из A в A_1, введенный ранее. Ясно, что для произвольных элементов a и b из $A^{(+)}$

$$a^{\eta}b=(\tilde{b}\cdot a)^{\eta}.$$

Докажем, что

$$((1^{\eta})^2a)b=(1^{\eta})^2\widehat{(\tilde{a}\cdot\tilde{b})}.$$

Пусть Z — конечное регулярное расширение кольца K такое, что $A\otimes_K Z = Z_3$. Рассмотрим алгебру $J\otimes_K Z$ и отображение $\eta' : Z_3 \to J\otimes_K Z$, заданное следующим образом:

$$\eta' : \sum a_i \otimes z_i \mapsto \sum a_i^{\eta} \otimes Z_i.$$

Нетрудно заметить, что η' — Z-линейное отображение и равенство $a^{\eta'} b = (\tilde{b}\cdot a)^{\eta'}$ справедливо для любых элементов a и b из Z_3. Тогда по лемме 3.3

$$((1^{\eta}\otimes 1)^2 a)\, b = (1^{\eta}\otimes 1)^2 \widehat{(\tilde{a}\cdot\tilde{b})}.$$

Ввиду регулярности алгебры Z получаем требуемое равенство.

Рассмотрим алгебру $B = K[1, 1^{\eta}]$. Фактор-алгебра $B/B\cap\mathcal{J}(J)$ является полем. Поэтому в алгебре B существует такой элемент w, что $w^3 = \mu 1$, где μ — прообраз в K элемента $\bar{\mu}$, причем образы элементов w, 1^{η} в алгебре $B/B\cap\mathcal{J}(B)$ совпадают (см. лемму 4 из [3]).

Представим элемент w в виде суммы $w = g_0 + g_1 + g_2$, где $g_i = \sum\limits_k \beta_k (1^{\eta})^{3k+i}$, $\beta_k \in K$, $i = 0, 1, 2$, и покажем, что $g_0 = g_2 = 0$. Учитывая равенства (1), (2), (7), (8) из леммы 3.4 и тождество (**) для любых элементов a и b можно записать:

$$0 = (a, w^3, b) = \frac{3}{2}[b, a]\left(g_0 g_1^2 - g_0^2 g_1 + g_0^2 g_2 - g_0 g_2^2 - g_1^2 g_2 + g_1 g_2^2\right) =$$

$$= \frac{3}{2}[b, a](g_1 - g_2)(g_0(g_1+g_2) - g_0^2 - g_1 g_2).$$

В силу леммы 3.1 $[b, a]^3 = \frac{1}{2} t([b, a]^2)[b, a] + n([b, a])$. Поэтому

$$0 = n([b, a])((g_1 - g_2)(g_0(g_1+g_2) - g_0^2 - g_1 g_2)).$$

Очевидно, в алгебре $\bar{A}$ существуют такие элементы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, норма коммутатора которых не равна 0. Тогда у прообразов a и b элементов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ норма коммутатора является обратимым элементом. Следовательно,

$$(g_1 - g_2)(g_0(g_1+g_2) - g_0^2 - g_1 g_2) = 0.$$

Пусть $\bar{g}_i$ — образ элемента g_i в алгебре $B/B\cap\mathcal{J}(J)$, $i = 0, 1, 2$. Тогда $\bar{g}_i = \bar{\beta}_i \bar{u}_i$ и $\bar{u} = \bar{g}_0 + \bar{g}_1 + \bar{g}_2$, где $\bar{u}$ — образ элемента 1^{η}. Поскольку элементы $\bar{1}$, $\bar{u}$, $\bar{u}^2$ линейно независимы над K, то $\bar{g}_1 = \bar{u}$, $\bar{g}_0 = \bar{g}_2 = 0$ и, значит, элемент $g_1 - g_2$ обратим в B. Отсюда получаем, что

$$0 = g_0(g_1 + g_2) - g_0^2 - g_1 g_2.$$

Поэтому для любых a и b из $A^{(+)}$ $0 = (a, 0, b) = \frac{1}{2}[a, b](g_0(g_1 - g_2))$, откуда $g_0(g_1 - g_2) = 0$. Следовательно, $g_0 = 0$, тогда и $g_1 g_2 = 0$. Из обратимости элемента g_1 следует, что $g_2 = 0$.

Для произвольных элементов a и b алгебры $A^{(+)}$ в алгебре J справедливы следующие равенства:

$$(wa)\, b = w\widehat{(\tilde{b}\cdot\tilde{a})}, \tag{1'}$$

$$(w^2 a)\, b = w^2\widehat{(\tilde{a}\cdot\tilde{b})}, \tag{2'}$$

$$waw = w^2\tilde{a}, \tag{3'}$$

$$w^2 a w^2 = \mu w a, \tag{4'}$$

$$waw^2 = \mu\tilde{\tilde{a}}, \tag{5'}$$

$$(wa)(wb) = w^2\widehat{(\tilde{a}\times\tilde{b})}, \tag{6'}$$

$$(w^2a)(w^2b) = \mu w(\widehat{\tilde{a}\times\tilde{b}}), \tag{7'}$$

$$(wa)(w^2b) = \widetilde{\tilde{a}\cdot\tilde{b}}. \tag{8'}$$

Действительно, равенства (1′) и (2′) следуют из равенств (1), (2) леммы 3.4. Равенства (3′)—(5′) доказываются точно так же, как равенства (9), (10) из леммы 3.4. Равенства (6′)—(8′) доказываются при помощи тождеств 3.22 из [1], (**) и равенств (1′)—(5′). Докажем, например, равенство (6′):

$$2(wa)(wb) = -w^2(ab) + 2((wa)b)w + (w^2a)b =$$

$$= w^2(-ab + 2\widetilde{\widehat{\tilde{b}\cdot\tilde{a}}} + \tilde{a}\cdot\tilde{b}) = 2w^2(\widehat{\tilde{a}\times\tilde{b}}).$$

Рассмотрим K-модуль $J_0 = A^{(+)} + wA^{(+)} + w^2A^{(+)}$. В силу равенств (1′)—(6′) J_0 является алгеброй. Так как $pJ_0 \subseteq pA^{(+)} + wpA^{(+)} + w^2pA^{(+)}$, то $pJ_0 = pA^{(+)} + wpA^{(+)} + w^2pA^{(+)}$. Отсюда следует, что фактор-алгебра J_0/pJ_0 изоморфна алгебре $(\bar{A}, \bar{\mu})$ и, значит, J_0 — неразветвленная над K алгебра. Докажем, что K-алгебра J_0 регулярна. Пусть $\bar{Z}$ — такое конечное сепарабельное расширение поля $\bar{K}$, что $J_0/pJ_0 \otimes_{\bar{K}} \bar{Z} = H(\bar{C}_3, j)$, и пусть Z — такое конечное регулярное неразветвленное расширение поля K, что $Z/pZ = \bar{Z}$. Тогда в силу теоремы 1.1 $J_0 \otimes_K Z = H(C_3, j)$. По теореме 3 [9, с. 130] фактор-алгебра C/pC изоморфна $\bar{C}$, а по лемме 2 из [2] и следствию к теореме 5 из [5] C является регулярной неразветвленной Z-алгеброй. Поэтому и C_3 является регулярной неразветвленной Z-алгеброй. Пусть $e_1, \ldots, e_{27}$ — такие элементы алгебры J_0, что их образы $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{27}$ образуют базис фактор-алгебры J_0/pJ_0. Тогда элементы $\bar{e}_1 \otimes 1, \ldots, \bar{e}_{27} \otimes 1$ образуют базис алгебры $J_0/pJ_0 \otimes_{\bar{K}} \bar{Z}$. Дополним их до базиса алгебры $\bar{C}_3$ элементами $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s$. Пусть $b_1, \ldots, b_s$ — прообразы в C_3 элементов $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s$. Тогда $b_1 \otimes 1, \ldots, b_{27} \otimes 1, b_1, \ldots, b_s$ — линейно независимый базис алгебры C_3 (см. теорему 6 из [5]). Поэтому элементы $e_1 \otimes 1, \ldots, e_{27} \otimes 1$ линейно независимы над Z и, следовательно, над K. В силу теоремы 6 из [5] элементы $e_1, \ldots, e_{27}$ образуют линейно независимый базис алгебры J_0.

Пусть $e_1, \ldots, e_9$ — линейно независимый базис алгебры A. Тогда по теореме 6 из [3] элементы $e_1, \ldots, e_9, we_1, \ldots, we_9, w^2e_1, \ldots, w^2e_9$ образуют линейно независимый базис алгебры J_0 и, значит, сумма $A^{(+)} + wA^{(+)} + w^2A^{(+)}$ является прямой. Теперь уже нетрудно показать, что алгебра J_0 изоморфна алгебре (A, μ) и, следовательно, J_0 — искомая алгебра. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть J, J_0 — йордановы K-алгебры такие же, как в лемме 4.1. Тогда*

1. *$J = J_0Z(J) \simeq J_0 \otimes_K Z(J)$, где $Z(J)$ — центр алгебры J.*
2. *J — алгебра типа $(A \otimes_K Z(J), \mu)$, где A и μ такие же, как в лемме 4.1.*

Доказательство. Пусть $\bar{F}$ — такое конечное сепарабельное расширение поля $\bar{K}$, что $J_0/pJ_0 \otimes_{\bar{K}} \bar{F} = H(\bar{C}_3, j)$, где $\bar{C}$ — алгебра Кэли — Диксона над $\bar{F}$. Пусть F — конечное регулярное расширение K такое, что $F/pF = \bar{F}$. Тогда $J_0 \otimes_K F = H(C_3, j)$, где C — алгебра Кэли — Диксона над F, причем фактор-алгебра C/pC изоморфна $\bar{C}$ (см. доказательство леммы 4.1).

Теперь рассмотрим алгебру $J \otimes_K F$. Так как $J \otimes_K F/\mathcal{J}(J) \otimes_K F = J/\mathcal{J}(J) \otimes_{\bar{K}} \bar{F}$ и идеал $\mathcal{J}(J) \otimes_K F$ квазирегулярен, то по теореме 1.1 $J \otimes_K F = H(A_3, j)$, где A — альтернативная алгебра и фактор-алгебра $A/\mathcal{J}(A)$ изоморфна $\bar{C}$. В силу теоремы 3 [9, с. 130] можно считать, что C — подалгебра в A. В силу теоремы 1.2, повторив рассуждения из доказательства теоремы 3 [8], получим, что $J \otimes_K F \simeq (J_0 \otimes_K F) \otimes_F Z(J \otimes_K F)$. Ввиду регулярности F над K имеем $Z(J \otimes_K F) = Z(J) \otimes_K F$. Теперь легко показать, что $J \simeq J_0 \otimes_K Z(J)$. Далее рассмотрим алгебру J_0/pJ_0, она сепарабельна над $\bar{K}$. Следовательно, алгебра J_0 сепарабельна над K (см. теорему 1.8 [6]). Поэтому изоморфизм алгебр $J_0 \otimes_K Z(J)$ и $J_0 Z(J)$ доказывается так же, как предложение 2.9 из [6]. Таким образом, утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Нетрудно понять, что $Z(J) \cap \mathcal{J}(J)$ — максимальный идеал в $Z(J)$. По следствию 1.1 он квазирегулярен. Следовательно, $Z(J)$ — локальное кольцо, и $Z(J)/Z(J) \cap \mathcal{J}(J) = \bar{K}$. Теперь ввиду леммы 3.1 легко понять, что J есть алгебра типа $(A \otimes_K Z(J), \mu)$. Лемма доказана.

Пусть A — ассоциативная алгебра с инволюцией j, и P — центр алгебры A, являющийся квадратичным расширением K, причем элементы из P, неподвижные относительно инволюции j, лежат в K. Предположим, что A — кубическая P-алгебра, a — обратимый элемент из A такой, что $a^j = a$ и $n(a) = \mu\mu^j$, где $\mu \in P$. Пусть $M = A \oplus A$ — прямая сумма K-модулей. Определим K-линейное отображение из A в M, полагая $b^* = (b, ab^j)$. Пусть $(A, j, \mu, a) = J \oplus A^*$ — прямая сумма K-модулей, где $J = H(A, j)$, а A^* — образ алгебры A в M при отображении $*$. Тогда положим

$$(h + z^*)^2 = (h^2 + \overline{2zaz^j}) + (2\bar{h}z + \mu^j(x^j \times z^j)a^{-1})^*.$$

Определим произведение в (A, j, μ, a) линеаризацией последнего соотношения. Нетрудно показать, что (A, j, μ, a) — йорданова алгебра.

Лемма 4.3. *Пусть J — йорданова алгебра над K, фактор-алгебра которой $\bar{J} = J/\mathcal{J}(J)$ является центральной алгеброй с делением над $\bar{K}$ типа $(\bar{A}, j, \bar{\mu}, \bar{a})$. Пусть Z — центр алгебры J. Тогда J как Z-алгебра изоморфна алгебре $(A \otimes_K Z, j, \mu, a)$, где $A/pA = \bar{A}$ и μ лежит в центре алгебры A.*

Доказательство. Так как $\bar{J}$ — алгебра типа $(\bar{A}, j, \bar{\mu}, \bar{a})$, то J содержит двупорожденную подалгебру, изоморфную алгебре $H(A, j)$, где $A/pA = \bar{A}$ (см. доказательство теоремы 2.2).

Пусть P — центр алгебры A. Тогда (P, j) — регулярная композиционная алгебра над K с базисом 1, u таким, что $u^j = -u$ и $u^2 = \alpha \cdot 1$, где $\alpha \in K$ (см. доказательство теоремы 2.1). Обозначим через $\bar{P}$ центр алгебры $\bar{A}$ и через J_P — алгебру $J \otimes_K P$. Поскольку $J \otimes_K P/\mathcal{J}(J) \otimes_K P = \bar{J} \otimes_K \bar{P}$ — алгебра типа $(\bar{A}, \bar{\mu})$ и $J_1 \otimes_K P \simeq A^{(+)}$, то по лемме 4.1 J_P содержит подалгебру J_0', изоморфную алгебре (A, μ). По лемме 4.2 J_P — алгебра типа $(A \otimes_P Z(J_P), \mu)$. Так как алгебра P регулярна над K, то $Z(J_P) = Z \otimes_K P$, поэтому $A \otimes_P Z(J_P) \simeq A \otimes_K Z$. Следовательно, $J_P \simeq (A \otimes_K Z, \mu)$.

Пусть φ — отображение J_P на J_P, заданное следующим образом: $\varphi: x \otimes 1 + y \otimes 1 \to x \otimes 1 - y \otimes 1$, где x, y — элементы из J_0. Ясно, что φ — автоморфизм K-алгебры J_P периода 2, и ввиду регулярности P над K множество элементов из J_P, неподвижных относительно φ, совпадает с J. Отождествим алгебры J_P и $(A \otimes_K Z, \mu)$. Так как алгебра $(J_1 \otimes_K P) Z(J_P)$ инвариантна относительно φ, то алгебра $A \otimes_K Z$ также инвариантна относительно φ. Нетрудно показать, что φ — инволюция алгебры $A \otimes_K Z$, продолжающая инволюцию j.

Пусть $J_P = (A \otimes_K Z)^{(+)} + (A \otimes_K Z)^{\eta_1} + (A \otimes_K Z)^{\eta_2}$. Тогда элемент $1^{\eta_1 \varphi} = a_1 + a_2^{\eta_1} + a_3^{\eta_2}$. Покажем, что $a_1 = a_2 = 0$. Пусть элементы $x, y \in H(A, j)$. Тогда $(x, 1^{\eta_1 \varphi}, y) = (x, 1^{\eta_1}, y)^{\varphi} = -\frac{1}{2} 1^{\eta_1 \varphi}[x, y]$. Отсюда следует, что $(x, a_1, y) = -\frac{1}{2} a_1 [x, y]$, $(x, a_2^{\eta_1}, y) = -\frac{1}{2} a_2^{\eta_1}[x, y]$. Ввиду тождества 3.1 из [1] первое из этих равенств примет вид $[x, y] \cdot a_1 = 0$, где точкой обозначается умножение в алгебре $A \otimes_K Z$. Далее, так как $(x, a_2^{\eta_1}, y) = \frac{1}{2} a_2^{\eta_1}[x, y]$, то $a_2^{\eta_1}[x, y] = 0$. Выбирая элементы x, y так, чтобы норма коммутатора была обратима (см. доказательство леммы 4.1), получим, что $a_1 = a_2 = 0$, т. е. $1^{\eta_1 \varphi} = a_3^{\eta_2}$. Покажем, что $\underset{\sim}{a}_3^{\varphi} = \underset{\sim}{a}_3$ и норма $n(a_3) = \mu\mu^j$. Действительно, так как $1^{\eta_1} 1^{\eta_2 \varphi} = \tilde{a}_3$, то $\tilde{a}_3 \varphi = \tilde{a}_3$. В силу леммы 3.2 след $t(a_3^\varphi)=(t(a_3))^\varphi$, поэтому $t(a_3)=t(\widetilde{a_3^\varphi})=(t(\widetilde{a_3}))^\varphi=(t(a_3))^\varphi$. Следовательно, $a_3^\varphi=a_3$. Далее, возведя обе части равенства $1^{\eta_1\varphi}=a_{3}^{\eta_2}$ в куб, получим, что $n(a_3)=\mu\mu^j$.

Теперь рассмотрим K-модуль B, порожденный элементами вида $b^{\eta_1}+(a_3 b^\varphi)^{\eta_2}$. Легко понять, что $J=J_1Z+B$, и простая проверка показывает, что J — алгебра типа $(A\otimes_K Z,\ j,\ \mu,\ a_3)$. Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Пусть алгебра J удовлетворяет условиям леммы 2.13. Тогда J содержит регулярную неразветвленную подалгебру J_0 такую, что $\bar J=J_0/pJ_0$, причем J_0 алгебра типа $(A,\ J,\ \mu,\ a)$, где A такая, как в лемме 4.3.*

Доказательство. Так как $\bar J$ — алгебра типа $(\bar A,\ j,\ \bar a,\ \bar\mu)$, то по лемме 4.3 алгебру J можно отождествить с алгеброй $(A\otimes_K Z,\ j,\ a_1,\ \mu)$, где A — ассоциативная алгебра с инволюцией j, $A/pA=\bar A$ и Z — центр алгебры J. Из доказательства леммы 4.3 следует, что элементы $\bar a$, $\bar\mu$ являются образами элементов a_1, μ при гомоморфизме алгебры J на $\bar J$.

Покажем, что в алгебре $A\otimes_K Z$ найдется элемент h с нормой $n(h)=1$ такой, что $h\cdot a_1\cdot h^j\in A$, где точкой обозначается умножение в алгебре $A\otimes_K Z$. Пусть элементы $b_1,\ \ldots,\ b_n$ порождают K-модуль A, тогда $a_1=\sum_{i=1}^{n} b_i\otimes z_i$. Пусть P — центр алгебры A. Ввиду леммы 3.2 $t(a_1)$, $t(a_1^2)\in P\otimes_K Z$ и $(t(a_1))^j=t(a_1)$, $(t(a_1^2))^j=t(a_1)^2$. Следовательно, алгебра $Z_1=K\ [1,\ t(a_1),\ t(a_1^2),\ z_1,\ \ldots,\ z_n]$ содержится в J. Так как Z_1 — конечно порожденная подалгебра в J, то алгебра Z_1 конечно порождена как K-модуль (см. лемму 5.7 из [1]). Ясно, что Z_1 — локальное кольцо и поэтому Z_1 — локальное кольцо Гензеля (см. теорему 23 [5]), причем если m — максимальный идеал Z_1, то фактор-кольцо $Z_1/mZ_1=\bar K$.

Пусть a — элемент из $H(A,\ j)$. Обозначим через A_{Z_1} алгебру $A\otimes_K Z_1$. Рассмотрим Z_1-алгебры $A_1=Z_1[1,\ a,\ a_1]$, $S=Z_1[1,\ a]$, $S_1=Z_1[1,\ a_1]$. По лемме 5.7 [1] Z_1 — модули A_1, S, S_1 конечно порождены. Так как $A_{Z_1}/mA_{Z_1}=\bar A$, то mA_{Z_1} — квазирегулярный радикал алгебры A_{Z_1}. Ясно, что образы алгебр A_1, S и S_1 при гомоморфизме A_{Z_1} на $\bar A$ порождаются элементами $\bar 1$ и $\bar a$. Согласно теореме 29 из [5] в алгебре S_1 содержится такая неразветвленная над Z_1 подалгебра S_1', что $S_1'/mS_1'=S_1/S_1\cap mA_{Z_1}$, причем можно считать, что алгебра S_1' порождается прообразом элемента $\bar a$, удовлетворяющим уравнению $x^3-t(a_1)x^2+\frac{1}{2}\left[t(a_1)^2-t\left(a_1^2\right)\right]x-n(a_1)=0$ (см. теорему 28 и лемму 5 из [5]). Тогда по лемме 4 [5] $S_1=S_1'$. Ввиду теоремы 29 [5] алгебра S содержит неразветвленную над Z_1 подалгебру S' такую, что $S'/mS''=S/S\cap mA_{Z_1}$, а ввиду теоремы 33 из [5] алгебры S_1 и S' сопряжены в A_1. Поэтому существуют такой элемент h_1 из A_1, сравнимый с единицей по модулю идеала $A_1\cap mA_{Z_1}$, и такой элемент b из S', что $b=h_1\cdot a_1\cdot h_1^{-1}$. Так как $b^j=b$, то $b=\left(h_1^{-1}\right)^j\cdot a_1\cdot h_1^j$. Следовательно, элемент $c=h_1^j\cdot h$ коммутирует с a. Очевидно, что c сравним с единицей по модулю идеала $A_1\cap mA_{Z_1}$. Поэтому в алгебре A_1 существует элемент c_1, являющийся многочленом от c, такой, что $c_1^2=c$ (см. доказательство теоремы 2.1). Следовательно, $b=h_1\cdot a_1\cdot c_1^{-2}\cdot h_1^j=\left(h_1\cdot c_1^{-1}\right)\cdot a_1\cdot\left(h_1\cdot c_1^{-1}\right)$. Далее, $b=z_1\cdot 1+z_2a+z_3a^2$ и ввиду обратимости элемента a_1 элемент $b=y\cdot a$, где $y=z_1a^{-1}+z_2+z_3a$. Очевидно, что y сравним с единицей по модулю идеала $S\cap mA_{Z_1}$, а значит, в S существует элемент y_1 такой, что $y_1^2=y$, и поэтому $b=y_1\cdot a\cdot y_1$. Отсюда получаем, что $a=\left(y_1^{-1}\cdot h_1\cdot c_1^{-1}\right)\cdot a_1\cdot\left(y_1^{-1}\cdot h_1\cdot c_1^{-1}\right)^j$.

Рассмотрим алгебру $P_{Z_1}=P\otimes_K Z_1$. Ясно, что P_{Z_1} — конечно порожденный K-модуль и, кроме того, P_{Z_1} — локальное кольцо с максимальным идеалом mP_{Z_1}. Следовательно, P_{Z_1} — локальное кольцо Гензеля. Очевидно, что элементы $y_1^{-1}\cdot h_1\cdot c_1^{-1}$ и y_1^{-1} сравнимы с единицей по модулю $A_1 \cap mA_{Z_1}$, поэтому их нормы сравнимы с единицей по модулю mP_{Z_1}. Но тогда существуют элементы z, $z_1 \in P_{Z_1}$ такие, что $z^3 = n(y_1^{-1}\cdot h_1\cdot c_1^{-1})$, $z_1^3 = n(y_1^{-1})$, причем элементы z, z_1 сравнимы с единицей по модулю mP_{Z_1} (см. лемму 4 [5]). Так как $n(y_1^{-1})^j = n(y_1^{-1})$ (см. лемму 3.2) и z_1 является многочленом от $n(y_1^{-1})$, то $z_1^j = z_1$. Далее, ввиду леммы 3.2 $(z^j)^3 = (z^3)^j = n((y_1^{-1}\cdot h_1\cdot c_1^{-1})^j)$, и поэтому $(zz^j)^3 = n(y_1^{-1}\cdot h_1\cdot c_1^{-1}\cdot(y_1^{-1}\cdot h_1\cdot \cdot c_1^{-1})^j) = n(y_1^{-1}\cdot h_1\cdot c_1^{-2}\cdot h_1^j\cdot y_1^{-1}) = n(y_1^{-2}) = z_1^6$. Положим $z_0 = z_1^{-1}z$. Тогда $(z_0^j z_0)^3 = (z_1^{-2}z^j z)^3 = z_1^{-6}(z^j z)^3 = 1$. Поскольку элемент z_0 сравним с единицей по модулю mP_{Z_1}, то $z_0^j z_0 = 1$. Рассмотрим теперь элемент $h = z_0^{-1}\cdot y_1^{-1}\cdot h_1\cdot c_1^{-1}$. Легко проверить, что $a = h\cdot a_1\cdot h^j$, т. е. элемент h — искомый.

При доказательстве леммы 4.3 был введен K-модуль B. Рассмотрим в B K-подмодуль B_1, порожденный элементами вида $(b\cdot h)^{\eta_1} + (a\cdot(b\cdot h)^j)^{\eta_2}$, где $b \in A$. Нетрудно показать, что $J_0 = H(A,\ j) + B_1$ является искомой подалгеброй. Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Пусть J — точная йорданова алгебра. Предположим, что фактор-алгебра $J/\mathcal{J}(J)$ является центральной простой расщепляемой исключительной алгеброй над полем $\bar{K}$. Тогда в J содержится такая регулярная неразветвленная подалгебра J_0, что $J_0/pJ_0 = \bar{J}$, причем J_0 изоморфна алгебре $H(C_3,\ ja)$, где C — алгебра Кэли — Диксона над K.*

Доказательство. По условию $\bar{J} = H(\bar{C}_3,\ j\bar{a})$, где $\bar{C}$ — алгебра Кэли — Диксона, $\bar{a}$ — диагональная матрица с элементами $\bar{1}$, $\bar{\alpha}_2$, $\bar{\alpha}_3$ из поля $\bar{K}$ по диагонали. Пусть $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ — попарно ортогональные идемпотенты алгебры $\bar{J}$, сумма которых равна единице. Тогда в алгебре $\bar{J}$ найдутся такие элементы $\bar{u}_{12}$, $\bar{u}_{13}$ из пирсовских компонент $\bar{J}_{12}$, $\bar{J}_{13}$, что $\bar{u}_{12}^2 = \bar{\alpha}_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$ и $\bar{u}_{13}^2 = \bar{\alpha}_3(\bar{e}_1 + \bar{e}_3)$. По лемме 1.1 существуют попарно ортогональные идемпотенты e_1, e_2, e_3 алгебры J, являющиеся прообразами идемпотентов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_3$ соответственно. Пусть α_2, α_3 — элементы из K, являющиеся прообразами элементов $\bar{\alpha}_2$, $\bar{\alpha}_3$, и пусть u_{12} — прообраз в J_{12} элемента $\bar{u}_{12}$. Рассмотрим алгебру $S = K[e_1 + e_2,\ e_{12}]$. Так как $e_1 + e_2$ — единица алгебры S и фактор-алгебра $S/S \cap \mathcal{J}(J)$ является квадратичным расширением поля $\bar{K}$, то в S найдется такой элемент u, что $u^2 = \alpha_2(e_1 + e_2)$ (см. доказательство леммы 2.1). Представим u в виде суммы $g_0 + g_1$, где $g_i = \sum \beta_k u_{12}^{2k+i}$, $i = 0,\ 1$. Аналогично тому, как это делалось в лемме 1.2, можно показать, что $g_0 = 0$, откуда $u \in J_{12}$. Точно так же находится элемент v из J_{13}, для которого $v^2 = \alpha_3(e_1 + e_3)$. Поэтому алгебра J изоморфна алгебре $H(A_3,\ ja)$, где a — диагональная матрица с элементами 1, α_2, α_3 (см. доказательство координационной теоремы [9, с. 137]. В силу теоремы 3 [9, с. 130] и теоремы 1.1 $A/\mathcal{J}(A) \cong \bar{C}$. Поэтому ввиду предложения 2.1 в A содержится регулярная неразветвленная подалгебра C, замкнутая относительно инволюции j, и такая, что $C/pC \cong \bar{C}$, причем C является алгеброй Кэли — Диксона. Следовательно, алгебра $J_0 = H(C_3,\ ja)$ — искомая.

Теперь мы легко можем доказать наш основной результат.

Теорема 4.1. *Пусть J — йорданова K-алгебра. Предположим, что фактор-алгебра $\bar{J} = J/\mathcal{J}(J)$ сепарабельна над полем $\bar{K}$. Тогда J содержит неразветвленную над K подалгебру J_0 такую, что $J_0/pJ_0 = \bar{J}$, причем алгебра J_0 является конечной прямой суммой алгебр одного из следующих типов.*

1. *Алгебра невырожденной симметрической билинейной формы.*
2. *Алгебра $A^{(+)}$, где A — алгебра Адзумаи над центром.*
3. *Алгебра $H(A,\ j)$, где A — алгебра Адзумаи над центром с инволюцией j.*

4. *Алгебра типа* (A, μ), *где* A — *алгебра Адзумаи над центром* $Z(A)$, $\dim_{Z(A)} A = 9$, $\mu \in Z(A)$.

5. *Алгебра типа* (A, j, μ, a), где A — *такая же, как в* (4), $\mu \in Z(A)$, j — *инволюция в* A, a — *элемент из* A, *неподвижный относительно инволюции.*

6. *Алгебра* $H(C_3, j)$, *где* C — *алгебра Кэли — Диксона над центром.*

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2.2 и применяя теорему 2.2, леммы 4.1, 4.4, 4.5, получим требуемый результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кольца**, близкие к ассоциативным/Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. М.: Наука, 1978.
2. **Желябин В. Н.** Теорема об отщеплении радикала для альтернативных алгебр над кольцом Гензеля.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 1, с. 81—90.
3. **Михеев И. М.** Теорема Веддербарна об отщеплении радикала для (—1, 1)-колец.— Алгебра и логика, 1973, т. 12, № 3, с. 298—304.
4. **Никитин А. А.** Почти альтернативные алгебры.— Алгебра и логика, 1974, т. 13, № 5, с. 501—533.
5. **Azumaja G.** On maximally central algebras.— Nagoya Math. J., 1951, v. 2, p. 119—150.
6. **Bix R.** Separable Jordan algebras over commutative rings.— J. Algebra, 1979, v. 37, N 1, p. 111—143.
7. **Brown W. C.** A Wederburn theorem for alternative algebras with identity over commutative rings.— Trans. Amer. Math. Soc., 1973, v. 182, p. 144—159.
8. **DeMeyer F., Ingraham E.** Separable algebras over commutative rings.— In: Lect. Notes Math., 181, Springer — Verlag, 1971.
9. **Jacobson N.** Structure and representations of Jordan algebras. Providence, 1969.
10. **Jacobson N.** A Kronecker factorization theorem for Cayley algebras.— Amer. J. Math., 1954, v. 76, p. 447—452.
11. **McCrimmon K.** On Herstein's theorems relating Jordan and associative algebras.— J. Algebra, 1969, v. 13, p. 382—392.
12. **Shafer R. D.** Introduction to nonassociative algebras Academic Press, 1966.

Поступила в редколлегию 7 января 1981 г.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОСТОЙ ГРУППЫ ТИТСА

А. А. МАХНЕВ

В 1962 г. М. Судзуки описал конечные группы, в которых централизаторы инволюций — 2-группы [30, 31] (такие группы называются CIT-группами). С. А. Сыскин определил конечные простые группы, в которых централизаторы подгрупп порядка 4 — 2-группы [6]. При таком условии $C(t)/\langle t\rangle$ — CIT-группа для любой инволюции t из G. Мы накладываем ограничение лишь на централизаторы подгрупп порядка 4, содержащих некоторую центральную инволюцию.

Теорема. *Пусть централизатор инволюции* z *в конечной простой группе* G *является максимальной 2-локальной подгруппой нечетного индекса. Если* $C(z)/\langle z\rangle$ — *не 2-замкнутая* CIT*-группа порядка, не делящегося на 3, то* $G \simeq L_2(q)$, $q \equiv \pm 5(24)$, *или* G *изоморфна простой группе Титса* ${}^2F_4(2)'$.

Для конечной группы G четного порядка пусть $\mathscr{M}$ — множество максимальных 2-локальных подгрупп из G. Если X — подгруппа из G, то $\mathscr{M}(X) = \{M \in \mathscr{M} \mid X \leqslant M\}$.

Следствие. *Пусть* T — *силовская 2-подгруппа конечной простой группы* G, z — *такая инволюция из* $Z(T)$, *что в* $C(z)$ *централизаторы подгрупп порядка 4—2-группы. Если каждый элемент* M *из* $\mathscr{M}(T)$ *таков, что* $C_M(z)$ *не 2-замкнут и разрешим, то* $G \simeq L_2(q)$, $q \equiv 3,5(8)$ *или* $q = 2^n \pm 1$, $L_2(2^n)$, $Sz(2^n)$, $\mathrm{Sp}_4(2^n)$, M_{11}, M_{12}, $L_3(3)$, $L_3(4)$ *или* ${}^2F_4(2)'$.

Случай неразрешимого $C(z)$ рассмотрен автором ранее [3].

Доказательство теоремы проводится следующим образом. Некоторые предварительные результаты получены в разд. 1, в частности, установ-