4. *Алгебра типа* (A, μ), *где* A — *алгебра Адзумаи над центром* $Z(A)$, $\dim_{Z(A)} A = 9$, $\mu \in Z(A)$.

5. *Алгебра типа* (A, j, μ, a), где A — *такая же, как в* (4), $\mu \in Z(A)$, j — *инволюция в* A, a — *элемент из* A, *неподвижный относительно инволюции.*

6. *Алгебра* $H(C_3, j)$, *где* C — *алгебра Кэли — Диксона над центром.*

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2.2 и применяя теорему 2.2, леммы 4.1, 4.4, 4.5, получим требуемый результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кольца**, близкие к ассоциативным/Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. М.: Наука, 1978.
2. **Желябин В. Н.** Теорема об отщеплении радикала для альтернативных алгебр над кольцом Гензеля.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 1, с. 81—90.
3. **Михеев И. М.** Теорема Веддербарна об отщеплении радикала для (—1, 1)-колец.— Алгебра и логика, 1973, т. 12, № 3, с. 298—304.
4. **Никитин А. А.** Почти альтернативные алгебры.— Алгебра и логика, 1974, т. 13, № 5, с. 501—533.
5. **Azumaja G.** On maximally central algebras.— Nagoya Math. J., 1951, v. 2, p. 119—150.
6. **Bix R.** Separable Jordan algebras over commutative rings.— J. Algebra, 1979, v. 37, N 1, p. 111—143.
7. **Brown W. C.** A Wederburn theorem for alternative algebras with identity over commutative rings.— Trans. Amer. Math. Soc., 1973, v. 182, p. 144—159.
8. **DeMeyer F., Ingrahum E.** Separable algebras over commutative rings.— In: Lect. Notes Math., 181, Springer — Verlag, 1971.
9. **Jacobson N.** Structure and representations of Jordan algebras. Providence, 1969.
10. **Jacobson N.** A Kronecker factorization theorem for Cayley algebras.— Amer. J. Math., 1954, v. 76, p. 447—452.
11. **McCrimmon K.** On Herstein's theorems relating Jordan and associative algebras.— J. Algebra, 1969, v. 13, p. 382—392.
12. **Shafer R. D.** Introduction to nonassociative algebras Academic Press, 1966.

Поступила в редколлегию 7 января 1981 г.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОСТОЙ ГРУППЫ ТИТСА

А. А. МАХНЁВ

В 1962 г. М. Судзуки описал конечные группы, в которых централизаторы инволюций — 2-группы [30, 31] (такие группы называются CIT-группами). С. А. Сыскин определил конечные простые группы, в которых централизаторы подгрупп порядка 4 — 2-группы [6]. При таком условии $C(t)/\langle t\rangle$ — CIT-группа для любой инволюции t из G. Мы накладываем ограничение лишь на централизаторы подгрупп порядка 4, содержащих некоторую центральную инволюцию.

Теорема. *Пусть централизатор инволюции* z *в конечной простой группе* G *является максимальной 2-локальной подгруппой нечетного индекса. Если* $C(z)/\langle z\rangle$ — *не 2-замкнутая* CIT*-группа порядка, не делящегося на 3, то* $G \simeq L_2(q)$, $q \equiv \pm 5(24)$, *или* G *изоморфна простой группе Титса* ${}^2F_4(2)'$.

Для конечной группы G четного порядка пусть $\mathscr{M}$ — множество максимальных 2-локальных подгрупп из G. Если X — подгруппа из G, то $\mathscr{M}(X) = \{M \in \mathscr{M} \mid X \leqslant M\}$.

Следствие. *Пусть* T — *силовская 2-подгруппа конечной простой группы* G, z — *такая инволюция из* $Z(T)$, *что в* $C(z)$ *централизаторы подгрупп порядка 4—2-группы. Если каждый элемент* M *из* $\mathscr{M}(T)$ *таков, что* $C_M(z)$ *не 2-замкнут и разрешим, то* $G \simeq L_2(q)$, $q \equiv 3,5(8)$ *или* $q = 2^n \pm 1$, $L_2(2^n)$, $Sz(2^n)$, $\mathbf{Sp}_4(2^n)$, M_{11}, M_{12}, $L_3(3)$, $L_3(4)$ *или* ${}^2F_4(2)'$.

Случай неразрешимого $C(z)$ рассмотрен автором ранее [3].

Доказательство теоремы проводится следующим образом. Некоторые предварительные результаты получены в разд. 1, в частности, установлено, что контрпример к теореме — группа типа характеристики 2. В разд. 2 результат Г. Глаубермана [20] о центральных элементах в $N(J)$ перенесен на другой функтор J (этот функтор чаще применяется при исследовании 2-локальных подгрупп). В следующем разделе удается применить технику Д. Томпсона [32] работы со слабым замыканием элементарных 2-подгрупп в S_2-подгруппе из G. В разд. 4 с помощью результатов разд. 3 устанавливается центральность z в $N(J)$. Важная теорема единственности для некоторых 2-локальных подгрупп получена в разд. 5. Доказательство теоремы завершается в разд. 6 с использованием результатов разд. 2.

Следствие доказывается с помощью техники, развитой автором в [4]. В случае, когда 3 делит $|C(z)|$, условие максимальной 2-локальности $C(z)$ излишне. Более того, в теореме 7.1 описаны все конечные группы, содержащие такой централизатор.

В работе применяются следующие обозначения: Σ_n и A_n — симметрическая и знакопеременная группы степени n; Z_n и V_{p^n} — соответственно циклическая группа порядка n и элементарная p-группа ранга n; D_{2^n} и Q_{2^n} — диэдральная и кватернионная группы порядка 2^n, $n \geqslant 3$; $\Phi(G)$ и $\Omega(G)$ — подгруппа Фраттини и нижний слой p-группы G.

Пусть G — конечная группа. Положим, $d(G)$ — наибольший порядок элементарной 2-подгруппы из G, $\mathscr{A}(G)$ — множество всех элементарных подгрупп порядка $d(G)$, $J(G) = \langle \mathscr{A}(G) \rangle$.

Подгруппы индекса 2 из элементарной 2-группы будем называть гиперплоскостями. Если A, B, C — подмножества группы G, то $[A, B, C] = [[A, B], C]$. Для группы X $\mathrm{Hol}\, X$ — естественное расширение X с помощью группы автоморфизмов X.

Нормальное множество D инволюций конечной группы G называется *множеством 3-транспозиций*, если $\langle D \rangle = G$ и $|ab| = 3$ для любых неперестановочных инволюций $a, b \in D$.

Множества, состоящие из подгрупп группы G, будут обозначаться прописными латинскими буквами.

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе, в частности, показано, что контрпример к теореме — группа типа характеристики 2.

Лемма 1.1. (теорема 2 из [20]). *Пусть H — подгруппа группы G, U — S_2-подгруппа из H, T — S_2-подгруппа из G, содержащая U, $Q = O_2(H)$. Предположим, что H/Q — диэдральная группа, $U \neq T$ и $U = N_T(Q_0)$ для любой нормальной в H подгруппы Q_0 из Q. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

1) *U — четверная группа и T — диэдральная или полудиэдральная группа;*

2) *$U \simeq D_8$ и T — диэдральная или полудиэдральная группа;*

3) *$U \simeq Z_2 \times D_8$ и $T \simeq \mathrm{Hol}\, Z_8$.*

Лемма 1.2. *Пусть G — группа с $O_2(G) = 1$, V — F_2G-модуль. Предположим, что $W = \{A \leqslant G \mid A$ — элементарная 2-группа и $1 \neq |V : C_V(A)| \leqslant |A|\} \neq \varnothing$, $C_V(\langle W \rangle) = 0$ и $O_2(C_G(v))$ — S_2-подгруппа из G для некоторого ненулевого $v \in V$. Тогда $\langle W \rangle = E_1 \times \ldots \times E_k$, $E_i \simeq L_2(2^{n_i})$* и *$V = \oplus_i [V, E_i]$, где $[V, E_i]$ — естественный 2-мерный F_2E_i-модуль для $i = 1, \ldots, k$.*

Доказательство. Это утверждение доказано в § 3 [14].

Лемма 1.3. *Пусть T — S_2-подгруппа группы G, $J = J(T)$, $Z = \Omega(Z(J))$ и $P = C_T(Z)$. Предположим, что H — подгруппа из G, содержащая P, $F^*(H) = O_2(H)$ и $C_H(a)$ — 2-замкнутая подгруппа нечетного индекса в H, $a \in Z^\#$. Положим $W = \langle P^H \rangle$, $V = \Omega(Z(O_2(W)))$, $V_0 = C_V(W)$, $\overline{W} = W/O_2(W)$. Если $J \nleqslant O_2(H)$, то выполняются следующие утверждения:*

1) $W/O_2(W) = \overline{E}_1 \times \ldots \times \overline{E}_k$, $\overline{E}_i \simeq L_2(2^{n_i})$;

2) $V/V_0=[V, \overline{E}_1]V_0/V_0\times\ldots\times[V, \overline{E}_k]V_0/V_0$ *и* $[V, \overline{E}_i]V_0/V_0$ — *естественный* 2-*мерный* $F_2\overline{E}_i$-*модуль*, $i=1, \ldots, k$;

3) $V=\cup_{w\in W}Z^w$, P — S_2-*подгруппа из* W.

Доказательство. Пусть $W_0=\langle J^W\rangle$. Тогда по лемме 1.2 $\overline{W}_0=\overline{E}_1\times\ldots\times\overline{E}_k$, $\overline{E}_i\simeq L_2(2^{n_i})$ и $V/V^*=[V, \overline{E}_1]V^*/V^*\times\ldots\times[V, \overline{E}_k]V^*/V^*$, где V^* — пересечение V с гиперцентром группы W_0. Так как $V\leqslant Z(O_2(W))$, то $V^*=C_V(W_0)$. Пусть $A\in\mathscr{A}(J)\setminus\mathscr{A}(O_2(H))$. Тогда $AO_2(W_0)$ — S_2-подгруппа из W_0. Если $J_1\in J^H-\{J\}$, то $W_0=O_2(W_0)\langle J, J_1\rangle=\langle J, J_1\rangle$, так как $O_2(W_0)$ нормализует J и J_1. Пусть $Z_1=\Omega(Z(J_1))$, $V_1=ZZ_1$. По структуре W_0 V_1 содержит V и $(O_2(W_0)\cap A)V\in\mathscr{A}(T)$, поэтому $(O_2(W_0)\cap A)V_1=(O_2(W_0)\cap A)V$. С другой стороны, $|V:V\cap Z(W_0)|=|V_1:Z\cap Z_1|=2^{n_1}\cdot\ldots\cdot 2^{n_k}$. Так как $Z\cap Z_1$ содержится в V^*, то $V=V_1$ и $Z\cap Z_1=V^*$. Отсюда $O_2(W_0)\leqslant P$. Но P централизует неприводимые $F_2\overline{E}_i$-подмодули из V/V^*, поэтому $[P, W_0]\leqslant O_2(W_0)$. Значит, $W=O_2(W)W_0$, $V_0=V^*$ и утверждения 1), 2) доказаны. Так как $V=ZZ_1$, то P — S_2-подгруппа из W. Наконец, $\langle Z^{E_i}\rangle\leqslant\bigcup_{e\in\overline{E}_i}Z^e$. Отсюда следует (3).

Лемма 1.4. *Пусть выполнены условия леммы* 1.3. *Если* $E=\langle P^E\rangle$ — *подгруппа из* W *и* $J\nleqslant O_2(E)$, *то* $O^2(E)\lhd W$.

Доказательство. По лемме 1.3 $\overline{W}=W/O_2(W)=\overline{E}_1\times\ldots\times\overline{E}_k$, где $\overline{E}_i\simeq L_2(2^{n_i})$. Пусть E_i — полный прообраз в W группы $\overline{E}_i$. Так как $\overline{P}$ — S_2-подгруппа из $\overline{W}\cap\overline{E}$, то без ограничения общности $\overline{E}\cap\overline{E}_j=\overline{E}_j$, $j=1, \ldots, m$, и $\overline{E}\cap\overline{E}_j=\overline{P}\cap\overline{E}_j$ для $j=m+1, \ldots, k$. Пусть $F=\langle E_1, \ldots, E_m\rangle$. Тогда $F\lhd W$ и $O^2(F)=O^2(E)$.

Лемма 1.5. *Пусть* H — *группа,* V — *такая нормальная в* H *подгруппа из* $\Omega(Z(O_2(H)))$, *что для* $\overline{H}=H/C(V)$ *имеем* $O_2(\overline{H})=1$. *Предположим, что* $|V:C_V(\overline{x})|=2$ *для некоторой инволюции* $\overline{x}$ *из* $\overline{H}$ *и* $C_{\overline{H}}(\overline{x})$ — 2-*группа. Тогда* $\overline{H}\simeq\Sigma_3$.

Доказательство. Пусть $H_0=\langle x^H\rangle$. Тогда $\overline{x}^{\overline{H}}$ — класс 3-транспозиций в $\overline{H}_0$. По условию $\langle C_{\overline{H}}(\overline{x})\cap\overline{x}^{\overline{H}}\rangle$ — абелева группа. По лемме 2.13 [18] инволюция $\overline{x}$ изолирована в $C_{\overline{H}}(\overline{x})$. Теперь $\overline{H}_0=O_3(\overline{H}_0)\langle\overline{x}\rangle$. Но если $|O_3(\overline{H}_0)|>3$, то $\overline{x}$ инвертирует такие элементы $\overline{a}$, $\overline{b}$ из $O_3(\overline{H}_0)$, что $\langle\overline{a}, \overline{b}\rangle$ — нециклическая группа. Пусть $\overline{u}=\overline{x}^{\overline{a}}$, $\overline{v}=\overline{x}^{\overline{b}}$. Тогда $|V:C_V(\langle\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}\rangle)|\leqslant b$, поэтому S_3-подгруппа из $\langle\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}\rangle$ — циклическая группа. Противоречие. Таким образом, $|O_3(\overline{H}_0)|=3$. Так как $\overline{H}=\overline{H}_0\cdot C_{\overline{H}}(\overline{x})$ и $C_{\overline{H}}(\overline{x})$ — 2-группа, то $\overline{H}\simeq\Sigma_3$.

Лемма 1.6. *Пусть группа* H *нечетного порядка точно действует на элементарной* 2-*группе* V, $R=O_{p'}(H)$ — *подгруппа индекса* p *в* H, *и для элемента* f *порядка* p *из* H *имеем* $[R, f]=R$ *и* $C_V(f)=\langle t\rangle$ — *подгруппа порядка* 2. *Тогда* R — *циклическая группа.*

Доказательство. Допустим противное. По индукции R — специальная q-группа, f централизует R' и неприводимо действует на R/R'. Далее, $C_V(R)=1$, так как в случае $t\in C_V(R)$ получим, что f действует без неподвижных точек на $[V, R]$. Противоречие с теоремой 3.4.4 [22].

Предположим, что $R'\neq 1$. Пусть $V_0=C_V(R')$. Тогда $t\in V_0$ и $(R/R')\langle f\rangle$ точно действует на V_0. По индукции R/R' — циклическая группа. Противоречие. Значит, R — элементарная группа, V — прямое произведение подгрупп $C_V(R_i)$, где R_i пробегает все подгруппы индекса p из R. Так как f действует неприводимо на R, то $dd^f\cdot\ldots\cdot d^{f^{p-1}}\in\langle t\rangle$ для любого $d\in C_V(R_i)$. Из однозначности представления t в группе $C_V(R_i)\times C_V(R_i^f)\times\ldots\times C_V(R_i^{f^{p-1}})$ следует, что $|C_V(R_i)|=2$. Но $C_V(R_i)$ допускает R, поэтому $[C_V(R_i), R]=1$. Противоречие с тем, что $C_V(R)=1$. Лемма доказана.

До конца раздела мы будем предполагать, что G — контрпример к теореме. Пусть $M = C(z)$, $Q = O_2(M)$, $T \backslash S_2$ — подгруппа из M, $K - S_{2'}$-подгруппа из M, $\overline{M} = M/\langle z\rangle$.

Лемма 1.7. *$\overline{Q}\overline{K}$ и $N_{\overline{M}}(\overline{K})$ — группы Фробениуса с ядрами $\overline{Q}$ и $\overline{K}$ соответственно. Если a — инволюция из $M \backslash Q$, то каждая инволюция из $M \backslash Q$ сопряжена в M с a или с az.*

Доказательство. Допустим, что $O(M) \neq 1$. Тогда по условию теоремы $Q = \langle t\rangle$ и $\overline{M}$ — группа 2-ранга 1. Так как мультипликатор Шура группы кватернионов тривиален, то $\Omega(T)$ — четверная подгруппа из $Z(T)$. По Z^*-теореме Глаубермана [19] инволюция z сопряжена с некоторым элементом из $T \backslash \{z\}$. По известной лемме Бернсайда это слияние можно осуществить в $N(T)$. Отсюда, T — четверная группа и $G \simeq L_2(q)$, $q \equiv 3,5(8)$ [23]. Так как M — $3'$-группа, то $q \equiv \pm 5(24)$ и G — не контрпример к теореме.

Итак, $O(\overline{M}) = 1$ и по условию $\overline{M}$ — не 2-замкнутая группа. Теперь первое утверждение леммы следует из теоремы 2.2 [30]. Второе утверждение следует из того, что все инволюции из $\overline{M} \backslash \overline{Q}$ сопряжены в $\overline{M}$ (теорема 5 [30]).

Лемма 1.8. *Пусть H — не 2-скованная 2-локальная подгруппа из G. Тогда 2-компоненты из H квазипросты.*

Доказательство. Без ограничения общности инволюция z центральна в H. Пусть $L(H)$ — произведение всех 2-компонент из H, $X = L(H)\langle z\rangle$, $\tilde{X} = X/Z^*(X)$. Так как X централизует $O_2(H)$, то по условию теоремы $C_X(z)$ — 2-группа, в частности, z инвертирует $O(X)$. По теореме Баумана [14] каждая компонента $\tilde{E}$ из $\tilde{X}$ изоморфна $L_2(2^n \pm 1)$, $L_2(q)$, $Sz(q)$, $\mathbf{Sp}_4(q)$, q четно, или $L_3(4)$. По лемме 2.10 [14] $\tilde{z}$ индуцирует внутренний автоморфизм на $\tilde{E}$. Пусть E — 2-компонента из X, не являющаяся компонентой. Тогда $[z, x] \notin Z^*(E)$ для некоторого элемента $x \in E$. Теперь $[z, x] = z \cdot z^x$ централизует $O(E)$ и $\langle [z, x]^E\rangle = E$. Противоречие.

Лемма 1.9. *Пусть E — компонента 2-локальной подгруппы H из G. Тогда $E \simeq L_2(2^n \pm 1)$, $L_2(q)$, $Sz(q)$, $\mathbf{Sp}_4(q)$ или E является накрывающей группой для $L_3(4)$, причем $O(E) = 1$.*

Доказательство. Без ограничения общности инволюция zцентральна в H. Тогда $C_{E\langle z\rangle}(z)$ — 2-группа и $E/Z(E) \simeq L_2(2^n \pm 1)$, $L_2(q)$, $Sz(q)$, $\mathbf{Sp}_4(q)$, q четно, или $L_3(4)$ [14]. Если $O(E) \neq 1$, то z инвертирует $O(E)$. Так как z индуцирует внутренний автоморфизм на $E/Z(E)$, то $[zx, E] \leqslant Z(E)$ для некоторого элемента $x \in E - Z(E)$. Но тогда $[zx, E] = 1$. Противоречие с тем, что z инвертирует $O(E)$. Значит, $O(E) = 1$.

Допустим, что $Z(E) \neq 1$. Тогда $E/Z(E) \simeq L_2(2^n \pm 1)$, $Sz(8)$ или $L_3(4)$. В случае $Sz(8)$ $[zx, E] \leqslant Z(E)$ для некоторого элемента x из $E - Z(E)$. Тогда $[zx, E] = 1$ и x — центральная инволюция в E. По структуре E $x \in Z(E)$. Противоречие. Если $E \simeq SL(2^n \pm 1)$, то противоречие получается, как и для $Sz(8)$. Лемма доказана.

Лемма 1.10. *$F^*(H) = O_2(H)$ для любой 2-локальной подгруппы H из G.*

Доказательство. Из лемм 1.8, 1.9 и теоремы Ашбахера [13] следует, что G содержит стандартную подгруппу A, $A \simeq L_2(2^n \pm 1)$, $L_2(q)$, $Sz(q)$, $\mathbf{Sp}(q)$, q четно, или A — накрывающая группа для $L_3(4)$. Без ограничения общности можно считать, что инволюция z центральна в $N(A)$. Если S_2 — подгруппа из $C(A)$ нециклическая, то можно применить результаты [11, 12]. Но тогда G не содержит инволюции с требуемым централизатором. Итак, S_2-подгруппа из $C(A)$ циклическая.

Если $A \simeq L_2(q)$, $Sz(q)$ или $\mathbf{Sp}_4(q)$, q четно, то применяем [21, 24]. Если же $A \simeq L_2(2^n \pm 1)$, то применяем [17, 5, 26].

Итак, $A/Z(A) \simeq L_3(4)$. Если $|Z(A)|$ делится на 4, то S_2-подгруппа из $N(A)$ имеет циклический центр. Противоречие с тем, что инволюция z центральна в $N(A)$. Значит, $|Z(A)| \leqslant 2$. Пусть $K = C(A)$. Так как $z \in A$, то K — 2-группа.

Если A — простая группа, то по лемме 2.1 [29] $K = \langle t\rangle$ и инволюция t нецентральна. Из пункта (2) теоремы 2.13 [25] следует, что $F^*(G) \simeq L_3(16)$. Противоречие со строением $C(z)$.

Пусть $|Z(A)|=2$. Так как t не квадрат в A, то все инволюции из AK лежат в A. Пусть $U - S_2$-подгруппа из $C_A(z)$, $S - S_2$-подгруппа из $C(t)$, содержащая U. Тогда подгруппа U слабо замкнута в S относительно G. Если инволюция t нецентральна, то S — не S_2-подгруппа в $N(U)$. В этом случае $N(U)/C(Z(U))$ — подгруппа из Σ_4, содержащая A_4. Теперь центр $O_2(N(U))$ — четверная группа и инволюции из $Z(U)\backslash Z(O_2(N(U)))$ сопряжены с t. Отсюда $U' \leqslant Z(O_2(N(U)))$, так как t не квадрат в A, следовательно, $t \notin U'$. По теореме Гашюца $t \notin A'$. Противоречие.

Таким образом, t — центральная инволюция. В этом случае в G три класса центральных инволюций с представителями t, z и tz. Если инволюция t не изолирована в A, то все центральные инволюции в G сопряжены, так как в любой группе число классов центральных инволюций нечетно. Противоречие с тем, что $C(z)$ — разрешимая группа. Значит, t изолирована в A. Теперь t сопряжена с некоторой инволюцией из $N(A)\backslash \backslash AK$. По теореме Альперина [10] $S\backslash UK$ содержит такую инволюцию b, что $b^g=t$ для некоторого $g \in N(C_S(b))$.

Если $g \in C(z)$, то $b \in Z(O_2(C(z)))$. Противоречие со строением $C_U(b)$ (см. предложение 2.2 [25]). Значит, $g \notin C(z)$ и по предложению 2.2 [25] $S = AK\langle b\rangle$, b индуцирует автоморфизм графа на $A/Z(A)$ и диэдральный или полудиэдральный автоморфизм на K. Если $|K|>2$, то по теореме Финкельстейна [17] $K^g \leqslant N(A)$, $g \notin N(A)$. Тогда подгруппа индекса не большего 2 из K^g содержится в AK. Так как инволюция t изолирована в AK, то $t^g=t$, $g \in N(A)$. Противоречие. Значит, $|K|=2$.

Пусть $V = C_S(b)$, $V_1 = V \cap U$, $V_0 = V \cap C(b)'$. Тогда в $V\backslash V_1$ четыре инволюции сопряжены с b и четыре сопряжены с bt, а в V_1 три инволюции сопряжены с z и три сопряжены с zt. Так как подгруппа V_1 неинвариантна в $N(V)$, то инволюции из $V_1\backslash(V_0 \cup \{t\})$ сопряжены с инволюцией bt. Таким образом, $|t^G \cap V|=5$ и $V_0 \lhd N(V)$. Если x — элемент порядка 5 из $N(V)\backslash C(t)$, то x централизует V_0 и V/V_0. Противоречие с тем, что $C(V)$ — 2-группа. Лемма доказана.

2. О ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В $N(J)$

Пусть $T - S_2$-подгруппа группы G, $J=J(T)$ и некоторая инволюция z из T лежит в центре $N(J)$. Наша цель — доказательство следующего результата.

Теорема 2.1. *Если инволюция z не слабо замкнута в T относительно G, то T содержит такую подгруппу R, что выполняется одно из следующих утверждений:*

1) $|T:R|=2$, $z \in R\backslash Z(N(R))$;

2) *R — элементарная группа порядка 16, $N_T(R) - S_2$-подгруппа из $N(R)$ и $N(R)/C(R) \simeq O_4^{\pm}(2)$;*

3) *$O^2(C(R))$ имеет диэдральную или полудиэдральную S_2-подгруппу порядка не меньшего 8 и $O^2(C(R)) \cap R = 1$.*

Эта теорема получена Г. Глауберманом для случая, когда $J(T)$ порождается абелевыми подгруппами из T наибольшего порядка [20].

Для доказательства предложения нам понадобятся следующие две леммы, имеющие самостоятельный интерес.

Лемма 2.1. *$T - S_2$-подгруппа группы G, $N(J(T)) \leqslant M < G$ и выполняется условие:*

(*) *Если $O_2(G) \leqslant H < G$, $H \nleqslant M$ и $T \cap H$ содержит элемент из $\mathscr{A}(T)\backslash \backslash\mathscr{A}(O_2(G))$, то $N_H(J(T \cap H)) \nleqslant M$. Тогда для $A \in \mathscr{A}(T) - \mathscr{A}(O_2(G))$ и $g \in \in G\backslash M$ верно $\langle O_2(G), A, A^g\rangle = G$.*

Доказательство. Заметим, что в условиях леммы T можно заменить на любую S_2-подгруппу из M. Пусть $A \in \mathscr{A}(T)\backslash\mathscr{A}(O_2(G))$. Покажем сначала, что если $g \in G\backslash M$, то $\langle AO_2(G), g\rangle = G$, в частности, M — максимальная подгруппа в G. Для этого достаточно показать, что $AO_2(G) \leqslant L < G$ влечет $L \leqslant M$. Допустим противное и выберем подгруппу L так, что $AO_2(G) \leqslant L < G$, $L \nleqslant M$ и $|L \cap M|_2$ максимален. Пусть $R - S_2$-подгруппа из $L \cap M$, содержащая $AO_2(G)$. По выбору L $N(R) \leqslant$

$\leqslant M$. Отсюда $R - S_2$-подгруппа из L. По условию (*) $N(J(R)) \nleqslant M$. Выбор L влечет $N(J(R)) = G$. Но тогда $A \leqslant O_2(G)$. Противоречие с выбором A.

Пусть $g \in G \backslash M$ и $A^g \leqslant M$. Тогда $AO_2(G) \leqslant M^{g^{-1}} < G$. Как показано выше, $M^{g^{-1}} = M$, поэтому $g \in M$. Противоречие. Значит, $A^g \nleqslant M$ и $\langle AO_2(G), A^g \rangle = G$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия леммы 2.1, $P = O_2(G)$, $V = \Omega(Z(P))$, $C = C(V) \leqslant M$ и $W = V/V \cap Z(G)$. Тогда $C/P - 2'$-группа, и найдется такая подгруппа $A \in \mathscr{A}(T) \backslash \mathscr{A}(P)$, что $T = PA$, $|W| = q^2$ для $q = |A : A \cap C|$ и $G/C(W) \simeq \mathrm{SL}_2(q)$.*

Доказательство. Если $J(T) \leqslant P$, то $G = N(J(T)) \leqslant M$. Противоречие. Значит, $\mathscr{A}(T) \backslash \mathscr{A}(P)$ содержит некоторую подгруппу A. Пусть $N/C = O_2'(G/C)$. Тогда $N \cap T - S_2$-подгруппа в N, $(T \cap N)C = N \leqslant M$. По рассуждению Фраттини $G = NN(T \cap N) \leqslant M \cdot N(T \cap N)$. Пусть $g \in N(T \cap N) \backslash M$. По лемме 2.1 $G = \langle AO_2(G), g \rangle \leqslant N(T \cap N)$, поэтому $T \cap N = P$. Таким образом, $N/C - 2'$-группа и $O_2(G/C) = 1$.

Выберем $A \in \mathscr{A}(T) \backslash \mathscr{A}(P)$ так, что $|A \cap V|$ максимален. В лемме 8.2.4 [22] показано, что $[V, A, A] = 1$. Так как $A \in \mathscr{A}(T)$, то $|A| \geqslant |(A \cap C)V| = |A \cap C||A|/|C_V(A)|$. Теперь G/C, AC/C и V удовлетворяют условию 1 из [20]. По теореме 2 [20] $G/C \simeq \mathrm{SL}_2(q)$, где $q = |A : A \cap C|$. Отсюда $T = PA$. Лемма доказана.

Пусть $M = C(z)$, $\mathscr{D}$ — множество всех 2-подгрупп D_0 из M, для которых $z \in D_0$, $D_0 = J(D_0)$ и $z \notin Z(N(D_0))$.

Лемма 2.3. $\mathscr{D} \neq \varnothing$. *Пусть $d(\mathscr{D})$ — наибольшее из чисел $d(D_0)$, когда $D_0 \in \mathscr{D}$. Выберем максимальный по включению элемент D из $\mathscr{D}$ с условием $d(D) = d(\mathscr{D})$. Тогда $N(D)$ содержит подгруппы A, W, Z и элемент x со свойствами:*

1) *W — четверная группа и $\Omega(Z(D)) = W \times Z$;*
2) *A — абелева подгруппа из $N_M(W)$ порядка $d(D)$ и $x \in N(W) \cap C(z)$;*
3) *$A^x \nleqslant M$, $\langle A, A^x \rangle$ централизует z и индуцирует Σ_3 на W.*

Далее, подгруппу D можно выбрать так, что

4) *$N_T(D) - S_2$-подгруппа из $N(D)$ и $N(J(N_T(D))) \leqslant M$;*
5) *$\Omega(Z(T)) \leqslant C_T(D) = Z(D)$.*

Доказательство. Пусть $z^g \in T$, $g \notin M$. Если $z^g \in Z(T)$, то по лемме Бернсайда z и z^g сопряжены в $N(T)$, поэтому $z = z^g$. Противоречие. Значит, $z^g \notin Z(T)$. Пусть $E = M \cap T^{g^{-1}}$. Тогда $z \in E$ и $N(E) \cap T^{g^{-1}} \neq E$, следовательно, $z \notin Z(N(E))$. Так как $z \in Z(E)$, то $z \in J(E)$, поэтому $\mathscr{D} \neq \varnothing$.

Среди элементов D_0 из $\mathscr{D}$ с условием $d(D_0) = d(\mathscr{D})$ выберем максимальный по включению элемент D. Пусть $R - S_2$-подгруппа из $N_M(D)$. Тогда $R - S_2$-подгруппа из $N(D)$ и $M \geqslant N(J(R))$. Если $N(J(R)) \nleqslant M$, то $J(R) \in \mathscr{D}$, следовательно, $J(R) = D$, поэтому $R - S_2$-подгруппа из M. В этом случае подгруппы R и T сопряжены в M и $N(J(T)) \leqslant M$. Противоречие. Значит, $N(J(R)) \leqslant M$. Пусть $Q - S_2$-подгруппа из $N(D)$, содержащая R. Если $R \neq Q$, то $N(J(R))$ содержит $N_Q(R)$ и $N_Q(R) \nleqslant M$. Максимальность D влечет $J(R) = D$, поэтому $Q = R$.

Теперь можно доказать 4) и 5). Пусть $R^g \leqslant T$, $g \in M$. Заменив D на D^g, можно считать, что $R \leqslant T$. Пусть $E_1 = C_T(D) = C_R(D)$. По рассуждению Фраттини $N(D) = C(D) \cdot (N(D) \cap N(E_1))$, поэтому $N(DE_1) \nleqslant M$. Значит, $J(DE_1) \in \mathscr{D}$, поэтому $\Omega(E_1) \leqslant D$. Это доказывает 5).

Утверждения 1) — 3) докажем индукцией по порядку группы. Пусть $G^* = N(D)$, $T^* = R$. Тогда инволюция z не слабо замкнута в T^* относительно G^*. Если $\mathscr{D}^*$ — множество подгрупп из G^*, соответствующих $\mathscr{D}$, то $D \in \mathscr{D}^*$ и $d(D) = d(\mathscr{D}^*)$. Если $G^* \neq G$, то утверждения 1) — 3) следуют по индукции.

Таким образом, $G = N(D)$. Пусть $P = O_2(G)$, $V = \Omega(Z(P))$, $C = C(V)$ и $W_0 = V/V \cap Z(G)$. Предположим, что $P \leqslant H < G$, $H \nleqslant M$ и $T \cap H - S_2$-подгруппа из H. Если $N_H(J(T \cap H)) \leqslant M$, то мы можем применить гипотезу индукции к H, поэтому $N_H(J(T \cap H)) \nleqslant M$. Итак, выполнены условия леммы 2.2. По лемме 2.2 $\mathscr{A}(T) \backslash \mathscr{A}(P)$ содержит такую подгруппу A, что $G/C \simeq \mathrm{SL}_2(q)$, где $q = |A : A \cap C|$, и $|W_0| = q^2$. Пусть W_1 — одномерное подпространство из W_0, порожденное образом элемента z, $H = N(W_1)$. Тогда $P \leqslant H < G$ и $H \cap T = T$. Так как $N(J) \leqslant M$, то, как показано выше, $H \leqslant M$, поэтому $q = 2$ и W_0 — четверная группа. Теперь $V = W \times Z_0$, где $Z_0 = Z(G) \cap V$, $W = [V, G]$. Пусть $A_0 = C_A(W)$, $a \in A \setminus A_0$, d — элемент из G, индуцирующий элемент порядка 3 на W. Тогда для $x = [a, d]$ подгруппа $B = \langle A, A^x \rangle$ индуцирует Σ_3 на W. Так как $[B, z] \neq 1$, то $[A^x, z] \neq 1$. По выбору D имеем $J(P) = D$. Далее, $d(D) = |A_0 W|$, поэтому $\Omega(Z(D)) \leqslant A_0 W$.

Пусть $V_0 = \Omega(Z(D))$. Тогда $|V_0 : V_0 \cap A| = 2$. Отсюда $|V_0 : C_{V_0}(B)| \leqslant 4$. С другой стороны, $W \cap Z_0 = 1$ и $|W| = 4$. Таким образом, $V_0 = C_{V_0}(B) \times W$. Лемма доказана.

Пусть подгруппа D удовлетворяет условиям леммы 2.3 и пунктам 1)—5) заключения этой леммы. Положим $B = \langle A, A^x, D \rangle$.

Лемма 2.4. *Пусть $g \in N(D)$. Тогда A^g нормализует W. Если $A^g \leqslant M$, P — 2-подгруппа, содержащая $A^g D$, то $N(P) \leqslant M$.*

Доказательство. Докажем второе утверждение. Предположим сначала, что $P \nleqslant M$. Пусть Q — максимальная подгруппа из P, содержащая $P \cap M$. Тогда $A^g D \leqslant Q$. По индукции $P \leqslant N(Q) \leqslant M$. Значит, $P \leqslant M$. Пусть $D^* = J(P)$. Тогда выбор D влечет $M \geqslant N(D^*)$. Отсюда $N(P) \leqslant M$.

Допустим, что $A^g \nleqslant N(W)$. Пусть $E = \langle B, A^g \rangle$. Выберем g так, что $A^g \nleqslant N(W)$ и $|E|$ минимален. Пусть S — S_2-подгруппа из E, содержащая AD. Тогда $N(S) \leqslant M$. Положим $V = \Omega(Z(D))$, $X = [V, E]$. Тогда $X = [V, A][V, A^x][V, A^g]$. По лемме 2.3 $W \leqslant X$ и $|[V, A]| = 2$. Отсюда $|X| = 8$. Так как E централизует V/X, то $C_E(X)$ централизует V и V/X. Отсюда $C_E(X)/C_E(V)$ — 2-группа. Пусть $\bar{E} = E/C_E(X)$. Тогда $\bar{E}$ вкладывается в $L_3(2)$, причем $\bar{B} \simeq \Sigma_3$. Если $\bar{E}$ действует неприводимо на X, то $\bar{E} \simeq L_3(2)$. Но тогда найдется $y \in E$ такой, что $A^y \nleqslant N(W)$ и $\langle \overline{B, A^y} \rangle \simeq \Sigma_4$. Противоречие с минимальностью $|E|$.

Пусть Y — неприводимая под действием E подгруппа из X. Допустим, что $|Y| = 4$. Тогда $Y \cap W \neq 1$. Но в этом случае $Y = W$. Значит, $|Y| = 2$. Теперь $\bar{E} \simeq \Sigma_4$ и $Y = C_X(\bar{E}) = C_X(O_2(\bar{E}))$. Отсюда $Y \cap W = 1$. Пусть F — полный прообраз в E группы $O_2(\bar{E})$, $V_0 = C_V(F)$. Тогда $F \lhd E$ и $V_0 \lhd E$. Так как B централизует V/W и $V_0 \cap W = (V_0 \cap X) \cap W = Y \cap W = 1$, то $[B, V_0] = 1$. Далее, $F/C_E(X)$ — 2-группа и $C_E(X)/C_E(V)$ — 2-группа, следовательно, $V_0 = C_V(F) = C_V(F \cap T) \ni z$. Противоречие с тем, что $[B, V_0] = 1$.

Лемма 2.5. *Пусть $U = N_T(D)$, $S = C_U(W)$. Тогда*

1) $W \lhd N(D)$;
2) $|U : S| = 2$ *и* $d(U) = d(S)$;
3) $z \in Z(S) \setminus Z(N(S))$;
4) $D = J(S)$ *и* U — *S_2-подгруппа из* $N(S)$;
5) S — *S_2-подгруппа из* $C(W)$.

Далее, мы можем выбрать A и x так, что

6) $x \in N(S)$ *и* $A \leqslant U$.

Доказательство. Предположим, что $g \in N(D) \setminus N(W)$. По лемме 2.4 B^g и $B^{g^{-1}}$ нормализуют W. Отсюда B нормализует W^g. Так как B неприводимо действует на W, то $W \cap W^g = 1$. Пусть $V = \Omega(Z(D))$. Тогда $[V, B] = W$, поэтому $[B, W^g] = 1$. Аналогично $[B^g, W] = 1$. Теперь $[B, B^g]$ централизует V/W^g и V/W, поэтому $[B, B^g]$ централизует V. Пусть $C = C_{N(D)}(V)$. Тогда $\langle B, B^g \rangle C/C \simeq \Sigma_3 \times \Sigma_3$.

Пусть $M^* = M \cap N(D)$. Заметим, что $\langle A, A^g \rangle C/C$ — 2-группа. Пусть T_1 — S_2-подгруппа из $\langle A, A^g \rangle C$, содержащая AD. По лемме 2.4 $T_1 \leqslant M^*$. Отсюда $A^g \leqslant M^* C = M^*$. Так как $\langle A^x, A^g \rangle C/C$ — 2-группа, то, как и выше, $A^x \leqslant M^*$. Противоречие. Итак, $W \lhd N(D)$. Так как U — S_2-подгруппа из $N(D)$, то S содержит D. Далее, $N(D) \cap C(W) \lhd N(D)$, поэтому S — S_2-подгруппа из $N(D) \cap C(W)$. Отсюда $|U : S| = 2$. В доказательстве леммы 2.3 мы получили, что $d(U) = d(D)$. Так как $D \leqslant S$, то $d(D) = d(S)$. Но $N(J(S)) \nleqslant M$, поэтому $J(S) = D$. Утверждения 1) — 4) доказаны.

$J(U) \neq D$, поэтому $N(J(U)) \leqslant M$. Пусть R — S_2-подгруппа из $C(W)$, содержащая S. Тогда $S \leqslant N_R(S) \leqslant N_R(D)$, поэтому $S = R$. Пусть $Z_0 = \Omega(Z(S))$, $L = N(D) \cap N(Z_0)$. Заменим G и T на L и U. Рассмотрим множество $\mathscr{D}^*$ для L, аналогичное $\mathscr{D}$. Применив лемму 2.3, получим, что можно выбрать $A \leqslant N(S)$ и $x \in N(S)$. Теперь $A^y \leqslant U$ для некоторого $y \in N_{M^*}(S)$. Лемма доказана.

Если $U = T$, то теорема 2.1 выполняется с $R = S$. Допустим, что $U \neq T$. Предположим, что выполнены условия леммы 2.3, пункты 4) и 5) из ее заключения и пункт 6) из заключения леммы 2.5. Положим $H = \langle A, A^x, S\rangle$ и выберем подгруппу S_0 из S, максимальную с условием

$$S_0 \lhd H \text{ и } U \text{ — не } S_2\text{-подгруппа из } N(S_0).$$

Возможно, что $S_0 = 1$. В любом случае $S_0 < S$ по пункту 4) леммы 2.5.

Пусть T^* — S_2-подгруппа из $N(S_0)$, содержащая U. По лемме 2.4 $T^* \leqslant M$. Заменив S_0 подгруппой, сопряженной под действием M, если необходимо, мы можем считать, что $T^* \leqslant T$.

Так как $|U:S| = 2$, $A \nleqslant S$, $A^x \nleqslant U$, то $S = O_2(H)$ и H/S — диэдральная группа. Теперь $N(S_0)/S_0$, H/S_0, U/S_0 и T^*/S_0 удовлетворяют условиям на G, H, U, T в лемме 1.1. Таким образом, T^*/S_0 — диэдральная, полудиэдральная группа или группа, изоморфная голоморфу Z_8.

Лемма 2.6. *Если $z \notin S_0$, то $W \cap S_0 = 1$; H/S_0 и $N(S_0)/S_0$ удовлетворяют пунктам 2) или 3) в заключении леммы 1.1; S_2-подгруппа из $O^2(C(S_0))$ — диэдральная или полудиэдральная группа порядка не меньшего 8 и $O^2(C(S_0)) \cap S_0 = 1$.*

Доказательство. Допустим, что $W \cap S_0 \neq 1$. Тогда $W \leqslant S_0$. По пункту 3) из заключения леммы 2.3 $[H, z] \leqslant W$. Теперь $W\langle z\rangle \lhd H$, поэтому $S_0\langle z\rangle \lhd H$. Так как $z \in Z(T)$, то $\langle S_0, z\rangle \lhd \langle H, T^*\rangle$. Противоречие с выбором S_0. Значит, $W \cap S_0 = 1$.

Так как $|U/S_0| > |S/S_0| \geqslant |W| = 4$, то $N(S_0)/S_0$ не удовлетворяет пункту 1) заключения леммы 1.1.

Покажем, что $H = S \cdot C_H(S_0)$ и $W \leqslant O^2(C_H(S_0))$. Если $C_U(S_0) \leqslant S$, то $S_1 = S_0 \cdot C_U(S_0)$ — нормальная подгруппа в H и $z \in S_1$. Противоречие с выбором S_0. Значит, $C_U(S_0) \nleqslant S$. Так как $O_2(H/S) = 1$, то $H/S = SC_H(S_0)/S$, поэтому $H = S \cdot C_H(S_0)$. Пусть h — 3-элемент из $C_H(S_0)$, индуцирующий автоморфизм порядка 3 на W. Тогда $[W, h] = W \leqslant O^2(C_H(S_0))$.

Пусть $G_1 = O^2(C(S_0))$, $G_2 = C(S_0)T^*$. Тогда $O^2(G_2) = G_1$ и $H \leqslant G_2$. Как и выше, G_2/S_0 удовлетворяет пунктам 2) или 3) из заключения леммы 1.1, так как $W \cap S_0 = 1$.

Пусть $T_1 = T^* \cap G_1$, $S_1 = S_0 \cap G_1$. Тогда $S_1 \leqslant Z(G_1)$ и T_1 — S_2-подгруппа из G_1, причем $T_1 \leqslant G_1'$, так как $G_1 = O^2(G_1)$. Рассуждение о сдвиге показывает, что $S_1 \leqslant T_1'$. Теперь T_1S_0/S_0 — диэдральная или полудиэдральная группа, поэтому $|T_1 : T_1'| = 4$. Далее, $W \leqslant O^2(C_H(S_0)) \leqslant G_1$, поэтому $W \leqslant T_1$. Таким образом, T_1 — группа максимального класса, содержащая четверную подгруппу, и $|T_1| \geqslant 8$.

Наконец, $S_1 \leqslant S_0 \cap Z(T_1) \leqslant S_0 \cap W = 1$, поэтому $G_1 \simeq G_1S_0/S_0$. Лемма доказана.

Итак, если $z \notin S_0$, то теорема 2.1 выполняется с $R = S_0$. Пусть $z \in S_0$, $Y = \Omega(Z(S_0))$.

Лемма 2.7. *Выполнено $W \leqslant Y$. Далее, $\mathscr{A}(U)$ содержит такие подгруппы B_1 и B_2, что $B_1 \leqslant S$, $B_2 \nleqslant S$ и $|B_i : B_i \cap S_0| = 2$ для $i = 1, 2$. Более того, $d(S_0) = d(U)$.*

Доказательство. Пусть $Y = \Omega(Z(S_0))$. Тогда $z \in Y$, поэтому $W = [z, H] \leqslant Y$. Пусть $S_1 = C_T(Y)$. Тогда $S_0 \leqslant S_1 \leqslant C_T(W) = S$. Отсюда $S_1 = C_S(Y) \lhd H$ и $S_1 = C_U(Y) \lhd N_{T^*}(U)$. Максимальность S_0 влечет $S_0 = S_1$.

Мы знаем, что $d(U) = d(S)$. По выбору S_0 имеем $J(S) \nleqslant S_0$. Пусть m — максимальное число среди чисел $|B \cap Y|$, когда $B \in \mathscr{A}(S) \setminus \mathscr{A}(S_0)$. Пусть S_2 — подгруппа из S, порожденная теми элементами из $\mathscr{A}(S)$, для которых $|B \cap Y| = m$. Тогда S_2 слабо замкнута в S относительно $N(S_0)$, поэтому $S_0 < S_0S_2 \lhd H$. По выбору S_0 имеем $N_{T^*}(S_2) = N_{T^*}(S_0S_2) = U$. Пусть $y \in N_{T^*}(U) \setminus U$. Тогда $S_2^y \neq S_2$, поэтому $S_2^y \not\leqslant S$. Выберем $B \in \mathscr{A}(S_2)$ так, что $B^y \not\leqslant S$. Тогда B^y не централизует W, следовательно, $|B| = |(B^y \cap S)W|$. Значит, $(B^y \cap S)W \in \mathscr{A}(S)$. Пусть $B^* = ((B^y \cap S)W)^{y^{-1}} = (B \cap S^{y^{-1}})W^{y^{-1}}$. Тогда $B^* \leqslant BY \leqslant S$, поэтому $B^* \in \mathscr{A}(S)$. Однако $|B^* \cap Y| = |B^{*y} \cap Y| = |(B^y \cap S)W \cap Y| = |(B^y \cap Y)W| \geqslant 2|B^y \cap Y| = 2m$. Максимальность m влечет $B^* \leqslant S_0$. Отсюда $B^y \cap S \leqslant B^{*y} \leqslant S_0^y = S_0$, поэтому $|B^y : B^y \cap S_0| = 2$. Более того, $d(S_0) = d(U)$.

Пусть $B_1 = B$ и $B_2 = B^y$. Тогда $|B_i : B_i \cap S_0| = 2$. Лемма доказана.

Выберем элемент B из $\mathscr{A}(U)$ так, что $|B : B \cap S_0| = 2$. Тогда $|(B \cap S_0)Y| = |B|$, поэтому $|Y/Y \cap B| = |Y/Y \cap (B \cap S_0)| = |(B \cap S_0)Y/B \cap S_0| = 2$. Отсюда $|Y/Y \cap B| = |[Y, B]| = 2$. Пусть подгруппы B_1 и B_2 выбраны, как в лемме 2.7: $H = \langle S, B_2, B_2^y\rangle$ для некоторого $y \in H$. Выберем $2'$-элемент h из H так, что $H = \langle U, h\rangle$. Тогда $h \in O^2(H)$.

Положим $G^* = N(S_0)$ и пусть Y_1 — наименьшая нормальная в G^* подгруппа, содержащая W. Тогда $Y_1 \leqslant Y$. Пусть $Y_2 \leqslant Y_1$ и Y_1/Y_2 — главный фактор в G^*. Тогда $E = Y_1/Y_2$ — неприводимый F_2G^*-модуль. Пусть $\tilde G = G^*/C_{G^*}(E)$, L — наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая S_0, B_1 и B_2. По теореме Клиффорда $E = E_1 \times \ldots \times E_r$, где E_i — неприводимые F_2L-модули, и для любой пары E_i, E_j найдется элемент $g \in G^*$ такой, что $E_i^g = E_j$. Заметим, что $W \cap Y_2 = 1$, так как W — минимальная нормальная подгруппа из H.

Лемма 2.8. *Пусть $C_T(E) = S_0$. Если $|E_i| = 4$, то $|E| = 16$ и $\tilde G \simeq O_4^+(2)$.*

Доказательство. Пусть $C = X_{T^*}(E)$. Тогда $S_0 \leqslant C$. Так как $W \simeq WY_2/Y_2$ и $C_T(W) = S$, то $C \cap U = C \cap S$, поэтому $C \cap U \lhd H$. Максимальность S_0 влечет $S_0 = C \cap U$. Если $S_0 \subset C$, то C/S_0 содержит неединичную подгруппу C_1/S_0 из $Z(T^*/S_0)$. Отсюда $C_1 \leqslant N_{T^*}(S) = U$. Противоречие.

Если $|E_i| = 4$, то $L/C_L(E_i) \simeq \Sigma_3$. В этом случае $r \geqslant 2$, так как $|\tilde T^*| \geqslant 4$. Кроме того, $O^2(\tilde L)$ — 3-группа. Так как $h \in O^2(L)$, то $[h, S] \leqslant [O^2(L), G^*] \cap S \leqslant O^2(L) \cap S$. Значит, $[h, S] \leqslant C_S(E) = S_0$, h централизует S/S_0. Далее, $U'S_0 \lhd H$ и максимальность S_0 влечет $U' \leqslant S_0$. По лемме 1.1 $\tilde U$ — четверная группа и $\tilde T^*$ — диэдральная или полудиэдральная группа. Отсюда $\tilde U = \tilde B_2\tilde S = \tilde B_2\tilde B_1\tilde S_0 = \tilde B_2 \times \tilde B_1 \leqslant \tilde L$. Пусть $a \in T^* \cap L$. Тогда a^2 централизует каждый сомножитель E_i, поэтому $a^2 \in S_0$. Таким образом, $\tilde T^* \cap \tilde L$ — нормальная элементарная подгруппа из $\tilde T^*$, следовательно, $\tilde T^* \simeq D_8$. Так как $L/C_L(E_i) \simeq \Sigma_3$ и $|E : C_E(B_1)| = |E : C_E(B_2)| = 2$, то $r = 2$, и без ограничения общности $\tilde B_1$ централизует E_2 и $\tilde B_2$ централизует E_1. Теперь $\tilde L \simeq \Sigma_3 \times \Sigma_3$ и $\tilde G \simeq O_4^+(2)$.

Лемма 2.9. *Если $|E_i| > 4$, то $|E| = 16$ и $G \simeq O_4^-(2)$.*

Доказательство. Пусть $|E_i| > 4$ и $K = O^2(\tilde L)$. По теореме 4 и ее следствию [20] $K/C_K(E_i)$ — простая группа, содержащая диэдральную подгруппу порядка 8. Если $C_K(E_i) \neq C_K(E_j)$ для некоторых $i \neq j$, то $K/C_K(E_i) \cap C_K(E_j) \simeq K/C_K(E_i) \times K/C_K(E_j)$, что невозможно по структуре $\tilde T^*$. Значит, $C_K(E_i) = C_K(E_j) = 1$. Заметим, что $h \in K \cap \langle B_2, B_2^y\rangle$, поэтому $|E/C_E(h)| = 4$ и $E = \tilde W \times C_E(h)$. Мы можем считать, что h не централизует E_1. Тогда $\tilde W \leqslant E_1$ и h централизует E_i для $i > 1$. Отсюда $r = 1$. Если $|E| = 8$, то $\tilde L \simeq L_3(2)$, поэтому $\tilde G = \tilde L$ и $|\tilde T^*| = 8$. В этом случае $|\tilde U| = 4$, $|\tilde S| = 2$ и $\tilde S \leqslant Z(\tilde H)$. Значит, $\tilde S$ централизует $\tilde h$. Противоречие со свойствами $L_3(2)$.

Итак, $|E| \geqslant 16$. Пусть $P = \mathrm{Aut}\,E$. Так как $C_P(\tilde L)$ централизует $C_E(\tilde B_1)$, то по теореме 5.2 [20] $C_P(\tilde L) = 1$. Если $|E| > 2^4$, то по следствию теоремы 4 [20] $\tilde L \simeq \Sigma_7$. В этом случае $\tilde G = \tilde L$ и $\tilde T^* \simeq Z_2 \times D_8$. Противоречие.

Значит, $|E| = 16$. Если $\tilde L \simeq \mathrm{Sp}_4(2)$, то $N_P(\tilde L) = \tilde L$, поэтому $\tilde G = \tilde L$ и $\tilde T^* \simeq Z_2 \times D_8$. Противоречие. Итак, $\tilde L \simeq \Sigma_5$. Отсюда $\tilde G = \tilde L \simeq O_4^-(2)$.

Лемма 2.10. *$Y_2 = 1$, S_0 — S_2-подгруппа из $C(Y_1)$ и T^* — S_2-подгруппа из $N(E)$.*

Доказательство. Если B_1 не централизует Y_2, то $Y = Y_2 \cdot C_Y(B_1)$ и B_1 централизует E. Противоречие. Значит, $[B_1, Y_2] = [B_2, Y_2] = 1$. Так как S_0 централизует Y и $C_{G^*}(Y_2) \lhd G^*$, то $L \leqslant C_{G^*}(Y_2)$. Теперь $C_L(E)/ /C_L(Y_1)$ — 2-группа, причем $S_0 \leqslant C_L(Y) \leqslant C_L(Y_1)$, поэтому $C_L(Y_1) = C_L(E)$. По лемме 5 [20] G^* содержит такие элементы g_1, g_2, g_3, g_4, что $L = C_L(Y_1) \cdot \langle B_1^{g_i} \mid i = 1, \ldots, 4\rangle$. Пусть $F = [Y_1, L]$. Тогда $F = \langle [Y, B_1^{g_i}] \mid i = 1, \ldots, 4\rangle$ и $F \lhd G^*$. Так как $|[Y, B^{g_i}]| = 2$, то $|F| = 16$. Но $h \in L$, поэтому $W = [W, h] \leqslant F$. По определению Y_1 и Y_2 имеем $Y_1 = E$ и $Y_2 = 1$.

Пусть $G_1 = N(E)$ и $G_2 = C(E)$. Тогда $G^* \leqslant G_1$. Пусть Q — S_2-подгруппа из G_2, содержащая S_0. Тогда $S_0 = N_Q(S_0)$, так как S_0 — S_2-подгруппа из $C_{G^*}(E)$. По рассуждению Фраттини $G_1 = G_2 \cdot G^*$. Лемма, а вместе с ней и теорема 2.1 с $R = E$ доказаны.

3. ОТОЖДЕСТВЛЕНИЕ ГРУППЫ ТИТСА

Пусть G — контрпример к теореме, $M = C(z)$, $Q = O_2(M)$. В этом разделе мы будем предполагать, что $Z(T) = \langle z\rangle$ для S_2-подгруппы T из M. Пусть $\mathscr{F} = \{F \mid F$ — элементарная нормальная 2-подгруппа из M и $F/\langle z\rangle$ — главный фактор в $M\}$.

Лемма 3.1. *Q — не экстраспециальная группа, $\mathscr{F} \neq \varnothing$.*

Доказательство. Если Q — экстраспециальная группа, то из теоремы [33] следует, что $G \simeq L_2(7)$, $L_2(9)$, $U_4(2)$, $U_4(3)$, $L_4(3)$, $G_2(3)$, $\Omega_8^+(2)$, $\Omega_8^+(3)$, A_8, A_9, M_{11} или M_{12}. Так как $C(z)$ — $3'$-группа, то $G \simeq L_2(7)$ или $L_2(9)$. Противоречие с выбором G.

Допустим, что $\mathscr{F} = \varnothing$. Тогда каждая абелева характеристическая подгруппа из Q — циклическая группа. По теореме Холла 5.4.9 [22] Q — центральное произведение экстраспециальной группы и циклической группы или группы максимального класса. Действие $S_{2'}$-подгруппы из M на Q влечет тривиальность второго сомножителя, следовательно, Q — экстраспециальная группа. Противоречие. Лемма доказана.

До конца раздела зафиксируем подгруппу $F \in \mathscr{F}$ и положим

$$\widetilde{\mathscr{F}}_0 = \{F^g \mid F^g \leqslant T,\ g \in G,\ F^g \ntrianglelefteq Q\},\quad \widetilde{\mathscr{F}} = \{F^g \in \widetilde{\mathscr{F}}_0 \mid z^g \in Q\}.$$

Наша цель — показать, что если $\widetilde{\mathscr{F}}_0 \neq \varnothing$, то $G \simeq {}^2F_4(2')$.

Лемма 3.2. *$C(F_0) \leqslant M$ для каждой гиперплоскости F_0 из F.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда $F_0\langle z\rangle = F$ и $C_M(F_0) = C_M(F)$ — нормальная 2-подгруппа из M. Отсюда $C_M(F_0)$ — S_2-подгруппа из $C(F_0)$. Заметим, что $N_Q(F_0) = C_Q(F_0)$ и $|Q : C_Q(F_0)| = |F_0|$, поэтому все гиперплоскости из F, не содержащие z, сопряжены под действием Q. Теперь $M = Q \cdot N_M(F_0)$.

Если y — неединичный $2'$-элемент из $N_M(F_0)$, $R = O_2(C(F_0))$, $Y = \Omega(Z(R))$, то $z \in Y$ и $C(y) \cap C(F_0) = \langle z\rangle$. Отсюда y действует без неподвижных точек на $C(F_0)/Y$. Из леммы 1.6 следует, что $C(F_0)$ — 2-группа. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть a — инволюция из M. Если $[F, a] \nleqslant \langle z\rangle$, то $F/\langle z\rangle$ — свободный $F_2\langle a\rangle$-модуль. Далее, если $C_F(a)$ — гиперплоскость из F, то $a \in Q$ и $[a, F] = \langle z\rangle$.*

Доказательство. Пусть a — инволюция из M и $[F, a] \nleqslant \langle z\rangle$. Так как $[Q, F] = \langle z\rangle$, то $a \notin Q$, следовательно, a инвертирует некоторую $S_{2'}$-подгруппу из M. Отсюда следует первое утверждение. Так как $|F : \langle z\rangle| > 8$, то первое утверждение влечет второе.

Лемма 3.4. *Пусть T_0 — такая подгруппа из T, что $|T_0 : Q| = 2$. Если T_0 содержит такую сопряженную с z инволюцию a, что $V = \langle a, z\rangle$ — нормальная в T_0 четверная группа, то $\widetilde{\mathscr{F}}_0 \neq \varnothing$, $N(V)/C(V) \simeq \Sigma_3$ и $\langle F^g \mid F^g \leqslant T\rangle \leqslant C(V)$. Если при этом $a \in F$, то $\widetilde{\mathscr{F}} \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $R = C(V)$. По условию теоремы R — 2-группа. Так как $Z(T) = \langle z\rangle$, то действие $S_{2'}$-подгруппы из M на Q влечет $Z(Q)=\langle z\rangle$. Отсюда $V=\Omega(Z(R))$. Если $x\in N_{C(a)}(R)\backslash R$, то $[x, z]=a$. Далее, $[Q, a]=\langle z\rangle$, следовательно, $N(V)/R\simeq\Sigma_3$.

Заметим, что $\langle F^g|F^g\leqslant T\rangle\leqslant T_0$. Допустим, что $F^g\leqslant T_0$, но $F^g\not\leqslant R$, $g\in G$. Пусть $f\in F^g\backslash R$. Тогда f инвертирует некоторую S_3-подгруппу $\langle y\rangle$ из $N(V)$. Так как V централизует гиперплоскость из F^g, то $[V, F^g]=\langle z^g\rangle$. С другой стороны, $[V, f]=\langle z\rangle$, поэтому $z=z^g$, $g\in N(F)$. Положим $R_1=[R, y]$, $R_2=C_R(y)$. Тогда $R_1=[R_1, f]\times[R_1, f]^y$, причем $F\cap R=F\cap R_1\times F\cap R_2$. Отсюда $[R_1, f]^y$ централизует гиперплоскость из F, следовательно, $[[R_1, f]^y, f]=\langle z\rangle$. Таким образом, $|R_1|=4$, $R=V\times R_2$. Так как $Z(T_0)=\langle z\rangle$, то $R_2=1$. Противоречие с тем, что $|F|\geqslant 32$. Итак, $\langle F^g|F^g\leqslant T\rangle\leqslant R$, следовательно, $\widetilde{\mathscr{F}}_0\neq\varnothing$.

Пусть $a\in F$. Положим $U=\langle F, F^y, F^{y^2}\rangle$, где $\langle y\rangle$ — S_3-подгруппа из $N(V)$. Тогда $\langle U^g|U^g\leqslant T\rangle\leqslant R$, следовательно, $U^h\leqslant T$, но $U^h\not\leqslant Q$ для некоторого $h\in G$. Если $V^h\leqslant Q$, то, выбрав i так, что $F^{y^ih}\not\leqslant Q$, получим $F^{y^ih}\in\widetilde{\mathscr{F}}$. Если же $|Q\cap V^h|=2$, то $V^h\cap Q=\langle z^{y^ih}\rangle$ для некоторого i и $F^{y^ih}\in\widetilde{\mathscr{F}}$, так как $V^h\leqslant F^h\cap F^{yh}\cap F^{y^2h}$. Лемма доказана.

В леммах 3.5—3.9 мы предполагаем, что $F^*=F^g\in\widetilde{\mathscr{F}}$, $g\in G$. Зафиксируем обозначения: $z^*=z^g$, $F_1=C_F(z^*)$, $F_0=F\cap Q^g$, $F_0^*=F^*\cap Q$ и $v^*\in F^*\diagdown F_0^*$.

Лемма 3.5. $|F|=32$, $|M|=5|T|$.

Доказательство. Заметим, что $|F^*:F_0^*|=2$. Если $z^*\notin F$, то выберем элемент $f\in F_1$ так, что $[f, v^*]\neq 1$. В силу леммы 3.3 $f\notin Q^g$. Далее, $|F_0^*:F_0^*\cap C(f)|\leqslant 2$, поэтому $|F|=32$. Если же $z^*\in F$, то пусть f — такой элемент из F, что $[f, v^*]\notin\langle z^*\rangle$. Тогда $|F^*:F^*\cap C(f)|\leqslant 4$, следовательно, $|F|=32$.

Так как M — $3'$-группа, то $|M|=5|T|$.

Лемма 3.6. *Если* $z\in X$ *и* $|F:X|=2$, *то* $N(X)\leqslant M$.

Доказательство. Пусть $L=N(X)$, $L_0=C(X)$ и $T_0=M\cap L$. Тогда T_0 — 2-группа, содержащая Q, поэтому $\Omega(Z(T_0))=\langle z\rangle$ и $N(T_0)\leqslant M$. Отсюда T_0 — S_2-подгруппа из L. Пусть $Y=\langle z^L\rangle$, $\bar{L}=L/O_2(L)$. Допустим, что $L\not\leqslant M$. Тогда $\langle z\rangle<Y<X$ и $C(Y)=O_2(L)$. Заметим, что $\bar{Q}$ — элементарная подгруппа из $\bar{L}$, стабилизирующая ряд $1<\langle z\rangle<Y$. Так как $Z(Q)=\langle z\rangle$, то $Q\not\leqslant O_2(L)$. Пусть $x\in Q\backslash O_2(L)$. Тогда $\bar{x}$ индуцирует трансвекцию на Y. Заметим, что $C_{\bar{L}}(\bar{x})$ — 2-группа. В противном случае $2'$-элемент y из L, такой, что $[x, y]\in O_2(L)$, централизует $[x, Y]=\langle z\rangle$. Противоречие. Теперь по лемме 1.5 $\bar{L}\simeq\Sigma_3$.

Пусть $\langle d\rangle$ — S_3-подгруппа из L, $Q_0=C_Q(Y)$, $\tilde{L}=L/L_0$. Так как $|Y|=4$, то $\tilde{Q}_0$ — четверная группа, стабилизирующая ряды $1<Y<X$ и $1<\langle z^d\rangle<X$. Значит, $\tilde{Q}_0^d$ стабилизирует ряды $1<Y<X$ и $1<\langle z^d\rangle<X$. Таким образом, $Q_0^d/Q_0^d\cap Q_0$ содержит четверную подгруппу. Противоречие с леммой 3.5.

Лемма 3.7. $z^*\in F$, $z\in F^*$.

Доказательство. Допустим, что $[z^*, F]\neq 1$. Тогда F_1 — гиперплоскость из F. Пусть v^* инвертирует подгруппу K порядка 5 из M. Положим $F_2^*=F^*\cap C(F)$, $Q_0=C_Q(F)$, $Q_1/Q_0=C_{Q/Q_0}(F)$. Так как Q_1/Q_0 — четверная группа, то $|F_0^*:F_2^*|\leqslant 4$.

1. $|F_0^*:F_2^*|=4$. В этом случае $F_0^*=\langle F_2^*, z^*, x\rangle$ для некоторого $x\in F_0^*$. Далее, $[C_F(x), z^*]=\langle z\rangle=[F_1, x]$. Отсюда $z\in F\cap F^*$, поэтому $C_F(x)$ нормализует F_0^*. Противоречие с леммой 3.5.

2. $|F_0^*:F_2^*|=2$. В этом случае $F_1=C_F(F_0^*)$ и $[F_1, v^*]\neq 1$. По лемме 3.3 $[F_1, f]=\langle z^*\rangle$. Противоречие с тем, что $[z^*, F]\neq 1$.

Итак, $z^*\in C(F)$. Так как $F\leqslant M^g$ и $[F_0^*, F]=\langle z\rangle$, то $z\in F^*$, поэтому $z\in F_2^*$. Теперь $[F, F^*]\leqslant F\cap F^*$ и $|[F, F^*]|\geqslant 8$. Отсюда $[F, F^*]=F\cap F_1^*$ и $z^*\in F$.

Лемма 3.8. $C_Q(F)=F$, $|T:Q|=4$.

Доказательство. Пусть v^* инвертирует подгруппу K порядка 5 из M, $D=K\langle v^*\rangle$. Тогда D действует на $Q_0=C_Q(F)$. Так как $z^*\in F$, то $Q_0\leqslant M^g$, поэтому $[Q_0, v^*]\leqslant Q\cap F^*\leqslant F$. Значит, v^* централизует Q_0/F, следовательно, $Q_0=F$.

Положим $W=\langle F, F^*\rangle$. Тогда $W'=F\cap F^*\leqslant Z(W)$ и $|W|=2^7$. Таким образом, $F_0^*=\langle F\cap F^*, u^*\rangle$ и $F^*=\langle F_0^*, v^*\rangle$. Далее, $F_0=\langle F\cap F^*, u\rangle$, $F=\langle F_0, v\rangle$, причем v инвертирует подгруппу K^* порядка 5 из M^g. Так как $[F_0, F_0^*]\leqslant\langle z\rangle\cap\langle z^*\rangle$, то $[u, u^*]=1$. Значит, $[u^*, v]=z$, $[u, v^*]=z^*$ и $[v, v^*]=w$, где $\langle z, z^*, w\rangle=F\cap F^*$.

Так как Q/Q_0 — неприводимый F_2D-модуль, то $Q=Q_0\Omega(Q)$, следовательно, Q содержит такую инволюцию a, что $[z^*, a]=z$. Аналогично $[z, b]=z^*$ для некоторой инволюции $b\in Q^g$. Отсюда $N(F\cap F^*)$ содержит такой элемент d порядка 3, что $t^d=t$, $z^d=z^*$, $z^{*d}=zz^*$, где $\langle t\rangle=C(\langle a, b\rangle)\cap(F\cap F^*)$.

Покажем, что $|T:Q|=4$. Пусть $t^x=tz$, $x\in C_Q(z^*)$, $\tilde{x}=x^d$. Тогда $\tilde{x}\in C(\langle z, z^*\rangle)$, $[t, \tilde{x}]=z^*$. Таким образом, $|[F\cap F^*, N_M(F\cap F^*)]|\geqslant 4$, следовательно, $Q\langle v^*\rangle$ не S_2-подгруппа в M и $|T:Q|=4$.

Лемма 3.9. *Группа G изоморфна простой группе Титса ${}^2F_4(2)'$.*

Доказательство. Заметим, что $|T|=4|Q|=2^6|F|=2^{11}$. По лемме 3.8 M/Q — группа Фробениуса порядка 20, Q — группа порядка 2^9 и класса нильпотентности 3, причем $C_Q(K)=\langle z\rangle$ для S_5-подгруппы K из M. По теореме [20] $G\simeq{}^2F_4(2)'$. Лемма доказана.

Из лемм 3.5—3.9 следует, что $\mathscr{F}=\varnothing$. До конца раздела зафиксируем обозначение: $W=\langle F^g|F^g\leqslant Q\rangle$. Если $F^g\leqslant Q$, $g\in G$, то $[F^g, F]\leqslant\langle z\rangle$, следовательно, каждая инволюция из F централизует гиперплоскость из F^g. По лемме 3.3 $[F, F^g]\leqslant\langle z^g\rangle$, следовательно, $[F, F^g]=1$. Итак, $W=\langle F^g|F^g\leqslant C(F)\rangle$ и $N(W)=M$. Отсюда подгруппа F слабо замкнута в $Z(W)$.

Лемма 3.10. *Инволюция z изолирована в F.*

Доказательство. Пусть $a=z^g\in F$, $g\in G$. Допустим, что $F^y\leqslant T$, но $F^y\nleqslant Q$, $y\in G$. Тогда $z^y\notin Q$, так как $\widetilde{\mathscr{F}}=\varnothing$. Из леммы 1.7 следует, что в $F^y\backslash(F^y\cap Q)$ не более 2 M-классов инволюций. В силу леммы 3.4 инволюция z изолирована в $C_F(z^*)$. Пусть $V=\langle a, z\rangle$, $R=C(V)$. Как и в лемме 3.4, получим, что $N(V)/R\simeq\Sigma_3$. С другой стороны, $R\leqslant Q$, поэтому $N(R)\leqslant N(W)=M$. Противоречие.

Итак, $\widetilde{\mathscr{F}}_0=\varnothing$. Теперь $N(W)$ контролирует слияние в $Z(W)$, поэтому инволюция z изолирована в F.

Лемма 3.11. *$z^G\cap M\subset Q$, следовательно, $\widetilde{\mathscr{F}}_0=\varnothing$.*

Доказательство. Пусть $z^g\in M\backslash Q$, $g\in G$. Положим $F^*=F^g$, $z^*=z^g$, $F_0=F\cap M^g$, $F_0^*=F^*\cap M$. Если $z\in Q^g$, то $F_0^*=F^*$, так как в противном случае любая инволюция из $M\backslash Q$ сопряжена с z^* или zz^*, и z^* сопряжена с zz^* в Q. Противоречие с леммой 3.10. Итак, либо $F^*\leqslant M$, либо $z\notin Q^g$. Пусть $F_1^*=F^*\cap Q$. Из лемм 1.7, 3.10 следует, что все инволюции из $F_0^*\diagdown F_1^*$, отличные от z^*, сопряжены в M. Далее, если a — инволюция из F_1^*, то a и az^* сопряжены в Q^g, поэтому все инволюции из $F_0^*\diagdown\langle z^*\rangle$ сопряжены в G. Теперь все инволюции из $F_0\backslash\langle z\rangle$ сопряжены.

Пусть $a\in F\backslash\langle z\rangle$ и $\langle a, z\rangle\lhd T$. Так как $N(T)=T$, то $\langle a, z\rangle$ содержит каждую инволюцию b из a^G с условием $|T:C_T(b)|=2$. Если $b\in F^*$ и $|T:C_T(b)|=4$, то $Z(C_T(b))=\langle b, z\rangle$, так как b централизует подгруппу индекса 2 из Q и $Z(Q)=\langle z\rangle$. Теперь в силу теоремы Дж. Альперина [10] инволюция b не сопряжена с a. Противоречие.

Таким образом, $z^G\cap M\subset Q$, следовательно, $\widetilde{\mathscr{F}}_0=\varnothing$.

Лемма 3.12. *Если $d(T)>d(Q)$, то $|\Omega(Z(J(T)))|>4$.*

Доказательство. Пусть $d(T)>d(Q)$ и $A\in\mathscr{A}(T)$. Тогда $|A:A\cap Q|=2$. Для $a\in A\backslash(A\cap Q)$ имеем $|C_F(a)|>4$. Покажем, что $[C_F(a), A]=1$. По лемме 3.3 $C_F(a)=[F, a]\langle z\rangle$. Далее, $[a, A\cap Q, F]=[A\cap Q, F, a]=1$, так как $[Q, F]=\langle z\rangle$. Отсюда по лемме о трех подгруппах $[F, a, Q\cap A]=1$. Таким образом, $[A, C_F(a)]=1$.

Пусть $B \in \mathscr{A}(T)$, $b \in B \backslash Q$. Тогда $b = ax$ для некоторого $x \in Q$. Далее, $[b, F] \leqslant [a, F]\langle z \rangle$, так как $[x, F] \leqslant \langle z \rangle$, следовательно, $C_F(b) = C_F(a)$. Как и выше, $[C_F(b), B] = [C_F(a), B] = 1$. Значит, $C_F(a) \leqslant Z(J(T))$. Лемма доказана.

4. ЦЕНТРАЛЬНОСТЬ z В $N(J)$

Пусть G — контрпример к теореме, $J = J(T)$ для S_2-подгруппы T из $C(z)$, $P = C_T(\Omega(Z(J)))$, $Z = \langle z^{N(J)} \rangle$, $R = C(Z)$. Цель раздела — доказательство следующего результата.

Предложение 4.1. $N(J) \leqslant C(z)$.

Предположим, что $N(J)$ не централизует z. Тогда J не содержится в $O_2(C(z))$, следовательно, $Z(T) = \langle z \rangle$. Далее, $R = O_2(N(J))$.

Лемма 4.1. *Если t — инволюция из Z, то $\langle t^{N(J)} \rangle = Z = \langle t^G \cap Z(J) \rangle$. Далее, $\langle Z^g | Z^g \leqslant T \rangle$ не содержится в R.*

Доказательство. Подгруппа J слабо замкнута в T относительно G, поэтому $N(J)$ контролирует слияние в $Z(J)$. Далее, $\langle t^{N(J)} \rangle \lhd T$, поэтому $z \in \langle t^{N(J)} \rangle$. Но $Z \lhd N(J)$, следовательно, $\langle t^{N(J)} \rangle = Z$.

По лемме 3.11 $\langle Z^g | Z^g \leqslant T \rangle \leqslant O_2(C(z))$. Отсюда $N(\langle Z^g | Z^g \leqslant T \rangle) = C(z)$. Таким образом, $\langle Z^g | Z^g \leqslant T \rangle$ не содержится в R. Лемма доказана.

Зафиксируем подгруппу $Z^* = Z^g$ из T, не лежащую в R, $g \in G$.

Лемма 4.2. *$Z \cap Z^* = 1$, $\langle Z^{C(z)} \rangle$ — абелева группа.*

Доказательство. Предположим, что t — инволюция из $Z \cap Z^*$. Если инволюция t не сопряжена с z, то некоторая сопряженная с z инволюция a центральна в $C(t)$ и $C_{C(t)}(a)$ — 2-группа. По лемме 1.3 $[Z, Z^*] = 1$. Противоречие.

Без ограничения общности можно считать, что $z \in Z \cap Z^*$. Тогда по структуре $C(z)$ имеем $Z \cap Z^* = \langle z \rangle$. Пусть $x \in Z^* \backslash R$. Тогда $[x, Z] = \langle z \rangle$.

Пусть $\overline{N} = N(J)/R$. Покажем, что $C_{\overline{N}}(\overline{x})$ — 2-группа. В противном случае $2'$-элемент y из $N(J)$ такой, что $[x, y] \in R$, централизует $[x, Z] = \langle z \rangle$. Противоречие с тем, что $C_{N(J)}(z) = T$. Итак, $\overline{x}^{\overline{N}}$ — класс 3-транспозиций в $\langle \overline{x}^{\overline{N}} \rangle$ и $C_{\overline{N}}(\overline{x})$ — 2-группа. По лемме 1.5 $\overline{N} \simeq \Sigma_3$. Таким образом, Z — четверная группа. По лемме 3.4 $\widetilde{\mathscr{F}} \neq \varnothing$ и по лемме 3.9 $G \simeq {}^2F_4(2)'$. Противоречие с выбором G. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Если инволюция t из Z^* не сопряжена с z, то $[C_Z(t), Z^*] = 1$.*

Доказательство. Пусть $W = \langle (P^g)^{C(t)} \rangle$, $V = \Omega(Z(O_2(W)))$. Тогда $[C_Z(t), Z^*]$ содержится в V по лемме 1.3. Пусть x — инволюция из $[C_Z(t), Z^*]$. Тогда x лежит в центре некоторой подгруппы P^{gy} из W, $y \in W$. Если инволюция x не сопряжена с z, то некоторая сопряженная с z инволюция a централына в $C(x)$, и по лемме 1.3, примененной к $U = \langle (P^{gy})^{C(x)} \rangle$, имеем $P^{gy} \in \mathrm{Syl}_2(U)$ и $[Z, Z^*] = 1$, так как $Z^* \leqslant P^{gy}$ и Z^* нормализует Z.

Значит, инволюция x сопряжена с z. Теперь $t \in Z^{gy}$ и по лемме 4.2 t централизует Z. Если $|[Z, Z^*]| > 2$, то $J^{gy} = J(C([Z, Z^*])) = J$, поэтому $[Z, Z^*] = 1$. Итак, $[Z, Z^*] = \langle x \rangle$. Повторив теперь рассуждения из доказательства леммы 4.2, получим противоречие.

Лемма 4.4. $Z^* \cap R \neq 1$.

Доказательство. Допустим, что $Z^* \cap R = 1$. Положим $Z_0 = C_Z(Z^*)$. Пусть a — сопряженная с z инволюция из $Z \backslash Z_0$. По лемме 4.3 все инволюции из $C_{Z^*}(a)$ сопряжены с z в группе G. Если b — инволюция из $C_{Z^*}(a)$, то $|C_Z(b) : C_Z(b) \cap O_2(C(b))| \leqslant 2$, поэтому подгруппа индекса, не большего 2, из $C_Z(b)$ нормализует Z^*. По лемме 4.2 $N_Z(Z^*) \leqslant C(Z^*)$. Таким образом, $C_Z(b) = Z_0 \langle a \rangle$. Но по лемме 3.11 $a \in O_2(C(b))$, поэтому $a \in N_Z(Z^*)$. Отсюда $[a, Z^*] = 1$. Противоречие с выбором a.

Лемма 4.5. $Z^* \cap R = 1$.

Доказательство. Допустим, что $Z^* \cap R \neq 1$. В силу леммы 4.3 каждая инволюция из $Z^* \cap R$ сопряжена с z в группе G. Но для $x \in (Z^* \cap R)^*$ имеем $Z \leqslant O_2(C(x))$, поэтому $Z \leqslant N(Z^*)$. Теперь $[Z, Z^*] \leqslant Z \cap Z^* = 1$. Противоречие.

Леммы 4.4 и 4.5 доказывают предложение.

Пусть G — контрпример к теореме, $Q = O_2(C(z))$, T — S_2-подгруппа из $C(z)$, $J = J(T)$, $Z = \Omega(Z(J))$ и $P = C_T(Z)$. Основной результат раздела —

Теорема 5.1. *Пусть H — 2-локальная подгруппа из G, содержащая P, и $C_H(a)$ — 2-замкнутая подгруппа нечетного индекса в H для некоторой инволюции a из Z. Тогда $H \leqslant N(J)$.*

Допустим, что теорема неверна и выберем подгруппу H так, что H — контрпример к предложению и $|W|$ максимален для $W = \langle P^H \rangle$. Положим $W_1 = O_2(W)$, $W_2 = \Omega(Z(W_1))$, $W_3 = C(W) \cap W_2$, $W_4 = [W_2, W]$. Для $X \in W^G$ пусть X_i — подгруппы, сопряженные с W_i.

По лемме 1.3 $W = E_1 \cdot \ldots \cdot E_k$, где $E_i/W_1 \simeq L_2(2^{n_i})$, $W_2/C_{W_2}(E_i)$ — естественный 2-мерный $F_2L_2(2^{n_i})$-модуль и $[E_i, E_j] \leqslant W_1$ для $i \neq j$.

Лемма 5.1. *Z — нециклическая группа.*

Доказательство. Предположим, что $Z = \langle z \rangle$. Тогда $P = T$ и W_2 — четверная нормальная в T подгруппа, все инволюции которой сопряжены с z. Из лемм 3.4, 3.9 следует, что $G \simeq {}^2F_4(2)'$. Противоречие. Лемма доказана.

В леммах 5.2—5.4 предполагается, что $N(J)$ нормализует W.

Лемма 5.2. *$J \nleqslant Q$, $W_3 = 1$ и $E_i \simeq \Sigma_3$.*

Доказательство. Если $J \leqslant Q$, то $N(J) = C(z)$ и для $2'$-элемента x из $C(z)^\#$ получим $C_W(x) = \langle z \rangle$, поэтому x действует без неподвижных точек на W/W_2. Противоречие. Значит, $J \nleqslant Q$. Отсюда, в частности, $Z(T) = \langle z \rangle$.

Если $W_3 \neq 1$, то $W_3^x \neq W_3$ для некоторого $x \in T$, так как $z \notin W_3$. Противоречие с тем, что T нормализует W. Отсюда $W_3 = 1$.

Предположим, что $n_i > 1$ для некоторого i. Тогда $N_{E_i}(P)$ содержит циклическую подгруппу порядка $2^{n_i}-1$, не централизующую z. Противоречие с предложением 4.1. Итак, $L_2(2^{n_i}) \simeq \Sigma_3$. Лемма доказана.

Из леммы 5.2 следует, что $z^G \cap W_2 = z^W$ и $\langle z^W \rangle = W_2$. По лемме 3.11 $\langle W_2^g \mid W_2^g \leqslant T \rangle \leqslant Q$. Отсюда $\langle W_2^g \mid W_2^g \leqslant T \rangle$ не содержится в W_1. Пусть $W_2^g \leqslant T$, но $W_2^g \nleqslant W_1$. Положим $U = W^g$.

Лемма 5.3. *$U_2 \cap W_2 = 1$.*

Доказательство. Пусть t — инволюция из $U_2 \cap W_2$. Если инволюция t не сопряжена с z, то t централизует $O^2(E_i)$ для некоторого i. По лемме 1.4 $N(O^2(E_i))$ содержит W. Пусть b — сопряженная с z инволюция, центральная в $N(O^2(E_i))$, $U_j = E_j^g$. Тогда $C(b) \cap N(O^2(E_i))$ — 2-группа. В силу выбора W имеем $W \lhd N(O^2(E_i))$. С другой стороны, t централизует $O^2(U_j)$ для некоторого j и $U \lhd N(O^2(U_j))$. По лемме 1.4, примененной к $C(t)$, $U_j \leqslant N(O^2(E_i))$, поэтому $U_j \leqslant W$. Как и выше, $W \lhd N(O^2(U_j))$, поэтому $W = U$. Противоречие.

Итак, любая инволюция из $U_2 \cap W_2$ сопряжена с z. Без ограничения общности можно считать, что $z \in U_2 \cap W_2$. Так как $z^G \cap U_2 = z^U$, то подгруппа U_2 нормальна в некоторой S_2-подгруппе из $C(z)$. Теперь $U_2 \lhd Q \rhd W_2$, следовательно, $[U_2, W_2] \leqslant U_2 \cap W_2$. Из леммы 5.2 следует, что $|U_2 \cap W_2| \leqslant 4$, так как все инволюции из $U_2 \cap W_2$ сопряжены с z.

Пусть $W_2^i = [W_2, E_i]$. Тогда W_2^i — четверная группа и инволюции из U_2 переставляют подгруппы W_2^i. Далее, каждая инволюция из $z^G \cap W_2$ представляется в виде $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$, где $1 \neq x_i \in W_2^i$. Выберем инволюцию d в $U_2 \backslash C(W_2)$, сопряженную с z. Так как $[d, W_2]^\# \subset z^G$, то $|[d, W_2]| = |W_2|^{1/2}$. Отсюда $|W_2| = 16$ и $W_2 \cap U_2 = [W_2, U_2]$ — четверная группа. Теперь $\langle d, U_2 \cap W_2 \rangle$ — элементарная группа порядка 8, все инволюции которой сопряжены с z. Противоречие.

Лемма 5.4. *Если инволюция t из U_2 не сопряжена с z, то $[G_{W_2}(t), U_2] = 1$.*

Доказательство. Пусть t централизует подгруппу E_i^g из U. По лемме 1.4 $\langle (E_i^g)^{C(t)} \rangle$ и U нормализуют $O^2(E_i^g)$. Максимальность $|U|$ влечет $C(t) \leqslant N(U)$, поэтому $C_{W_2}(t)$ нормализует U_2. Теперь $[C_{W_2}(t), U_2] \leqslant \leqslant W_2 \cap U_2 = 1$.

Лемма 5.5. *$N(J)$ не нормализует W.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда мы можем применять результаты лемм 5.2—5.4. Если $U_2 \cap C(W_2) \neq 1$, то по лемме 5.4 каждая инволюция из $U_2 \cap C(W_2)$ сопряжена с z в группе G. Пусть $x \in (U_2 \cap C(W_2))^{\#}$. Тогда $W_2 \leqslant O_2(C(x)) \leqslant N(U_2)$. Отсюда $[U_2, W_2] \leqslant U_2 \cap \cap W_2 = 1$. Значит, $U_2 \cap C(W_2) = 1$.

Положим $W_0 = C_{W_2}(U_2)$. Пусть t — сопряженная с z инволюция из $W_2 \backslash W_0$. В силу леммы 5.4 все инволюции из $C_{U_2}(t)$ сопряжены с z. Если b — инволюция из $C_{U_2}(t)$, то $C_{W_2}(b) \cap O_2(C(b))$ нормализует U_2. Отсюда, $C_{W_2}(b) = W_0\langle t\rangle$. Но по лемме 3.11 $t \in O_2(C(b))$, поэтому $t \in \in N_{W_2}(U_2)$. Противоречие с выбором t. Лемма доказана.

Пусть x — элемент из $N(J)$, не нормализующий W, $U = W^x$. Так как $x \in N(Z)$, то в силу леммы 5.1 x нормализует P.

Лемма 5.6. $W/W_1 \simeq \Sigma_3$.

Доказательство. По предложению 4.1 $E_i/W_1 \simeq \Sigma_3$. Предположим, что $k > 1$. Пусть $L_i = E_i^x$, $E \in \{E_1, \ldots, E_k\}$, $L \in \{L_1, \ldots, L_k\}$. Если $V = C_z(E) \cap C_z(L) \neq 1$, то $\langle P, E, L\rangle \leqslant C(V)$. По лемме 1.4 L и W нормализуют $O^2(E)$. Снова по лемме 1.4 W и U нормализуют $O^2(E)$. Максимальность $|W|$ влечет $W = U$. Противоречие.

Итак, $V = 1$. Отсюда $|Z|/2 = |C_Z(E)| = |C_Z(L)| = |Z|^{1/2}$, следовательно, $k = 2$. Теперь $Z = C_Z(E_1) \cup C_Z(E_2) \cup \langle z\rangle$ и для $\{E_1, E_2\} = \{E, X\}$ имеем $C_Z(L) = C_Z(X)$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5.7. *Если $b \in W_3^{\#}$, то $C(b) \leqslant N(W)$, W_3 — TI-подгруппа в G.*

Доказательство. Пусть $b \in W_3^{\#}$, S — S_2-подгруппа из $N(P) \cap C(b)$. Тогда инволюция z лежит в центре S по предложению 4.1. Теперь $C(b)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.1. Максимальность $|W|$ влечет $C(b) \leqslant \leqslant N(W)$.

Пусть $b \in (W_3 \cap W_3^g)^{\#}$, $g \in G$. Тогда $W = \langle P^{C(b)}\rangle = W^g$. Лемма доказана.

Лемма 5.8. *$|Z| = 4$, $X = \langle Z^{C(z)}\rangle$ — абелева группа и $[X, Q] \leqslant \langle z\rangle$.*

Доказательство. По лемме 5.6 $|Z : W_3| = |Z : U_3| = 2$. Лемма 5.7 влечет $W_3 \cap U_3 = 1$, поэтому $|Z| = 4$.

Из леммы 3.12 следует, что $d(T) = d(Q)$ и $Z \leqslant Z(J(Q))$. Отсюда X — абелева группа. Но $[Z, T] = \langle z\rangle$, поэтому $[X, Q] = \langle z\rangle$.

Завершим доказательство теоремы 5.1. Пусть F — такая нормальная в $C(z)$ подгруппа из X, что $F/\langle z\rangle$ — главный фактор в $C(z)$. Выберем $A \in \mathscr{A}(T) \backslash \mathscr{A}(Q)$, $a \in A \backslash Q$. Из доказательства леммы 3.12 следует, что $C_F(a)$ централизует каждую подгруппу $B \in \mathscr{A}(T) \backslash \mathscr{A}(Q)$. Далее, $F \leqslant \leqslant Z(J(Q))$, поэтому $C_F(a) \leqslant Z(J)$. С другой стороны, $|F : \langle z\rangle| \geqslant 16$, следовательно, $|C_F(a)| > 4$. Противоречие с леммой 5.8. Теорема 5.1 доказана.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Пусть G — контрпример к теореме, T — S_2-подгруппа из $C(z)$. Из результатов разд. 2, 4 и Z^*-теоремы Глаубермана следует, что G содержит 2-подгруппу R, для которой выполняется одно из следующих утверждений:

1) $|T : R| = 2$ и $z \in R \backslash Z(N(R))$;

2) R — элементарная группа порядка 16, $N_T(R)$ — S_2-подгруппа из $N(R)$ и $N(R)/C(R) \simeq O_4^{\pm}(2)$;

3) $O^2(C(R))$ имеет диэдральную или полудиэдральную S_2-подгруппу порядка, не меньшего 8, и $O^2(C(R)) \cap R = 1$.

Лемма 6.1. $Z(T) = \langle z\rangle$.

Доказательство. Допустим, что $Z(T)$ — нециклическая группа. В силу предложения 5.1 $C(a) = T$ для любой инволюции a из $Z(T) \backslash \langle z\rangle$.

С другой стороны, по лемме 2.3 некоторая гиперплоскость из $\Omega(Z(T))$ централизует элемент порядка 3. Противоречие.

Лемма 6.2. *R — элементарная группа порядка* 16 *и* $N(R)/C(R)\simeq\simeq O_4^+(2)$.

Доказательство. Так как G — группа типа характеристики 2, то в случае 3) S_2-подгруппа из G — диэдральная или полудиэдральная группа. Так как $C(z)$ — разрешимая $3'$-группа, то G — не контрпример по [23]. Противоречие. В случае 1) T содержит нормальную четверную подгруппу, все инволюции которой сопряжены с z. Из лемм 3.4, 3.9 следует, что $G\simeq {}^2F_4(2)'$. Противоречие с выбором G. Наконец, если в случае 2) $N(R)/C(R)\simeq O_4^-(2)$, то $|C_{N(R)}(z)|$ делится на 3. Противоречие. Лемма доказана.

Пусть $\mathscr{H}$ — множество 2-локальных подгрупп H, содержащих $O^2(N(R))$ и удовлетворяющих условиям:

1) $C_H(z)$ — 2-замкнутая подгруппа нечетного индекса в H;

2) $J(H)$ — не 2-группа.

$\mathscr{H}\neq\varnothing$, так как $N(R)\in\mathscr{H}$. Выберем подгруппу $H\in\mathscr{H}$ так, что $|J_0|$ максимален, $J_0=J(C_H(z))$. Положим $n(\mathscr{H})=|J_0|$, $\mathscr{H}_0=\{X\in\mathscr{H}\mid |J(C_X(z))|=n(\mathscr{H})\}$. Выберем теперь подгруппу X из $\mathscr{H}_0$ так, что $|W|$ максимален, где $J=J(C_X(z))$, $Z=\Omega(Z(J))$, $P=C_X(Z)$ и $W=\langle P^X\rangle$. Положим $W_1=O_2(W)$, $W_2=\Omega(Z(W_1))$, $W_3=C(W)\cap W_2$, $q=|W/W_1|_2$.

Без ограничения общности можно считать, что $N_T(W)$ — S_2-подгруппа из $N(W)$. Из предложения 5.1 следует, что $J\neq J(T)$.

Лемма 6.3. *$W/W_1\simeq L_2(q)$ и W_2/W_3 — естественный 2-мерный $F_2L_2(q)$-модуль.*

Доказательство. По лемме 1.3 $W=E_1\cdot\ldots\cdot E_k$, где $E_i/W_1\simeq\simeq L_2\left(2^{n_i}\right)$, $W_2/C_{W_2}(E_i)$ — естественный 2-мерный $F_2L_2\left(2^{n_i}\right)$-модуль и $[E_i, E_j]\leqslant W_1$ для $i\neq j$. Предположим, что $k\neq 1$. Пусть $x\in N_T(P)\setminus N(W)$. Так как $J(N_T(J))\neq J$, то x найдется ввиду максимальности $|J|$. Пусть $L_i=E_i^x$, $E\in\{E_1, \ldots, E_k\}$, $L\in\{L_1, \ldots, L_k\}$. Если $V=C_Z(E)\cap C_Z(L)\neq 1$, то $\langle P, E, L\rangle\leqslant C(V)$. По лемме 1.4 W и L нормализуют $O^2(E)$. Снова по лемме 1.4 W и W^x нормализуют $O^2(L)$. Максимальность $|W|$ влечет $W=W^x$. Противоречие.

Итак, $V=1$. Выберем E и L так, что $|E/W_1|$ и $\left|L/W_1^x\right|$ минимальны. Так как $V=1$, то $|Z|/|E:W_1|_2=|C_Z(E)|=|C_Z(L)|=|Z|^{1/2}$, следовательно, $k=2$. Отсюда все инволюции из $Z\setminus(C_Z(E_1)\cup C_Z(E_2))$ сопряжены с z и для $\{E_1, E_2\}=\{E, F\}$ имеем $C_Z(L)=C_Z(F)$. Противоречие.

Лемма 6.4. *Если $b\in W_3^\#$, то $C(b)\leqslant N(W)$. Далее, W_3 — TI-подгруппа в G.*

Доказательство. Пусть $b\in W_3^\#$, S — S_2-подгруппа из $N(P)\cap\cap C(b)$. Тогда $J=J(S)$ и $z^y\in Z(S)$ для некоторого $y\in N(P)$. Максимальность $|W|$ влечет $C(b)\leqslant N(W)$.

Пусть $b\in\left(W_3\cap W_3^g\right)^\#$, $g\in G$. Тогда $W=\langle P^{C(b)}\rangle=W^g$. Лемма доказана.

Лемма 6.5. *$Z=W_3U_3$ и $q>2$.*

Доказательство. Из леммы 6.4 следует, что $|W_3|\leqslant q$. Если $q=2$, то $|W_2|=8$. Противоречие с тем, что $|\langle z^{N(R)}\rangle|\geqslant 16$. Значит, $q>2$. Пусть K и L — подгруппы порядка $q-1$ из $N_W(P)$ и $N_U(P)$ соответственно. Так как $C_Z(u)=W_3$ и $C_Z(v)=U_3$ для $u\in K^\#$, $v\in L^\#$, то K и L можно выбрать так, что $[K, L]=1$. Но тогда $U_3=[Z, K]$, $W_3=[Z, L]$ и $Z=W_3U_3$.

Завершим доказательство теоремы. Положим $N=N(Z)$. Тогда $2=|N:N_N(W_3)|$ и N содержит $O^2(N(R))$. Пусть S — S_2-подгруппа из N. Тогда $J(S)\neq J(N_S(W_3))=J$. Максимальность $|J|$ влечет, что $C_N(Z)$ не 2-замкнут. Теперь $2'$-элемент y из $C_N(z)^\#$ действует без неподвижных точек на U_3 и W_3. Противоречие. Теорема доказана.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ

Пусть G — контрпример к следствию. Из теоремы и результата [3] следует, что $C(z)/\langle z\rangle$ — разрешимая CIT-группа. Пусть порядок $C(z)$ делится на 3. В этом случае предположение о максимальной 2-локальности $C(z)$ излишне, как показывает следующая

Теорема 7.1. *Пусть G — конечная группа, содержащая такую центральную инволюцию z, что $C(z)$ — разрешимая группа порядка, делящегося на 3, и централизаторы подгрупп порядка 4, содержащих z,— 2-группы. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) $G = O(G)\cdot C(z)$;

2) $G = (L\times O_2(G))\langle f\rangle$, $L\simeq L_2(8)$ *и* $L\langle f\rangle \simeq {}^2G_2(3)$;

3) G — *2-замкнутая группа,* $z\notin O_2(G)'$ *и* $G/O_2(G)$ — *расширение циклической холловой подгруппы с помощью* $S_{2'}$*-подгруппы из* $C(z)$;

4) $G/O(G)\simeq L_2(q)$, $q\equiv 3{,}5(8)$ *или* Σ_6, Σ_7;

5) $G\simeq L_3(3)$, M_{11}, M_{12} *или* A_8, A_9.

Заметим, что группы A_8 и A_9 не входят в заключение следствия, так как в них централизатор центральной инволюции не является максимальной 2-локальной подгруппой.

Пусть G — контрпример к теореме 7.1, $Q=O_2(C(z))$, T — S_2-подгруппа из $C(z)$, f — элемент порядка 3 из $C(z)$, K — $S_{2'}$-подгруппа из $C(z)$, содержащая $\langle f\rangle$.

Лемма 7.1. $O(C(z)) = O(G) = 1$.

Доказательство. Если $O(C(z))\neq 1$, то по условию теоремы $Q = \langle z\rangle$ и $T/\langle z\rangle$ — группа 2-ранга 1. Так как мультипликатор Шура группы кватернионов тривиален, то $T=\langle z\rangle\times T_0$, где T_0 — группа 2-ранга 1. По Z^*-теореме Г. Глаубермана [19] инволюция z сопряжена с некоторым элементом из $T\setminus\langle z\rangle$. По лемме Бернсайда это слияние можно осуществить в $N(T)$. Отсюда T — четверная группа и $G/O(G)\simeq L_2(q)$, $q\equiv 3{,}5(8)$ [23]. Противоречие с выбором G. Значит, $O(C(z)) = 1$.

Предположим, что $O(G)\neq 1$. Тогда $C_{O(G)}(z)=1$, и по индукции $G/O(G)$ — одна из групп в пунктах 2), 3) или 5) из заключения теоремы 7.1. В любом случае $C(z)$ содержит четверную подгруппу, все инволюции которой сопряжены с z. По лемме Брауэра $O(G)\leqslant C(z)$. Противоречие с тем, что $O(C(z)) = 1$. Поэтому справедлива

Лемма 7.2. $C(z)$ *не 2-замкнут.*

Доказательство. Предположим, что $C(z)$ 2-замкнут. Если $F^*(G) = O_2(G)$, то $z\in O_2(G)$. В этом случае для любой нетривиальной S_p-подгруппы P из K $N(P)=K\langle z\rangle$. По теореме Бернсайда $G=NK$, $N\lhd G$ и $N\cap K=1$. Далее, $N/\langle z^G\rangle$ — нильпотентная группа, и если $z\in\Phi(T)$, то N — нильпотентная группа, $G=C(z)$. Значит, $z\notin\Phi(T)$. По лемме 1.6 $S_{2'}$-подгруппа из N — циклическая группа и G — не контрпример к теореме.

Предположим теперь, что G содержит компоненту L. Если f не нормализует L, то $xx^fx^{f^2}\in\langle z\rangle$ для любого 2-элемента x из L. Отсюда f нормализует L. Из [14] следует, что $L/Z(L)\simeq L_2(q)$, $Sz(2^n)$, $U_3(2^n)$, $L_3(2^n)$, $\mathbf{Sp}_4(2^n)$, причем z индуцирует внутренний автоморфизм на $L/Z(L)$. Действие f на L влечет $L\simeq L_2(q)$ и f индуцирует внешний автоморфизм на L. Отсюда $L\simeq L_2(8)$, $C(L)=O_2(G)$ и $L\langle f\rangle\simeq {}^2G_2(3)$. Противоречие с выбором G. Лемма доказана.

Из лемм 7.1, 7.2 следует, что $C(z)$ является расширением Q с помощью диэдральной группы порядка $2|K|$.

Лемма 7.3. *Пусть группа H является расширением 2-группы R с помощью Σ_3 и элемент d порядка 3 из H действует без неподвижных точек на R. Тогда*

1) *класс нильпотентности группы R не больше 2;*

2) *если $A\leqslant R$ и $A'=1$, то $[A, A^d]=1$;*

3) *все инволюции из $H\setminus R$ сопряжены в H;*

4) *либо $|R|=4$, либо класс нильпотентности R меньше класса любой другой подгруппы из H порядка $|R|$;*

5) *если T — неабелева группа порядка 2^6, то T изоморфна S_2-подгруппе из $L_3(4)$.*

Доказательство. Утверждение доказано в лемме 1 [4].

Лемма 7.4. *$N(Q)=C(z)$, инволюция z изолирована в $Z(T)$.*

Доказательство. По лемме 1.6 $O^2(N(Q)/Q)$ является расширением циклической подгруппы $\bar{Y}$ с помощью $\bar{K}$. Но $\bar{Y}$ допускает диэдральную группу, поэтому $\bar{Y}=1$. Значит, $N(Q)=C(z)$.

Пусть инволюция a из $Z(T)\setminus\{z\}$ сопряжена с z, $U=\langle z, a, a^f\rangle$, $\bar{T}=T/U$, $Q_1=O_2(C(a))$. Тогда класс нильпотентности $\bar{Q}_1$ не больше 2 и по пункту 4) леммы 7.3 $\bar{Q}$ — абелева группа. Далее, $U\leqslant Z(Q)$, поэтому класс $Q_1/\langle z\rangle$ не больше 2. Снова по лемме 7.3 $Q/\langle z\rangle$ — абелева группа. Теперь $\bar{Q}_1$ — абелева подгруппа из $\bar{T}$, поэтому $|\bar{Q}|\leqslant 4$. Если Q — абелева группа, то по лемме 7.3 $|Q:\langle z\rangle|=4$ и $Q=U$. Если же $Q'=\langle z\rangle$, то $Z(Q)=U$, причем Q допускает автоморфизм порядка 3. Отсюда $Q\simeq V_4\times Q_8$. Но тогда $|Q:Q\cap Q_1|=2$, $\langle z\rangle=\Phi(Q\cap Q_1)=\langle a\rangle$. Противоречие.

Итак, $Q=U$ и $C(z)\simeq Z_2\times\Sigma_4$. Но в этом случае каждая инволюция из $Z(T)$ изолирована в $Z(T)$. Противоречие. Лемма доказана.

Из леммы 7.4 и теоремы Альперина [10] следует, что среди сопряженных с z инволюцией a из $T\setminus Z(T)$ с условием максимальности $|C_T(a)|$ найдется такая, что $N_T(C_T(a))$ — S_2-подгруппа из $N(C_T(a))$ и $a^g=z$ для некоторого 2-элемента g из $N(C_T(a))$. Если g^2 не централизует z, то $g^{-2}zg^2\in Z(C_T(a))$, поэтому можно взять $g^{-2}zg^2$ вместо a. Таким образом, мы будем считать, что g^2 централизует z.

Лемма 7.5. *Если $a\notin Q$, то $Q\simeq V_8$, Q_8 или $Q_8\circ Q_8$.*

Доказательство. Пусть $Q_0=C_Q(a)\cap C_Q(a)^g$. Тогда g нормализует Q_0 и $C_T(a)=\langle a, z\rangle\times Q_0$, причем по лемме 7.3 класс нильпотентности Q_0 не больше 2.

Покажем, что если $y\in C_{Q_0}(a)$, то $[y, y^f]=1$. В противном случае по лемме 7.3 $[y, y^f]=z$, $\langle y, y^f\rangle$ — полупрямое произведение $\langle y^f\rangle\times\langle z\rangle$ на $\langle y^{fa}\rangle$. Каждый элемент из $\langle y, y^f\rangle$ однозначно записывается в виде $y^{f\alpha}y^{fa\beta}z^\gamma$. Пусть $y=y^{f\alpha}y^{fa\beta}z^\gamma$. Тогда $y=y^a=y^{fa\alpha}y^{f\beta}z^\gamma=y^{f\beta}y^{fa\alpha}z^{\alpha\beta+\gamma}$. Отсюда $\gamma\beta\equiv 0(2)$ и $\beta\equiv\alpha(2)$, следовательно, $|y^{f\alpha}y^{fa\beta}z^\gamma|<|y|$. Противоречие.

Если Q_0 содержит такой элемент y, что $y^2\in\Omega(Z(Q_0))^{\#}$, то $[y, y^f]=1$, поэтому все инволюции из $\langle y^2, y^{2f}, a\rangle\setminus\langle y^2, y^{2f}\rangle$ сопряжены с a. В этом случае инволюция $b=(ay^2)^\gamma=zy^{2g}$ централизует $\langle C_T(a), y^{gf}\rangle$. Противоречие с максимальностью $|C_T(a)|$. Отсюда $Z(Q_0)$, а следовательно, и $Z(Q)$ и Q_0' — элементарные группы. Теперь $\Omega(Q_0)\leqslant Z(Q_0)$, следовательно, Q_0 — элементарная группа.

Допустим, что $C_Q(a)$ содержит такую четверную группу U, что все инволюции из Ua сопряжены с a. Тогда сопряженная с a инволюция zb централизует $\langle C_T(a), b^{(f)}\rangle$, где $b\in(U^g\cap Q_0)^{\#}$. Противоречие с выбором a. Отсюда $|Z(Q)|\leqslant 8$.

Пусть сначала $Z(Q)=\langle z\rangle$. Если $Q'=\langle z\rangle$, то Q — экстраспециальная группа. Повторив рассуждения из § 2 [1], получим, что $Q\simeq Q_8$ или $Q_8\circ Q_8$. Допустим, что $Q'\neq\langle z\rangle$. По лемме 7.3 $[Q, Q']\leqslant\langle z\rangle$, поэтому Q' — абелева группа. Далее, $Q'=\langle z\rangle\times[Q', f]$, поэтому Q' — элементарная группа. Теперь $[Q, \Phi(Q)]\leqslant\langle z\rangle$. Как и выше доказывается, что $\Phi(Q)$ — элементарная группа. Из предыдущего абзаца следует, что $|\Phi(Q)|\leqslant 8$. Пусть $\bar{y}$ — элемент порядка 4 из $\bar{Q}=Q/\langle z\rangle$, U — полный прообраз группы $\langle\bar{y}, \bar{y}^f\rangle$. Если U — абелева группа, то $U=\langle z\rangle\times[U, f]$. В этом случае $\Phi(U)\cap Z(Q)\neq 1$. Если же $U'=\langle z\rangle$, то в точности три инволюции из U являются квадратами в U, поэтому $Z(Q)\neq\langle z\rangle$. Противоречие.

Пусть $|Z(Q)|=8$, $b\in Z(Q)\cap Q_0^{\#}$. Если $|Q_0|>2$, то пусть V — четверная подгруппа из Q_0, содержащая b. Тогда $[V, V^f]=1$ и $V\langle z\rangle$ содержит такую четверную подгруппу U, что все инволюции из Ua сопряжены с a. Для b из $(U^g\cap Q_0)^{\#}$ инволюция zb, сопряженная с a, централизует $\langle C_T(a), b^f\rangle$. Противоречие с выбором a. Значит, $|Q_0|=2$. Допустим, что $Q\not\simeq V_8$.

Если $\bar{Q}$ — группа с тремя инволюциями, то $\bar{Q}$ — абелева группа, так как остальные группы из заключения теоремы Б [8] не допускают требуемой группы автоморфизмов. Теперь $Q\simeq Z_4\times Z_4$, так как $|Z(Q)|=8$. В силу выбора a инволюция z изолирована в $Z(Q)$. Если $\langle y\rangle$ — подгруппа порядка 4 из Q, не нормализуемая a, то $(yy^a)^a=y^ay=yy^az$, поэтому инволюция a сопряжена с az. Теперь все инволюции из $T\backslash Q$ сопряжены с z. Из леммы 7.4 следует, что подгруппа Q слабо замкнута в T относительно G, поэтому $b^G\cap T=b^{\langle f\rangle}$ для $b\in[Z(Q),\ f]^{\#}$. Отсюда подгруппа $[Z(Q),\ f]$ сильно замкнута в T относительно G. Значит, и $Q=C_T([Z(Q),\ f])$ сильно замкнута в T. Но тогда $N(Q)=C(z)$ контролирует слияние в T. Противоречие.

Пусть $\bar b$ — инволюция из $\bar Q\diagdown\overline{Z(Q)}$, $\bar V=\langle\bar b,\bar b^f\rangle$. Если $[V,\ V^a]\neq 1$, то группа $\bar Y=\langle\bar V,\ \bar V^a\rangle$ изоморфна по лемме 7.3 S_2-подгруппе из $L_3(4)$. В этом случае $C_{\bar Y}(a)\simeq Q_8$. Противоречие с тем, что $C_Q(a)$ — элементарная группа. Значит, $[\bar V,\ \bar V^a]=1$. Так как $|C_G(a)|=4$, то $\overline{VZ(Q)}$ — нижний слой $\bar Q$ и $VZ(Q)\simeq V_4\times Q_8$, где V — полный прообраз $\bar V$. Отсюда инволюции a и az сопряжены. Повторив рассуждения из предыдущего абзаца, получим противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7.6. *Пусть X — f-допустимая 2-подгруппа, содержащая z. Тогда либо $N(X)$ — разрешимая группа, либо $N(X)$ является расширением 2-группы с помощью $L_2(q)$ для некоторого q.*

Доказательство. Пусть $N=N(X)$ — неразрешимая группа, $R=O_2(N)$ и $V=\langle z^N\rangle$. Тогда $\langle z\rangle=C_R(f)$, поэтому $C_N(f)\leqslant C_N(z)$. В силу леммы 1.4 максимальная нормальная подгруппа из N, не содержащая f, совпадает с R. Отсюда N/R — простая группа с сильно изолированной циклической $2'$-подгруппой порядка, делящегося на 3. Из [9] следует, что $N/R=L_2(q)$ для некоторого q.

Лемма 7.7. *Если $a\in Q$, то $C_T(a)\neq C_Q(a)\neq C_Q(a^f)$. Далее, $H/C_T(a)\simeq\Sigma_3$ для некоторой подгруппы H из G, $P=H\cap T$ — S_2-подгруппа из H, $|P:P\cap Q|=2$ и $L=(P\cap Q)N_{T\langle f\rangle}(\langle f\rangle)$ — расширение $P\cap Q$ с помощью Σ_3.*

Доказательство. Предположим сначала, что $C_Q(a)=C_Q(a^f)$. Допустим, что $N(C_T(a))$ не нормализует $C_Q(a)$. Тогда $N_{C(z)}(\langle a,\ a^f,\ z\rangle)$ является расширением $C_Q(a)$ с помощью Σ_3. Пусть $y\in N(C_T(a))\backslash N(C_Q(a))$, $V=\langle z,\ a,\ a^f\rangle$. Тогда класс нильпотентности группы $C_Q(a)^yU/U$ не больше 2. По лемме 7.3 $C_Q(a)/U$ — абелева группа. Так как $U\leqslant Z(C_Q(a))$, то класс нильпотентности группы $C_Q(a)^y/\langle z\rangle$ не больше 2. Снова по лемме 7.3 $C_Q(a)/\langle z\rangle$ — абелева группа. Если $C_Q(a)$ — абелева группа, то по лемме 7.3 $C_Q(a)=U$. В этом случае $C_T(a)\simeq Z_2\times D_8$ и $N(C_T(a))$ 2-замкнут. Если же $C_Q(a)$ — неабелева группа, то $C_Q(a)\simeq V_4\times Q_8$, поэтому a и z не сопряжены в $N(C_T(a))$. Значит, $N(C_T(a))$ нормализует $C_Q(a)$.

Пусть $N=N(C_Q(a))$, $R=O_2(N)$. По лемме 7.6 N — разрешимая группа или $N/R\simeq L_2(q)$. Если $C_Q(a)=C_T(a)$, то $C_N(a)$ — подгруппа нечетного индекса из N, содержащая $C_N(f)$. В этом случае либо N — 2-замкнутая группа, либо $N\leqslant C(z)$, либо $N/R\simeq L_3(2)$. В последнем случае по лемме 3 [4] $|R|=8$ и $C_T(a)\neq C_Q(a)$. Противоречие. Если же $C_Q(a)\neq C_T(a)$, то $N(C_T(a))$ — 2-замкнут.

Итак, $C_Q(a)\neq C_Q(a^f)$. Так как в $\tilde T=T/\langle z\rangle$ верно $C_{\tilde Q}(\tilde a)=C_{\tilde Q}(\tilde a^f)$, то $C_Q(a)=C_Q(\langle a,\ a^f\rangle)\langle b\rangle$, $[b,\ a^f]=z$. Отсюда $(b^f)^2\in C_Q(\langle a,\ a^f\rangle)$, $[b^f,\ a]=z$ и b^f нормализует $C_Q(a)$.

Пусть $P=\langle C_T(a),\ b^f\rangle$. Тогда $P/C_Q(\langle a,\ a^f\rangle)\simeq D_8$ и $[b^f,\ d]\in C_Q(a)$ для $d\in C_T(a)\backslash C_Q(a)$. Отсюда $b^f\in N(C_T(a))$.

Если $C_T(a)=C_Q(a)$, то $a\in Q'$, так как $[a^f,\ b]=z$ и инволюции a, z сопряжены в $N(C_T(a))$. По лемме 7.3 $|Q:C_Q(a)|=2$. Пусть $d=a^{fg}$, $y=b^g$. Тогда d централизует в $C_Q(a)$ подгруппу индекса 2, поэтому $|Q:C_Q(d)|\leqslant\leqslant 4$. Далее, $[d,\ y]=a$, $[d,\ y^f]$ и $[d,\ (y^f)^f]$ — различные инволюции, не совпадающие с z. С другой стороны, $(y^f)^{-2}d(y^f)^2=(y^f)^{-1}(daa^fz^\varepsilon)y^f=daa^fz^\varepsilon y^{-f}aa^fz^\varepsilon y^f=dz$, так как $y^f\notin C(a)$. Противоречие с тем, что $|Q:C_Q(d)|\leqslant 4$. Итак, $C_T(a)\neq C_Q(a)$. Пусть $y=b^{fg}$. Тогда $[b^f,\ a]=z$, $[y,\ z]=a$, $(b^f)^2$, $y^2\in C_Q(a)$. Отсюда подгруппа $H=\langle C_T(a),\ b^f,\ y\rangle$ является расширением $C_T(a)$ с помощью Σ_3, причем P — S_2-подгруппа из H. Далее,

$|P:P\cap Q|=2$ и $P\cap Q$ — f-допустимая группа. Таким образом, $L/P\cap Q\simeq\simeq\Sigma_3$ для $L=(P\cap Q)\cdot N_{T\langle f\rangle}(\langle f\rangle)$. Лемма доказана.

Пусть $a\in Q$, h — элемент порядка 3 из H, $U=\langle a, z\rangle$, $W=\langle z, a, a^f\rangle$.

Лемма 7.8. *Если $a\in Q$, то группа T изоморфна S_2-подгруппе из M_{12} и $G=O^2(G)$.*

Доказательство. Пусть $Q_0=C_Q(a)\cap C_Q(a)^h$. Тогда $Q_0\lhd H$ и $|C_T(a):Q_0|\leqslant 4$. По лемме 1.2 [16] $(P\cap Q/\langle z\rangle)'=(C_Q(a)/\langle z\rangle)'$. Но $\langle z\rangle==[a^f, C_Q(a)]$, поэтому $(P\cap Q)'=C_Q(a)'=C_Q(a^f)'$. Далее, $Q/\langle z\rangle$ — группа класса нильпотентности, не большего 2. Отсюда $Q_0/\langle a\rangle$ также класса нильпотентности, не большего 2. По теореме Ремака класс нильпотентности группы Q_0 не больше 2. Если h нормализует $C_Q(a)$, то $a\in C_Q(a)'$. В этом случае $a^f\in C_Q(a)'$, следовательно, $a^f\in Z(C_Q(a))$. Противоречие. Значит, $|C_T(a):Q_0|=4$. Допустим, что $a\notin Q_0'$. Тогда и $z\notin Q_0'$, поэтому либо $a^f\in Z(Q_0)$, либо $a^f\notin Q_0$. Но в первом случае $Q_0=C_Q(\langle a, a^f\rangle$, следовательно, S_3-подгруппа из $N(Q_0)$ — циклическая группа. Противоречие с тем, что $\langle f\rangle$ и $\langle h\rangle$ нормализуют Q_0. Значит, $Q_0\neq C_Q(\langle a, a^f\rangle)$ и $a^f\notin Q_0$. В этом случае $a^{fh}\in C_T(a)\backslash C_Q(a)$. Тогда $[a^f, a^{fh}]\neq 1$. Пусть $X=\langle U, a^f, a^{fh}, (a^{fh})^h\rangle$. Тогда $X'=U$, $|X|=32$, следовательно, $X=X_0X_1$, где $X_1=[X, h]$ — абелева группа порядка 16 и $X_0=C_X(h)$. При этом $C_X(X_0)=X_0U$, поэтому $Z(X)=U$. Теперь X_1 — единственная абелева подгруппа из X индекса 2, поэтому $X_1\lhd H$ и $W\ntrianglelefteq X_1$. Пусть $w\in W\backslash X_1$. Тогда $w=x_0x_1$, где $x_0\in X_{\#}^0$ и $x_1\in X_1$. Так как $W\neq X_0U$, то $x_1\notin U$. Далее, w — инволюция, поэтому $X_1\simeq Z_4\times Z_4$ и x_0 инвертирует X_1. Отсюда X_1 содержит точно четыре элементарные подгруппы порядка 8, три из которых сопряжены с W под действием $\langle h\rangle$. Значит, $X_0U\lhd H$, поэтому $[P, X]<X_1$. Так как $X\backslash X_1$ состоит из инволюций, то $[w, t]\notin\langle z\rangle$ для некоторой инволюции t из $X\backslash X_1$. Отсюда $t\notin P\cap Q$ и $[t, P\cap Q]U<X_1$, поэтому $|[t, P\cap Q]W/W|\leqslant 2$. Теперь $|P\cap Q|\leqslant 2^5$, следовательно, $P\cap Q\simeq Q_8\circ Q_8$ и $C_T(a)=X$. Таким образом, группа P изоморфна S_2-подгруппе из M_{12}, причем P содержит единственную нормальную подгруппу, изоморфную V_8. Отсюда $P=T$. Далее, элемент из $C_T(a)\backslash C_Q(a)$ сопряжен под действием $\langle h\rangle$ с элементом из Q, следовательно, $G=Q^2(G)$. В этом случае лемма выполняется.

Пусть $a\in Q_0'$. Тогда $a^f\in C_Q(a)'$, следовательно, $a^f\in Q_0\diagdown Q_0'$. Далее, $[Q, Q']\leqslant\langle z\rangle$, поэтому $|Q:C_Q(a)|=2$ и $P=T$. Пусть $Q_1==C_Q(\langle a, a^f\rangle)$. По лемме 1.2 [16] $(Q_1/\langle z\rangle)'=(Q_1\cap Q_0/\langle z\rangle)'$, так как $|Q_1:Q_1\cap Q_0|=2$ и подгруппа Q_1 f-допустима. Но $a^f\notin Q_0'$, следовательно, $a\notin Q_1'\langle z\rangle$. Пусть без ограничения общности $z^h=a$. Тогда $[C_Q(a)^h, Q_0']\leqslant\leqslant\langle a\rangle$. Отсюда $[C_Q(a)^h, (Q_1\cap Q_0)']\leqslant\langle a\rangle\cap Q_1'=1$, поэтому f централизует $(Q_1\cap Q_0)'$ и $[C_Q(a)^h, a^f]\leqslant U$.

По лемме 4 [8] 2-ранг $C_Q(a)'$ не более чем на 1 превосходит 2-ранг Q_0'. Далее, $[C_Q(a)^h, Q_0']\leqslant\langle a\rangle$, $a^f\notin Q_0'$ и $[C_Q(a)^h, a^f]\leqslant U$. Так как $C_Q(a)'=Q'$, то для элемента d из T, инвертирующего f, имеем $[\Omega(Q'), d]\leqslant U$, следовательно, $\Omega(Q')=\langle z, a, a^f\rangle=W$. Заметим, что $\Phi(Q')\leqslant Z(Q)$ и $W\cap Z(Q)=\langle z\rangle$. Отсюда $Q'=W$. Теперь элемент x из $Q\backslash C_Q(a)$ индуцирует трансвекцию на Q_0/U, поэтому $x^2\in Q_0\cap Q_1$ и $[Q_0, h]==\langle W, a^{fh}\rangle$ — элементарная подгруппа порядка 16, нормальная в H. Пусть $t=a^{fhf}$. Допустим, что $t\notin Q_0$. Тогда $\langle t, t^h, t^{h^2}\rangle[Q_0, h]/[Q_0, h]$ — элементарная группа, следовательно, $|[C_T(a), h]|=2^6$. Пусть $X=\langle t, t^h, t^{h^2}\rangle[Q_0, h]$, $X_1=[X, h]$, $X_0=C_X(h)$. Так как $[Q_0, a^{fh}]=a$, то $[t, a^{fh}]\in\langle z\rangle$, следовательно, $\langle t, t^h, t^{h^2}\rangle U/U$ — абелева группа. Теперь $[t, t^h]\in\langle a, z\rangle$ и если $[t, t^h]\neq 1$, то $X_1\cap\langle t, t^h, t^{h^2}\rangle U\simeq Z_4\times Z_4$. В силу леммы 7.3 в этом случае X_1 — абелева группа, следовательно, $[t, X_1]\leqslant\langle z\rangle$. Противоречие с тем, что t инвертирует $X_1\cap\langle t, t^h, t^{h^2}\rangle U$. Значит, $[t, t^h]=1$. Отсюда $[t, X_1]\leqslant\leqslant\langle z\rangle$ и $[t^h, X_1]\leqslant\langle a\rangle$. Так как t^h инвертирует некоторую подгруппу порядка 3 из $C(z)$ и подгруппа $\langle W, a^{fh}, t\rangle$ инвариантна в $T\langle f\rangle$, то $|\langle W, a^{fh}, t\rangle|\leqslant 8$. Противоречие.

Итак, $t \in Q_0$. В этом случае подгруппа $[Q_0, h]\langle t\rangle$ нормальна в $T\langle f\rangle$ и допускает $\langle h\rangle$. Противоречие с леммой 7.6. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 7.1. Из лемм 7.5, 7.8 следует, что $C(z) \simeq \mathrm{GL}_2(3)$ или $Z_2 \times \Sigma_4$ либо группа $C(z)$ изоморфна централизатору центральной инволюции из A_8 или M_{12}. Из теорем [2, 15, 23, 27] следует, что G — одна из групп в заключение теоремы 7.1. Теорема 7.1 доказана.

Докажем следствие. Из результатов [3, 14] и теоремы 7.1 следует, что $C(z)$ — разрешимая не 2-замкнутая $3'$-группа. Для применения основной теоремы достаточно доказать, что $C(z)$ — максимальная 2-локальная подгруппа.

Пусть M — максимальная 2-локальная подгруппа из G, содержащая $C(z)$. По условию следствия M — разрешимая группа. Пусть $Q = O_2(M)$, $V = \Omega(Z(Q))$, K — $S_{2'}$-подгруппа из $C(z)$ и $\overline{M} = M/Q$. Заметим, что если $1 \neq K_0 \leqslant K$, то $C_V(K_0) = \langle z\rangle$, поэтому $N_{\overline{M}}(\overline{K}_0) = \overline{N_{C(z)}(K)}$. Если $\overline{R}$ — нормальная в $\overline{M}$ подгруппа из $O(\overline{M})$, максимальная со свойством $\overline{R} \cap \overline{K} = 1$, то в силу леммы 1.6 $\overline{R} = 1$. Отсюда $\overline{M} = N_{\overline{M}}(\overline{K})$, следовательно, $M = C(z)$. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кабанов В. В., Мазуров В. Д., Сыскин С. А.** Конечные простые группы, силовские 2-подгруппы которых обладают экстраспециальной подгруппой индекса 2.— Мат. заметки, 1975, т. 14, № 1, с. 127—132.
2. **Мазуров В. Д.** О конечных группах с данной силовской 2-подгруппой.— ДАН СССР, 1966, т. 168, № 3, с. 519—521.
3. **Махнёв А. А.** О конечных группах с заданным централизатором центральной инволюции.— В кн.: 5-й Всесоюз. симпоз. по теории групп. Новосибирск: изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1976, с. 64.
4. **Махнёв А. А.** О конечных группах с централизатором порядка 6. II.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 2, с. 214—223.
5. **Ситников В. М.** О группе Матье M_{12}.— Мат. заметки, 1974, т. 15, № 4, с. 651—660.
6. **Сыскин С. А.** О централизаторах 2-подгрупп в конечных группах.— Алгебра и логика, 1978, т. 17, № 3, с. 316—354.
7. **Устюжанинов А. Д.** Конечные 2-группы с тремя инволюциями.— Сиб. мат. журн., 1972, т. 13, № 1, с. 182—197.
8. **Устюжанинов А. Д.** О конечных p-группах, коммутант каждой собственной подгруппы которых метациклический.— Сиб. мат. журн., 1971, т. 12, № 4, с. 844—854.
9. **Подуфалов Н. Д.** О конечных простых группах, содержащих сильно изолированные подгруппы.— Мат. сб., 1976, т. 100, № 3, с. 447—454.
10. **Alperin J.** Up and down fusion.— J. Algebra, 1974, v. 28, N 2, p. 206—209.
11. **Aschbacher M., Seitz G.** On groups with a standard component of known type.— Osaka J. Math., 1976, v. 13, N 3, p. 439—482.
12. **Aschbacher M.** A characterization of Chevalley groups over fields of odd order.— Ann. Math., 1977, v. 106, p. 353—468.
13. **Aschbacher M.** On finite groups of component type.— III. J. Math., 1975, v. 19, N 1, p. 87—115.
14. **Baumann B.** Endliche Gruppen mit einer 2-zentralen Involution, deren Zentralizator 2-abgeschlossen ist.— Ill. J. Math., 1978, v. 22, N 2, p. 240—261.
15. **Brauer R., Fong P.** A characterization of Mathieu group M_{12}.— Trans. Amer. Math. Soc., 1966, v. 122, p. 18—47.
16. **Dickson N.** Groups with dihedral normalizers of order $4k$.— J. Algebra, 1978, v. 54, N 2, p. 390—409.
17. **Finkelstein L.** Finite groups with standard component whose centralizer has cyclic Sylow 2-subgroups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1977, v. 62, N 2, p. 237—241.
18. **Fischer B.** Finite groups generated by 3-transpositions.— Invent. Math., 1971, v. 13, N 3, p. 232—246.
19. **Glauberman G.** Central elements in core-free groups.— J. Algebra, 1966, v. 13, N 3, p. 403—420.
20. **Glauberman G.** Weakly closed elements of Sylow subgroups.— Math., Z., 1968, v. 107, N 1. p. 1—20; 1969, v. 112, N 2, p. 89—100.
21. **Gomi K.** Standard subgroups of type $\mathrm{Sp}_4(2^n)$.— Japan J. Math., 1978, v. 4, N 1, p. 390—409.
22. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y., 1968.
23. **Gorenstein D., Walter J.** The characterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups.— J. Algebra, 1965, v. 2, p. 85—151, 216—270, 354—393.
24. **Griess R., Mason D., Seitz G.** Bender group as standard subgroup.— Trans. Amer. Math. Soc., 1978, v. 238, p. 179—211.
25. **Griess R., Solomon R.** Finite groups with unbalancing 2-components of $(L_3(4), \mathrm{He})$-type.— J. Algebra, 1979, v. 60, N 1, p. 96—125.

26. **Harris M.** Finite groups having an involution centralizer with a 2-component of dihedral type.— Ill. J. Math., 1977, v. 21, N 3, p. 621—647.
27. **Held D.** A characterization of the alternating groups of degree eight and nine.— J. Algebra, 1967, v. 7, N 2, p. 218—237.
28. **Parrott D.** A characterization of the Tits' simple group.— Canad. J. Math., 1974, v. 24, N 4, p. 672—685.
29. **Seitz G.** Standard subgroups of type $L_n(2^m)$.— J. Algebra, 1977, v. 48, N 2, p. 417—438.
30. **Suzuki M.** Finite groups with nilpotent centralizers.— Trans. Amer. Math. Soc., 1961, v. 99, N 3, p. 425—470.
31. **Suzuki M.** On a class of a doubly transitive groups.— Ann. Math., 1962, v. 75, N 1, p. 105—145.
32. **Thompson J. G.** Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. VI.— Pacif. J. Math., 1974, v. 51, N 2, p. 573—630.

Поступила в редколлегию 21 апреля 1981 г.

КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ ТИПА ХАРАКТЕРИСТИКИ 2 И 3

Н. Д. ПОДУФАЛОВ

Важное место в решении общей классификационной задачи о конечных простых группах занимает исследование конечных простых групп типа характеристики 2. Напомним, что конечная группа X называется группой типа характеристики p (p — простое число), если для любой p-локальной подгруппы H из X справедливо условие $C_H(O_p(H)) \subseteq O_p(H)$ и силовская p-подгруппа из X содержит нормальную элементарную абелеву подгруппу порядка p^3.

При изучении строения конечной простой группы G типа характеристики 2 существенную роль играют так называемые нечетные характеризации. Программа исследования конечных простых групп, предложенная Д. Горенстейном, предполагает проводить изучение группы G типа характеристики 2 в зависимости от строения p-локальных подгрупп из G для нечетных простых чисел p. Схема исследований во многом аналогична 2-характеризациям конечных групп: изучение групп низкого p-ранга или низкого 2-локального p-ранга; изучение групп, в которых есть централизатор элемента порядка p, не являющийся p-скованным; изучение групп, в которых p-локальные подгруппы p-скованы.

В этом плане простое число $p = 3$ играет исключительную роль. Во-первых, конечные простые группы, порядок которых не делится на 3, известны, т. е. мы можем считать, что в G есть элементы порядка 3; более того, можно предполагать наличие элементов порядка 3 в 2-локальных подгруппах. Во-вторых, 3-характеризации являются наиболее развитой ветвью нечетных характеризаций.

Один из узловых моментов исследований — изучение случая, когда группа G является одновременно группой типа характеристики 2 и 3. Поэтому Д. Горенстейном была поставлена следующая задача: доказать, что если конечная простая группа G является одновременно группой типа характеристики 2 и 3, то G изоморфна одной из групп $\mathbf{PSp}(4, 3)$, $\mathbf{G}_2(3)$ или $\mathbf{U}_4(3)$ [1].

В настоящей работе завершено исследование групп типа характеристики 2 и 3, начатое в [1, 2], и доказана

Основная теорема. *Пусть G — конечная простая группа типа характеристики* 2 *и* 3. *Тогда G изоморфна одной из групп* $\mathbf{PSp}(4, 3)$, $\mathbf{G}_2(3)$, *или* $\mathbf{U}_4(3)$.

Случай, когда 3-ранг G не меньше 4, полностью изучен в [2], поэтому в данной статье нам осталось рассмотреть группы 3-ранга, равного 3. Вначале мы получим детальную информацию о структуре 3-локальных подгрупп контрпримера к основной теореме (разд. 2), после чего (разд. 3, 4) исследование 2-локальных подгрупп позволит показать, что контрпримера не существует.