19. **Фук Д. Х., Нагаев С. В.** Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. XVI, № 4, с. 660—675.
20. **Боровков А. А.** Замечание о неравенствах для сумм независимых случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. XVII, № 3, с. 587—589.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

ОЦЕНКИ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

А. И. САХАНЕНКО

1. Введение

В настоящее время имеется несколько направлений исследований, объединенных общим названием «изучение скорости сходимости в принципе инвариантности». Главными из них следует считать «принцип инвариантности в форме Штрассена» и «классический принцип инвариантности Донскера — Прохорова». Более подробно каждое из двух указанных направлений рассмотрено в пп. 7—9. Общей чертой этих задач является наличие следующей трудности. Требуется последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ с известными распределениями задать на одном вероятностном пространстве таким образом, чтобы значение

$$\mathbf{P}\left(\Delta \equiv \sup_n \left| \sum_{j\leqslant n} \xi_j - \sum_{j\leqslant n} \eta_j \right| > x\right)$$

при некотором x было достаточно мало́.

Решение этой задачи при существовании у случайных величин экспоненциальных моментов найдено в [1] (см. теорему 1 в п. 2). Данная работа посвящена получению следствий из указанного результата в различных направлениях. Так, если известно поведение характеристик вида $\max\limits_{j\leqslant n} \mathbf{M}H(\xi_j)/\mathbf{D}\xi_j$ и $B_n^2 = \sum\limits_{i\leqslant n} \mathbf{D}\xi_j$, то удобно использовать теоремы 1, 7 и их следствия. Остальные результаты предполагают ограничения на суммы типа $\sum\limits_{j\leqslant n} \mathbf{M}H(\xi_j)$. В этой связи нужно отметить теоремы 2 и 5, в последней из которых получена оценка

$$\mathbf{M}\Delta^\alpha \leqslant C\alpha^{2\alpha} \sum \mathbf{M} |\xi_j|^\alpha \quad \forall \alpha \geqslant 2.$$

Несколько слов об обозначениях. Нумерация теорем, следствий и замечаний в работе общая. Леммы и формулы нумеруются в каждом пункте независимо, ссылки на них из других пунктов не допускаются. Знак □ обозначает конец доказательства. Буквы C и c (с индексами или без них) заменяют абсолютные постоянные, одни и те же в пределах нескольких абзацев. Когда соответствующие постоянные не абсолютны, употребляются символы O и K. Упрощенные обозначения Σ и Π используются только в том случае, когда сумма или произведение берется по переменной j, пробегающей значения от 1 до ∞.

2. Постановка основной задачи и ключевые результаты

Пусть $F_1(\cdot), F_2(\cdot), \ldots$ — последовательность функций распределения, а $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие нормальные распределения. Нас интересует вопрос: *можно ли построить независимые случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *с функциями распределения* $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot), \ldots$ *соответственно, причем таким образом, чтобы величина*

$$\Delta = \sup_n \left| \sum_{j\leqslant n} \xi_j - \sum_{j\leqslant n} \eta_j \right| \tag{1}$$

удовлетворяла некоторым условиям малости. Эта задача является основной при получении оценок в принципе инвариантности. В такой постановке она впервые рассмотрена Я. Комлошем, П. Майером и Г. Тушнади в [2, 3].

Замечание 1. Эквивалентна следующая постановка приведенной выше задачи, использующая другую терминологию. *Можно ли заданные последовательности* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *и* $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *независимых случайных величин построить (или переопределить) на одном вероятностном пространстве, не меняя их распределений таким образом, чтобы определенная в* (1) *величина* Δ *обладала нужными свойствами.* Общим в этих постановках является тот факт, что с самого начала известны лишь функции распределения $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$, ... величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, а не сами случайные величины, но имеющуюся информацию о заданных функциях распределения нам удобно выражать в терминах случайных величин, которые требуется построить (см., например, формулы (2), (3), (5)).

Будем предполагать всюду выполненным условие

$$\mathbf{M}\xi_j = \mathbf{M}\eta_j = 0, \quad \mathbf{D}\xi_j = \mathbf{D}\eta_j \quad \forall j. \tag{2}$$

Следующее утверждение является основным результатом работы [1].

Теорема 1. *Если выполнено условие* (2) *и при некотором* $\lambda > 0$

$$\lambda \mathbf{M}|\xi_j|^3 \exp(\lambda|\xi_j|) \leqslant \mathbf{D}\xi_j \quad \forall j, \tag{3}$$

то существуют такие случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$, *что*

$$\mathbf{M}e^{c\lambda\Delta} \leqslant 1 + \lambda\left(\sum \mathbf{D}\xi_j\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Приведем ряд следствий из этого общего утверждения.

Следствие 1. *Если выполнено условие* (2) *и при некотором* $a > 0$

$$\mathbf{P}(|\xi_j| \leqslant a) = 1 \quad \forall j, \tag{5}$$

то при $\lambda = (2a)^{-1}$ *справедливо утверждение теоремы* 1.

Для доказательства достаточно заметить, что при указанном λ условие (5) сильнее, чем (3), так как $\lambda|\xi|^3 e^{\lambda|\xi|} \leqslant \lambda a \xi^2 e^{\lambda a} \leqslant \xi^2$, если $|\xi| \leqslant a$ и $\lambda a \leqslant 1/2$. Можно получить и более точное утверждение.

Следствие 2. *Пусть положительные числа* λ, γ, $z < a$ *и четная положительная функция* $H(\cdot)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$4\lambda z \leqslant 1, \quad 2\lambda \leqslant \inf_{z \leqslant t \leqslant a} t^{-1} \ln\left(\gamma^{-1} t^{-2} H(t)\right). \tag{6}$$

Тогда, если выполнены условия (2), (5) *и*

$$\mathbf{M}H(\xi_j) \leqslant \gamma \mathbf{D}\xi_j \quad \forall j, \tag{7}$$

то при указанном λ *справедливо утверждение теоремы* 1.

Доказательство. В силу первого из условий (6) при $|\xi| \leqslant z$ верно неравенство $\lambda|\xi|^3 e^{\lambda|\xi|} \leqslant \xi^2/2$, из которого получаем соотношение

$$\lambda \mathbf{M}\{|\xi|^3 e^{\lambda|\xi|};\ |\xi| \leqslant z\} \leqslant \mathbf{D}\xi/2. \tag{8}$$

Из оценки $\lambda|\xi| < 2^{-1} e^{\lambda|\xi|}$ и второго условия в (6) имеем $\lambda|\xi|^3 e^{\lambda|\xi|} \leqslant 2^{-1}\xi^2 e^{2\lambda|\xi|} = H(\xi)\exp\{|\xi|(2\lambda - \ln(\xi^{-2}\gamma^{-1}H(\xi)))\}/(2\gamma) \leqslant H(\xi)/(2\gamma)$ при $z \leqslant |\xi| \leqslant a$. Следовательно,

$$\lambda \mathbf{M}\{|\xi|^3 e^{\lambda|\xi|};\ z \leqslant |\xi| \leqslant a\} \leqslant \mathbf{M}H(\xi)/(2\gamma). \tag{9}$$

Суммируя (8) и (9) при $\xi = \xi_j$, находим

$$\lambda \mathbf{M}|\xi_j|^3 \exp(\lambda|\xi_j|) \leqslant \mathbf{D}\xi_j/2 + \mathbf{M}H(\xi_j)/(2\gamma). \tag{10}$$

Таким образом, если выполнены условия следствия 2, то из (7) и (10) вытекает, что справедливо условие (3) теоремы 1. Поэтому верно и утверждение последней. □

Отметим, что теорема 4 в [3] — частный случай следствия 2, когда $\xi_1, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены, а $\xi_j = 0$ при $j > n$.

Обозначим при $a > 0$ через $\mathscr{H}(a, K)$ множество четных функций $H(x)$ таких, что функция $H(x)/x^2$ монотонна и положительна при $x \in$

$\in (0, a]$, и, кроме того, $H(0)=0$ и справедливо неравенство

$$-\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} a \ln\{H(a2^{-m})/H(a)\} \leqslant K < \infty.$$

Примерами функций, принадлежащих $\mathscr{H}(\cdot, \cdot)$ при всех $a>0$ и некоторых $K=K(a)$, являются $H(x)=|x|^\alpha$ при $\alpha \geqslant 2$ и $H(x)=|x|^\alpha \exp(-C|x|^{-\beta})$ при $0<\beta<1$, $\alpha \geqslant 2$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (2) *и* (5), *а функция* $H(\cdot) \in \mathscr{H}(a, K)$, *то существуют такие случайные величины* $\{\xi_j\}$, *что*

$$\mathbf{P}(\Delta \geqslant C(x+K)) \leqslant (1+H^{-1}(a)L(H))\mathrm{e}^{-x/a} \tag{11}$$

при всех $x \geqslant 0$, *где*

$$L(H) = \sum \{\mathbf{M}H(\xi_j) + H(\mathbf{D}^{1/2}\xi_j)\}. \tag{12}$$

Замечание 2. Если функция $G(x)=H(x^{1/2})$ выпукла, то в силу неравенства Иенсена $H(\mathbf{D}^{1/2}\xi) = G(\mathbf{M}\xi^2) \leqslant \mathbf{M}G(\xi^2) = \mathbf{M}H(\xi)$, а потому $L(H) \leqslant 2\Sigma\mathbf{M}H(\xi_j)$, что позволяет упростить правую часть в (11) и (12).

Теорема 2 доказана в несколько этапов в п. 3.

Замечание 3. Если выполнены условия (2) и (5), то для сходимости каждого из рядов $\Sigma\xi_j$ и $\Sigma\eta_j$ необходимо и достаточно [4, с. 166] выполнения условия $\Sigma D\xi_j < \infty$. Таким образом, теорема 2 дает достаточные условия для сходимости (при соответствующем построении величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ на одном вероятностном пространстве) ряда $\Sigma(\xi_j - \eta_j)$, в то время как каждый из рядов $\Sigma\xi_j$ и $\Sigma\eta_j$ может не сходиться.

Нетрудно убедиться, что для одинаково распределенных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (когда $\xi_j = 0$ при $j > n$) следствие 2 дает, как правило, более точные оценки, чем теорема 2, поскольку $2\lambda > 1/a$. Но в общем случае часто (см., например, замечание 3) имеет место обратное.

3. Доказательство теоремы 2

С целью максимального упрощения предлагаемого доказательства теоремы 2 в этом пункте введем ряд обозначений и соглашений, которыми далее пользоваться не будем.

Условимся через $\{\zeta\}$ обозначать *последовательность* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ *независимых* случайных величин и при необходимости использовать символ ζ вместо любой из величин ζ_j. Через $\{\zeta^*\}$ и $\{\zeta^{**}\}$ будем обозначать только последовательности, одинаково распределенные с $\{\zeta\}$. Если заданы две последовательности $\{\xi\}$ и $\{\zeta\}$, то будем полагать

$$\Delta(\{\xi\}, \{\zeta\}) = \sup_n \Big| \sum_{j \leqslant n} \xi_j - \sum_{j \leqslant n} \eta_j \Big| \tag{1}$$

и будем называть последовательности $\{\xi\}$ и $\{\zeta\}$ подобными, если

$$\mathbf{M}\xi_j = \mathbf{M}\zeta_j = 0, \quad \mathbf{D}\xi_j = \mathbf{D}\zeta_j < \infty \quad \forall j. \tag{2}$$

Введенные термины и обозначения, включая формулы (1) и (2), будем использовать также для последовательностей, которые обозначены другими буквами. При этом через η с индексами или без будем обозначать только *нормально* распределенные случайные величины.

Если заданы последовательности $\{\xi\}$, $\{\zeta\}$ и доказано существование $\{\xi^*\}$ и $\{\zeta^*\}$ с необходимым совместным распределением, то будем предполагать, что первоначально были известны лишь распределения $\{\xi\}$ и $\{\zeta\}$, и будем полагать $\{\xi\} = \{\xi^*\}$ и $\{\zeta\} = \{\zeta^*\}$. В этом случае в соответствии с замечанием 1 будем говорить, что случайные последовательности $\{\xi\}$ и $\{\zeta\}$ переопределены (на новом вероятностном пространстве без изменения их распределений).

Замечание 4. Как отмечено в [5], справедливо следующее утверждение. *Если заданы пары последовательностей* $(\{\xi^*\}, \{\eta^*\})$ *и* $(\{\eta^{**}\}, \{\zeta^{**}\})$, *то на некотором вероятностном пространстве можно построить последовательности* $(\{\xi\}, \{\eta\}, \{\zeta\})$ *таким образом, что пара* $(\{\xi\}, \{\eta\})$

одинаково распределена с $(\{\xi^*\}, \{\eta^*\})$, *а пара* $(\{\eta\}, \{\zeta\})$ — *с* $(\{\eta^{**}\}, \{\zeta^{**}\})$.

Фиксируем функцию $H(\cdot) \in \mathscr{H}(a, K)$. Поскольку в теореме 2 всегда вместо функции $H(\cdot)$ и величин $\{\xi_j\}$ можно рассматривать $H(\cdot)/H(a)$ и $\{\xi_j/a\}$, то далее будем полагать $a = 1$ и $H(a) = 1$, т. е.

$$H(\cdot) \in \mathscr{H}(1, K), \quad H(1) = 1. \tag{3}$$

Обозначим

$$h(x) = H(x)/x^2, \quad G(x) = -x \ln H(x), \quad g(x) = C(x + 2K), \tag{4}$$

где $C = 4/c$, а постоянная c определена в теореме 1. Для любой последовательности $\{\zeta\}$ положим $L(\{\zeta\}) = \Sigma \mathbf{M} H(\zeta_j)$. Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений. Пусть $\{\xi\}$ и $\{\eta\}$ — две произвольные подобные последовательности, $B^2 = \Sigma \mathbf{D}\eta_j$, $\Delta = \Delta(\{\xi\}, \{\eta\})$.

Лемма 1. *Если при некотором* $b \leqslant 1/2$

$$\mathbf{P}(|\xi_j| \leqslant 2b) = 1 \quad \forall j,$$

то подобные последовательности $\{\xi\}$ *и* $\{\eta\}$ *можно переопределить таким образом, что при всех* $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(\Delta \geqslant C(x + 2G(b))) \leqslant (b^2 + B^2 h(b)/12) e^{-x/b}.$$

Доказательство. Из следствия 1 при $a = 2b$ вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Delta \geqslant C(x + 2G(b))) &\leqslant \exp\{-\lambda c C(x + 2G(b))\} \mathbf{M} e^{c\lambda\Delta} \leqslant \\ &\leqslant (1 + \lambda B) H^2(b) e^{-x/b}, \quad \lambda = 1/(4b). \end{aligned} \tag{5}$$

Чтобы из (5) получить утверждение леммы 1, достаточно воспользоваться соотношениями

$$\begin{gathered} 1 + \lambda B \leqslant 2 + 2\lambda^2 B^2; \quad \lambda^2 B^2 H(b) = B^2 h(b)/16, \\ 2H^2(b) = 2b^4 h^2(b) < 2b^4 h(1) < b^2 < 1. \end{gathered} \tag{6}$$

При выводе формул (5) и (6) применены определения функций h и G из (3) и (4). □

Лемма 2. *Если для некоторой последовательности чисел* $\{a_j\}$ *справедливо условие*

$$\mathbf{P}(|\xi_j| \leqslant a_j) = 1, \quad a_j \leqslant 1 \quad \forall j, \tag{7}$$

то подобные последовательности $\{\xi\}$ *и* $\{\eta\}$ *можно переопределить таким образом, что при всех* $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(\Delta \geqslant g(x)) \leqslant \left(1/3 + \sum h(a_j) \mathbf{D}\xi_j/12\right) e^{-x}. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим

$$N(m) = \{j : 2^{-m} < a_j \leqslant 2 \cdot 2^{-m}\}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Положим $\xi_{m,j} = \xi_j$ и $\eta_{m,j} = \eta_j$ при $j \in N(m)$ и $\xi_{m,j} = \eta_{m,j} = 0$ в противном случае. Пусть

$$\Delta_m = \max_n \left| \sum_{j \leqslant n} \xi_{m,j} - \sum_{j \leqslant n} \eta_{m,j} \right|.$$

Из (7) и леммы 1 при $b = 2^{-m}$ следует, что последовательности $\{\xi_{m,j}\}$ и $\{\eta_{m,j}\}$ можно переопределить так, чтобы выполнялось соотношение

$$Q_m(x) \equiv \mathbf{P}\left(\Delta_m \geqslant C\left(x 2^{-m} + 2G(2^{-2m})\right)\right) \leqslant \left(2^{-2m} + \sum h(a_j) D\xi_{m,j}/12\right) e^{-x}. \tag{10}$$

При выводе (10) использовано также неравенство $h(2^{-m}) \leqslant h(a_j)$, справедливое при всех $j \in N(m)$ в силу (9).

Так как множества $N(m)$, по определению, попарно не пересекаются, то пары последовательностей $(\{\xi_{m,j}\}, \{\eta_{m,j}\})$ можно определить на одном вероятностном пространстве независимым образом. В этом случае получим требуемые последовательности $\{\xi\}$ и $\{\eta\}$, состоящие из независимых случайных величин. Поскольку

$$x=\sum_{m=1}^{\infty} x2^{-m}, \quad K \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} G(2^{-m}), \quad \mathbf{D}\xi_j=\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{D}\xi_{m,j}, \quad \Delta \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \Delta_m,$$

то требуемое неравенство (8) следует из (10) и соотношения

$$\mathbf{P}(\Delta \geqslant C(x+2K)) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(x).$$

Будем говорить далее, что случайная величина ξ принадлежит классу $\mathcal{T}$, если она имеет нулевое математическое ожидание и принимает не более двух ненулевых значений.

Лемма 3. *Если $\xi \in \mathcal{T}$, а b — максимальное по модулю значение величины ξ, то $h(b)\mathbf{D}\xi \leqslant 2\mathbf{M}H(\xi)$.*

Доказательство. Так как при $b=0$ лемма очевидна, то пусть $-u<0<v$ — все три возможных значения величины ξ, $b=\max\{u, v\}>0$, $q=\mathbf{P}(\xi=-u)$, $r=\mathbf{P}(\xi=v)$. В этом случае $0=\mathbf{M}\xi=-qu+rv$, а потому $qu=rv$. Следовательно,

$$2\mathbf{M}H(\xi)=2qu^2h(u)+2rv^2h(v)=(qu+rv)(uh(u)+vh(v)) \geqslant$$
$$\geqslant (qu+rv)bh(b) \geqslant (qu^2+rv^2)h(b)=h(b)\mathbf{D}\xi. \quad \square$$

Лемма 4. *Если $\{\xi\}$ и $\{\eta\}$ — две подобные последовательности, причем*

$$\xi_j \in \mathcal{T}, \quad \mathbf{P}(|\xi_j| \leqslant 1)=1 \quad \forall j, \tag{11}$$

то их можно переопределить так, что при всех $x \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(\Delta(\{\xi\}, \{\eta\}) \geqslant g(x)) \leqslant \left(1/3+\sum \mathbf{M}H(\xi_j)/6\right)e^{-x}. \tag{12}$$

Для доказательства воспользуемся леммой 2, взяв в качестве a_j максимальное по модулю значение величины ξ_j и оценив $h(a_j)\mathbf{D}\xi_j$ при помощи леммы 3.

Лемма 5. *Пусть $\{\xi\}$ и $\{\zeta\}$ — две подобные последовательности, выполнено условие (11), и*

$$\zeta_j \in \mathcal{T}, \quad \mathbf{P}(|\zeta_j| \leqslant 1)=1 \quad \forall j. \tag{13}$$

В этом случае, последовательности $\{\xi\}$ и $\{\zeta\}$ можно переопределить таким образом, что при всех $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(\Delta(\{\xi\}, \{\zeta\}) \geqslant 2g(x)) \leqslant \left(2/3+\sum \mathbf{M}H(\xi_j)/6+\sum \mathbf{M}H(\zeta_j)/6\right)e^{-x}. \tag{14}$$

Доказательство. Выберем некоторую последовательность $\{\eta\}$, подобную $\{\xi\}$ и $\{\zeta\}$. В силу леммы 4 можно $\{\xi\}$ и $\{\eta\}$ переопределить так, чтобы выполнялось неравенство (12). В соответствии с (13) воспользуемся леммой 4 еще раз, заменив в ней $\{\xi\}$ на $\{\zeta\}$. Требуемое утверждение (14) вытекает теперь из замечания 4 и неравенства $\Delta(\{\xi\}, \{\zeta\}) \leqslant \Delta(\{\xi\}, \{\eta\})+\Delta(\{\zeta\}, \{\eta\})$. $\square$

Докажем еще несколько вспомогательных утверждений. Пусть случайная величина ξ удовлетворяет условиям $\mathbf{M}\xi=0$, $\mathbf{D}\xi=\sigma^2<\infty$.

Лемма 6. *На одном вероятностном пространстве с величиной ξ можно построить случайную величину ξ^*, обладающую следующими свойствами:*

1) *ξ^* одинаково распределена с ξ;*

2) *при каждом фиксированном значении ξ величина ξ^* принимает не более двух значений;*

3) $\mathbf{M}(\xi^*|\xi)=0$ *при всех значениях ξ.*

Это утверждение получено, например, как следствие в методе А. В. Скорохода [6] или [7, 8], когда ξ^* строится как функция от величины ξ и не зависящего от нее винеровского процесса. Проще всего ξ^* определить для симметрично распределенной ξ, когда ξ^* принимает значения $+|\xi|$ и $-|\xi|$ с равной вероятностью. Другими словами, распределение величины ξ лемма 6 позволяет представить в виде смеси двухточечных распределений с нулевым средним. Свяжем теперь с последними симметричные трехточечные распределения специального вида. Положим $\sigma^2(\xi) = \mathbf{M}((\xi^*)^2|\xi)$ и введем в рассмотрение случайную величину ζ^*, предполагая, что при каждом фиксированном ξ величина ζ^* симметрично распределена и

$$\mathbf{P}(|\zeta^*| = \sigma(\xi)|\xi) = 1, \text{ если } \sigma(\xi) \geqslant \sigma; \tag{15}$$

$$\mathbf{P}(\zeta^* \neq 0|\xi) = \mathbf{P}(|\zeta^*| = \sigma|\xi) = \sigma^2(\xi)/\sigma^2, \text{ если } \sigma(\xi) < \sigma. \tag{16}$$

Из определения величины ζ^* вытекает

Лемма 7. *При каждом фиксированном значении ξ величины ξ^* и ζ^* принадлежат классу $\mathscr{T}$, а их дисперсии равны и совпадают с $\sigma^2(\xi)$.*

Лемма 8.

$$\mathbf{M}(H(\zeta^*)|\xi) \leqslant H(\sigma) + 2\mathbf{M}(H(\xi^*)|\xi). \tag{17}$$

Доказательство. Фиксируем значение ξ и обозначим через $b(\xi)$ максимальное по модулю значение величины ξ^*. Рассмотрим два случая. Если $\sigma(\xi) < \sigma$, то $|\zeta^*| \leqslant \sigma$ в силу (16) и левая часть в (17) не превосходит $H(\sigma)$. Когда $\sigma(\xi) \geqslant \sigma$, из (15) и лемм 7 и 3 следует $\mathbf{M}(H(\zeta^*)|\xi) = H(\sigma(\xi)) \leqslant h(b(\xi))\sigma^2(\xi) \leqslant h(b(\xi))\mathbf{D}(\xi^*|\xi) \leqslant 2\mathbf{M}(H(\xi^*)|\xi)$. Таким образом, (17) доказано и при $\sigma(\xi) \geqslant \sigma$. □

Введем в рассмотрение случайную величину θ, распределение которой выберем следующим образом:

$$\mathbf{P}(\theta < x) = \mathbf{M}((\zeta^*)^2; \quad (\zeta^*)^2 < x)/\sigma^2. \tag{18}$$

Определим теперь случайную величину ζ, полагая, что при каждом фиксированном значении θ ζ симметрично распределена и

$$\mathbf{P}(|\zeta| = \theta|\theta) = P(\zeta \neq 0|\theta) = \sigma^2/\theta^2. \tag{19}$$

Из (15), (16), (18) и (19) немедленно вытекает

Лемма 9. *Величины ζ и ζ^* одинаково распределены. Кроме того, при каждом фиксированном значении θ ζ принадлежит классу $\mathscr{T}$, а ее условная дисперсия совпадает с безусловной дисперсией σ^2 величины ξ.*

Леммы 7 и 9 дают два различных представления распределения величины ζ в виде смеси распределений класса $\mathscr{T}$. Конструкция из леммы 9 удобнее, так как в ней дисперсия не случайна, но нет возможности отказаться от использования представления из леммы 7, так как оно естественным образом связано с первоначальным распределением величины ξ^*.

Пусть теперь $\{\xi\}$ и $\{\eta\}$ — две подобные последовательности, причем

$$\mathbf{P}(|\xi_j| \leqslant 1) = 1 \qquad \forall j. \tag{20}$$

В силу независимости величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ можно построить последовательность независимых троек $(\xi_j, \xi_j^*, \zeta_j^*)$, $j = 1, 2, \ldots$ таким образом, чтобы при всех j величина $(\xi, \xi^*, \zeta^*) = (\xi_j, \xi_j^*, \zeta_j^*)$ удовлетворяла всем условиям лемм 6 и 7. Из (20) и леммы 7 следует, что при каждом фиксированном значении $\{\xi\}$ последовательности $\{\xi^*\}$ и $\{\zeta^*\}$ подобны и для них выполнены условия леммы 5. Поэтому их можно переопределить так, что при всех $x \geqslant 0$ будет верно неравенство

$$\mathbf{P}(\Delta^* \equiv \Delta(\{\xi^*\}, \{\zeta^*\}) \geqslant 2g(x)\,|\{\xi\}) \leqslant \big(2/3 + \sum \mathbf{M}\big(H(\xi_j^*)\,|\,\xi_j\big)/6 +$$
$$+ \sum \mathbf{M}\big(H(\xi_j^*)\,|\,\xi_j\big)/6\big)\,\mathrm{e}^{-x}. \tag{21}$$

Усредняя (21) и используя лемму 3, находим

$$\mathbf{P}(\Delta^* \geqslant 2g(x)) \leqslant (2/3 + L/2)\mathrm{e}^{-x}, \tag{22}$$

где $3L \equiv 3L(\{\xi\}) + 3\Sigma H(\mathbf{D}^{1/2}\xi) \geqslant L(\{\xi\}) + L(\{\xi\})$.

Рассмотрим теперь такую последовательность независимых пар (θ_j, ζ_j), $j = 1, \ldots$, что при каждом j пара $(\theta, \zeta) = (\theta_j, \zeta_j)$ удовлетворяет всем условиям леммы 9. В этом случае при каждом фиксированном значении $\{\theta\}$ последовательности $\{\zeta\}$ и $\{\eta\}$ подобны и удовлетворяют всем условиям леммы 4, а потому можно переопределить $\{\zeta\}$ и $\{\eta\}$ таким образом, что при всех $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(\Delta' \equiv \Delta(\{\zeta\}, \{\eta\}) \geqslant g(x) \mid \{\theta\}) \leqslant \left(1/3 + \sum \mathbf{M}(H(\zeta_j) \mid \theta_j)/6\right) e^{-x}. \qquad (23)$$

Усредняя (23), имеем

$$\mathbf{P}(\Delta' \geqslant g(x)) \leqslant (1/3 + L/3) e^{-x}. \qquad (24)$$

При выводе (24) использованы также лемма 3 и одинаковая распределенность ζ и ζ^*.

В силу замечания 4 можно еще раз переопределить пары последовательностей $(\{\xi^*\}, \{\zeta^*\})$ и $(\{\zeta\}, \{\eta\})$ так, чтобы $\{\zeta^*\}$ совпало с $\{\zeta\}$, а $\{\xi^*\}$ превратилось в $\{\xi\}$. В этом случае из неравенства $\Delta \equiv \Delta(\{\xi\}, \{\eta\}) \leqslant \leqslant \Delta(\{\xi\}, \{\zeta\}) + \Delta(\{\zeta\}, \{\eta\}) = \Delta^* + \Delta'$ и оценок (22) и (24) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 10. *Если выполнено условие* (20), *то подобные последовательности* $\{\xi\}$ *и* $\{\eta\}$ *можно переопределить таким образом, что при всех* $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(\Delta \geqslant 6C(x + K)) \leqslant (1 + L) e^{-x}.$$

При выполнении условия (3) лемма 10 совпадает с теоремой 2, если в последней соответствующим образом подобрать константу C.

4. Оценки для срезок

Для любой случайной величины ξ условимся через $\xi^{[u]}$ обозначать ее срезку на уровне $u > 0$, т. е. $\xi^{[u]}$ равно ξ или 0 в зависимости от того $|\xi| \leqslant u$ или нет. Положим $\xi^{(u)} = \xi - \xi^{[u]}$.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — некоторая последовательность независимых случайных величин. Введем в рассмотрение последовательность $\eta_1^{\{u\}}, \eta_2^{\{u\}}, \ldots$ независимых величин, имеющих нормальные распределения, причем

$$\mathbf{M}\eta_j^{\{u\}} = 0, \quad \mathbf{D}\eta_j^{\{u\}} = \mathbf{D}\xi_j^{[u]} \ \forall_j. \qquad (1)$$

Положим $\xi_j^{\{u\}} = \xi_j^{[u]} - \mathbf{M}\xi^{[u]}$,

$$\Delta^{\{u\}} = \sup_n \Big| \sum_{j \leqslant n} \xi_j^{\{u\}} - \sum_{j \leqslant n} \eta_j^{\{u\}} \Big|, \qquad (2)$$

$$\Delta_u = \sup_n \Big| \sum_{j \leqslant n} (\xi_j - \mathbf{M}\xi_j^{[u]}) - \sum_{j \leqslant n} \eta_j^{\{u\}} \Big|. \qquad (3)$$

Из (1) и определения срезки вытекает, что при всех j

$$\mathbf{P}\left(\left|\xi_j^{\{u\}}\right| \leqslant 2u\right) = 1, \quad \mathbf{M}\xi_j^{\{u\}} = \mathbf{M}\eta_j^{\{u\}} = 0, \quad \mathbf{D}\eta_j^{\{u\}} = \mathbf{D}\xi_j^{\{u\}} = \mathbf{D}\xi_j^{[u]}. \qquad (4)$$

Равенства (4) показывают, что для оценивания величины $\Delta^{\{u\}}$ можно использовать любой из результатов п. 2, которые в нашем случае имеют достаточную точность.

Будем говорить, что четная положительная функция $G(\cdot)$ принадлежит классу $\mathscr{G}(u)$ при $u \geqslant 0$, если функции $G(x)$ и $x/\ln G(x)$ не убывают при $x > u$. В качестве примера укажем функции $x^\alpha \in \mathscr{G}(e)$ при $\alpha > 0$ и $\exp(C|x|^\beta) \in \mathscr{G}(0)$ при $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ и $C \geqslant 0$.

Теорема 3. *Если функция* $G(\cdot) \in \mathscr{G}(u)$ *и*

$$F(x) \equiv \Sigma \mathbf{P}(|\xi| > x) \leqslant 1/G(x) \qquad \forall x > u, \qquad (5)$$

то при всех x_0 *и* $x \geqslant z \geqslant u \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(\Delta_u > x_0 + x) \leqslant \mathbf{P}(\Delta^{\{u\}} > x_0) + \\ + \Sigma \mathbf{P}(|\xi_j| > z) + e G^{-1}(u) G^{1 - x/z}(z). \qquad (6)$$

Перейдем к доказательству. Фиксируем число z и положим $\tau_j = = \left|\xi_j^{[z]} - \xi_j^{[u]}\right|$. Другими словами, $\tau_j = |\xi_j|$ при $u < |\xi_j| \leqslant z$ и $\tau_j = 0$ в противном случае. Воспользуемся соотношением

$$\Delta_u \leqslant \Delta^{\{u\}} + \sum |\xi_j^{(u)}| \leqslant \Delta^{\{u\}} + \sum \tau_j + \sum |\xi_j^{(z)}|, \tag{7}$$

которое немедленно следует из (2), (3) и определения величин τ_j. Из (7) вытекает неравенство

$$\mathbf{P}(\Delta_u > x_0 + x) \leqslant \mathbf{P}(\Delta^{\{u\}} > x_0) + \mathbf{P}(\sum \tau_j > x) + \sum \mathbf{P}(|\xi_j| > z). \tag{8}$$

Чтобы из (8) получить требуемое утверждение (6), достаточно воспользоваться леммой 2, которая доказана ниже.

Лемма 1. *Если* $h = z^{-1} \ln G(z)$, *то*

$$-\int_u^z e^{ht} dF(t) \leqslant 1 + \ln (G(z)/G(u)).$$

Доказательство. При указанном h из определения класса $\mathscr{G}(u)$ вытекает неравенство $ht = tz^{-1} \ln G(z) \leqslant \ln G(t)$, а потому

$$-\int_u^z e^{ht} dF(t) \leqslant -\int_u^z G(t)\, dF(t) = I. \tag{9}$$

Интегрируя полученное выражение по частям и учитывая (5), имеем

$$I = G(u) F(u) - G(z) F(z) + \int_u^z F(t)\, dG(t) \leqslant 1 +$$

$$+ \int_u^z G^{-1}(t)\, dG(t) = 1 + \ln (G(z)/G(u)). \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует нужное утверждение. □

Лемма 2.

$$\mathbf{P}(\sum \tau_j > x) \leqslant e G^{-1}(u)\, G^{1-x/z}(z).$$

Доказательство. Применим стандартную технику получения экспоненциальных неравенств (см., например, [9]):

$$\mathbf{P}(\sum \tau_j > x) \leqslant e^{-hx} \Pi \mathbf{M} \exp h\tau_j \leqslant \exp\left(-hx + \sum \mathbf{M}(\exp h\tau_j - 1)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(-hx - \int_u^z e^{ht} dF(t)\right). \tag{11}$$

При выводе (11) использовано определение функции $F(\cdot)$ из (5) и неравенства $x \leqslant e^{x-1}$. Требуемое утверждение вытекает из (11) и леммы 1. □

5. Оценки при приближении винеровским процессом

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{M}\xi_j = 0,\ \mathbf{D}\xi_j < \infty \qquad \forall j. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение случайную ломаную $S(\cdot)$, полагая

$$S(t_n) = \sum_{j \leqslant n} \xi_j, \quad t_n = \sum_{j \leqslant n} \mathbf{D}\xi_j \tag{2}$$

и доопределяя $S(t)$ монотонно на каждом из интервалов $[t_{n-1}, t_n]$. Обозначим через $W(t)$ стандартный винеровский процесс, заданный на интервале $[0, t_\infty)$, и положим

$$\|S - W\| = \sup \{|S(t) - W(t)| : 0 < t < t_\infty\}. \tag{3}$$

Нас интересует вопрос о том, можно ли так переопределить $S(\cdot)$ и $W(\cdot)$ на одном вероятностном пространстве, чтобы величина $\|S - W\|$

была достаточно малой в нужном смысле. Сохраним все обозначения, введенные в п. 4. Положим

$$
\begin{gathered}
A(u)=\sup_n\Bigl|\sum_{j\leqslant n}\mathbf{M}\xi_j^{[u]}\Bigr|=\sup_n\Bigl|\sum_{j\leqslant n}\mathbf{M}\xi_j^{(u)}\Bigr|;\\
\beta^2(u)\equiv\sum\mathbf{M}^2(\xi_j^{(u)})^2/\mathbf{D}\xi_j\leqslant B^2(u)\equiv\sum\mathbf{M}(\xi_j^{(u)})^2,
\end{gathered}\tag{4}
$$

причем суммирование в (4) ведется только по таким j, что $\mathbf{D}\xi_j>0$.

Теорема 4. *Если выполнены все условия теоремы 3, то существует представление процессов $S(\cdot)$ и $W(\cdot)$ на одном вероятностном пространстве, для которого при всех $x_0\geqslant 0$ и $x\geqslant z\geqslant u$ справедливо неравенство*

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P}(\|S-W\|>x_0+8x+A(u))\leqslant\mathbf{P}(\Delta^{\{u\}}>x_0)+4\sum\exp(-x^2/\mathbf{D}\xi_j)+\\
+4\exp(-x^2/\beta^2(u))+eG^{-1}(u)G^{-x/z}(z)+2\mathbf{P}(|\xi_j|>z),
\end{gathered}\tag{5}
$$

при этом $\beta^2(u)\leqslant B^2(u)$. Если дополнительно функция $H(x)/x^2$ не убывает при $x\geqslant u$, то при указанных x

$$
\max\{B^2(x)/x^2,\ A(x)/x,\ \sum\mathbf{P}(|\xi_j|>x)\}\leqslant H^{-1}(x)\sum\mathbf{M}H(\xi_j^{(x)}).\tag{6}
$$

Как уже отмечалось в п. 4, величину $\mathbf{P}(\Delta^{\{u\}}>x_0)$ удобно оценивать при помощи результатов п. 2.

З а м е ч а н и е 5. Аргументы, аналогичные использовавшимся в [8, 10, 11], позволяют заметить, что оценка (5) неулучшаема в следующем смысле: ни одну из величин $\Sigma\mathbf{P}(|\xi_j|>z)$, $A(u)$ или $\beta(u)$, фигурирующих в неравенстве (5), нельзя в общем случае опустить.

Перейдем к доказательству теоремы 4.

Лемма 1. *Если $\xi=\xi_j$, то*

$$
|\mathbf{M}\xi^{[u]}|=|\mathbf{M}\xi^{(u)}|\leqslant\mathbf{M}|\xi^{(u)}|;\tag{7}
$$

$$
2\mathbf{M}(\xi^{(u)})^2\geqslant\mathbf{D}\xi-\mathbf{D}\xi^{[u]}\geqslant\mathbf{M}(\xi^{(u)})^2\geqslant 0.\tag{8}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства $\mathbf{M}\xi^{[u]}+\mathbf{M}\xi^{(u)}=\mathbf{M}\xi=0$ следует (7). Далее

$$
\mathbf{D}\xi=\mathbf{M}\xi^2=\mathbf{M}(\xi^{[u]})^2+\mathbf{M}(\xi^{(u)})^2\geqslant\mathbf{D}\xi^{[u]}+\mathbf{M}(\xi^{(u)})^2.\tag{9}
$$

Из (7), (9) и неравенства Шварца имеем

$$
\mathbf{D}\xi^{[u]}=\mathbf{D}\xi-\mathbf{M}(\xi^{(u)})^2-(\mathbf{M}\xi^{(u)})^2\geqslant\mathbf{D}\xi-2\mathbf{M}(\xi^{(u)})^2.\tag{10}
$$

Требуемое соотношение (8) вытекает из (9) и (10). □

Положим $\eta_j=W(t_j)-W(t_{j-1})$;

$$
\Delta\equiv\sup_n|S(t_n)-W(t_n)|\equiv\sup_n\Bigl|\sum_{j\leqslant n}\xi_j-\sum_{j\leqslant n}\eta_j\Bigr|;\tag{11}
$$

$$
w_0\equiv\sup\{|W(t)-W(t_{n-1})|:t_{n-1}\leqslant t\leqslant t_n,\quad n=1,2,\ldots\}.
$$

Из (2), (3), (11) и определения функции $S(\cdot)$ вытекает

Лемма 2.

$$
\Delta\leqslant\|S-W\|\leqslant\Delta+w_0+\sup_j|\xi_j|.
$$

По построению случайные величины $\{\eta_j\}$ нормально распределены, причем в силу (1) и (2)

$$
\mathbf{M}\xi_j=\mathbf{M}\eta_j=0,\ \mathbf{D}\xi_j=\mathbf{D}\eta_j\qquad\forall j.\tag{12}
$$

Положим $\delta_j(u)\equiv\mathbf{D}\xi_j-\mathbf{D}\xi_j^{[u]}$;

$$
\eta_j^{\{u\}}=\eta_j(1-\delta_j(u)/\mathbf{D}\eta_j)^{1/2},\quad\text{если}\quad\mathbf{D}\eta_j>0;\tag{13}
$$

и пусть $\eta_j^{\{u\}}=0$, если $\mathbf{D}\eta_j=0$. Из (13) вытекает, что нормально распределенные величины $\{\eta_j^{(u)}\}$ удовлетворяют равенствам

$$
\begin{gathered}
\mathbf{M}\eta_j^{\{u\}}=\mathbf{M}\xi_j^{\{u\}}=0;\\
\mathbf{D}\xi_j^{\{u\}}=\mathbf{D}\eta_j^{[u]}=\mathbf{D}\eta_j^{\{u\}}\quad\forall j.
\end{gathered}\tag{14}
$$

Лемма 3. *Если* $\mathbf{D}\xi_j > 0$, *то*

$$\mathbf{D}(\eta_j - \eta_j^{\{u\}}) \leqslant 4\mathbf{M}(\xi_j^{(u)})^2/\mathbf{D}\xi_j.$$

Доказательство. Положим $\eta = \eta_j$. Достаточно рассмотреть случай $\mathbf{D}\eta > 0$. Воспользовавшись неравенством $(1-x)^{1/2} \geqslant 1-x$, справедливым при $0 \leqslant x \leqslant 1$, находим

$$\mathbf{D}(\eta - \eta^{\{u\}}) = \mathbf{D}\eta(1 - (1 + \delta(u)/\mathbf{D}\eta)^{1/2})^2 \leqslant \delta^2(u)/\mathbf{D}(\eta). \qquad \square$$

Обозначим $\quad \delta_u \equiv \sup\limits_n \left| \sum\limits_{j \leqslant n} \eta_j - \sum\limits_{j \leqslant n} \eta_j^{\{u\}} \right|.$

Лемма 4.

$$\mathbf{P}(\delta_u > 2x) \leqslant 4\Phi(-x/\beta(u)) \qquad \forall x \geqslant 0.$$

Доказательство. В силу неравенства Леви для максимума последовательных сумм

$$\mathbf{P}(\delta_u \geqslant 2x) \leqslant 2\mathbf{P}(|\sum(\eta_j - \eta_j^{\{u\}})| > 2x) = 4\Phi(-2x/\beta'(u)),$$

где $\beta'(u) = (\sum \mathbf{D}(\eta_j - \eta_j^{\{u\}}))^{1/2}$. Из этих соотношений и леммы 3 следует требуемое утверждение. $\square$

Из свойств максимума винеровского процесса [4, с. 371] и (12) вытекает

Лемма 5.

$$\mathbf{P}(w_0 > x) \leqslant 4 \sum \mathbf{P}(\eta_j > x) \leqslant 4 \sum (\exp(-x^2/(2D\xi_j))).$$

Тождества (14) показывают, что введенные в (13) случайные величины $\{\eta_j^{\{u\}}\}$ удовлетворяют всем условиям, требуемым при определении Δ_u. Сравнивая вид Δ и Δ_u, нетрудно заметить справедливость следующего утверждения.

Лемма 6. $\Delta \leqslant \Delta_u + \delta_u + A(u)$.

Таким образом, из лемм 2 и 6 находим

$$\mathbf{P}(\|S - W\| > x_0 + 8x + A(u)) \leqslant \sum \mathbf{P}(|\xi_j| > z) + \mathbf{P}(\Delta_u > x_0 + x + z) +$$
$$+ \mathbf{P}(\delta_u > 2 \cdot 2^{1/2}x) + \mathbf{P}(w_0 > 2^{1/2}x). \tag{15}$$

Оценивая три последних члена в правой части соотношения (15) при помощи теоремы 3 и лемм 4 и 5, получаем требуемое неравенство (5). Оценка (6) следует из неравенства Чебышева.

6. Оценка для степенных моментов

Цель данного пункта — получение следствий из теоремы 4 для случая, когда при некотором $\gamma > 0$

$$\sum \mathbf{P}(|\xi_j| > x) \leqslant \Gamma/x^\gamma \quad \forall x \geqslant u > 0. \tag{1}$$

Сохраняя все обозначения предыдущего пункта, положим

$$L_\alpha^{[u]} \equiv \sum \mathbf{M}|\xi_j^{[u]}|^\alpha \leqslant L_\alpha \equiv \sum \mathbf{M}|\xi_j|^\alpha \tag{2}$$

при $\alpha \geqslant 2$.

Следствие 3. *Если выполнено условие* (1), *а числа* u, Γ *удовлетворяют неравенству*

$$\Gamma/u^\gamma \leqslant e^{-\gamma}, \tag{3}$$

то существует представление процессов $S(\cdot)$ *и* $W(\cdot)$ *на одном вероятностном пространстве, для которого*

$$\mathbf{P}(\|S - W\| > Cx + A(u)) \leqslant \alpha^{\alpha/2}(1 + L_\alpha^{[u]}/u^\alpha)e^{-x/u} +$$
$$+ 5\exp(-x^2/B^2(u)) + e(\Gamma/z^\gamma)^{x/z} + 2\sum \mathbf{P}(|\xi_j| > z) \tag{4}$$

при всех x *и* z *таких, что* $x \geqslant z \geqslant u$.

Одно следствие из неравенства (4) выделим особо.

Теорема 5. *Для некоторого представления процессов* $S(\cdot)$ *и* $W(\cdot)$ *выполнены неравенства*

$$\mathbf{P}(\|S-W\|>Cbx)\leqslant 4\alpha^{2\alpha b}(L_\alpha/x^\alpha)^b+2\sum\mathbf{P}(|\xi_j|>x)\quad\forall x\geqslant 0,\ \forall b\geqslant 1;\tag{5}$$

$$\mathbf{M}\Delta^\alpha\leqslant\mathbf{M}\|S-W\|^\alpha\leqslant C\alpha^{2\alpha}\sum\mathbf{M}|\xi_j|^\alpha.\tag{6}$$

Оценку (6) можно рассматривать как обобщение следующего неравенства Розенталя [12]:

$$\mathbf{M}\left|\sum\xi_j\right|^\alpha\leqslant C\alpha^\alpha\left(\left(\sum\mathbf{D}\xi_j\right)^{\alpha/2}+\sum\mathbf{M}|\xi_j|^\alpha\right).$$

Перейдем к доказательству следствия. Будем всюду предполагать выполненными условия (1) и (3).

Лемма 1.

$$Q_1(x+\alpha u)\equiv\mathbf{P}\left(\Delta^{(u)}>C_1(x+\alpha u)\right)\leqslant\left(1+L_\alpha^{[u]}/u^\alpha\right)\mathrm{e}^{-x/u}\quad\forall x\geqslant 0.$$

Доказательство. Так как

$$H(x)\equiv x^\alpha\in\mathscr{H}(a,\ C_0\alpha a)\qquad\forall a>0,$$

то из теоремы 2 при $a=2u$ вытекает существование представления, для которого

$$\mathbf{P}(\Delta^{(u)}>C(x+2C_0\alpha u))\leqslant(1+(2u)^{-\alpha}L)\mathrm{e}^{-x/(2u)}\qquad\forall x\geqslant 0,\tag{7}$$

где

$$L\equiv\sum\mathbf{M}|\xi_j^{(u)}|^\alpha\leqslant 2^\alpha L_\alpha^{[u]}.\tag{8}$$

При выводе неравенства (8) использовано соотношение

$$\mathbf{M}|\xi-\mathbf{M}\xi|^\alpha\leqslant 2^{\alpha-1}(\mathbf{M}|\xi|^\alpha+|\mathbf{M}\xi|^\alpha)\leqslant 2^\alpha\mathbf{M}|\xi|^\alpha.$$

Из (7) и (8) при $C_1=2C(1+2C_0)$ имеем нужное утверждение. □

Лемма 2. *Для всех* j *и* $x\geqslant u$

$$\exp(-4x^2/\mathbf{D}\xi_j)\leqslant(\alpha/2)^{\alpha/2}u^{-\alpha}\mathbf{M}|\xi_j^{[u]}|^\alpha\mathrm{e}^{-x/u}+\mathbf{M}\left(\xi_j^{(u)}\right)^2\exp(-x^2/B^2(u))/x^2.$$

Доказательство. Обозначим $\xi=\xi_j$, $y=x^2$,

$$\delta=\mathbf{M}(\xi^{(u)})^2\leqslant B^2(u),\ \varepsilon=(\mathbf{M}|\xi^{[u]}|^\alpha)^{2/\alpha}\leqslant u^2.\tag{9}$$

Так как $\mathbf{D}\xi=\mathbf{M}\xi^2=\mathbf{M}(\xi^{[u]})^2+\mathbf{M}(\xi^{(u)})^2\leqslant\varepsilon+\delta$, то

$$\mathrm{e}^{-4y/\mathbf{D}\xi}\leqslant\mathrm{e}^{-4y/(\varepsilon+\delta)}\leqslant\mathrm{e}^{-2y/\varepsilon}+\mathrm{e}^{-2y/\delta};\tag{10}$$

$$\mathrm{e}^{-2y/\delta}\leqslant(\delta/y)\mathrm{e}^{-y/\delta},\quad\mathrm{e}^{-2y/\varepsilon}\leqslant(\alpha\varepsilon/(2y))^{\alpha/2}\mathrm{e}^{-y/\varepsilon}.\tag{11}$$

Суммируя (10) и (11), имеем $\mathrm{e}^{-4y/\mathbf{D}\xi}\leqslant(\alpha/2)^{\alpha/2}(\varepsilon/y)^{\alpha/2}\mathrm{e}^{-y/\varepsilon}+(\delta/y)\mathrm{e}^{-y/\delta}$. Подставляя в полученное выражение значения y, δ, ε и учитывая неравенства $u\leqslant x$, $y/\gamma\leqslant x^2/u^2\leqslant x/u$, а также $y/\delta\leqslant x^2/B^2(u)$, справедливые в силу (9), находим требуемое утверждение. □

Суммируя по j неравенства в лемме 2, получаем следующее утверждение.

Лемма 3.

$$Q_2(2x)\equiv\sum\exp(-(2x)^2/D\xi_j)\leqslant(\alpha/2)^{\alpha/2}u^{-\alpha}L_\alpha^{[u]}\mathrm{e}^{-x/u}+$$
$$+x^2B^2(u)\exp(-x^2/B^2(u)).$$

Закончим доказательство следствия 3. Положим

$$Q_0(x)=\left(1+u^{-\alpha}L_\alpha^{[u]}\right)\mathrm{e}^{-x/u};\ Q_3(x)=\exp(-x^2/B^2(u));\quad G^{-1}(x)=\Gamma/x^\gamma;$$

$$Q_4(x)=\mathrm{e}G^{-1}(u)G^{-x/z}(z)+2\sum\mathbf{P}(|\xi_j|>z).$$

Во введенных обозначениях утверждение теоремы 4 можно переписать в виде

$$\mathbf{P}(\|S-W\|>C_1(x+\alpha u)+16x+A(u))\leqslant Q_1(x+\alpha u)+$$
$$+4Q_2(2x)+4Q_3(2x)+Q_4(2x).\tag{12}$$

В леммах 1 и 3 доказано, что

$$Q_1(x+\alpha u) \leqslant Q_0(x),$$
$$Q_2(2x) \leqslant (\alpha/2)^{\alpha/2} Q_0(x) + x^{-2}B^2(u)Q_3(x). \tag{13}$$

Если

$$x \geqslant \alpha u \ln 2^{1/2} \text{ и } B^2(u) \leqslant x^2, \tag{14}$$

то из (12), (13) и монотонности рассматриваемых функций следует неравенство

$$\mathbf{P}(\|S-W\| > (1+(\ln 2^{1/2})^{-1})C_1x + 16x + A(u)) \leqslant$$
$$\leqslant 2(\alpha/2)^{\alpha/2}Q_0(x) + 5Q_3(x) + Q_4(x),$$

что доказывает справедливость оценки (4) в данном случае. Если же хотя бы одно из условий в (14) не выполнено, то неравенство (4) верно подавно, так как в этом случае правая часть в (4) больше единицы.

Таким образом, следствие 3 доказано. Приступим к выводу теоремы 5. Вместо величины $\{\xi_j\}$ всегда можно рассматривать случайные величины $\{\xi_j/L_\alpha^{1/\alpha}\}$, что позволяет перейти к случаю $L_\alpha = 1$. Поэтому далее при использовании следствия 3 будем, не уменьшая общности, предполагать, что

$$u = \mathrm{e},\ \gamma = \alpha,\ \Gamma \leqslant L_\alpha \leqslant 1,\ x = bz. \tag{15}$$

В силу неравенства Чебышева

$$A(u) \leqslant L_\alpha/u^{\alpha-1} < 1,\ B^2(u) < L_\alpha/u^{\alpha-2} < 1. \tag{16}$$

При указанном в (15) выборе числа u выполнено условие (3). Поэтому мы можем воспользоваться утверждением следствия 3, которое с учетом соотношений (1), (15) и (16) в рассматриваемом случае можно переписать в виде

$$\mathbf{P}(\|S-W\| > 2Cbz) \leqslant 2\alpha^{\alpha/2}\mathrm{e}^{-bz} + 5\exp(-b^2z^2) +$$
$$+ \mathrm{e}z^{-\alpha b} + 2\sum \mathbf{P}(|\xi_j| > z) \equiv Q(b, z). \tag{17}$$

Из соотношений $\mathrm{e}^{-bz} \leqslant (z/\alpha)^{-\alpha b}$, $\exp(-b^2z^2) \leqslant \exp(-bz^2) \leqslant (2z^2/\alpha)^{-\alpha b/2}$ и (17) имеем

$$Q(b, z) \leqslant 4\alpha^{(b+1/2)\alpha}z^{-\alpha b} + 2\sum \mathbf{P}(|\xi_j| \geqslant z). \tag{18}$$

При $\zeta = \|S-W\|/(8C)$ из (17) и (18) следует

$$\mathbf{M}\zeta^\alpha = \int_0^\infty \mathbf{P}(\zeta > z)\,dz^\alpha \leqslant (\alpha/2)^{\alpha/2} + \int_{\alpha/2}^\infty Q(4, z)\,dz. \tag{19}$$

Непосредственным интегрированием легко проверяется, что правая часть в (19) не превосходит $C_2\alpha^{\alpha/2}$. Таким образом,

$$\mathbf{M}\|S-W\|^\alpha \leqslant (8C)^\alpha C_2\alpha^{3\alpha/2}. \tag{20}$$

После несложной оценки постоянных из (18) и (20) вытекают соответственно неравенства (5) и (6) для случая, когда $L_\alpha = 1$. Избавляясь от последнего предположения, получаем утверждение теоремы 5.

7. Оценки в принципе инвариантности Штрассена

Рассмотрим вопрос о том, можно ли последовательность независимых случайных величин $\{\xi_j\}$ задать на одном вероятностном пространстве с последовательностью $\{\eta_j\}$ независимых нормально распределенных величин так, чтобы с вероятностью 1 при $n \to \infty$ выполнялось соотношение

$$\sum_{j\leqslant n}\xi_j - \sum_{j\leqslant n}\eta_j = O(v_n). \tag{1}$$

Как и в п. 2, будем предполагать, что при каждом j величины ξ_j и η_j имеют нулевые средние и равные дисперсии. Ограничимся также случаем монотонных последовательностей

$$v_n \uparrow \infty,\ 0 < a_n \uparrow,\ 0 < 1/\lambda_n \uparrow, \tag{2}$$

которые будут введены ниже. Условимся опускать слова «с вероятностью 1» и «при $n \to \infty$», поскольку это не вызовет недоразумений. Обозначим через $\mathscr{H}$ множество функций $H(\cdot)$, принадлежащих классу $\mathscr{H}(1, K)$ при некотором K. Далее часто будем использовать предположение

$$\mathbf{P}(|\xi_j| \leqslant a_j) = 1 \qquad \forall j \tag{3}$$

для последовательностей a_j, удовлетворяющих (2), и обозначения

$$L_\alpha(n) = \sum_{j \leqslant n} \mathbf{M}|\xi_j|^\alpha, \quad B_n^2 = L_2(n). \tag{4}$$

Теорема 6. *Если выполнено условие* (3) *и*

$$a_n = O(v_n/\ln\ln v_n); \tag{5}$$

$$a_n \ln\left\{\sum_{j \leqslant n} \mathbf{M}H(\xi_j/a_j)\right\} = O(v_n), \tag{6}$$

где $H(\cdot) \in \mathscr{H}$, *то верно соотношение* (1).

Поскольку $H(x) \equiv x^\alpha \in \mathscr{H}$ при всех $\alpha \geqslant 2$, то из (4)—(6) можно получить

Следствие 4. *Если справедливо условие* (3) *при* $a_n = O(1)$, *то при всех* $\alpha \geqslant 2$ *имеет место соотношение* (1) *для* $v_n = \ln L_\alpha(n)$.

Следствие 5. *Если выполнено условие* (3) *и*

$$\ln\{L_\alpha(n)/a_n^\alpha\} = O(\ln\ln L_\alpha(n)) \tag{7}$$

при некотором $\alpha \geqslant 2$, *то соотношение* (1) *верно для* $v_n = a_n \ln\ln L_\alpha(n)$.

В частности, если условие (3) справедливо при $a_n = o(B_n(\ln\ln B_n)^{-1/2})$, то соотношение (1) имеет место для $v_n = o(B_n(\ln\ln B_n)^{1/2})$. Это обобщение закона повторного логарифма Колмогорова впервые получено в [13].

Теорема 7. *Если числа* $\{\lambda_j\}$ *удовлетворяют условиям* (2) *и*

$$\lambda_n \mathbf{M}|\xi_n|^3 \exp(\lambda_n|\xi_n|) = O(\mathbf{D}\xi_n); \tag{8}$$

$$\ln\left\{1 + \ln(1 + |v_n|) + \sum_{j \leqslant n} \lambda_j^2 \mathbf{D}\xi_j\right\} = O(\lambda_n v_n), \tag{9}$$

то справедливо соотношение (1).

Следствие 6. *Если при некотором* $\lambda > 0$

$$\lambda \mathbf{M}|\xi_n|^3 \exp(\lambda|\xi_n|) = O(\mathbf{D}\xi_n),$$

то (1) *имеет место при* $v_n = \ln B_n$.

Для одинаково распределенных величин $\{\xi_j\}$ это утверждение совпадает с теоремой 1 в [3].

Следствие 7. *Если для некоторых* $\alpha \geqslant 3$ *и* $\rho > 0$

$$\mathbf{M}|\xi_n|^\alpha = O\left(\mathbf{D}\xi_n a_n^{\alpha-2} l_n^{-\rho}\right), \tag{10}$$

где $l_n = 1 + \ln(1 + a_n) + \sum_{j \leqslant n} \mathbf{D}\xi_j/a_j^2$, *и выполнено условие* (3), *то соотношение* (1) *верно при* $v_n \equiv a_n$.

Этот результат усиливает теорему 2 в [3].

Замечание 6. Сравнивая теорему 7 и следствия 6 и 7 с теоремой 6 и следствиями 4 и 5 соответственно, можно заметить следующее. В частном случае, когда $H(x) = x^2$, при более жестких ограничениях теорема 7 и ее следствия дают более сильные утверждения, чем теорема 6 (если, конечно, $\lambda_n a_n \to \infty$).

Замечание 7. Повторяя рассуждения работы [3], нетрудно получить, что при широких предположениях для справедливости соотношения (1) необходима сходимость ряда

$$\sum \mathbf{P}(|\xi_j| > \varepsilon v_j) < \infty \tag{11}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Если (1) верно при замене символа O на o, то необходимым будет выполнение условия (11) для всех $\varepsilon > 0$.

Замечание 8. Если дана произвольная последовательность $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ независимых случайных величин, причем $\Sigma \mathbf{P}(|\zeta_j| > a_j) < \infty$, то всегда можно применить теоремы 6 и 7 к величинам $\xi_j = \zeta_j^{\{a_j\}}$. В этом случае полезно соотношение

$$\sum_{j \leqslant n} \left(\zeta_j - \mathbf{M}\zeta_j^{[a_j]}\right) - \sum_{j \leqslant n} \xi_j = O(1),$$

вытекающее из закона нуля или единицы. В частности, если $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ одинаково распределены, то, применяя к срезанным величинам $\xi_1, \xi_2, \ldots$ теорему 7, нетрудно получить теоремы 2 и 3 из [3].

Замечание 9. Несколько усложняя доказательства, можно установить, что при выполнении условий теорем 6 или 7 справедливо более сильное, чем (1), утверждение

$$S(t) - W(t) = O(V(t)) \tag{12}$$

при $t \to \infty$ с вероятностью 1, если функция $V(t)$ монотонна и $V(t_j) = v_j$ при всех j. Аналогично, при выполнении условий теоремы 8 из следующего пункта верно (12) при замене символа O на o.

Приступим к доказательству сформулированных результатов. Для этого потребуется элементарная

Лемма 1. *Если последовательность* $\{b_j\}$ *удовлетворяет условию* $0 = b_0 < b_1 \leqslant b_n \uparrow$, *то*

$$\sum (b_j - b_{j-1})/b_j^2 < \infty; \tag{13}$$

$$\sum_{j \leqslant n} (b_j - b_{j-1})/b_j = O(\ln b_n). \tag{14}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться соотношением

$$(b_j - b_{j-1})/b_j^k \leqslant \int\limits_{[b_{j-1}, b_j)} x^k \mathrm{d}x, \qquad k > 0.$$

Введем в рассмотрение числа

$$N(m) = \max\{n : v(n) \leqslant 2^m\}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

и положим $N(0) = 0$, $J(m) = (N(m-1), N(m))$. При каждом m построим случайные величины $\{\xi_j, j \in J(m)\}$ на одном вероятностном пространстве с $\{\eta_j, j \in J(m)\}$ таким образом, чтобы для оценивания величины

$$\Delta_m = \sup_{n \in J(m)} \left| \sum_{j=N(m-1)+1}^{n} (\xi_j - \eta_j) \right|$$

можно было воспользоваться одним из утверждений п. 2. При различных m указанные построения проведем независимо. Это всегда можно сделать, так как интервалы $J(m)$ не пересекаются.

Заметим, что при $n \leqslant N(m)$

$$\left| \sum_{j \leqslant n} \xi_j - \sum_{j \leqslant n} \eta_j \right| \leqslant \Delta_1 + \ldots + \Delta_m. \tag{16}$$

Из явного вида чисел $N(m)$, неравенства (16) и закона нуля или единицы вытекает

Лемма 2. *Если при некотором* $K < \infty$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\Delta_m > K 2^m\right) < \infty, \tag{17}$$

то верно соотношение (1).

Доказательство теоремы 6. Для оценивания $\Delta = \Delta_m / a_{N(m)}$ применим к случайным величинам $\{\xi_j / a_{N(m)};\ j \in J(m)\}$ теорему 2. Учитывая, что $a_j \leqslant a_{N(m)}$ при $j \in J(m)$, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\Delta_m > CK2^m) = \mathbf{P}(\Delta > CK2^m/a_{N(m)}) \leqslant \\ \leqslant (1 + b_{N(m)} - b_{N(m-1)}) \exp(-K2^m/a_{N(m)}),\end{aligned} \tag{18}$$

где $b_n = \sum_{j \leqslant n} \mathbf{M}H(\xi_j/a_j)$. В силу (5), (6) и (15) можно выбрать числа K и m_0 настолько большими, чтобы выполнялось неравенство

$$K2^m/a_{N(m)} \geqslant 2 \ln (m + b_{N(m)}) \qquad \forall m > m_0. \tag{19}$$

Из (18) и (19) при $m \geqslant m_0$ следует

$$\mathbf{P}(\Delta_m > CK2^m) \leqslant m^{-2} + \sum_{j \in J(m)} (b_j - b_{j-1})/b_j^2. \tag{20}$$

Суммируя оценки в (20) и используя (13), получим сходимость ряда (17), что доказывает требуемое утверждение. □

Доказательство теоремы 7. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ и большом n_0 из предположения (8) следует

$$\varepsilon\lambda_n \mathbf{M}|\xi_n|^3 \exp(\varepsilon\lambda_n|\xi_n|) = O(\varepsilon\mathbf{D}\xi_n) \leqslant \mathbf{D}\xi_n \qquad \forall n \geqslant n_0. \tag{21}$$

В силу (21) для оценивания величины $\Delta = \Delta_m$ можно применить теорему 1 к случайным величинам $\{\xi_j,\ j \in J(m)\}$ при $\lambda = \varepsilon\lambda_{N(m)}$. В результате получим

$$\mathbf{P}(\Delta_m > CK2^m) \leqslant 2\left(1 + \varepsilon^2\lambda^2_{N(m)}\left(B^2_{N(m)} - B^2_{N(m-1)}\right)\right) \exp\left(-\varepsilon\lambda_{N(m)}K2^m\right). \tag{22}$$

Условия (8), (9) и (15) позволяют выбрать числа K и m_0 настолько большими, чтобы выполнялось соотношение

$$\varepsilon K\lambda_{N(m)}2^m \geqslant 2 \ln (m + d_{n(m)}) \quad \forall m \geqslant m_0, \tag{23}$$

где $d_n = \sum_{j \leqslant n} \lambda_j^2 \mathbf{D}\xi_j$ и $\lambda_j \geqslant \lambda_{N(m)}$ при $j \leqslant N(m)$. Из (22) и (23) вытекает

$$\mathbf{P}(\Delta_m > CK2^m) \leqslant m^{-2} + \sum_{j \in J(m)} (d_j - d_{j-1})/d_j^2. \tag{24}$$

Складывая оценки в (24) и применяя лемму 1, получим сходимость ряда (17), которая доказывает требуемое утверждение. □

Доказательство следствия 5. Проверим выполнение условий (5) и (6) теоремы 6. Из (7) следует

$$\ln a_n = O(\ln L_\alpha(n)), \tag{25}$$

а потому выполнено условие (5).

При $b_n \equiv L_\alpha(n)$ условие (6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} h_n \equiv \sum_{j \leqslant n} \mathbf{M}|\xi_j|/a_j^\alpha = \sum_{j \leqslant n} \{[(b_j - b_{j-1})/b_j^\alpha]\, L_\alpha(j)/a_j^\alpha\} \leqslant \\ \leqslant \left(\sum_{j \leqslant n} (b_j - b_{j-1})/b_j^\alpha\right) \max_{j \leqslant n} L_\alpha(j)/a_j^\alpha. \end{aligned} \tag{26}$$

Используя соотношения (7) и (14), получим $\ln h_n = O(\ln \ln L_\alpha(n))$, что доказывает справедливость условия (6). □

Следствия 4 и 6 доказываются элементарно. Следствие 7 вытекает из теоремы 7 при

$$\lambda_n = \gamma \ln l_n/a_n, \quad \gamma = \rho/(2\alpha - 4), \tag{27}$$

если будет доказана

Лемма 3. *Если выполнены условия* (3) *и* (10), *то при* λ_n, *указанном в* (27), *справедливо соотношение* (8).

Доказательство. В силу (3) и (27) имеем

$$\exp(\lambda_n|\xi_n|) \leqslant \exp(\gamma \ln l_n) = l_n^\gamma. \tag{28}$$

Из представления $|\xi|^3 = |\xi|^{\alpha/(\alpha-2)} \cdot |\xi|^{2(\alpha-3)/(\alpha-2)}$ и неравенства Гельдера вытекает

$$\mathbf{M}|\xi|^3/\mathbf{D}\xi \leqslant (\mathbf{M}|\xi|^\alpha/\mathbf{D}\xi)^{1/(\alpha-2)} \qquad \forall \xi = \xi_n. \tag{29}$$

Подставляя (28) и (29) в (8) и используя (10), находим

$$\mathbf{M}\,|\xi_n|^3 \exp(\lambda_n|\xi_n|)/\mathbf{D}\xi_n \leqslant (\mathbf{M}\,|\xi_n|^\alpha/\mathbf{D}\xi_n)^{1/(\alpha-2)}\ \ l_n^\gamma = \\ = O\left(a_n l_n^{-2\gamma} l_n^\gamma\right) = O\left(a_n/\ln l_n\right). \tag{30}$$

Из (27) и (30) получаем требуемое утверждение.

8. Уточнения принципа инвариантности Штрассена

Пусть случайные величины $\{\xi_j\}$ и $\{\eta_j\}$, а также монотонная последовательность $\{v_j\}$ удовлетворяют всем условиям, которые на них были наложены в начале предыдущего пункта. Нас интересуют достаточные условия для существования такого представления последовательностей $\{\xi_j\}$ и $\{\eta_j\}$ на одном вероятностном пространстве, которое удовлетворяет условию

$$\sum_{j\leqslant n}\xi_j - \sum_{j\leqslant n}\eta_j = o(v_n). \tag{1}$$

Теорема 8. *Если выполнены условия*

$$\mathbf{P}(|\xi_j| \leqslant v_j) = 1 \qquad \forall j; \tag{2}$$

$$\Sigma \mathbf{M} H(\xi_j/v_j) < \infty, \tag{3}$$

где функция $H(\cdot)$ из класса $\mathscr{H}$, то справедливо соотношение (1).

Для доказательства достаточно отметить, что в силу замечания 3 условия (2) и (3) достаточны для сходимости с вероятностью 1 ряда $\Sigma(\xi_j-\eta_j)/v_j$. Но эта сходимость влечет утверждение (1) в силу леммы Кронекера.

Пусть $\{\zeta_j\}$ — произвольная последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющая условию

$$\sum \mathbf{P}(|\zeta_j| > v_j) < \infty. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение последовательность независимых нормально распределенных величин $\{\eta_j\}$ с параметрами

$$\mathbf{M}\eta_j^\gamma = \mathbf{M}\{\zeta_j;\ |\zeta_j| \leqslant v_j\}, \qquad \gamma = 1,2. \tag{5}$$

Воспользуемся теоремой 8 и замечанием 8 при $H(x)=x^2$ и $\xi_j = \zeta_j^{\{a_j\}}$. Справедливо

Следствие 8. *Если при некотором $\alpha > 2$*

$$\sum \mathbf{M}\min\{|\zeta_j|^\alpha/v_j^\alpha,\ 1\} < \infty, \tag{6}$$

то имеет место соотношение

$$\sum_{j\leqslant n}\zeta_j - \sum_{j\leqslant n}\eta_j = o(v_j). \tag{7}$$

Подчеркнем, что ряд в (6) мажорирует ряды в (4) и (3) при $H(x) = x^\alpha$, а величины $\{\eta_j\}$ в (7) удовлетворяют условиям (5).

Рассмотрим один частный случай.

Следствие 9. *Если независимые одинаково распределенные случайные величины ζ, ζ_1, ζ_2, … удовлетворяют условию* (4) *и при некотором $\alpha \geqslant 2$*

$$\sum_{j\geqslant n} v_j^{-\alpha} = O\left(n v_n^{-\alpha}\right), \tag{8}$$

то справедливо соотношение (7).

Отметим, что самым жестким требованием в следствии 9 является условие (4), которое в то же время необходимо (см. замечание 7). Ограничение (8) выполняется значительно чаще. Достаточно, например, потребовать

$$0 < K_1 \leqslant n^\gamma v_n \leqslant K_2 < \infty \qquad \forall n \geqslant n_0$$

при некоторых K_1, K_2 и $\gamma > 0$ и выбрать $\alpha > 1/\gamma$ в (8). При $v_n \equiv n^{1/2}$ следствие 9 усиливает основной результат в [14].

Перейдем к доказательству следствия 9. Воспользуемся утверждением следствия 8. Поскольку условие (4) выполнено, то осталось проверить сходимость ряда

$$R \equiv \sum \mathbf{M}\{|\zeta|^\alpha/v_j^\alpha;\ |\zeta| < v_j\}. \tag{9}$$

Полагая $p_n = \mathbf{P}(v_{n-1} \leqslant |\zeta| < v_n)$, перепишем (9), изменяя порядок суммирования. Имеем

$$R \leqslant \sum_j \sum_{n \leqslant j} p_n v_n^\alpha / v_j^\alpha = \sum_n p_n v_n^\alpha \sum_{j \geqslant n} v_j^{-\alpha} = \sum_n O(np_n) = O\Big(\sum_n \mathbf{P}(|\zeta| > v_n)\Big) < \infty.$$

9. Оценки в принципе инвариантности Донскера — Прохорова

Рассмотрим введенные в п. 5 процессы S и W, предполагая дополнительно

$$t_\infty \equiv \sum \mathbf{D}\xi_j = 1. \tag{1}$$

В этом случае S и W можно рассматривать как случайные элементы со значениями в пространстве непрерывных на интервале [0, 1] функций с равномерной нормой. Обозначим через $\mathfrak{B}$ — σ-алгебру борелевских множеств этого пространства и будем для любых $\mathscr{A} \in \mathfrak{B}$ и $\varepsilon \geqslant 0$ через $\mathscr{A}^{(\varepsilon)}$ обозначать ε-окрестность множества $\mathscr{A}$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Lambda(\varepsilon) = \sup_{\mathscr{A} \in \mathfrak{B}} \{P(S \in \mathscr{A}) - P(W \in \mathscr{A}^{(\varepsilon)})\}, \tag{2}$$

которая является удобной характеристикой близости между распределениями процессов S и W (см. [15]). В частности [16], величина

$$\Lambda = \min\{\varepsilon\colon\ \Lambda(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\} \tag{3}$$

называется расстоянием Леви — Прохорова между распределениями процессов S и W. Из известного неравенства $\Lambda(\varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(\|S - W\| > \varepsilon)$ и второго утверждения в теореме 5 вытекает

Теорема 9. *При всех* $\alpha > 2$

$$\Lambda(\varepsilon) \leqslant C\alpha^{2\alpha} L_\alpha/\varepsilon^\alpha \qquad \forall \varepsilon > 0; \tag{4}$$

$$\Lambda \leqslant C\alpha^2 L_\alpha^{1/(\alpha+1)}. \tag{5}$$

Неравенство (5) следует из (3) и (4) при $\varepsilon = \alpha L_\alpha^{1/(\alpha+1)}$. При $\alpha \leqslant 3$ оценка (5) получена в [17], а для $\alpha < 5$ — в [18]. Для одинаково распределенных величин неравенство (5) рассматривалось в [11].

Обозначим через $\mathscr{A}'$ границу множества $\mathscr{A}$, а через $\mathscr{A}'^{(\varepsilon)}$ — ее окрестность. Положим

$$\mathscr{K}(\mathscr{A}) = \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^{-1} \mathbf{P}(W \in (A')^{(\varepsilon)}). \tag{6}$$

Если $\mathscr{K}(\mathscr{A}) < \infty$, то будем говорить, что множество $\mathscr{A}$ имеет липшицеву границу. Из (3) и (6) следует

$$\delta(\mathscr{A}) \equiv |\mathbf{P}(S \in \mathscr{A}) - \mathbf{P}(W \in \mathscr{A})| \leqslant \mathscr{K}(\mathscr{A})\varepsilon + \Lambda(\varepsilon). \tag{7}$$

Полагая $\varepsilon = \alpha(L_\alpha/\mathscr{K}(\mathscr{A}))^{1/(\alpha+1)}$ в (4) и (7), находим, что справедливо

Следствие 10. *При всех* $\alpha > 2$

$$\delta(\mathscr{A}) \leqslant C\alpha^2(\mathscr{K}^\alpha(\mathscr{A}) L_\alpha)^{1/(\alpha+1)}. \tag{8}$$

Замечание 10. Как отмечено в [8, 10, 11, 19], неравенства (5) и (6) неулучшаемы. Но оценку (8) можно усилить. А именно, *справедливо неравенство*

$$\delta(\mathscr{A}) \leqslant C\alpha^2(\mathscr{K}(\mathscr{A})^{\alpha-1} L_\alpha)^{1/\alpha} \qquad \forall \alpha > 2. \tag{9}$$

При $\alpha \leqslant 4$ доказанная в [8, 10] оценка несколько хуже. Неулучшаемость неравенства (9) для разнораспределенных величин отмечена в (17). Утверждение (9) будет доказано в одной из следующих работ автора.

Отметим, что из теорем 4, 5 и следствия 3 можно получить более точные (и сложные) неравенства, чем (5), (6), и соответствующие оценки в [20]. Рассмотрим пример. Пусть $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные величины

$$\mathbf{M}\zeta = 0; \quad \mathbf{D}\zeta = 1;$$

$$K_1 x^{-\alpha} \leqslant \mathbf{P}(|\zeta| > x) \leqslant K_2 x^{-\alpha} \qquad \forall x > x_0 > 0,$$

где $\alpha > 0$. Положим $\xi_j = \zeta_j / n^{1/2}$ при $j \leqslant n$ и $\xi_j = 0$ при $j > n$. В этом случае из следствия 3 и результатов работы [10] нетрудно извлечь, что

$$K_1(\alpha) z_n \leqslant \Lambda \leqslant K_2(\alpha) z_n, \qquad z_n = n^{-(\alpha-2)/(2\alpha+2)}. \tag{10}$$

Полученная в (10) оценка, очевидно, неулучшаема с точностью до постоянного множителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Саханенко А. И.** Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами.— В кн.: Предельные теоремы для сумм случайных величин. Новосибирск: Наука, 1984, с. 4—50.
2. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** An approximation of partial sums of independent RV's and sample DF. I.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1975, B. 32, H. 1/2, p. 111—133.
3. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** An approximation of partial sums of independent RV's and sample D. F. II.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1976, B. 34, H. 1, p. 33—58.
4. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965. 656 с.
5. **Berkes I., Philipp W.** Approximations theorems for independent and weakly dependent random vectors.— Ann. Probab., 1979, v. 7, N 1, p. 29—54.
6. **Скороход А. В.** Исследования по теории случайных процессов. Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1961. 216 с.
7. **Sawyer S.** A Remark on the Skorohod Representation.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1972, B. 23, H. 1, p. 67—74.
8. **Саханенко А. И.** Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности.— В кн.: Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы. Новосибирск: Наука, 1982, с. 72—78.
9. **Нагаев С. В., Фук Д. Х.** Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, № 4, с. 660—675.
10. **Саханенко А. И.** Оценка скорости сходимости в принципе инвариантности.— Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 5, с. 1076—1078.
11. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** Weak convergence and embedding.— In: Transactions of the Colloquy on Limit Theorems. Keszthely, 1974, p. 149—165.
12. **Rosenthal H. P.** On the subspaces of L^p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables.— In: Proceedings of the sixth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability. V. 2. Berkeley, 1972, p. 149—167.
13. **Major P.** A note on Kolmogorov's law of iterated logarithm.— Stud. sci. math. hung., 1977, v. 12, № 1-2, p. 161—167.
14. **Major P.** An improvement of Strassen's invariance principle.— Ann. Probab., 1979, v. 7, N 1, p. 55—61.
15. **Боровков А. А., Саханенко А. И.** Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности для банаховых пространств.— Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, № 4, с. 734—744.
16. **Прохоров Ю. В.** Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, № 2, с. 177—238.
17. **Боровков А. А.** О скорости сходимости в принципе инвариантности.— Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, № 2, с. 217—234.
18. **Утев С. А.** Замечание о скорости сходимости в принципе инвариантности.— Сиб. мат. журн., 1981, т. 22, № 5, с. 205—209.
19. **Арак Т. В.** Об одной оценке А. А. Боровкова.— Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. 20, № 2, с. 380—381.
20. **Борисов И. С.** К вопросу о скорости сходимости в принципе инвариантности Донскера — Прохорова.— Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, № 2, с. 267—372.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.