В силу леммы 3.4

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}\left(\left|\varphi\left(\sum_{j=1}^{k} \xi_j + \eta\right)\right| I(\xi_i \neq 0)\right) \leqslant q^k (1 + \mathbf{E}\,|\,\varphi(\eta)\,|) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}\left((1 + |\,\varphi(\xi_i)\,|)\, I(\xi_i \neq 0)\right) \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{k} \mathbf{E}\,(1 + |\,\varphi(\xi_j)\,|) \leqslant$$

$$\leqslant kq^k (1 + \mathbf{E}\,|\,\varphi(\eta)\,|)\,(1 + a)^{k-1} a,$$

где $q = \max(1,\ 2c(\varphi)) < \infty$. Следовательно,

$$|\,\mathbf{E}\varphi(\eta + T(\alpha G)) - \mathbf{E}\varphi(\eta)\,| \leqslant e^{-1} a\,(1 + \mathbf{E}\,|\,\varphi(\eta)\,|) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} (k + kq^k (1 + a)^{k-1})/k! \leqslant ca,$$

где $c < \infty$ и зависит лишь от η и q. Следовательно, (10.2), а с ним и теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Прохоров Ю. В.** Экстремальные задачи в предельных теоремах.— Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1962, с. 77—84.
2. **Пинелис И. Ф., Утев С. А.** Оценки моментов сумм независимых случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, № 3, с. 554—557.
3. **Утев С. А.** Экстремальные задачи в моментных неравенствах.— Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, № 2, с. 411—412.
4. **Rosenthal H. P.** On the span in L^p of sequences of independent random variables.— In: Proceedings of the sixth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability. V. 2, Berkeley, 1972, p. 149—167.
5. **Нагаев С. В.** О вероятностях больших уклонений в банаховых пространствах.— Мат. заметки, 1983, т. 34, № 2, с. 309—313.
6. **Hoeffding W.** The extrema of the expected value of a function of independent random variables.— Ann. Math. Statistics, 1955, v. 26, N 2, p. 268—275.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

ОБ УСРЕДНЕНИИ ДИФФУЗИИ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

В. В. ЮРИНСКИЙ

В этой работе рассматривается предельное поведение при $\varepsilon \to 0$ дифференциальных операторов вида

$$L_\varepsilon u \equiv (1/2) \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x/\varepsilon)\, D_i D_j u + \sum_{i=1}^{d} b_i(x/\varepsilon)\, D_i u - b_0(x/\varepsilon)\, u,$$

$$D_i = \partial/\partial x^{(i)}, \quad x = \{x^{(i)}\} \in R^d.$$

Возможность усреднения L_ε, т. е. сходимость L_ε в определенном смысле к оператору того же вида с постоянными коэффициентами (усредненному оператору), была при достаточно общих предположениях установлена ранее (см., например, [1—3]).

Ниже оцениваются погрешность усреднения в задаче Дирихле для оператора L_ε и скорость сходимости некоторых процедур вычисления коэффициентов усредненного оператора в предположении, что коэффициенты $a_{ij}(y,\ \omega)$, $b_i(y,\ \omega)$ являются однородными случайными полями.

Всюду в дальнейшем размерность подчинена условию $d \geqslant 3$. Поле коэффициентов $\{a_{ij},\ b_i\}$ имеет конечный радиус зависимости, разброс собственных чисел матрицы $\|a_{ij}\|$ достаточно мал.

Предположение о том, что поле коэффициентов имеет конечный радиус зависимости, позволяет утверждать, что погрешность от замены решения задачи Дирихле для оператора L_ε в ограниченной области решением усредненной задачи при $\varepsilon \to 0$ убывает не медленнее ε^α, $\alpha > 0$ (теорема 2). Точная формулировка и доказательство этого результата приведены в п. 3.

Вывод оценок погрешности усреднения существенно использует неравенства для смещения и центральных моментов оценки усредненного коэффициента $\langle k \rangle$ вида

$$\{k \mid 0,\ t\} = \frac{1}{t} \int_0^t k(\eta(s),\ \omega)\, ds,$$

где η — диффузионный процесс в R^d с производящим оператором

$$Gu \equiv G(\omega)\, u \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,\ \omega)\, D_i D_j u.$$

Теорема 1 п. 2 устанавливает, что при $t \to \infty$ $\{k|0,\ t\}$ сходится к усредненной величине $\langle k \rangle$ в среднем со скоростью не медленнее $t^{-\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha} > 0$.

Вычисления статьи основываются на том обстоятельстве, что при размерности $d \geqslant 3$ типичная траектория диффузии η задевает лишь относительно малую часть объема области, в которой происходит диффузия, и потому медленно «запоминает» свойства среды. Ограничение на размерность поэтому существенно для метода работы.

В п. 1 собраны необходимые для доказательства теоремы 1 (п. 2) и теоремы 2 (п. 3) оценки для распределений диффузионных процессов.

Леммы и формулы нумеруются в пределах разделов независимо. При ссылках на результаты других разделов нумерация двойная: например, лемма 2.1 означает лемму 1 п. 2, (3.2) — формулу (2) п. 3 и т. д.

1. Оценки для распределений диффузионных процессов

Пусть $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i,\ j = 1,\ \ldots,\ d$, $x = \{x^{(i)}\} \in R^d$, непрерывны и для любых x, $\xi \in R^d$, $|\xi|^2 = \xi^{(i)}\xi^{(i)}$

$$A_1 |\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi^{(i)}\xi^{(j)} \leqslant A_2 |\xi|^2, \tag{1}$$

где $A_i > 0$ — постоянные, а повторение индексов подразумевает, как и всюду ниже, суммирование от 1 до d. Пусть $b_i(x)$ измеримы и

$$|b_i(x)| \leqslant B, \quad x \in R^d. \tag{2}$$

Набору коэффициентов $\{a_{ij},\ b_i\}$ отвечает (см., например, [4, 5]) диффузионный процесс η с производящим оператором

$$G^b u \equiv (1/2) a_{ij}(x) D_i D_j u + b_i(x) D_i u. \tag{3}$$

Распределение на цилиндрической σ-алгебре $\mathfrak{C}$ пространства $C = C[0,\ \infty)$ траекторий диффузии, соответствующее начальному условию $\eta(0) = x$, обозначается ниже $\mathbf{P}_x^b$. Как обычно,

$$\mathbf{M}_x^b \{\zeta;\ A\} = \int_A \zeta(w)\, \mathbf{P}_x^b(dw). \tag{4}$$

Распределение диффузии без сноса с производящим оператором

$$Gu \equiv (1/2) a_{ij}(x) D_i D_j u \tag{5}$$

обозначается $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{M}_x$.

Ниже используется оценка лебеговой меры окрестности траектории диффузии η.

Пусть $w \in C$, $U = [0,\ 1]^d$, $w[s,\ t] = \{x : x = w(s'),\quad s \leqslant s' \leqslant t\} \subset R^d$. Обозначение

$$Nw[s,\ t] = \{z \in Z^d : w[s,\ t] \cap (z + U) \neq \varnothing\} \tag{6}$$

закрепляется за набором номеров «целочисленных» кубов $z + U$, задетых отрезком траектории $w[s, t]$. При $q > 0$

$$V_q w[s, t] = V_q(Nw[s, t]),$$
$$V_q(L) = \bigcup_{z \in L} (z + U_q), \quad L \subset Z^d, \tag{7}$$

где $U_q = [-q-2,\ q+2]^d$ обозначает «кубическую» $(q+2)$-окрестность $w[s, t]$.

Лемма 1. *Пусть* $\sigma,\ \tau \geqslant 0$ — *марковские моменты для процесса* (3), *причем* $0 \leqslant \tau - \sigma \leqslant T$. *При* $y \geqslant 0$, $T \geqslant 1$

$$\mathbf{P}_x^b \{\operatorname{mes} V_q \eta[\sigma, \tau] \geqslant c_1 T (y + 1 + |\ln T|)\} \leqslant \exp\{-c_2 y\},$$

где mes — *мера Лебега.*

Здесь и ниже символы c, c_i, $\bar{c}$ и т. п. обозначают постоянные, значения которых определяют размерность d и константы в ограничениях на коэффициенты. Если это не приводит к путанице, одним и тем же символом могут обозначаться разные величины: $c + c = c$, $c \cdot c = c$ и т. д.

Доказательство. Для процесса η справедлива показательная оценка (см. [5], § 4.2 или [6], гл. 1, § 3)

$$\mathbf{P}_x^b \left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \left| \eta(\tau' + t) - \eta(\tau') - \int_0^t b(\eta(\tau' + c))\, ds \right| \geqslant r \right\} \leqslant c' \exp\{-c'' r^2/h\}, \tag{8}$$

где τ' — марковский момент.

Снос процесса η ограничен. Поэтому отрезок траектории $\eta[\sigma, \tau]$ выходит за пределы множества

$$\bigcup_{0 \leqslant l \leqslant T/h} (S + \eta(\tau_l)), \quad S = \{x: |x| \leqslant r + Bh\}, \quad \tau_l = (\sigma + lh) \wedge \tau$$

с вероятностью, не превышающей $c'(1 + T/h) \exp\{-c'' r^2/h\}$. Следовательно, при $r + h \geqslant c'''(q+2)$

$$\mathbf{P}_x^b \{\operatorname{mes} V_q \eta[\sigma, \tau] \geqslant c (r + h)^d (1 + T/h)\} \leqslant c'(1 + T/h) \exp\{-c'' r^2/h\}.$$

Остается выбрать $r = \hat{c}(q+2)$, $h = 1/(1 + \check{c}(y + |\ln T|))$, где $\check{c}$ *достаточно* велико, чтобы «подавить» множитель перед экспонентой в правой части полученной оценки.

Ниже рассматривается процесс (5) без сноса. Функция

$$v(x, t) = \mathbf{M}_x \int_{0<s<t} h(\eta(s), s)\, ds \tag{9}$$

является решением задачи Коши

$$\partial v/\partial t = Gv + h, \ t > 0, \ v(x, 0) = 0. \tag{10}$$

Оценка изменения v при возмущении правой части h и коэффициентов диффузии a_{ij} на множестве малой меры проводится далее в предположении, что задача (10) допускает априорную оценку

$$|D_i D_j v|_{p,t} \leqslant A_3 |h|_{p,t}, \quad t > 0, \tag{11}$$

где $|\cdot|_{p,t}$ обозначает норму в пространстве L_p для слоя $R^d \times (0, t)$, а константа A_3 не зависит от t. Оценка вида (11) легко выводится из соответствующего результата для уравнения теплопроводности (см. [5], гл. 7; [7], гл. IV, § 3), если коэффициенты удовлетворяют неравенству

$$|a_{ij}(x) - \delta_{ij}| \leqslant A_4, \quad A_4 = A_4(p, d) > 0, \tag{12}$$

где δ — символ Кронекера.

Пусть $\widetilde{\mathbf{M}}_x$ — распределение процесса $\tilde{\eta}$ с производящим оператором вида (5) с коэффициентами $\tilde{a}_{ij}$, причем $\tilde{a}_{ij}$ удовлетворяют (1) и совпадают с a_{ij} вне ограниченного множества V.

Лемма 2. *Пусть* v *задана* (9), $\tilde{v}$ *определена аналогично с заменой* η, $\mathbf{M}$, h *на* $\tilde{\eta}$, $\widetilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{h}$. *Если для оператора* (5) *выполнено условие* (11) с некоторым $p > d+1$, то при $T > 0$, $z \in R^d$

$$|v(z, T) - \tilde{v}(z, T)| \leqslant c\{T^{d/(2d+2)}|\tilde{h} - h|_{d+1, T} + T^{\beta}(T^{-d/2} \operatorname{mes} V)^{\varkappa}|h|_{p, T}\},$$

где $\varkappa = 1/(1+d) - 1/p$, $\beta = d/(2d+2) + \varkappa(1+d/2)$.

Доказательство. Разность $u = \tilde{v} - v$ удовлетворяет нулевому начальному условию при $t = 0$ и уравнению

$$\partial u/\partial t = (1/2)\tilde{a}_{ij}D_iD_ju + (\tilde{a}_{ij} - a_{ij})D_iD_jv/2 + \tilde{h} - h.$$

Поэтому

$$u(z, T) = \tilde{\mathbf{M}}_z \int_0^T (\tilde{h} - h)(\tilde{\eta}(t), t)\, dt + \tilde{\mathbf{M}}_z \int_0^T (1/2)(\tilde{a}_{ij} - a_{ij}) D_iD_jv(\tilde{\eta}(t), t)\, dt.$$

Оценка леммы получается применением неравенства (2) из п. 4 § 3 гл. II [4] для процесса $\tilde{\eta}^T(s) = T^{-1/2}\tilde{\eta}(Ts)$ и неравенства

$$|(\tilde{a}_{ij} - a_{ij})D_iD_jv|_{d+1, T} \leqslant |\tilde{a}_{ij} - a_{ij}|_{1/\varkappa, T}|D_iD_jv|_{p, T} \leqslant c(T \operatorname{mes} V)^{\varkappa}|h|_{p, T}.$$

Лемма 3. *Пусть* η, $\tilde{\eta}$ *согласованы, как в лемме* 2, $\tilde{k}(x) = k(x)$ *вне* V, $|\tilde{k}(x)| \leqslant K$, $|k(x)| \leqslant K$. *При* $T > 0$

$$\left|\mathbf{M}_z \frac{1}{T}\int_0^T k(\eta(t))\, dt - \tilde{\mathbf{M}}_z \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{k}(\tilde{\eta}(t))\, dt\right| \leqslant cK\{\ln(1+T)(T^{-d/2} \operatorname{mes} V)^{\varkappa} + \\ + \exp\{-c(\ln T)^2\}\}.$$

Доказательство. Пусть I — индикатор шара с центром в z радиусом $\ln T\sqrt{T}$,

$$h(x) = I(x)k(x)/T, \quad \tilde{h}(x) = I(x)\tilde{k}(x)/T.$$

Из показательной оценки (8) легко следует, что при вычислении среднего в условиях леммы можно заменить k/T на h, $\tilde{k}/T$ — на $\tilde{h}$ с погрешностью не более $cK \exp\{-c(\ln T)^2\}$. Остается применить лемму 2.

2. Оценивание усредненных коэффициентов

В дальнейшем набор коэффициентов $a_{ij}(y, \omega)$ и функция $k(y, \omega)$ образуют случайное поле над вероятностным пространством $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{Pr})$. Реализации полей a_{ij} непрерывны на R^d и удовлетворяют условию (1.1) с неслучайными постоянными $(\operatorname{mod} \mathbf{Pr})$; поле k измеримо и

$$|k(x, \omega)| \leqslant K \,(\operatorname{mod} \mathbf{Pr}), \quad x \in R^d. \tag{1}$$

Реализации поля $a_{ij}(x, \omega)$ ставится в соответствие диффузионный процесс с производящим оператором $G = G_\omega$ вида (1.5) с распределением $\mathbf{P}_x^\omega$, $\mathbf{M}_x^\omega$ (см. п. 1). Нетрудно проверить, что можно определить произведение мер $\mathbf{Pr}(d\omega)$, $\mathbf{P}_x^\omega(dw)$ (см., например, [8], гл. IV). Это последнее обозначается

$$\mathbf{EM}_x\varphi = \int_\Omega \mathbf{Pr}(d\omega) \int_C \varphi(w, \omega)\, \mathbf{P}_x^\omega(dw),$$

$$\mathbf{EP}_x(A) = \mathbf{EM}_x I_A, \quad A \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C},$$

где I_A — индикатор A.

Возможность использования оценок лемм 1.2, 1.3 обеспечивается ограничением типа условия Кордеса на разброс собственных чисел матрицы $\|a\|$:

$$a_{ij}(x, \omega)\xi^{(i)}\xi^{(j)}/a_{lm}(x, \omega)\eta^{(l)}\eta^{(m)} \leqslant 1 + A_4, \tag{2}$$

где $|\xi| = |\eta| = 1$, $A_4 = A_4(p, d) > 0$.

Случайное поле $\{a_{ij}, k\}$ однородно относительно целых сдвигов: распределение, порожденное в пространстве его реализаций полем $\{a_{ij}(y+z), k(y+z)\}$, не зависит от выбора целого вектора $z \in Z^d$.

Значения поля $\{a_{ij}, k\}$ в далеких точках предполагаются слабозависимыми. Пусть $\rho(x, y) = \max|x^{(i)} - y^{(i)}|$,

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y)\colon x \in A,\ y \in B\},$$

$\mathfrak{A}(B) \subset \mathfrak{A}$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами $a_{ij}(x)$, $k(x)$, $x \in B \subset R^d$. Поле коэффициентов r-зависимо, если для любого n $\mathfrak{A}(B_i)$, $i = 1, \ldots, n$, независимы при

$$\rho(B_i, B_j) \geqslant r,\ i \neq j. \tag{3}$$

Перечисленным ограничениям удовлетворяют, например, «шахматные структуры», в которых постоянные коэффициенты независимо возмущаются внутри ячеек $z + U$, $U = [0, 1]^d$, $z \in Z^d$.

Пусть

$$\{k \mid s, t\} = \frac{1}{t-s}\int_s^t k(\eta(s'))\, ds', \tag{4}$$

где η — диффузия (1.5).

Известно (см., например, [1—3]), что при достаточно общих ограничениях существует неслучайное усредненное значение $\langle k\rangle$ такое, что при $t \to \infty$ $\mathbf{M}_x\{k|0, t\} \to \langle k\rangle \pmod{\mathbf{Pr}}$ независимо от выбора x. Предположение (3) о слабой зависимости значений поля коэффициентов в далеких точках позволяет оценить скорость сходимости при этом предельном переходе.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (1.1), (1), (2), (3), $d \geqslant 3$ *и постоянная в* (2) *достаточно мала, чтобы выполнялось* (1.11) *с некоторым* $p > d + 1$, *то существует* $\alpha > 0$ *такое, что* $\mathbf{EM}_x(\{k|0, t\} - \langle k\rangle)^2 \leqslant ct^{-\alpha}$, *где величина* α *определяется только размерностью и константами в ограничениях на коэффициенты диффузии.*

Удобно разбить вывод оценки теоремы на несколько шагов.

Пусть $\tau \geqslant 0$ — марковский момент для диффузии η, Nw определено (1.6), ζ — измеримый функционал отрезка траектории $\eta[0, \tau]$.

Лемма 1. *Случайная величина на пространстве* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{Pr})$

$$\mathbf{M}_x\{\zeta;\ N\eta[0, \tau] = L,\ \eta(\tau) \in B\},$$
$$x \in R^d,\quad L \subset Z^d,\quad B \subset R^d,$$

измерима относительно $\mathfrak{A}(V(L))$, *где* $V(L) = \bigcup\limits_{z \in L} (z + U)$.

Утверждение леммы немедленно следует из того, что распределение отрезка траектории диффузии до момента выхода из множества $V(L)$ определяется значениями коэффициентов на этом множестве.

В дальнейшем поле $\{a_{ij}, k\}$ неоднократно будет «подправляться». Для этого всегда используется следующее построение. Пусть гладкая функция $\zeta \geqslant 0$ обращается в нуль вне куба $[-1, 2] \times \ldots \times [-1, 2]$, а набор $\{\zeta(x + z),\ z \in Z^d\}$ образует разложение единицы R^d: $\sum \zeta(x + z) \equiv 1$. Пусть $L_r = \{z \in Z^d : \rho(z, L) \leqslant r + 1\}$, $L \subset Z^d$, постоянные $\bar a_{ij}$, $\bar k$ удовлетворяют тем же ограничениям, что и a_{ij}, k. Тогда

$$\tilde a_{ij}(x, \omega) = \tilde a_{ij}^{L,r}(x, \omega) = \sum_{z \in L_r} \bar a_{ij}\zeta(x + z) + \sum_{z \notin L_r} a_{ij}(x, \omega)\zeta(x + z); \tag{5}$$

$\tilde k$ определяется аналогично. Из построения ясно, что поле $\tilde a_{ij}$, $\tilde k$ не зависит от $\mathfrak{A}(V(L))$ и совпадает с $\{a_{ij}, k\}$ вне множества $V_r(L)$ (1.7). Далее, $\tilde\eta$, $\tilde{\mathbf{M}}$ — диффузионный процесс и его распределения, отвечающие замене a на $\tilde a$ в выражении (1.5) для производящего оператора.

Лемма 2. *Если для реализаций поля a_{ij} выполнены условия леммы* 1.3, k *удовлетворяет* (1), *то при* $2 \leqslant t \leqslant T$

$$|\mathbf{EM}_x\{k \mid T, T + t\} - \mathbf{EM}_0\{k \mid 0, t\}| \leqslant cK\{t^{-\beta_1} + T^{-\beta_1} +$$
$$+ \ln t\,(T^{-d/2} T \ln T)^{\beta_2}\},$$

где c и β_1, β_2 определяются d, $p > d+1$ из условия (1.11) *и постоянными в* (1.1), (3).

Доказательство. Очевидно, $\mathbf{M}_x\{k|T, \ T+t\} = \mathbf{M}_x\mathbf{M}_{\eta(T)}\{k|0, \ t\}$. Оценки [9] позволяют заменить в этом равенстве с погрешностью не более $c(t^{-\beta_1}+T^{-\beta_1})x$, $\eta(T)$ на $[x]$, $[\eta(T)]$, где $[x]$ — вектор, составленный из целых частей $x^{(i)}$. Поэтому

$$\mathbf{M}_x\{k\,|\,T, \ t+T\} = \mathbf{M}_{[x]}\mathbf{M}_{[\eta(T)]}\{k\,|\,0, \ t\} + \rho = \sum_L\sum_z \mathbf{P}_{[x]}\{N\eta\,[0, \ T] = L,$$

$$[\eta\,(T)] = z\}\,\mathbf{M}_z\{k\,|\,0, \ t\} + \rho, \quad |\,\rho\,| \leqslant c\left(t^{-\beta_1} + T^{-\beta_1}\right), \tag{6}$$

где суммирование ведется по всем $z \in Z^d$, $L \subset Z^d$.

При изменении коэффициентов по (5) лемма 1.3 дает оценку

$$|\,\widetilde{\mathbf{M}}_z\{\widetilde{k}\,|\,0, \ t\} - \mathbf{M}_z\{k\,|\,0, \ t\}\,| \leqslant cK\,[\ln t\left(t^{-d/2}\mathrm{mes}\,V_r\,(L)\right)^{\beta_2} + \exp\{-c'\,(\ln t)^2\}] \tag{7}$$

Величины $\widetilde{\mathbf{M}}_z\{\widetilde{k}|0, \ t\}$, $\mathbf{P}_{[x]}\{N\eta[0, \ T] = L, \ [\eta(T)] = z\}$ независимы по построению (5). Следовательно, по однородности поля коэффициентов

$$\begin{gathered}\mathbf{EP}_{[x]}\{N\eta[0, \ T] = L, \ [\eta(T)] = z\}\mathbf{M}_z\{k|0, \ t\} = \mathbf{EP}_0\{N\eta[0, \ T] = L,\\ [\eta(T)] = z - [x]\}(\mathbf{EM}_0\{k|0, \ t\} + \rho'),\\ |\,\rho'\,| \leqslant cK\ln t\left(t^{-d/2}\,\mathrm{mes}\,V_r\,(L)\right)^{\beta_2}.\end{gathered} \tag{8}$$

После суммирования по L, z (8) и лемма 1.1 показывают, что

$$\mathbf{EM}_{[x]}\{k|T, \ t+T\} = \mathbf{EM}_0\{k|0, \ t\} + \rho'',$$

$$|\,\rho''\,| \leqslant cK\ln t\,\mathbf{EM}_0\left(t^{-d/2}\,\mathrm{mes}\,V_r\eta\,[0, \ T]\right)^{\beta_2} \leqslant cK\ln t\left(t^{-d/2}T\ln T\right)^{\beta_2}.$$

Вместе с (6) это доказывает лемму.

Из леммы 2 немедленно следует оценка

$$\begin{gathered}|\,\mathbf{EM}_0\{k\,|\,0, \ T\} - \mathbf{EM}_0\{k\,|\,0, \ t\}\,| \leqslant cK\left(t/T + t^{-\beta_1} + T^{-\beta_1} + \right.\\ \left. + \ln t\left(t^{-d/2}\,T\ln T\right)^{\beta_2}\right),\end{gathered} \tag{9}$$

если заметить, что

$$\{k\,|\,0, \ T\} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\{k\,|\,lt, \ (l+1)\,t\} + O\,(t/T), \quad n = [T/t].$$

Лемма 3. *В условиях леммы 2 при $d \geqslant 3$ существует предел*

$$\langle k\rangle = \lim_{T\to\infty}\mathbf{EM}\{k\,|\,0, \ T\} \quad \text{и} \quad \mathbf{EM}_x\{k\,|\,0, \ T\} - \langle k\rangle\,| \leqslant cKT^{-\beta_3}, \quad \beta_3 > 0,$$

где величина β_3 определяется только d и ограничениями на коэффициенты a_{ij}.

Доказательство. Пусть $K_l = \mathbf{EM}_0\{k|0, \ t_l\}$, $t_l = \exp\{(1+\delta)^l\}$, где $\delta > 0$ будет выбрано позже. По построению $t_{l+1}/t_l = t_l^{\delta}$, $t_l \uparrow \infty$. Существование предела K_l следует из неравенства (9): при $d \geqslant 3$ и достаточно малом $\delta > 0$

$$|\,\langle k\rangle - K_n\,| \leqslant \sum_{l\geqslant n}|\,K_{l+1} - K_l\,| \leqslant c\sum_{l\geqslant n}t_l^{-\delta_1} \leqslant ct_n^{-\delta_2}, \quad \delta_1, \delta_2 > 0.$$

Если $s \in (t_l, \ t_{l+1}]$, то одна из пар $t = s$, $T = t_{l+1}$ или $t = t_l$, $T = s$ удовлетворяет условию $t_l^{-\delta} \leqslant t/T \leqslant t_l^{-\delta/2}$. Следовательно, по (9)

$$|\,\mathbf{EM}_0\{k\,|\,0, \ s\} - \langle k\rangle\,| \leqslant \min\{\,|\,\mathbf{EM}_0\{k\,|\,0, \ s\} - K_l\,| + |\,K_l - \langle k\rangle\,|;$$

$$|\,\mathbf{EM}_0\{k\,|\,0, \ s\} - K_{l+1}\,| + |\,K_{l+1} - \langle k\rangle\,|\,\} \leqslant ct_l^{-\delta_3} \leqslant cs^{-\delta_4}, \quad \delta_4 > 0.$$

Это доказывает лемму, так как (ср. с (6)) $|\,\mathbf{EM}_x\{k\,|\,0, \ s\} - \mathbf{EM}_0\{k\,|\,0, \ s\}| \leqslant cs^{-\beta_1}$ по однородности поля коэффициентов.

Лемма 4. *В условиях леммы 2 при $d \geqslant 3$*

$$\mathbf{EM}_x(\{k\,|\,0,\,T\} - \langle k\rangle)^2 \leqslant cT^{-\beta_4},$$

где β_4 — постоянная того же типа, что и β_i в леммах 2, 3.

Доказательство. Пусть n — натуральное, $t = T/n$,

$$K_l = \{k\,|\,lt,\ lt+t\} - \mathbf{EM}_0\{k\,|\,0,\ t\},\ l = 0,\ \ldots,\ n-1.$$

Величина K_l определяется траекторией η до момента $lt+t$. Очевидно,

$$\mathbf{EM}_x[(K_0+\ldots+K_{n-1})/n]^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\sum_l \mathbf{EM}_x K_l^2 + 2\sum_{l<m}\mathbf{EM}_x K_l \mathbf{M}_{\eta(mt)} K_0\right). \tag{10}$$

Оценка правой части (10) аналогична доказательству леммы 2. Она отправляется от равенства

$$\mathbf{M}_x\{K_l\mathbf{M}_{\eta(mt)}K_0\} = \sum_L\sum_z \mathbf{M}_x\{K_l;\quad N\eta\,[0, mt] = L,$$

$$[\eta\,(mt)] = z\}\,(M_z K_0 + \rho), \qquad |\rho| \leqslant ct^{-\beta_1},\quad \beta_1 > 0, \tag{11}$$

где K_l — ограниченные величины. По лемме 1.3 можно с малой погрешностью заменить $\mathbf{M}_z K_0$ на $\widetilde{\mathbf{M}}_0\widetilde{K}_0$, где при вычислении $\widetilde{\mathbf{M}}_z\widetilde{K}_0$ коэффициенты изменены по формулам (5) в окрестности $V_r(L)$. Погрешность замены не превосходит

$$\rho_1 = c\ln t\left(t^{-d/2}\operatorname{mes} V_r(L)\right)^{\beta_2}. \tag{12}$$

При этом $\widetilde{\mathbf{M}}_z\widetilde{K}_0$, $\mathbf{M}_x\{K_l;\ N\eta[0,\ mt] = L,\ [\eta(mt)] = z\}$ — независимые случайные величины на $(\Omega,\ \mathfrak{A},\ \mathbf{Pr})$, $\mathbf{EM}_0K_0 = 0$, и по (12) с учетом однородности поля коэффициентов $|\mathbf{E}\widetilde{\mathbf{M}}_z\widetilde{K}_0| \leqslant \rho_1$. Следовательно, так как $|K_l| \leqslant K$,

$$|\mathbf{EM}_x\{K_l;\ N\eta[0,\ mt] = L,\ [\eta(mt)] = z\}\times$$

$$\times\,\mathbf{M}_zK_0| \leqslant c\mathbf{EM}_x\{\zeta;\ N\eta[0,\ mt] = L,\ [\eta(mt)] = z\}, \tag{13}$$

где (ср. с (1.7))

$$\zeta = \ln t\left(t^{-d/2}\operatorname{mes}V_r\eta[0,\ mt]\right)^{\beta_2},$$

$$\mathbf{M}_x\zeta \leqslant c\ln t\left(t^{-d/2}T\ln T\right)^{\beta_2}$$

по лемме 1.1.

Вместе с (10), (11) оценка (13) показывает, что

$$\mathbf{EM}_x[(K_0+\ldots+K_{n-1})/n]^2 \leqslant cK\left(1/n + t^{-\beta_1} + \ln t\left(t^{-d/2}T\ln T\right)^{\beta_2}\right). \tag{14}$$

Кроме того, по лемме 3 $|\langle k\rangle - \mathbf{EM}_0\{k\,|\,0,\ t\}| \leqslant ct^{-\beta_3}$. Поэтому оценка леммы следует из (14).

Доказательство теоремы 1. Из условия (2) следует, что коэффициенты a_{ij} допускают представление

$$a_{ij}(x,\ \omega) = a\,(x,\ \omega)\,a_{ij}^0(x,\ \omega), \tag{15}$$

где $c_1A_1 \leqslant a(x,\ \omega) \leqslant c_2A_2$, а матрица $\|a_{ij}^0\|$ удовлетворяет условиям леммы 2. Диффузионный процесс η^0 с коэффициентами диффузии (15) можно реализовать в форме $\eta(s) = \eta^0(\tau(s))$, где η^0 — диффузия, отвечающая a_{ij}^0, а марковский момент $\tau(s)$ задан равенством

$$\int_0^{\tau(s)} dt/a\,(\eta^0(t)) = s.$$

При этом средние (4) для процесса η^0 связаны с соответствующими величинами для η равенствами

$$\{k\,|\,0,\ t\} = \{k/a\,|\,0,\ \tau(t)\}^0/\{1/a\,|\,0,\ \tau(t)\}^0.$$

К процессу η^0 применима оценка леммы 4, из которой легко следует неравенство

$$\mathbf{EM}_x(\{k/a\mid 0, \tau(t)\}^0/\{1/a\mid 0, \tau(t)\}^0 - \langle k/a\rangle^0/\langle 1/a\rangle^0)^2 \leqslant ct^{-\alpha_1}, \quad \alpha_1 > 0,$$

где $\{\cdot\}^0$, $\langle\cdot\rangle^0$ — средние для процесса η^0, a^0_{ij}. Это доказывает теорему и равенство

$$\langle k\rangle = \langle k/a\rangle^0/\langle 1/a\rangle.$$

3. Оценка погрешности усреднения

Пусть при $x\in R^d$, $\omega\in\Omega$

$$L_\varepsilon u(x) \equiv (1/2)a_{ij}(x/\varepsilon, \omega)D_iD_ju(x) + \\ + b_i(x/\varepsilon, \omega)D_iu(x) - b_0(x/\varepsilon, \omega)u(x),\ f = f(x/\varepsilon, \omega), \tag{1}$$

где поле коэффициентов $\{a_{ij}(y, \omega), b_i(y, \omega), f(y, \omega)\}$ однородно относительно целых сдвигов по «медленной» переменной y и удовлетворяет условиям (1.1), (1.2), (2.2), (2.3), причем

$$0 \leqslant b_0(y, \omega) \leqslant B_0,\quad |f(y, \omega)| \leqslant \Phi, \tag{2}$$

где постоянные B_0, Φ не случайны.

Усредненные величины $\langle k\rangle$ определяются так же, как в п. 2, по диффузионному процессу без сноса (1.5) со случайными коэффициентами диффузии; обозначения $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{M}_x$ имеют тот же смысл, что и выше. Предполагается, что $\langle f\rangle = 0$.

Вычисления, аналогичные доказательству теоремы 1, позволяют оценить и погрешность усреднения в краевых и начально-краевых задачах для операторов L_ε, $\partial/\partial t - L_\varepsilon$. Оценка такого рода выводится ниже для решения класса $W^2_{p'}$, $p' > d$, задачи Дирихле в ограниченной области при гладких неслучайных условиях на границе. Аналогично, можно было бы, например, оценить погрешность усреднения в задаче Коши при гладких правой части и начальном условии.

Пусть U — решение усредненной краевой задачи

$$L_0U = F,\ x\in Q,\ U = 0,\ x\in\partial Q \tag{3}$$

для оператора $L_0u \equiv (1/2)\langle a_{ij}\rangle D_iD_ju + \langle b_i\rangle D_iu - \langle b_0\rangle u$ с постоянными коэффициентами, F_1 — функция класса C^β. Правая часть F и граница области Q предполагаются достаточно регулярными для того, чтобы решение (3) принадлежало $C^{2+\beta}$, $\beta > 0$, и для оператора Лапласа выполнялась оценка $\left(|\cdot|_p = |\cdot|_{L_p(Q)}\right)$

$$|D_iD_ju|_p \leqslant c|\Delta u|_p,\ u|_{\partial Q} = 0.$$

Теорема 2. *Решение краевой задачи*

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = F + fF_1,\ x\in Q,\ u_\varepsilon = 0,\ x\in\partial Q,$$

со случайными быстроосциллирующими коэффициентами при $d\geqslant 3$ связано с решением усредненной задачи (3) *неравенством*

$$\mathbf{E}\sup_{x\in Q}|u_\varepsilon - U| \leqslant c\varepsilon^\alpha,\quad \alpha > 0,$$

где c не зависит от ε, а значение постоянной α определяется размерностью d, константами в ограничениях на коэффициенты a_{ij} и гладкостью F_1, U, D_iU, D_iD_jU.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что коэффициенты a_{ij} удовлетворяют (1.12) с некоторым $p > d+1$ (ср. с (2.15)). Пусть $\mathbf{M}^*_x$ — распределение в пространстве траекторий процесса $\eta^* = \eta^*_\varepsilon$ с производящим оператором

$$G^*_\varepsilon u = (1/2)\,a_{ij}(x/\varepsilon)\,D_iD_ju + b_i(x/\varepsilon)\,D_iu, \tag{4}$$

отвечающее начальному условию $\eta^*(0)=x$, $\tau(w)=\inf\{t\colon\ w(t)\notin Q\}$ — момент первого выхода из Q.

Невязка $v_\varepsilon=u_\varepsilon-U$ между точным решением и решением усредненной задачи удовлетворяет нулевому граничному условию и уравнению

$$L_\varepsilon v_\varepsilon=-\varphi,\ \varphi=(1/2)(a_{ij}-\langle a_{ij}\rangle)D_iD_jU+ \\ +(b_i-\langle b_i\rangle)D_iU-(b_0-\langle b_0\rangle)U-fF_1. \tag{5}$$

Поэтому справедливо представление

$$v_\varepsilon(x)=\mathbf{M}_x^*\int_0^\tau\exp\{-B^0(t)\}\,\varphi(\eta^*(t))\,dt, \tag{6}$$

$$B^0(t)=\int_0^t b_0(\eta^*(s))\,ds.$$

Далее в представлении (6) φ удобно заменить функцией $\bar\varphi(x)=\zeta(x)\varphi(x)$, где $\zeta\geqslant 0$ — срезающая функция для области Q: $\zeta=0$ на границе, $\zeta=1$ в точках, удаленных от границы более чем на δ_1, $|D_i\zeta|\leqslant c/\delta_1$. Величина δ_1 будет выбрана позже в виде $\delta_1=\varepsilon^\gamma$, $\gamma>0$. Из оценок гл. II [4] следует, что

$$|v_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(x)|\leqslant c\delta_1^{1/d}, \tag{7}$$

где $w_\varepsilon(x)=\mathbf{M}_x^*\int_0^\tau\exp\{-B^0\}\,\bar\varphi(\eta^*(t))\,dt$.

Чтобы оценить $w_\varepsilon(x)$, можно действовать следующим образом. Пусть $\tau_l=l\sigma\wedge\tau$, $\sigma>0$, $l=0,1,\ldots$. Тогда

$$w_\varepsilon(x)=\sum_{l=0}^\infty\mathbf{M}_x^*\exp\{-B^0(\tau_l)\}\,\mu(\eta^*(\tau_l)), \tag{8}$$

$$\mu(x)=\mathbf{M}_x^*\int_0^\tau\exp\{-B^0(t)\}\,\varphi(\eta^*(t))\,dt.$$

Если расстояние $r(x,\partial Q)$ до границы не превосходит $\delta\ln 1/\delta$, $\delta=\sigma^{1/2}$, $\mu(x)$ мало́ по выбору срезающей функции ζ. Действительно, φ ограничена,

$$\zeta(y)\leqslant\zeta(x)+c|x-y|/\delta_1.$$

Поэтому

$$|\mu(x)|\leqslant c\mathbf{M}_x^*\Big(\zeta(x)+(1/\delta_1)\max_{s\leqslant\tau_1}|\eta^*(s)-x|\Big)\,\tau_1.$$

Снос η^* ограничен, $\tau_1\leqslant\sigma=\delta^2$. Следовательно, (ср. с (1.8)) при малых δ

$$(1/\delta_1)\,\mathbf{M}_x^*\tau_1\cdot\max_{s\leqslant\tau_1}|\eta^*(s)-x|\leqslant(\delta/\delta_1)\left(\mathbf{M}_x^*\tau_1\right)^{1/2}\left(\mathbf{M}_x^*\max|\eta^*(s)-x|^2\right)^{1/2}\leqslant \\ \leqslant c\,(\delta/\delta_1)\,\mathbf{M}_x^*\tau_1. \tag{9}$$

Вместе с очевидным неравенством $\zeta(x)\leqslant cr(x,\partial Q)/\delta_1$ (9) приводит к оценке

$$|\mu(x)|\leqslant c\delta_1^{-1}\delta\ln(1/\delta)\cdot\mathbf{M}_x^*\tau_1, \\ r(x,\partial Q)\leqslant\delta\ln(1/\delta). \tag{10}$$

В точках, далеких от границы, можно воспользоваться соображениями, использованными при доказательстве лемм 2.2, 2.4.

При $r(x,\partial Q)\geqslant\delta\ln 1/\delta$ по (1.8)

$$M_x^*(\delta-\tau_1)\leqslant c'\exp\{-c''(\ln\delta)^2\}\,\mathbf{M}_x^*\tau_1.$$

6*

Поэтому $\mu(x) = \mu^{(1)}(x) + \rho$,

$$|\rho| \leqslant c'\mathbf{M}_x^*\tau_1 \cdot \exp\{-c''(\ln\delta)^2\}, \tag{11}$$

где $\mu^{(1)}$ — сумма конечного числа выражений вида

$$\mu_k(x) = \mathbf{M}_x^* \int_0^\sigma \exp\{-B^0(t)\}\, k(\eta^*(t)/\varepsilon)\, \Psi(\eta^*(t))\, dt,$$

причем для случайного поля k $\langle k\rangle = 0$, Ψ неслучайна и $|\Psi(x) - \Psi(y)| \leqslant c(|x-y|/\delta_1 + |x-y|^\beta)$, B^0 имеет тот же смысл, что в (6).

Так как $b_0 \geqslant 0$ и ограничена, при $t \leqslant \sigma$

$$0 \leqslant 1 - \exp\{-B^0(t)\} \leqslant c\sigma$$

с вероятностью 1. Как и при выводе (10), $\delta = \sigma^{1/2}$,

$$\mathbf{M}_x^* \int_0^\sigma (|\eta^* - x|^\beta + |\eta^* - x|/\delta_1)\, dt \leqslant c(\delta^\beta + \delta/\delta_1).$$

Поэтому при вычислении μ_k можно считать $B^0 = 0$ и Ψ постоянной:

$$\sigma^{-1}|\mu_k(x)| \leqslant c\left\{\left|\mathbf{M}_x^* \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma k(\eta^*)\, dt\right| + \delta^\beta + \sigma + \delta/\delta_1\right\}. \tag{12}$$

При оценке правой части (12) удобно с помощью формулы Гирсанова (см., например, [6], гл. III, § 3) перейти от распределения $\mathbf{M}_x^*$ к распределению $\mathbf{M}_x^\varepsilon$ процесса η^ε без сноса с коэффициентами диффузии $a_{ij}(x/\varepsilon)$. Если функционал $\xi(w)$ зависит лишь от отрезка траектории $w[0, t]$, то

$$\mathbf{M}_x^*\xi(\eta^*) = \mathbf{M}_x^\varepsilon \exp\{\Lambda\}\xi(\eta),$$

где $\Lambda = \int_0^t \hat{a}_{ij} b_j d\eta^{(i)} - (1/2)\int_0^t \hat{a}_{ij} b_i b_j ds$,

аргумент $\hat{a}_{ij}$, b_j равен $\eta(s)/\varepsilon$, $\|\hat{a}_{ij}\|$ — обратная к $\|a_{ij}\|$ матрица. Так как матрица диффузии равномерно эллиптична, а снос ограничен, то

$$\mathbf{M}_x^\varepsilon(\exp\{\Lambda\} - 1)^2 = \mathbf{M}_x^\varepsilon \exp\{2\Lambda\} - 1 \leqslant \exp\{ct\} - 1 \leqslant ct, \quad t \leqslant \sigma \leqslant 1.$$

Вместе с (12) эта оценка показывает, что

$$|\mu_k|/\sigma \leqslant c\left\{\left|\mathbf{M}_x^\varepsilon \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma k\, ds\right| + \delta^\alpha + \delta + \delta/\delta_1\right\}. \tag{13}$$

Оценить

$$\mathbf{E}\mathbf{M}_x^*\left|\mathbf{M}_{\eta^*(\tau_l)}^\varepsilon \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma k\, ds\right|,$$

где $k = k(\eta^\varepsilon(s)/\varepsilon)$, можно с помощью соображений, использованных в выводе оценок лемм 2.2, 2.4. Удобно при этом переходом к переменным $X = x/\varepsilon$, $S = s/\varepsilon^2$ преобразовать η^ε в диффузию η без сноса (1.5), а η^* — в диффузию η_1 с производящим оператором вида (1.3) с $b_{1i}(X) = \varepsilon b_i(X)$. Эти процессы удовлетворяют условиям лемм 1.1, 1.2. Роль T в лемме 1.1 играет $l(\delta/\varepsilon)^2$, в лемме 1.2 $t = (\delta/\varepsilon)^2$.

Изменяя коэффициенты на $V_r\eta_1[0, \tau_l/\varepsilon^2]$ по формулам (2.5), можно убедиться, как при выводе (2.8), в том, что

$$\mathbf{E}\mathbf{M}_x^*\left|\mathbf{M}_{\eta^*(\tau_l)}^\varepsilon \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma k\, ds\right| \leqslant \mathbf{E}\mathbf{M}_0|\{k\,|\,0, t\}| + c\,\{(\varepsilon/\delta)^{2\beta_1} +$$

$$+ [l(\varepsilon/\delta)^{d-2}\ln(l\delta^2/\varepsilon^2)]^{\beta_2}\ln(\delta/\varepsilon) + \exp\{-c'(\ln\delta/\varepsilon)^2\}, \quad t = (\delta/\varepsilon)^2, \quad \langle k\rangle = 0.$$

Отсюда по лемме 2.3

$$\mathbf{E}\mathbf{M}_x^* \left| \mathbf{M}_{\eta^*(\tau_l)}^{\varepsilon} \frac{1}{\sigma} \int\limits_0^{\sigma} k ds \right| \leqslant c \left\{ (\varepsilon/\delta)^{\varkappa_1} + (l(\varepsilon/\delta)^{d-2})^{\varkappa_2} (\ln l\delta^2/\varepsilon^2)^{\beta_2} \right\},$$

$$\sigma = \delta^2, \quad \varkappa_1, \varkappa_2, \beta_2 > 0. \tag{14}$$

Окончательно из (10), (11), (14) при любом l следует неравенство для слагаемых в (8)

$$\mathbf{E} | \mathbf{M}_x^* \exp\{-B^0(\tau_l)\} \mu(\eta(\tau_l)) | \leqslant c\mathbf{E}\mathbf{M}_x^*(\tau_{l+1} - \tau_l) \cdot \{ (l\varepsilon^{d-2}/\delta^{d-2})^{\varkappa_2} \times$$
$$\times \left(\ln^{\beta_2}(l\delta^2/\varepsilon^2)\right) + (\delta/\delta_1) \ln 1/\delta + (\varepsilon/\delta)^{\varkappa_1} + \delta + (\delta/\delta_1) \} = \varepsilon_1(l) \cdot \mathbf{E}\mathbf{M}_x^*(\tau_{l+1} - \tau_l).$$

Эта оценка действует, если l не слишком велико. При больших l по ограниченности подынтегрального выражения в (8) выполнена оценка

$$\mathbf{E} | \mathbf{M}_x^* \exp\{-B^0(\tau_l)\} \mu(\eta^*(\tau_l)) | \leqslant s\mathbf{E}\mathbf{M}_x^*(\tau_{l+1} - \tau_l).$$

Отсюда при любом l

$$\mathbf{E} | w_\varepsilon(x) | \leqslant \varepsilon_1(l) \mathbf{E}\mathbf{M}_x^* \tau + c\mathbf{E}\mathbf{M}_x^*(\tau - l\sigma)^+ \leqslant$$
$$\leqslant c \left[\varepsilon_1(l) \mathbf{E}\mathbf{M}_x^* \tau + (l\sigma)^{-1} \mathbf{M}_x^* \tau^2 \right]. \tag{15}$$

Легко проверить (см., например, [6]), что в условиях теоремы 2 $\mathbf{M}_x^* \tau^2 \leqslant c$. Поэтому оценка

$$\mathbf{E} | w_\varepsilon(x) | \leqslant c\varepsilon^{\alpha_1}, \quad \alpha_1 \geqslant 0, \tag{16}$$

вытекает из (15), если выбрать $\delta = \delta_1^2$, $l = [\delta_1^{-3}]$, $\delta_1 = \varepsilon^\gamma$ с γ из интервала $(0, (d-2)/(2d-1))$. Возможность построения обеспечивает условие $d \geqslant 3$.

Чтобы от «точечной» оценки (15) перейти к оценке теоремы, достаточно заметить, что близость оператора L_ε к оператору Лапласа (условие (2.2)) доставляет априорную оценку

$$|D_i D_j u_\varepsilon|_p \leqslant c, \quad |D_i D_j U|_p \leqslant c$$

с некоторым $p > d + 1$. Отсюда с помощью теорем вложения следует, что

$$\sup_Q | u_\varepsilon - U | \leqslant c | u_\varepsilon - U |_2,$$

и, так как по принципу максимума u_ε, U ограничены неслучайной постоянной, не зависящей от ε, из (16) вытекает, что

$$\mathbf{E} \sup_Q | u_\varepsilon - U | \leqslant c\varepsilon^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жиков В. В., Сиражудинов М. М.** О G-компактности одного класса недивергентных эллиптических операторов второго порядка.— Изв. АН СССР. Математика, 1981, т. 45, № 4, с. 718—734.
2. **Юринский В. В.** Об усреднении недивергентных уравнений второго порядка со случайными коэффициентами.— Сиб. мат. журн., 1982, т. XXIII, № 2, с. 176—188.
3. **Papanicolaou G. C., Varadhan S. R. S.** Diffusions with random coefficients.— In: Statistics and Probability: Essays in Honour of C. R. Rao. Amsterdam — New York: North Holland, 1982, p. 547—552.
4. **Крылов Н. В.** Управляемые процессы диффузионного типа.— М.: Наука, 1977. 400 с.
5. **Stroock D. W., Varadhan S. R. S.** Multidimensional Diffusion Processes. Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1979. 338 p.
6. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Теория случайных процессов. Т. III. М.: Наука, 1975. 496 с.
7. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
8. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 310 с.
9. **Крылов Н. В., Сафонов М. В.** Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами.— Изв. АН СССР. Математика, 1980, т. 44, № 1, с. 161—175.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.