деление $G_x$ сосредоточено на сфере $S_x(r_0)$. Предположим, что справедливо представление (99). Обозначим через $\lambda$ распределение $T_1$. Очевидно, $\forall(x \in S_0)$ $\lambda(D\colon \rho(x, Dx) = r_0) = 1$. Следовательно, существует счетная всюду плотная последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ такая, что $\lambda\left(\bigcap_1^\infty E_n\right) = 1$, где $E_n = \{D\colon \rho(x_n, Dx_n) = r_0\}$.

Если $D \in \bigcap_1^\infty E_n$, то $\forall x \in S_0$ $\rho(x, D_x) = r_0$. Поэтому $\lambda(D\colon \rho(x, Dx) = r_0 \quad \forall x) = 1$.

С другой стороны, при нечетном $d$ равенство $\rho(x, Dx) = r_0$ не может выполняться для всех $x$ ни при одном $D$.

Что касается четных $d$, то в этом случае представление (99) возможно при любом $G_x$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Кац М.** Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: ИЛ, 1965. 407 с.
2. **Freed K. F.** Polymers as self-avoiding walks.— Ann. Probab., 1981, v. 9, N 1, p. 537—556.
3. **Тутубалин В. Н.** Центральная предельная теорема для случайных движений евклидова пространства.— Вестн. МГУ, 1967, т. 22, № 6, с. 100—108.
4. **Gorostiza L. G.** A central limit theorem for a class of $d$-dimensional random motions with constant speed.— Bull. Amer. Math. Soc., 1972, v. 78, N 4, p. 575—577.
5. **Gorostiza L. G.** The central limit theorem for random motions of $d$-dimensional euclidean space.— Ann. Probab., 1973, v. 1, N 4, p. 603—612.
6. **Gorostiza L. G.** An invariance principle for a class of $d$-dimensional polyconal random functions.— Trans. Amer. Math. Soc., 1973, v. 177, N 450, p. 413—445.
7. **Сираждинов С. Х., Сафарбаев И.** Об оценке скорости сходимости в одной схеме случайного блуждания.— В кн.: Третья Вильнюсская конференция по теории вероятности и математической статистике. Т. 2. (Тезисы докладов). Вильнюс, 1981, с. 155.
8. **Сафарбаев И.** Оценка скорости сходимости в одной схеме случайного блуждания в к-мерном пространстве.— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1982, вып. 2, с. 62.
9. **Kyrtz T. G.** The central limit theorem for markov chains.— Ann. Probab., 1981, v. 9, N 1, p. 577—560.
10. **Нагаев С. В.** Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова.— Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, № 4, с. 389—416.
11. **Максимов В. М.** О применимости центральной предельной теоремы к суммам вида $\sum f(\xi_1 \ldots \xi_i)$. — Изв. вузов. Математика, 1970, № 12, с. 61—71.
12. **Алешкявичюс Г. Ю.** Некоторые предельные теоремы для сумм случайных величин, заданных на однородной регулярной цепи Маркова.— Литов. матем. сб., 1966, т. 6, № 3, с. 397—411.
13. **Хьюитт Э., Росс К.** Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. М.: Мир. 901 с.
14. **Нагаев С. В.** Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова.— Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, № 1, с. 67—86.
15. **Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.** Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука. 524 с.


*Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.*

# ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОЦЕНИВАНИЯ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ТЕОРЕМАХ ЭРГОДИЧНОСТИ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

*С. Г. ФОСС*

В работе излагается один способ, при помощи которого можно получать оценки скорости сходимости в теоремах эргодичности (и, как следствие, в теоремах непрерывности) единообразно для различных типов многоканальных систем обслуживания. Этот способ основан на методе обновляющих событий, изложенном в [1], и возможности использования максимальной координаты вектора времени ожидания в многоканальной системе с очередью и циклическим порядком обслуживания в качестве мажоранты для соответствующих характеристик рассматриваемых многоканальных систем.

Работа подразделяется на 5 пунктов: п. 1 — введение, п. 2 — теоремы сравнения, п. 3 — один вспомогательный результат, п. 4 — изложение способа оценивания, п. 5 — доказательство теорем сравнения.

## 1. Введение

Рассмотрим различные типы многоканальных систем обслуживания (с ожиданием, с отказами и т. д.), в которых вызовы поступают и обслуживаются по одному; $s_n$ есть время обслуживания $n$-го вызова и $\tau_n$ — время между моментами прихода $(n-1)$-го и $n$-го вызовов; $\mathbf{w}_n$ — вектор времени ожидания.

Последовательность $\{\mathbf{w}_n\}$ определяется с помощью рекуррентного соотношения:

$$\mathbf{w}_{n+1}=F(\mathbf{w}_n,\ s_n,\ \tau_n);\quad n=0,\ 1,\ \ldots \tag{1}$$

Будем предполагать, что $\{(s_n,\ \tau_n)\}$ есть стационарная метрически транзитивная последовательность и начальный вектор $\mathbf{w}_0$ неслучаен. Своеобразие системы определяется видом функции $F$.

Через $\mathcal{F}_{k,l}$ обозначим $\sigma$-алгебру, порожденную случайными величинами $\{(s_n,\ \tau_n);\ k\leqslant n\leqslant l\}$.

Пусть $L\geqslant 1$ — целое число. Следуя [1], события $A_n\in\mathcal{F}_{-\infty,\,n+L}$ назовем обновляющими на интервале $[n,\ n+L]$, если при всех $k\geqslant L$ на событии $A_n$ выполнено равенство:

$$\mathbf{w}_{n+k}=\varphi(s_n,\ \tau_n,\ s_{n+1},\ \tau_{n+1},\ \ldots,\ s_{n+k-1},\ \tau_{n+k-1}),$$

где функция $\varphi$ зависит лишь от числа аргументов.

Предположим, что события $\{A_n\}$ образуют стационарную последовательность, либо $A_n\supseteq A_n'$, где последовательность $\{A_n'\}$ стационарна.

Тогда из теоремы 1 работы [1, гл. IV, § 6] следует, что если $\mathbf{P}\{A_1'\}>0$, то существует стационарная последовательность $\{\mathbf{w}^n\}$, удовлетворяющая рекуррентным соотношениям

$$\mathbf{w}^{n+1}=F(\mathbf{w}^n,\ s_n,\ \tau_n), \tag{2}$$

причем

$$\rho_n=\mathbf{P}\{\mathbf{w}_n\neq\mathbf{w}^n\}\leqslant 1-\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{n-L}A_j'\right\}\to 0.$$

Это утверждение будем называть теоремой эргодичности.

В данной работе мы, предполагая, что теорема эргодичности имеет место, рассмотрим задачу оценивания скорости сходимости $\rho_n$ к 0.

Заметим, что путем несложных преобразований можно получить равенства:

$$1-\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{n}A_j'\right\}=\sum_{j=n+1}^{\infty}\mathbf{P}\left\{A_j'\bigcap_{i=1}^{j-1}\overline{A}_i'\right\}=\mathbf{P}\{A_0'\}\,\mathbf{M}\{\theta;\ \theta>n\},$$

где $\theta$ — собственная случайная величина, равная

$$\theta=\theta(\omega)=\min\{n\geqslant 1:\ \omega\in A_n/A_0\}.$$

Значит, в теоремах эргодичности можем получать оценки скорости сходимости следующего вида:

Пусть $G(n)$ — некоторая неотрицательная неубывающая функция, $\lim\limits_{n\to\infty}(n/G(n))=0$. Тогда если $\mathbf{M}G(\theta)<\infty$, то $\rho_{n+L}=o(n/G(n))$.

В данной работе предлагается простой способ для нахождения условий конечности $\mathbf{M}G(\theta)$ (см. п. 4, теоремы 3 и 4). В целях упрощения изложения рассуждения проводятся на примере конкретной функции $G(x)=x^\alpha$, $\alpha>1$. Отметим лишь, что результаты можно естественным образом перенести на некоторый класс функций $\{G\}$, включающий, например, функцию $G(x)=\exp\{\lambda x\}$, $\lambda>0$ (определение класса $\{G\}$ см. в [2]).

З а м е ч а н и е 1. В [3, гл. IV, § 7] приводятся по сути неулучшаемые оценки скорости сходимости для систем с ожиданием в случае, когда

$\{(s_n, \tau_n)\}$ образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. В [4—6] получены в этом же случае несколько более слабые оценки для различных типов систем. Как показывают примеры 1—2 (см. п. 4 данной работы), оценки, содержащиеся в [3, гл. IV, § 7], являются следствием теоремы 4, а оценки, содержащиеся в [4—6], можно улучшить, что следует из теорем 3—4.

Замечание 2. Из оценок скорости сходимости в теоремах эргодичности следуют соответствующие оценки в теоремах непрерывности, если воспользоваться одним стандартным приемом (см., например, [1, 5, 7]).

Замечание 3. Предлагаемый способ может быть применен и к другим процессам, удовлетворяющим соотношениям типа (1) — например, к многоканально-многофазным системам.

## 2. Теоремы сравнения

Утверждения, содержащиеся в данном пункте, представляют, как нам кажется, и самостоятельный интерес.

Определим сначала более точно, что мы понимаем под вектором времени ожидания. Через $w_{n,1}$ обозначим время с момента прихода $n$-го вызова до момента, в который все обслуживающие приборы (каналы) освободились от вызовов с номерами меньшими, чем $n$; через $w_{n,2} \leqslant w_{n,1}$ — время до первого момента, в который обслуживание вызовов с номерами меньшими, чем $n$, продолжается не более чем на одном канале, и т. д. Наконец,

$$\mathbf{w}_n = (w_{n,1}, w_{n,2}, \ldots); \quad w_{n,1} \geqslant w_{n,2} \geqslant \ldots$$

В случае, когда векторы $\mathbf{w}_n$ построены в соответствии с другой управляющей последовательностью $(s_n', \tau_n')$, будем использовать запись $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_n(s_n', \tau_n')$.

Пусть $m \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Будем предполагать, что начальный вектор $\mathbf{w}_0$ имеет размерность $m$.

Примем следующее естественное соглашение. Если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — некоторый $m$-мерный вектор, то при $k \geqslant m+1$ (в частности, и при $k = \infty$) тем же символом $\mathbf{x}$ будем обозначать и $k$-мерный вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$.

Обозначим также через $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ вектор размерности $m$, у которого $j$-ая координата равна единице, а остальные — нули; через $\mathbf{i} = (1, 1, \ldots, 1)$ — $m$-мерный единичный вектор; $x^+ = \max(x, 0)$ для числа $x$ и $\mathbf{x}^+ = (x_1^+, \ldots, x_m^+)$ для вектора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$; $R(x)$ — перестановка координат вектора $\mathbf{x}$ в порядке невозрастания; $I\{A\}$ — индикатор события $A$.

Будем говорить, что последовательность $(s_n, \tau_n)$ имеет вид $G/GI$, если $\{s_n\}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, не зависящих от $\{\tau_n\}$, и вид $GI/GI$, если $\{s_n\}$ и $\{\tau_n\}$ есть две независимые последовательности, в каждой из которых случайные величины независимы и одинаково распределены.

Введем в рассмотрение следующие системы обслуживания:

1) $m$-канальная система с ожиданием и дисциплиной обслуживания «первый пришел — первый обслуживается». Векторы времени ожидания связаны следующим рекуррентным соотношением:

$$\mathbf{w}_{n+1} = R(\mathbf{w}_n + \mathbf{e}_m s_n - \mathbf{i}\tau_n)^+;$$

2) $k$-канальная система с ожиданием и циклической дисциплиной обслуживания; векторы времени ожидания в этой системе будем обозначать через $\mathbf{w}^{c,k}$; $\mathbf{w}^c \equiv \mathbf{w}^{c,m}$;

3) система с бесконечным числом обслуживающих каналов. Векторы времени ожидания $\mathbf{w}_n^\infty$ связаны соотношением

$$\mathbf{w}_{n+1}^\infty = R\left(s_n - \tau_n,\ w_{n,1}^\infty - \tau_n,\ w_{n,2}^\infty - \tau_n, \ldots\right)^+;$$

4) $m$-канальная система с отказами. Векторы времени ожидания связаны соотношением

$$\mathbf{w}_{n+1}^R = R\left(\mathbf{w}_n^R + \mathbf{e}_m I\{w_{n,m}^R = 0\} s_n - \mathbf{i}\tau_n\right)^+;$$

5) $m$-канальная система с ограниченным числом мест ожидания (равным $N \geqslant 1$). Если $q_n$ есть число вызовов с номерами $<n$, находящихся в системе в момент прихода $n$-го вызова, то векторы времени ожидания связаны соотношением

$$\mathbf{w}_{n+1}^{R(N)} = R\left(\mathbf{w}_n^{R(N)} + \mathbf{e}_m I\{q_n < N + m\} s_n - \mathbf{i}\tau_n\right)^+;$$

6) $m$-канальная система с ограниченным временем ожидания. Предполагается, что задана стационарная последовательность неотрицательных случайных величин $\{\gamma_n\}$. Тогда векторы времени ожидания связаны соотношением

$$\mathbf{w}_{n+1}^\gamma = R\left(\mathbf{w}_n^\gamma + \mathbf{e}_m I\{w_{n,m}^\gamma < \gamma_n\} s_n - \mathbf{i}\tau_n\right)^+.$$

Приведем основные неравенства, связывающие введенные выше характеристики.

Предложение 1. Для любых чисел $n = 1, 2, \ldots$ и $k \geqslant m$ следующие неравенства выполнены п. н.:

$$w_{n,1}^R \leqslant w_{n,1}^\infty \leqslant w_{n,1}^{c,k}; \quad w_{n,1}^{R(N)} \leqslant (N+1)\, w_{n,1}^\infty (s_n, \tau_n/N);$$

$$w_{n,1}^\gamma \leqslant w_{n,1}^\infty (s_n + \gamma_n, \tau_n).$$

**Теорема 1.** *Если последовательность $(s_n, \tau_n)$ имеет вид $G/GI$, то для любого числа $n = 1, 2, \ldots$ и неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$*

$$\mathbf{P}\{w_{1,1} > x_1, \ldots, w_{n,1} > x_n\} \leqslant \mathbf{P}\{w_{1,1}^c > x_1, \ldots, w_{n,1}^c > x_n\}.$$

Как следует из доказательства (см. п. 5 данной работы), утверждение теоремы 1 остается верным, если вместо циклической дисциплины обслуживания рассмотреть любую другую дисциплину, «не зависящую от будущего».

Сформулируем одно следствие предложения 1 и теоремы 1. Пусть $z > 0$ — произвольное число и $\nu(z) = \min\{n\colon\ w_{n,1} \leqslant z\}$. Тогда (если использовать естественные соглашения об употреблении верхних индексов) верно

**Следствие 1.** Для любых чисел $z > 0$ и $k \geqslant m$

$$\nu^R(z) \leqslant \nu^\infty(z) \leqslant \nu^{c,k}(z) \quad \text{и} \quad \nu^{R(N)} \leqslant \nu_*^\infty(z/(N+1)),$$

где случайная величина $\nu_*^\infty$ построена по управляющей последовательности $(s_n, \tau_n/N)$. Если же последовательность $(s_n, \tau_n)$ вида $G/GI$, то $\mathbf{P}\{\nu(z) \geqslant j\} \leqslant \mathbf{P}\{\nu^c(z) \geqslant j\}$ для всех $j$.

Замечание 4. Неравенства, приведенные в предложении 1, естественны и не требуют особого доказательства. Некоторые из них использовались в работах [1, 4—6].

Замечание 5. В предложении 1 и теореме 1 не требуется стационарности $\{\tau_n\}$, а в предложении 1 к тому же необязательна и стационарность $\{s_n\}$.

В свою очередь, случайные величины $w_{n,1}^{c,k}$ при каждом фиксированном $k$ можно также оценить сверху. Предложим три варианта оценивания.

1 вариант. Рассмотрим одноканальную систему обслуживания с ожиданием, временами обслуживания $S_n = \max(s_{kn}, s_{kn+1}, \ldots, s_{kn+k-1})$ и интервалами между моментами прихода вызовов $T_n = \tau_{kn} + \ldots + \tau_{kn+k-1}$. Пусть $u_0 = \max\limits_j w_{0j}$ и $u_{n+1} = (u_n - T_n)^+ + S_n$.

**Лемма 1.** *При любом $n = 0, 1, \ldots$* $w_{nk,1}^{c,k} \leqslant u_n$ п.н.

2 вариант. Рассмотрим $k$ одноканальных систем: при $j = 1, \ldots, k$

$$\xi_{0,j} = w_{0j}; \quad \xi_{n+1,j} = (\xi_{n,j} - T_n)^+ + s_{kn+j-1}.$$

**Лемма 2.** При любом $n=0,\ 1,\ \ldots\ w^{c,k}_{nk,1}\leqslant \max\limits_j \xi_{n,j}$ п. н.

3 вариант. Пусть $X>0$ — некоторое число; положим

$$\tau^1_n=\min(X,\ \tau_n),\quad T^1_n=\tau^1_{kn}+\tau^1_{kn+1}+\ldots+\tau^1_{kn+k-1}.$$

Рассмотрим $k$ одноканальных систем: при $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$

$$\eta_{0,j}=w_{0j};\quad \eta_{n+1,j}=(\eta_{n,j}+s_{kn+j-1}-T^1_n)^+.$$

**Лемма 3.** *При любом* $n=0,\ 1,\ \ldots$

$$w^{c,k}_{nk,1}\leqslant \max_j \eta_{n,j}+kX \text{ п.н.}$$

Приведем некоторые следствия лемм 1—3. Пусть

$$\zeta_1=\min\{n\geqslant 1\colon u_n\leqslant z\}\leqslant \zeta'_1=\min\{n\geqslant 1\colon u_{n-1}\leqslant T_{n-1};\ s_{n-1}\leqslant z\};$$

$$\zeta_2=\min\{n\geqslant 1\colon \max\xi_{n,j}\leqslant z\}\leqslant \zeta'_2=\min\Big\{n\geqslant 1\colon \max_j(\xi_{n-1,j}-T_n)^+=0;$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant k} s_{(n-1)k+j-1}\leqslant z\Big\};\quad \zeta_3=\min\Big\{n\geqslant 1\colon \max_j \eta_{n,j}=0\Big\}.$$

**Следствие 2.** При $i=1,\ 2$ $\nu^{c,k}\leqslant k\zeta_i\leqslant k\zeta'_i$ п. н. При $z\geqslant kX$ $\nu^{c,k}\leqslant$ $\leqslant k\zeta_3$ п. н.

Наконец, предположим, что последовательность $(s_n,\ \tau_n)$ имеет вид $GI/GI$. Введем некоторые обозначения.

Пусть $\{\tau^{(1)}_n\},\ \ldots,\ \{\tau^{(k)}_n\}$ — независимые в совокупности последовательности, распределенные, как $\{\tau_n\}$; $T^j_n=\tau^{(j)}_{nk}+\ldots+\tau^{(j)}_{nk+k-1}$. Положим

$$\xi^j_0=w_{0j};\quad \xi^j_{n+1}=(\xi^j_n-T^j_n)^++s_{kn+j-1};\quad \eta^j_0=w_{0j};\quad \eta^j_{n+1}(\eta^j_n+s_{kn+j-1}-$$
$$-T^{1,j}_n)^+;\quad j=1,\ \ldots,\ k,$$

где $\tau^{1,j}_n=\min\{\tau^{(j)}_n,\ X\}$; $T^{1,j}_n=\tau^{1,j}_{nk}+\ldots+\tau^{1,j}_{nk+k-1}$.

**Теорема 2.** Если последовательность $(s_n,\ \tau_n)$ имеет вид $GI/GI$, то

$$\mathbf{P}\Big\{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\max_{1\leqslant j\leqslant k}(\xi_{ij}-T_i)>0\Big\}\leqslant \mathbf{P}\Big\{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\max_{1\leqslant j\leqslant k}(\xi^j_i-T^j_i)>0\Big\}$$

и

$$\mathbf{P}\Big\{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\max_{1\leqslant j\leqslant k}\eta_{ij}>0\Big\}\leqslant \mathbf{P}\Big\{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\max_{1\leqslant j\leqslant k}\eta^j_i>0\Big\}.$$

**Следствие 3.** В условиях теоремы 2 для любых $y>0$ выполнены неравенства:

$$\mathbf{P}\{\zeta_2>y\}\leqslant \mathbf{P}\{\zeta^*_2>y\}\quad \text{и}\quad \mathbf{P}\{\zeta_3>y\}\leqslant \mathbf{P}\{\zeta^*_3>y\},$$

где $\zeta^*_2=\min\Big\{n\geqslant 1\colon \max\limits_j(\xi^j_n-T^j_n)^+=0;\ \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k} s_{(n-1)k+j-1}\leqslant z\Big\}$ и $\zeta^*_3=$ $=\min\Big\{n\geqslant 1\colon \max\limits_j \eta^j_n=0\Big\}.$

## 3. Один вспомогательный результат

Рассмотрим $m$-канальную систему обслуживания с ожиданием и дисциплиной обслуживания «первый пришел — первый обслуживается».

Пусть $C=\max\limits_j w_{0j}$ и $\{\mathbf{w}^n=(w^n_1,\ w^n_2,\ \ldots,\ w^n_m)\}$ — стационарная последовательность векторов ожидания. Тогда $w_{n1}\leqslant w^n_1+C$ п. н. при всех $n$.

Предположим, что обновляющие события $A_n$ представимы в виде:

$$A_n=\{w_{n1}\leqslant z\}\cap D_n,$$

где $z > 0$ — некоторое число, $D_n = \{(s_n, \tau_n, \ldots, s_{n+L-1}, \tau_{n+L-1}) \in B\}$, $L = L(z)$ — целое число, $B = B(z)$ — борелевское множество.

Предположим также, что $z$ (и, по нему, $L$ и $B$) можно подобрать так, что событие $A_0' = \{w_1^0 \leqslant z - C\} \cap D_0$ имеет положительную вероятность.

Сохраним введенное в п. 1 обозначение для случайной величины $\theta$ и обозначим $z_1 = z - C$; $\psi_1 = \min\{n \geqslant L: w_1^n \leqslant z_1 / w_1^0 \leqslant z_1\}$; $\mu_1 = \psi_1$; $\psi_{k+1} = \min\{n \geqslant L + \psi_k: w_1^n \leqslant z_1 / w_1^0 \leqslant z_1\}$; $\mu_{k+1} = \psi_{k+1} - \psi_k$.

Рассмотрим также другую последовательность векторов ожидания, $\{\mathbf{w}_n^*\}$, построенную при начальном условии $\mathbf{w}_0^* = (z_1, z_1, \ldots, z_1)$, и обозначим $\nu = \min\{n \geqslant L: w_{n,1}^* \leqslant z_1\}$.

В случае, когда последовательность $(s_n, \tau_n)$ имеет вид $GI/GI$, известен (см. 2) следующий результат:

**Лемма 4.** *Пусть* $\mathbf{P}\{D_0\} > 0$. *Тогда если* $\mathbf{M}\{\nu^\alpha\} < \infty$, $\alpha > 1$, *то и* $\mathbf{M}\{\theta^\alpha\} < \infty$.

Замечание 6. Мы привели утверждение леммы 1 работы [2] лишь в частности: для конкретной системы обслуживания и для конкретной функции $G(x) = x^\alpha$.

Попробуем обобщить утверждение леммы 4 на случай, когда независимости не предполагается.

Пусть $\theta_1 = \min\{k \geqslant 1: w_1^k \leqslant z_1$ и $D_k / w_1^0 \leqslant z_1\}$. Так как $\mathbf{M}(\theta_1^\alpha) = \mathbf{M}(\theta^\alpha)\mathbf{P}\{D_0\} + \mathbf{M}(\theta_1^\alpha/\overline{D}_0\}\mathbf{P}\{\overline{D}_0\}$, то $\mathbf{M}(\theta^\alpha) \leqslant \mathbf{M}(\theta_1^\alpha)(\mathbf{P}(D_0))^{-1}$.
Далее, по формуле полной вероятности,

$$\mathbf{M}(\theta_1^\alpha) \leqslant \mathbf{M}(\psi_1^\alpha; D_{\psi_1}) + \ldots + \mathbf{M}\{\psi_n^\alpha; \overline{D}_{\psi_1} \ldots \overline{D}_{\psi_{n-1}} D_{\psi_n}\} + \ldots$$

$$\ldots \leqslant \mathbf{M}(\psi_1^\alpha) + \ldots + \mathbf{M}(\psi_n^\alpha; \overline{D}_{\psi_1} \ldots \overline{D}_{\psi_{n-1}}) + \ldots \equiv r_1 + \ldots + r_n + \ldots$$

Для того, чтобы последний ряд сходился, достаточно, чтобы $r_n = O(n^{-1-\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$. И так как $(x_1 + \ldots + x_n)^\alpha \leqslant n^{\alpha-1}(x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha)$, то

$$r_n \leqslant n^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{M}(\mu_i^\alpha; \overline{D}_{\psi_1} \ldots \overline{D}_{\psi_{n-1}}) = n^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{M}(\mu_i^\alpha \mathbf{P}\{\overline{D}_{\psi_j}/\mu_i\}).$$

Следовательно, условие $\mathbf{M}(\mu_i^\alpha \mathbf{P}\{\overline{D}_{\psi_1} \ldots \overline{D}_{\psi_{n-1}}/\mu_i\}) \leqslant C_1 n^{-\alpha-1-\varepsilon}$ п. н. для всех $n \geqslant i$ будет достаточным для сходимости ряда. Последнее неравенство будет выполнено, если

$$\mathbf{P}\{\overline{D}_{\psi_1} \ldots \overline{D}_{\psi_{n-1}}/\mu_i\} \leqslant C_2 n^{-\alpha-1-\varepsilon} \text{ п.н.} \tag{3}$$

и $\mathbf{M}\{\mu_i^\alpha\} \leqslant C_3$. Но, как нетрудно видеть,

$$\mathbf{M}\{\mu_i^\alpha\} \leqslant \mathbf{M}\{\nu^\alpha\}(\mathbf{P}\{w_1^0 \leqslant z_1\})^{-1}.$$

Следовательно, можно сформулировать такое утверждение.

**Лемма 5.** Пусть $\mathbf{P}\{A_0'\} > 0$. Тогда если $\mathbf{M}\{\nu^\alpha\} < \infty$ и выполнено (3), то и $\mathbf{M}\{\theta^\alpha\} < \infty$.

Заметим, что условие (3) можно заменить, например, на такие два условия:

$$\mathbf{P}\{\overline{D}_{\psi_1} \ldots \overline{D}_{\psi_{i-2}}/\mu_i\} \leqslant C_4 i^{-\alpha-1-\varepsilon} \text{ п.н.}$$

и $$\mathbf{P}\{\overline{D}_{\psi_i} \ldots \overline{D}_{\psi_n}/\mu_i\} \leqslant C_5 (n-i)^{-\alpha-1-\varepsilon} \text{ п.н. для всех } n \geqslant i.$$

В свою очередь, эти условия выполнены, если

а) существует функция $g_1(n) \to 0$ такая, что для любого события

$$A \in \mathscr{F}_{0,\infty} \qquad \mathbf{P}\{A/\mathscr{F}_{-\infty,-n}\} \leqslant \mathbf{P}\{A\} + g_1(n) \text{ п. н.};$$

б) существует функция $g_2(n) \to 0$ такая, что для любого события

$$B \in \mathcal{F}_{-\infty,0} \qquad \mathbf{P}\{B/\mathcal{F}_{n,\infty}\} \leqslant \mathbf{P}\{B\} + g_2(n) \text{ п. н.};$$

в) $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\overline{D}_{\psi_n}/\overline{D}_{\psi_k}\overline{D}_{\psi_{k+1}}\ldots\overline{D}_{\psi_{n-1}}\} = q < 1$ для всех $k$.

Условия а), б) и в), естественно, выполнены, если последовательность $(s_n, \tau_n)$ имеет вид $GI/GI$.

Замечание 7. Рассмотрим $m$-канальную систему с ожиданием и циклической дисциплиной обслуживания и сохраним для нее все введенные в этом пункте обозначения, пометив их верхним индексом $^c$ (например, $\mathbf{w}^{n,c}$; $\psi_k^c$; $\nu^c$). Тогда для этой системы также справедливо утверждение леммы 5 (при естественной дополнительной индексации).

Замечание 8. Если последовательность $(s_n, \tau_n)$ — вида $G/GI$, то, как следует из теоремы 1, в лемме 5 условие $\mathbf{M}\nu^\alpha < \infty$ можно заменить на следующее: $\mathbf{M}(\nu^c)^\alpha < \infty$.

## 4. Изложение способа оценивания

Следуя работам [1—6], будем предполагать, что выполнены следующие два условия:

1) обновляющие события $A_n$ представимы в виде

$$A_n = \{w_{n,1} \leqslant z\} \cap D_n \tag{4}$$

где событие $D_n$ мы определили ранее в п. 3;

2) для событий $A_n' = \{u^n \leqslant z - C\} \cap D_n$ выполнено неравенство:

$$\mathbf{P}\{A_n'\} > 0, \tag{5}$$

где под $u^n$ будем понимать следующее: если рассматривается система с очередью, то $u^n = w_1^n$; если же рассматриваются системы с ограничениями, то $u^n = w_1^{n,c,k_1}$ при некотором $k_1 \geqslant m$.

Напомним, что для того, чтобы стационарные распределения $\{\mathbf{w}^n\}$ и $\{\mathbf{w}^{n,c,k_1}\}$ существовали, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{M}s_1 - m\mathbf{M}\tau_1 < 0$ или, соответственно,

$$\mathbf{M}s_1 - k_1\mathbf{M}\tau_1 < 0. \tag{6}$$

Изложим метод получения оценок сначала для систем с ограничениями, а затем — для систем с очередью.

1. Системы с ограничениями. Рассмотрим, ради простоты, на примере систем с отказами.

Подберем число $k_2 \geqslant m$ так, чтобы выполнялось не только (6), но и более сильное неравенство: $\mathbf{M}\{\max(s_1, \ldots, s_{k_2})\} < k_2\mathbf{M}\tau_1$. Такое $k_2$ найти можно, так как $\mathbf{M}\{\max(s_1, \ldots, s_k)\} = o(k)$. Действительно,

$$\mathbf{M}\{\max(s_1, \ldots, s_k)\} \leqslant \mathbf{M}\{\max(s_1, \ldots, s_{k-1})\} + \mathbf{M}\{s_1;\ s_1 > \max(s_2, \ldots, s_k)\},$$

где последнее слагаемое стремится к нулю при $k \to \infty$.

Пусть $k = \max(k_1, k_2)$. В силу предложения 1, $A_n \supseteq A_n'$. Из леммы 5 (см. также замечание 7) следует, что при выполнении (3) для конечности $\mathbf{M}\theta^\alpha$ достаточно, чтобы $\mathbf{M}(\nu^{c,k})^\alpha < \infty$. Далее, следствие 2 дает нам оценку: $\mathbf{M}(\nu^{c,k})^\alpha \leqslant k^\alpha \mathbf{M}(\zeta_1')^\alpha$. Значит, получена

**Теорема 3.** *Если выполнены условия* (3), (4), (5), *и* $\mathbf{M}(\zeta_1')^\alpha < \infty$, *то* $\rho_n = o(n^{1-\alpha})$.

Пример 1. Рассмотрим систему $GI/GI/m$ с отказами. Для нее условия (3)—(5) выполнены при соответствующих $D_n$ (см., например, [4]), если только $\mathbf{P}\{s_1 - m\tau_1 < 0\} > 0$. А, как следует, например, из обзорной работы [8], $\mathbf{M}(\zeta_1')^\alpha < \infty$, если только $\mathbf{M}S_1^\alpha < \infty$. Но так как $\mathbf{M}S_1^\alpha \leqslant k^\alpha \mathbf{M}s_1^\alpha$, то $\rho_n = o(n^{1-\alpha})$, если только $\mathbf{M}s_1^\alpha < \infty$ и $\mathbf{P}\{s_1 - m\tau_1 < 0\} > 0$. Этот же результат получается для других систем с ограничениями и для системы с бесконечным числом каналов (заметим только, что для системы с ограниченным временем ожидания здесь следует предполагать, что $\{\gamma_n\}$ есть последовательность независимых случайных величин, и условие $\mathbf{M}s_1^\alpha < \infty$ заменить на $\mathbf{M}(s_1 + \gamma_1)^\alpha < \infty$).

2. Системы с ожиданием. Здесь, к сожалению, рассуждения проходят лишь только для последовательностей $(s_n, \tau_n)$ вида $G/GI$. Предположим, что выполнены условия (3)—(5). Тогда если $\mathbf{M}\{\max(s_1, \ldots, s_m)\} < m\mathbf{M}\tau_1$, то и в этом случае остается верным утверждение теоремы 3. Если же $\mathbf{M}\{\max(s_1, \ldots, s_m)\} \geqslant m\mathbf{M}\tau_1$, то (см. замечание 8 и следствие 2) верен следующий, более слабый результат.

**Теорема 4.** *Если выполнены условия* (3)—(5), *и* $\mathbf{M}\zeta_2^\alpha < \infty$ (*или* $\mathbf{M}\zeta_3^\alpha < \infty$ *при* $z \geqslant k\mathrm{X}$), *то и* $\mathbf{M}\theta^\alpha < \infty$.

Пример 2. Если последовательность $(s_n, \tau_n)$ имеет вид $GI/GI$, то можно также применить теорему 2 данной работы, и условие $\mathbf{M}\zeta_3^\alpha < \infty$ заменить на $\mathbf{M}(\zeta_3^*)^\alpha < \infty$. В свою очередь, конечность $\mathbf{M}(\zeta_3^*)^\alpha$ следует из конечности $\mathbf{M}s_1^\alpha$ ((см. лемму 3 в [2] и работу [8]). А условия (3)—(5) в этом случае выполнены. Данный результат получен ранее (с помощью иных рассуждений) в [3, гл. IV, § 7].

## 5. Доказательство теорем сравнения

Доказательства лемм 1—3 достаточно просто проводятся по индукции. Предоставляем сделать это читателю.

В доказательстве теоремы 2 нам будет полезна следующая

**Лемма 6.** *Пусть случайная величина* $\varphi$ *не зависит от случайных величин* $\beta_1, \ldots, \beta_m$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\{\varphi \geqslant \max(\beta_1, \ldots, \beta_m)\} \geqslant \mathbf{P}\{\varphi_1 \geqslant \beta_1, \varphi_2 \geqslant \beta_2, \ldots, \varphi_m \geqslant \beta_m\},$$

где $\{\varphi_j\}$ — набор случайных величин, независимых в совокупности, распределенных, как $\varphi$, и не зависящих от $\beta_1, \ldots, \beta_m$.

Доказательство теоремы 2. Проведем его лишь для случайных величин $\eta$.

Ради удобства обозначим $s_n^j = s_{kn+j-1}$, и вместо $T_n^1$, $T_n^{1,j}$ будем писать $T_n$, $T_n^j$. Пусть

$$L_n^{(1)} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \eta_{ij}; \quad L_n^{(2)} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \eta_i^j.$$

Нам требуется показать, что $\mathbf{P}\{L_n^{(1)} > 0\} \leqslant \mathbf{P}\{L_n^{(2)} > 0\}$.

Доказательство будем проводить по индукции. Для этого зафиксируем $n$ и введем последовательность случайных величин $\{v_i^{(j,l)};\ i = 0, \ldots, n+1;\ j = 1, \ldots, k;\ l = 0, \ldots, n+1\}$ следующим образом:

$$v_0^{(j,l)} = w_{0j} \quad \text{и} \quad v_{i+1}^{(j,l)} = (v_i^{(j,l)} + s_i^j - T_i)^+ \quad \text{при} \quad i = 0, \ldots, l-1;$$
$$v_{i+1}^{(j,l)} = (v_i^{(j,l)} + s_i^{(j)} - T_i^{(j)})^+ \quad \text{при} \quad i = l, \ldots, n.$$

Положим $M^{(l)} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} v_i^{(j,l)}$. Нам достаточно показать, что $\mathbf{P}\{M^{(l)} > 0\} \geqslant \mathbf{P}\{M^{(l+1)} > 0\}$ для всех $l$. Ограничимся, простоты ради, случаем $k = 2$.

При $l = n$ получаем:

$$\mathbf{P}\{M^{(n)} > 0\} = \mathbf{P}\left\{L_{n-1}^{(1)} > 0;\ \sum_{j=1}^{2} (\eta_{nj} + s_n^{(j)} - T_n)^+ > 0\right\} =$$
$$= \mathbf{P}\{L_{n-1}^{(1)} > 0\}\, \mathbf{P}\left\{T_n < \max_j (\eta_{nj} + s_n^{(j)}) / L_{n-1}^{(1)} > 0\right\} \leqslant \mathbf{P}\{L_{n-j}^{(1)} > 0\}\, \mathbf{P}\{T_n^1 <$$
$$< \eta_{n1} + s_n^{(1)} \vee T_n^2 < \eta_{n2} + s_n^{(2)} / L_{n-1}^{(1)} > 0\} = \mathbf{P}\{M^{(n-1)} > 0\}.$$

Здесь мы воспользовались леммой 6. Теперь нам следовало бы провести шаг индукции. Но вместо этого заметим, что рассуждения совершенно однотипны при $l = n-1, n-2, \ldots, 1$, и в целях избежания более громоздких записей проведем доказательство лишь для $l = n-1$. Обозначим $\delta^j = s_n^j - T_n^j$; $j = 1, 2$, и $A = \{\delta^1 > 0 \vee \delta^2 > 0\}$.

$$\mathbf{P}\{M^{(n-1)} > 0\} = \mathbf{P}\{L_{n-2}^{(1)'} > 0;\ \max_j (\eta_{n-1,j} + s_{n-1}^j - T_{n-1}) > 0;$$

$$\max_j ((\eta_{n-1,j} + s_{n-1}^j - T_{n-1})^+ + \delta^j) > 0\Big\} = \mathbf{P}\Big\{L_{n-2}^{(1)} > 0;\ T_{n-1} <$$

$$< \max_j (\eta_{n-1,j} + s_{n-1}^j);\ A \cup \overline{A} \cap \Big(T_{n-1} < \max_j (\eta_{n-1,j} + s_{n-1}^j + \delta^j)\Big)\Big\} =$$

$$= \mathbf{P}\Big\{L_{n-2}^{(1)} > 0;\ A;\ \Big(T_{n-1} < \max_j (\eta_{n-1,j} + s_{n-1}^j)\Big)\Big\} + \mathbf{P}\Big\{L_{n-2}^{(1)} > 0;\ \overline{A};\ \Big(T_{n-1} <$$

$$< \max_j (\eta_{n-1,j} + s_{n-1}^j + \delta^j)\Big)\Big\}.$$

Последнее равенство верно потому, что на множестве $\overline{A}$ и $\delta^1 \leqslant 0$, и $\delta^2 \leqslant 0$.

Нам осталось лишь применить лемму 6 к каждому слагаемому в последней сумме, после чего и получим требуемое неравенство:

$$\mathbf{P}\{M^{(n-1)} > 0\} \leqslant \mathbf{P}\{M^{(n-2)} > 0\}.$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

Доказательство теоремы 1. В целях избежания записи более громоздких выражений приведем здесь доказательство лишь следующего факта:

Для любого числа $x > 0$ и для любых чисел $l \leqslant n$

$$\mathbf{P}\Big\{\min_{l \leqslant i \leqslant n} w_{i,1} > x\Big\} \leqslant \mathbf{P}\Big\{\min_{l \leqslant i \leqslant n} w_{i,1}^{\mathrm{c}} > x\Big\}. \tag{7}$$

Заметим лишь, что доказательство теоремы 1 дословно повторяет доказательство неравенства (7).

Введем одно определение. Стратегией (или дисциплиной обслуживания) будем называть последовательность $T = \{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ случайных величин, удовлетворяющих следующим двум свойствам:
при каждом $n = 1, 2, \ldots$ случайная величина $T_n$

1) целочисленна, причем $\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}\{T_n = i\} = 1$;

2) измерима относительно $\sigma$-алгебры, порожденной случайными величинами $\{(s_i, \tau_i);\ i < n\}$.

Допустим, что обслуживающие приборы (каналы) перенумерованы числами от 1 до $m$. Тогда равенство $T_n = k$ будет означать, что при стратегии $T$ $n$-й вызов будет обслуживаться (в порядке естественной очередности) на $k$-м канале.

Если при стратегии $T$ через $u_{n,k}$ обозначить время, которое следует ждать с момента прихода $n$-го вызова до момента окончания обслуживания всех предыдущих $n$-му вызовов на $k$-м канале, и $\mathbf{u}_n = (u_{n,1}, \ldots, u_{n,m})$, то векторы $\mathbf{u}_n$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$\mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{u}_n + \mathbf{e}_{T_n} s_n - \mathbf{i}\tau_n)^+. \tag{8}$$

Замечание 9. При таком определении стратегию «первый пришел — первый обслуживается» (которую будем обозначать через $T^\circ$) можно задать так:

$$T_n^0 = \min\Big\{k\colon u_{n,k} = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} u_{n,i} \text{ и если } T_{n-j}^0 \neq k,\ T_{n-j}^0 \neq l \text{ при } j = 1, 2, \ldots, q,$$

$$\text{то } u_{n-j,k} \leqslant u_{n-j,l} \text{ при } j = 1, 2, \ldots, q\Big\} \tag{9}$$

При этом $\mathbf{w}_n = R(\mathbf{u}_n)$ для всех $n$.

Циклическая же стратегия определяется следующим образом: $T_n = l$ п. н., где $l$ — такое число, что $1 \leqslant l \leqslant m$ и $n = km + l$.

Нам будет удобно доказывать не теорему 4, а следующее ее обобщение.

**Лемма 7.** *Пусть $T$ — произвольная стратегия, и векторы $\{\mathbf{u}_n\}$ определены при стратегии $T$ в соответствии с равенством* (11). *Тогда при любых $n > l \geqslant 1$ выполнено неравенство* (7).

Лемма 7 является обобщением теоремы 1 из работы [9].

Для любой стратегии $T$ при $r = 0, 1, \ldots$ определим по $T$ стратегии $T^{(r)}$ таким образом: $T^{(r)}_n = T_n$ п. н. при $n \leqslant r$, и при $n > r$ значения $T^{(r)}_n$ определяются в соответствии с равенством (9), т. е. если обозначить через $u^{(r)}_{n,k}$ времена ожидания при стратегии $T^{(r)}$, то при $n > r$

$$T^{(r)}_n = \min\Big\{k\colon u^{(r)}_{n,k} = \min_i u^{(r)}_{n,i} \text{ и если } T^{(r)}_{n-j} \neq k,\ T^{(r)}_{n-j} \neq l \text{ при } j = 1, 2, \ldots, q,$$
$$\text{то } u^{(r)}_{n-j,k} \leqslant u^{(r)}_{n-j,l} \text{ при } j = 1, 2, \ldots, q\Big\}. \tag{10}$$

Заметим, что $T^{(0)} \equiv T^0$.

Поэтому, в свою очередь, для доказательства леммы 7 достаточно показать, что верна следующая

**Лемма 8.** *Пусть $T$ — произвольная стратегия и $n > l \geqslant 1$ — произвольные фиксированные целые числа. При произвольном $r = 0, 1, \ldots$ по стратегии $T$ построим стратегию $T^{(r)}$ в соответствии с описанным выше правилом. Пусть $u_{i,j}\big(u^{(r)}_{i,j}\big)$ — времена ожидания при стратегии $T(T^{(r)})$. Тогда при любом $r = 0, 1, \ldots$*

$$\mathbf{P}\Big\{\min_{l \leqslant i \leqslant n}\Big(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} u_{i,j}\Big) > x\Big\} \geqslant \mathbf{P}\Big\{\min_{l \leqslant i \leqslant n}\Big(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} u^{(r)}_{i,j}\Big) > x\Big\}. \tag{11}$$

Действительно, лемма 7 есть частный случай леммы 8 при $r = 0$.

Доказательство леммы 8. Будем проводить его с помощью «обратной» индукции по $r$.

При $r \geqslant n$ утверждение леммы 8 очевидно.

Пусть утверждение верно при некотором $r \leqslant n$ для любой стратегии $T$. Докажем его при $r - 1$.

Замечание 10. Будем доказывать шаг индукции при произвольных фиксированных значениях $\{\tau_i;\ i = 1, 2, \ldots, r, r+1\}$ и $\{s_i;\ i = 1, 2, \ldots, r-1\}$ таких, что при $l \leqslant i \leqslant r$ выполнены неравенства $\max_j u_{i,j} > x$.

Но, фиксируя $\{s_i, \tau_i\}$, мы зафиксировали и $T_1, T_2, \ldots, T_r$.

Напомним, что $T_i = T^{(r)}_i$ при $i = 1, 2, \ldots, r$.

Пусть
$k_1 = \min\{k\colon$ выполнены условия, перечисленные в правой части равенства (10)$\}$, и $T^{(r)}_r = k_2$.

Заметим, что если $k_1 \neq k_2$, то обязательно $T^{(r)}_{r+1} = k_1$. Обозначим $a = u_{r,k_1}$ и $b = u_{r,k_2}$ $(a \leqslant b)$.

Введем в рассмотрение два случая: $\alpha)$ $b \geqslant \tau_r$; $\beta)$ $b < \tau_r$.

Определим теперь стратегию $\Phi$ следующим образом: $\Phi_i = T_i$ п. н. при $i \leqslant r-1$. Далее, если $k_1 = k_2$, то $\Phi_i = T^{(r)}_i$ при всех $i \geqslant r$. Если же $k_1 \neq k_2$, то положим $\Phi_r = k_1$, $\Phi_{r+1} = k_2$ и при $i = r+2, r+3, \ldots$

в случае $\alpha)$ — $\Phi_i = T^{(r)}_i$, а в случае $\beta)$ —

$$\Phi_i = \begin{cases} k_1, & \text{если } T^{(r)}_i = k_2,\\ k_2, & \text{если } T^{(r)}_i = k_1,\\ T^{(r)}_i, & \text{если } T^{(r)}_i \neq k_1, k_2. \end{cases}$$

Построенная таким образом последовательность $\Phi$ удовлетворяет требованиям 1), 2), предъявляемым нами к стратегиям.

Проверим, что стратегия $\Phi$ «не хуже» стратегии $T^{(r)}$ в смысле неравенства (11). Достаточно рассмотреть вариант $k_1 \neq k_2$.

Рассмотрим при этом, например, случай $\alpha$). Предположим, простоты ради, что к тому же и $a \geqslant \tau_r$.

Если обозначить через $v_{i,j}$ времена ожидания при стратегии $\Phi$, нетрудно видеть, что $v_{i,j} = u_{i,j}^{(r)}$ при всех $i$ и при $j \neq k_1, k_2$. Далее

$$v_{r+1,k_1} = a + s_r - \tau_r;\ v_{r+1,k_2} = b - \tau_r;$$

$$v_{r+2,k_1} = (a + s_r - \tau_r - \tau_{r+1})^+;\ \ v_{r+2,k_2} = (b + s_{r+1} - \tau_r - \tau_{r+1})^+;$$

$$u_{r+1,k_1}^{(r)} = a - \tau_r;\ u_{r+1,k_2}^{(r)} = b + s_r - \tau_r;$$

$$u_{r+2,k_1}^{(r)} = (a - \tau_r + s_{r+1} - \tau_{r+1})^+;\ u_{r+2,k_2}^{(r)} = (b + s_r - \tau_r - \tau_{r+1})^+.$$

Значит, при каждом $i = r+2,\ r+3,\ \ldots$ значения вектора $\bar{v}_i$ на множестве $\{s_r = x;\ s_{r+1} = y\}$ и вектора $\bar{u}_i^{(r)}$ на множестве $\{s_r = y;\ s_{r+1} = x\}$ совпадают.

Следовательно, если $\max\limits_{j \neq k_2} u_{r+1,j}^{(r)} > x$, то

$$\mathbf{P}\left\{\min_{r+1 \leqslant i \leqslant n}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} u_{i,j}^{(r)}\right) > x\right\} = \mathbf{P}\left\{\min_{r+2 \leqslant i \leqslant n}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} u_{i,j}^{(r)}\right) > x\right\} =$$
$$= \mathbf{P}\left\{\min_{r+2 \leqslant i \leqslant n}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} v_{ij}\right) > x\right\} \geqslant \mathbf{P}\left\{\min_{r+1 \leqslant i \leqslant n}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} v_{ij}\right) > x\right\}.$$

А если $\max\limits_{j \neq k_2} u_{r+1,j}^{(r)} \leqslant x$, то

$$\mathbf{P}\left\{\min_{r+1 \leqslant i \leqslant n}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} u_{i,j}^{(r)}\right) > x\right\} = \mathbf{P}\Big\{b + s_r - \tau_r > x;$$
$$\max(a + s_{r+1},\ b + s_r) > x + \tau_r + \tau_{r+1};\ \min_{r+3 \leqslant i \leqslant n}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} u_{ij}^{(r)}\right) > x\Big\} =$$
$$= \mathbf{P}\left\{\max(a + s_{r+1},\ b + s_r) > x + \tau_r + \tau_{r+1};\ \min\max u_{ij}^{(r)} > x\right\} -$$
$$- \mathbf{P}\left\{a + s_{r+1} > x + \tau_r + \tau_{r+1};\ b + s_r \leqslant x + \tau_r;\ \min\max u_{ij}^{(r)} > x\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \mathbf{P}\left\{\max(a + s_{r+1},\ b + s_r) > x + \tau_r + \tau_{r+1};\ \min\max u_{ij}^{(r)} > x\right\} -$$
$$- \mathbf{P}\left\{b + s_{r+1} > x + \tau_r + \tau_{r+1};\ a + s_r \leqslant x + \tau_r;\ \min\max u_{ij}^{(r)} > x\right\} =$$
$$= \mathbf{P}\left\{\max(a + s_r,\ b + s_{r+1}) > x + \tau_r + \tau_{r+1};\ \min\max v_{ij} > x\right\} -$$
$$- \mathbf{P}\left\{b + s_r > x + \tau_r + \tau_{r+1};\ a + s_{r+1} \leqslant x + \tau_r;\ \min\max v_{ij} > x\right\} =$$
$$= \mathbf{P}\left\{\min_{r+1 \leqslant i \leqslant n}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} v_{ij}\right) > x\right\}.$$

Тем самым случай $\alpha$) разобран.

Случай $\beta$) разбирается совершенно аналогично.

Замечание 11. Читателю, желающему подробно разобрать случай $\beta$), мы предлагаем ознакомиться с доказательством теоремы 1 из работы [9].

Теперь по стратегии $\Phi$ построим стратегию $\Phi^{(r)}$. По предположению индукции стратегия $\Phi^{(r)}$ «не хуже» стратегии $\Phi$ в смысле неравенства (11). Для завершения шага индукции осталось лишь заметить, что $\Phi^{(r)} \equiv T^{(r-1)}$.

Доказательство леммы 8 (и вместе с тем леммы 7 и теоремы 1) завершено.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Боровков А. А.** Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. **Калашников В. В.** Оценки устойчивости обновляющихся процессов.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1979, № 5, с. 85—89.
3. **Калашников В. В.** Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. М.: Наука, 1978.

4. **Ахмаров И.** О скорости сходимости в теоремах эргодичности и непрерывности для систем с отказами.— Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI, № 1, с. 182—189.
5. **Ахмаров И.** О скорости сходимости в теоремах эргодичности и непрерывности для многолинейных систем с очередью.— Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, № 2, с. 418—424.
6. **Ахмаров И.** Эргодичность и устойчивость многоканальных систем массового обслуживания с ограниченным временем ожидания.— Сиб. мат. журн., 1979, т. XX, № 4, с. 911—916.
7. **Золотарев В. М.** Количественные оценки в задачах непрерывности систем массового обслуживания.— Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. XX, № 1, с. 215—218.
8. **Gut A.** On the moments and limit distributions on some first passage times.— Ann. of probability, 1974, v. II, № 2, p. 277—308.
9. **Фосс С. Г.** Об аппроксимации многоканальных систем обслуживания.— Сиб. мат. журн., 1980, т. XXI, № 6, с. 132—140.

*Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.*

## ДЛИННЫЕ СЕРИИ В МАРКОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

*Л. Я. САВЕЛЬЕВ*

**В статье исследуется распределение максимума длин серий в простой однородной марковской последовательности с конечным множеством значений.**

### 1. Постановка задачи

**1.1.** Рассмотрим марковскую последовательность $\omega=(\omega_i)$ с конечным множеством значений $C$ из $m$ элементов, начальным распределением $P=(p_\gamma)$ и переходной матрицей $Q=(q_{\gamma\delta})$ $(\gamma,\ \delta\in C)$. Возьмем $A\subseteq C$, $B=C\setminus A$.

Пусть: $x_i(\omega)=\operatorname{ind}A(\omega_i)=1(\omega_i\in A),=0(\omega_i\in B)$;

$s_j(\omega)=\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant j}x_i(\omega)$ — число значений $\omega_i\in A$ (*успехов*) среди $\omega_0,\ldots,\omega_j$;

$t_{jk}(\omega)=k^{-1}\cdot(s_{j+k}(\omega)-s_j(\omega))$ — доля успехов среди $\omega_{j+1},\ldots,\omega_{j+k}$ (*плотность*);

$0\leqslant a_k\leqslant b_k\leqslant 1$ — границы *допустимой плотности* отрезка $\omega_{j+1},\ldots$ $\ldots,\omega_{j+k}$ длины $k$;

$y_{kn}(\omega)=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-k}\{\operatorname{ind}[a_k,b_k](t_{jk}(\omega))\}=1$, если в последовательности $\omega_0,\ldots,\omega_n$ есть отрезок $\omega_{j+1},\ldots,\omega_{j+k}$ с допустимой плотностью $(a_k\leqslant t_{jk}(\omega)\leqslant b_k)$ и $y_{kn}(\omega)=0$, если такого *допустимого отрезка* нет;

$z_n(\omega)=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\{k\cdot y_{kn}(\omega)\}$ — максимум длин допустимых отрезков в последовательности $\omega_0,\ldots,\omega_n$.

Общая задача: исследовать распределение случайной величины $z_n$, найти ее среднее значение и дисперсию.

**1.2.** В частности, $a(k)=b(k)=1$, $t_{jk}(\omega)=1$, $s_{j+k}(\omega)-s_j(\omega)=k$, $x_{j+1}(\omega)=\ldots=x_{j+k}(\omega)=1$ описывают серию $\omega_{j+1}\in A,\ldots,\omega_{j+k}\in A$ успехов, имеющую длину $k$. В таком случае $z_n$ есть максимум длин серий успехов в последовательности $\omega_0,\ldots,\omega_n$.

Для бернуллиевской последовательности этот максимум изучал В. Л. Гончаров [1].

Марковский случай исследовал Л. Я. Савельев. Им получено общее выражение для производящей функции распределения максимума длин серий, выведены некоторые асимптотические формулы и построена марковская модель переноса разряда при сложении случайных чисел. Эти результаты докладывались на Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде в 1961 г. и на Всесоюзной конференции по вероятностным методам в дискретной математике в Петрозаводске в 1983 г. [2].