В. А. АЛЕКСАНДРОВ

ОБ ОБЛАСТЯХ, ОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ СВОЕЙ ГРАНИЦЫ

В работах [1—4] доказано, что изометричность в относительных метриках границ областей D и D^* пространства $\mathbf{R}$ влечет изометричность (в евклидовых метриках) D и D^* в следующих случаях:

1) D ограниченная и выпуклая, D^* жорданова, $n \geqslant 2$ [1, 2];

2) D строго выпуклая, D^* произвольная, $n \geqslant 2$ [1, 3];

3) D и D^* ограничены и имеют кусочно-гладкие границы, $n \geqslant 2$ [1, 3];

4) D и D^* имеют ограниченные дополнения и гладкие границы, $n \geqslant 3$ [4].

В настоящей работе указаны условия, при которых область $D \subset \mathbf{R}^2$, граница ∂D которой либо вещественно-аналитическая, либо класса C^1, однозначно определяется относительной метрикой своей границы. Найденные условия существенно различны для областей с аналитическими и гладкими (класса C^1) границами, причем в первом случае они являются необходимыми и достаточными, а во втором — таковыми для всех областей, исключая некоторое нигде не плотное их множество.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Будем говорить, что область $D \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеет

аналитическую границу (соотв. *границу класса* C^∞, C^k $(k \in \mathbf{N},\ k \geqslant 1)$, $C^{1,\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1,\ \alpha \in \mathbf{R})$), если ∂D является $n-1$-мерным аналитическим (соотв. класса C^∞, C^k, $C^{1,\alpha}$) подмногообразием без края пространства $\mathbf{R}^n$;

гладкую границу, если ∂D класса C^1;

кусочно-линейную границу, если ∂D является $n-1$-мерным топологическим многообразием без края и содержится в объединении конечного числа гиперплоскостей;

кусочно-гладкую границу, если выполнены условия 1—5 из § 4 статьи [3] (они заведомо выполняются, если D имеет гладкую границу или является образом при диффеоморфизме всего пространства на себя области с кусочно-линейной границей).

Для области $D \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, с гладкой границей исходя из метрики, индуцированной в D евклидовой метрикой пространства $\mathbf{R}^n$, построим в области D внутреннюю метрику [5] и продолжим ее по непрерывности в замыкание области D. Сужение этой продолженной метрики на границу области D будем называть *относительной метрикой границы области* D и обозначать через ρ_D.

Пусть D и D^* имеют гладкие границы. Будем говорить, что *границы областей D и D^* изометричны в относительных метриках*, если существует сюръективное изометрическое в относительных метриках границ областей D и D^* отображение $f\colon \partial D \to \partial D^*$. При этом отображение $f\colon \partial D \to \partial D^*$ называется *изометрическим в относительных метриках границ областей D и D^**, если для любых точек a, $b \in \partial D$ выполнено равенство $\rho_{D^*}(f(a), f(b)) = \rho_D(a, b)$.

Отображение $F: A \to \mathbf{R}^n$, определенное на некотором подмножестве A пространства $\mathbf{R}^n$, называется *евклидовой изометрией*, если для любых точек $a, b \in A$ справедливо равенство $|F(a)-F(b)| = |a-b|$. Области D и D^* называются *изометричными*, если существует евклидова изометрия $F: D \to D^*$ области D на область D^*.

Пусть $\mathscr{D}$ — некоторый класс областей пространства $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$ (в настоящей работе в основном это — класс областей с гладкими границами).

Определение. *Будем говорить, что область $D \in \mathscr{D}$ однозначно определяется относительной метрикой своей границы в классе $\mathscr{D}$, если всякая область $D^* \in \mathscr{D}$, граница которой изометрична границе области D в относительных метриках, изометрична области D.*

Символом $\Delta(D)$ будем обозначать внутренность выпуклой оболочки дополнения области D.

Если $a, b \in \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, то замкнутый отрезок с концами a и b будем обозначать $[a, b]$, а открытый отрезок с теми же концами — (a, b).

Одномерное подмногообразие евклидовой плоскости класса C^1 без края будем называть *кривой*, а подмножество кривой ω, гомеоморфное замкнутому отрезку $[0, 1] \subset \mathbf{R}$,— *интервалом кривой* ω. Будем говорить, что *кривая* γ *гомеоморфна отрезку* $[0, 1]$, если γ является интервалом некоторой кривой. Длину кривой γ будем обозначать символом дл γ.

Выпуклой кривой на евклидовой плоскости мы будем называть кривую, являющуюся границей выпуклой области евклидовой плоскости, либо произвольный интервал такой кривой.

Если $(a, b) \subset \mathbf{R}$ и $r: (a, b) \to \mathbf{R}^2$ — дифференцируемое отображение, то символом $r': (a, b) \to \mathbf{R}^2$ мы будем обозначать его (покомпонентную) производную.

§ 2. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для областей с гладкими границами справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть область $D \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеет связную гладкую границу $\partial D \subset \Delta(D)$. Тогда D однозначно определяется относительной метрикой своей границы в классе областей с гладкими границами.*

Теорема 2. *Пусть область $D \subset \mathbf{R}^2$ имеет связную гладкую границу и $\Delta(D)$ не является полуплоскостью. Если D однозначно определяется относительной метрикой своей границы в классе областей с гладкими границами, то $\partial D \subset \Delta(D)$.*

На множестве $\mathscr{D}$ областей евклидовой плоскости, имеющих гладкие границы, зададим метрику

$$\mu(D, D^*) = \max\Big\{\sup_{x\in\varphi(D)} \inf_{y\in\varphi(D^*)} \delta(\varphi(x), \varphi(y)), \sup_{y\in\varphi(D^*)} \inf_{x\in\varphi(D)} \delta(\varphi(x), \varphi(y))\Big\},$$

где $D, D^* \in \mathscr{D}$; φ — отображение, обратное к стереографической проекции, а $\delta(a, b)$ — расстояние между точками a и b сферы, измеренное в ее внутренней метрике.

Пусть $\mathscr{D}_0$ — множество областей $D \subset \mathbf{R}^2$ с гладкими границами таких, что $\Delta(D)$ — полуплоскость.

Теорема 3. *Множество $\mathscr{D}_0$ нигде не плотно в метрическом пространстве $(\mathscr{D}, \mu)$.*

Для областей с границами классов C^∞, $C^k (k \in \mathbf{N}, k \geqslant 2)$, $C^{1,\alpha} (0 < \alpha \leqslant 1)$ справедливы аналоги теорем 1, 2, тогда как в случае кусочно-линейных границ утверждения, аналогичные теоремам 1, 2, не верны (см. пример 4 из § 7). Для областей с аналитическими границами справедливы следующие результаты.

Теорема 4. *Пусть область $D \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеет связную аналитическую границу и $\Delta(D) \cap \partial D \neq \varnothing$. Тогда D однозначно определяется относительной метрикой своей границы в классе областей с аналитическими границами.*

Теорема 5. *Пусть область $D \subset \mathbf{R}^2$ имеет связную аналитическую границу и $\Delta(D) \cap \partial D = \varnothing$. Тогда D не определяется однозначно относительной метрикой своей границы в классе областей с аналитическими границами.*

Замечания. 1. Утверждения теорем 2, 5 при $n \geqslant 3$ не верны (см. примеры 1, 2 из § 7).

2. Теоремы 1, 2 (соотв. 4, 5) дают критерий однозначной определяемости области $D \subset \mathbf{R}^2$ с гладкой (соотв. аналитической) границей в классе областей с гладкими (соотв. аналитическими) границами. Причем в случае гладких границ критерий применим ко всем областям $D \subset \mathbf{R}^2$ за исключением некоторого нигде не плотного в $(\mathscr{D}, \mu)$ множества.

3. В теореме 2 условие «$\Delta(D)$ не является полуплоскостью» существенно (см. пример 3 из § 7).

§ 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. *Пусть D, D^* — области в $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, с гладкими границами и f: $\partial D \to \partial D^*$ — изометрическое в относительных метриках границ областей D и D^* отображение. Тогда для всякой компоненты связности S множества $\Delta(D) \cap \partial D$ сужение $f|_S$ является евклидовой изометрией.*

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству теоремы 1 из статьи [3].

Лемма 2. *Пусть область $D \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеет связную гладкую границу и тождественное отображение* id: $\partial D \to \partial D$ *является изометрическим в относительных метриках границ области D и внутренности ее дополнения. Тогда D — полупространство.*

Доказательство. Обозначим через d внутренность дополнения области D. Пусть $a, b \in \partial D$. Допустим, что $[a, b] \not\subset \partial D$. Возьмем $t \in [a, b] \setminus \partial D$. Ближайшую к t точку множества $[t, a] \cap \partial D$ (соотв. $[t, b] \cap \partial D$) обозначим через α (соотв. β). Отрезок (α, β) содержится либо в D, либо в d. В первом случае $\rho_D(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| < \rho_d(\alpha, \beta)$, во втором $\rho_d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| < \rho_D(\alpha, \beta)$. Пришли к противоречию с изометричностью изображения id в относительных метриках границ областей D и d. Таким образом, $[a, b] \subset \partial D$. Но тогда граница ∂D области D является выпуклым множеством, следовательно, ∂D — гиперплоскость и D — полупространство.

Нетрудно установить следующую лемму.

Лемма 3. *Гладкая кривая в $\mathbf{R}^2$ является выпуклой кривой, касательная к которой ни в одной точке не параллельна осям координат, если и только если обе координатные функции производной от ее натуральной параметризации монотонны и ни одна из них нигде в нуль не обращается.*

При фиксированных выпуклой гладкой кривой $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ и произвольном числе $\varepsilon > 0$ через $\Gamma_\varepsilon(\gamma)$ будем обозначать множество выпуклых гладких кривых $\gamma_\varepsilon \subset \mathbf{R}^2$ таких, что

(Γ_1) γ_ε имеет общие с γ концы, причем в некоторой окрестности каждого из них кривые γ_ε и γ совпадают;

(Γ_2) дл γ_ε = дл γ;

(Γ_3) для всех $s \in [0, \text{дл}\,\gamma]$ справедливо неравенство $|r'(s) - r_\varepsilon'(s)| < \varepsilon$.

(Γ_4) если кривая γ содержит прямолинейный отрезок σ, то множество $r_\varepsilon[r^{-1}(\sigma)]$ также является отрезком прямой.

Здесь и далее r: $[0, \text{дл}\,\gamma] \to \mathbf{R}^2$ — натуральная параметризация кривой γ, а r_ε: $[0, \text{дл}\,\gamma] \to \mathbf{R}^2$ — натуральная параметризация кривой γ_ε такая, что $r_\varepsilon(0) = r(0)$.

Лемма 4. *Пусть $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ — гладкая выпуклая кривая, гомеоморфная замкнутому отрезку, но не совпадающая с отрезком, соединяющим ее концы. Предположим, что существует счетное множество замкнутых прямолинейных отрезков σ_n, $n \in \mathbf{N}$, содержащихся в γ, таких, что*

а) *если $m \neq n$, то отрезки σ_m и σ_n не лежат на одной прямой;*

б) *замыкание множества* $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \sigma_n$ *совпадает с кривой* γ.

Тогда множество $\Gamma_\varepsilon(\gamma)$ *имеет мощность континуум.*

Доказательство. Положим $s_0 = \text{дл}\,\gamma$, $r'(s)=(\omega_1(s), \omega_2(s))$ и $I_n = r^{-1}(\sigma_n)$ для каждого натурального n.

Поворачивая кривую γ и переходя в случае необходимости к ее достаточно малому интервалу, можем считать, что существует число $C > 0$ такое, что для всех $s \in [0, s_0]$ выполнены неравенства

$$\omega_1(s) \geqslant C, \ \omega_2(s) \geqslant C. \tag{1}$$

Очевидно, что каждая из функций ω_1 и ω_2 непрерывна и монотонна (в силу леммы 3) на $[0, s_0]$, постоянна на каждом отрезке I_n, но на $[0, s_0]$ постоянной не является.

Левый конец отрезка I_n будем обозначать s_n^1, правый — s_n^2.

Покажем, что можно выбрать три натуральных числа m_1, m_2 и m_3 так, что

1) для каждого $i = 1, 2, 3$ $\omega_1(0) \neq \omega_1\left(s_{m_i}^1\right) \neq \omega_1(s_0)$;

2) ранг матрицы $(M_{ij})_{\substack{i=1,2,3\\ j=1,2}}$, заданной формулами $M_{i1} = \text{дл} I_{m_i}$, $M_{i2} = -\,\omega_1\left(s_{m_i}^1\right)\left[\omega_2\left(s_{m_i}^1\right)\right]^{-1} \text{дл}\, I_{m_i}$; $i = 1, 2, 3$, равен двум.

Число m_1 выберем так, чтобы было выполнено условие 1). Поскольку $M_{11} = \text{дл}\, I_{m_1} > 0$, то $\operatorname{rang}(M_{ij}) \geqslant 1$. Допустим теперь, что при любом выборе числа m_2, для которого выполнено условие 1), ранг матрицы (M_{ij}) равен единице. Тогда

$$\omega_2\left(s_{m_2}^1\right) / \omega_1\left(s_{m_2}^1\right) = \omega_2\left(s_{m_1}^1\right) / \omega_1\left(s_{m_1}^1\right).$$

Следовательно, каждый из отрезков σ_n, $n \in \mathbf{N}$, параллелен отрезку σ_{m_1}. Поскольку γ — гладкая кривая, касательная к ней в каждой точке параллельна отрезку σ_{m_1}, т. е. γ является отрезком прямой, что противоречит условиям леммы. Полученное противоречие доказывает возможность выбора чисел m_1, m_2 и m_3. При этом, очевидно, можно считать, что

$$0 < s_{m_1}^1 < s_{m_1}^2 < s_{m_2}^1 < s_{m_2}^2 < s_{m_3}^1 < s_{m_3}^2 < s_0.$$

Выберем теперь число $\varepsilon' > 0$ столь малым, что ранг всякой матрицы $(N_{ij})_{\substack{i=1,2,3\\ j=1,2}}$ с условием $|M_{ij} - N_{ij}| < \varepsilon'$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$, равнялся двум. Наконец, выберем $\delta > 0$, так, чтобы $0 < \delta < \varepsilon' 2^{-1}(1 + C^{-2})^{-1/2}$ (здесь C — константа из неравенств (1)), и δ-окрестности интервалов I_{m_1}, I_{m_2}, I_{m_3} не пересекались.

Для каждого I_{m_i}, $i = 1, 2, 3$, найдем два отрезка I_{p_i} и I_{q_i} (p_i, $q_i \in \mathbf{N}$) таких, что $0 < s_{m_i}^1 - s_{p_i}^2 < \sigma$, $0 < s_{q_i}^1 - s_{m_i}^2 < \sigma$. Положим

$$\tau_i = \min\left\{2^{-1}\left|\omega_1\left(s_{p_i}^2\right) - \omega_1\left(s_{m_i}^1\right)\right|,\ 2^{-1}\left|\omega_1\left(s_{q_i}^1\right) - \omega_1\left(s_{m_i}^2\right)\right|,\ \varepsilon\left(1 + C^{-2}\right)^{-1/2}\right\},$$

где C — постоянная из неравенств (1). Для любого $\delta > 0$ число τ_i положительно в силу условия а) леммы. Поэтому открытый отрезок $T_i = (-\tau_i, \tau_i)$ не пуст. Декартово произведение $T_1 \times T_2 \times T_3$ множеств T_1, T_2 и T_3 обозначим T.

Зададим функции Ω_i: $[0, s_0] \times T \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2$, следующим образом:

$$\Omega_1(s, t) = \begin{cases} \omega_1(s), \text{ если } s \text{ не принадлежит ни одному из открытых} \\ \qquad \text{отрезков } (s_{p_i}^2, s_{q_i}^1), \quad i = 1, 2, 3; \\ \omega_1(s) + t_i, \text{ если } s \in I_{m_i}; \\ \omega_1(s) + t_i \dfrac{\omega_1(s) - \omega_1\left(s_{p_i}^2\right)}{\omega_1\left(s_{m_i}^1\right) - \omega_1\left(s_{p_i}^2\right)}, \text{ если } s \in \left(s_{p_i}^2, s_{m_i}^1\right); \\ \omega_1(s) + t_i \dfrac{\omega_1(s) - \omega_1\left(s_{q_i}^1\right)}{\omega_1\left(s_{m_i}^2\right) - \omega_1\left(s_{q_i}^1\right)}, \text{ если } s \in \left(s_{m_i}^2, s_{q_i}^1\right); \end{cases}$$

$$\Omega_2(s, t) = \{1 - [\Omega_1(s, t)]^2\}^{1/2}.$$

При любом фиксированном $t \in T$ функции $\Omega_i(s, t)$, $i = 1, 2$, по переменной s непрерывны, монотонны, и на каждом отрезке I_n, $n \in \mathbf{N}$, постоянны. Кроме того, для $0 \leqslant s \leqslant s^2_{p_i}$ и $s^1_{q_3} \leqslant s \leqslant s_0$

$$\Omega_i(s, t) = \omega_i(s), \ i = 1, 2, \tag{2}$$

и для всех $s \in [0, s_0]$

$$|\omega_1(s) - \Omega_1(s, t)| \leqslant \max\{|t_1|, |t_2|, |t_3|\}, \tag{3}$$

$$|\omega_2(s) - \Omega_2(s, t)| \leqslant C^{-1}\max\{|t_1|, |t_2|, |t_3|\}. \tag{4}$$

Докажем неравенство (4). Поскольку $\omega_2(s)$ и $\Omega_2(s, t)$ положительны,

$$|\omega_2(s) - \Omega_2(s, t)| = \frac{|[\omega_2(s)]^2 - [\Omega_2(s, t)]^2|}{\omega_2(s) + \Omega_2(s, t)} = \frac{\omega_1(s) + \Omega_1(s, t)}{\omega_2(s) + \Omega_2(s, t)} |\omega_1(s) - \\ - \Omega_1(s, t)| \leqslant C^{-1}\max\{|t_1|, |t_2|, |t_3|\}.$$

Наконец, введем функцию $R = (R_1, R_2)\colon T \to \mathbf{R}^2$, где

$$R_i(t) = r_i(0) + \int_0^{s_0} \Omega_i(s, t)\, ds, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Функция R имеет в каждой точке области T непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов, поскольку в (5) можно дифференцировать под знаком интеграла. Покажем, что при каждом $i = 1, 2, 3$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial R}{\partial t_i}\Big|_{t=0} - \text{дл}\, I_{m_i}\left(1, -\frac{\omega_2\left(s^2_{m_i}\right)}{\omega_1\left(s^2_{m_i}\right)}\right)\right| < \varepsilon'. \tag{6}$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial t_i} R_1|_{t=0} = \int_0^{s_0} \left[\frac{\partial}{\partial t_i}\Omega_1(s, t)\right]\Big|_{(s,t)=(s,0)} ds,$$

поэтому

$$\left|\frac{\partial}{\partial t_i} R_1|_{t=0} - \text{дл}\, I_{m_i}\right| = \left|\int_0^{s^2_{p_i}} \left[\frac{\partial}{\partial t_i}\Omega_1(s, t)\right]_{(s,t)=(s,0)} ds + \right.$$

$$\left. + \int_{s^2_{p_i}}^{s^1_{m_i}} + \int_{s^1_{m_i}}^{s^2_{m_i}} + \int_{s^2_{m_i}}^{s^1_{q_i}} + \int_{s^2_{m_i}}^{s_0} - \text{дл}\, I_{m_i}\right| = \left|\int_{s^2_{p_i}}^{s^1_{m_i}} + \int_{s^2_{m_i}}^{s^1_{q_i}}\right| \leqslant 2\delta.$$

Аналогично

$$\left|\frac{\partial}{\partial t_i} R_2|_{t=0} - \left[-\text{дл}\, I_{m_i}\frac{\omega_1\left(s^2_{m_i}\right)}{\omega_2\left(s^2_{m_i}\right)}\right]\right| \leqslant 2\frac{\delta}{C}.$$

Из последних двух неравенств, очевидно, получаем (6).

Из доказанного следует, что отображение R имеет в области T непрерывные частные производные, а его ранг в точке $\mathbf{0}$ равен двум. Согласно теореме о неявной функции существует такая карта $h\colon U \to T$, $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, в области T, что в некоторой окрестности $\mathcal{U} \subset U$ точки

$\mathbf{0} \in U$ имеет место равенство

$$(R \circ h)(u_1, u_2, u_3) = r(s_0) + (u_1, u_2)$$

для всех $(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{U}$. Выберем в множестве $\mathcal{U}$ произвольную точку вида $(0, 0, u)$, $u \neq 0$, и положим $t^* = h((0, 0, u))$. Тогда

$$R(t^*) = r(s_0). \tag{7}$$

Отображение $r_\varepsilon = (r_{\varepsilon,1}, r_{\varepsilon,2}\colon [0, s_0] \to \mathbf{R}^2$, определяемое формулой

$$r_{\varepsilon,i}(s) = r_i(0) + \int_0^s \Omega_i(\xi, t^*)\, d\xi, \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

является натуральной параметризацией некоторой гладкой кривой γ_ε.

Покажем, что $\gamma_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon(\gamma)$. Кривая γ_ε выпукла в силу леммы 3. Свойство (Γ_1) следует из (2), (7), (8), (Γ_2) — непосредственно из определения функции Ω_2, (Γ_3) справедливо ввиду (3), (4) и выбора чисел τ_i, $i = 1, 2, 3$, (Γ_4) очевидно, поскольку функции Ω_1 и Ω_2 постоянны на отрезках I_n, $n \in \mathbf{N}$.

Указанным способом при различных t^* можно построить различные кривые $\gamma_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon(\gamma)$, причем множество таких кривых γ_ε будет иметь мощность континуум ввиду континуальности мощности множества точек t^*, поэтому $\Gamma_\varepsilon(\gamma)$ тем более имеет мощность континуум. Лемма 4 доказана.

Приведем необходимые нам в дальнейшем следствия леммы 4.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда существует функция* $\alpha\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, *непрерывная в нуле,* $\alpha(0) = 0$ *такая, что для каждого числа* $s \in [0, \text{дл}\, \gamma]$ *справедливо неравенство* $|r(s) - r_\varepsilon(s)| \leqslant \alpha(\varepsilon)$.

Доказательство следствия 1 очевидно: в качестве функции $\alpha(\varepsilon)$ можно взять ε дл γ.

Для $s_1, s_2 \in [0, \text{дл}\, \gamma]$ обозначим через τ (соотв. τ_ε) прямую, проходящую через точки $r(s_1)$, $r(s_2)$ (соотв. $r_\varepsilon(s_1)$, $r_\varepsilon(s_2)$).

Следствие 2. *Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда существует функция* $\beta\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, *непрерывная в нуле,* $\beta(0) = 0$ *такая, что для любых чисел* $s_1, s_2 \in [0, \text{дл}\, \gamma]$ *величина наименьшего угла между прямыми* τ *и* τ_ε *не превосходит* $\beta(\varepsilon)$.

Доказательство. Допустив противное, найдем число $\delta > 0$ и две последовательности точек $(s_n^1)_{n\in\mathbf{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ из отрезка $[0, \text{дл}\, \gamma]$ такие, что для любого числа $n \in \mathbf{N}$ угол между прямыми τ и $\tau_{1/n}$ (проходящими через точки $r(s_n^1)$, $r(s_n^2)$ и точки $r_{1/n}(s_n^1)$, $r_{1/n}(s_n^2)$ соотв.) больше δ. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что $(s_n^1)_{n\in\mathbf{N}}$, и $(s_n^2)_{n\in\mathbf{N}}$ сходятся к s^1 и s^2 соответственно. Если s^1 и s^2 различны, то мы приходим к противоречию со следствием 1. Если же s^1 и s^2 совпадают, то в силу гладкости кривой γ мы получаем, что при $n \to \infty$ величина угла между касательными к кривым γ и $\gamma_{1/n}$ в точках $r(s^1)$ и $r_{1/n}(s^1)$ соответственно стремится к числу, большему δ. Это противоречит (Γ_3).

При фиксированных выпуклой гладкой кривой $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ и произвольном числе $\varepsilon > 0$ через $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon(\gamma)$ будем обозначать множество выпуклых гладких кривых $\gamma_\varepsilon \subset \mathbf{R}^2$, удовлетворяющих условиям (Γ_1) — (Γ_3).

Лемма 5. *Пусть* $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ *— гладкая, выпуклая кривая, гомеоморфная замкнутому отрезку, но не совпадающая с отрезком, соединяющим ее концы. Тогда множество* $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon(\gamma)$ *имеет мощность континуум.*

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 4.

Аналог леммы 5 справедлив для кривых, классов C^∞, $C^k (k \geqslant 2)$, $C^{1,\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

Лемма 6. *Пусть существует последовательность* γ_m, $m \in \mathbf{N}$, *интервалов кривой* $\gamma \subset \mathbf{R}^2$, *обладающая следующими свойствами:*

1) *для каждого числа* $m \in \mathbf{N}$ *существует евклидова изометрия* $F_m\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *такая, что* $F_m(\gamma_1) = \gamma_m$;

2) *множество* $\bigcup_{m\in\mathbf{N}} \gamma_m$ *ограничено;*

3) *если $m \neq n$, то множества γ_m и γ_n не совпадают.*

Тогда γ_1 является либо дугой окружности, либо отрезком прямой.

Доказательство. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что последовательность F_m сходится к изометрии F. Тогда множество $F(\gamma_1)$ является интервалом кривой γ, изометричным γ_1. Обозначим его γ_0. Для каждого $m \in \mathbf{N}$ определим отображение $G_m \equiv F_m \circ F^{-1}$. Тогда $\gamma_m = G_m(\gamma_0)$ и изометрии G_m сходятся к тождественному отображению.

Пусть $a, b \in \gamma$. Символом $\xi(a)$ обозначим величину угла, образованного касательным вектором к кривой γ в точке a и единичным вектором оси абсцисс, а символом $\eta(a, b)$ — длину интервала кривой γ, определяемого точками a и b (если γ гомеоморфна окружности, то таких интервалов два, и тогда $\eta(a, b)$ обозначает длину меньшего из них).

Рассмотрим функцию

$$k(a) = \lim_{\gamma_0 \ni b \to a} \frac{|\xi(a) - \xi(b)|}{\eta(a, b)}, \quad a \in \gamma_0. \tag{9}$$

Положим

$$K = \inf_{a \in \gamma_0} k(a). \tag{10}$$

Функция ξ непрерывна, а значит, и равномерно непрерывна на компактном множестве γ_0. Следовательно, для заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $a, b \in \gamma_0$ из неравенства $\eta(a, b) < \delta$ следует $|\xi(a) - \xi(b)| < \varepsilon$.

В силу (10), существует внутренняя точка A кривой γ_0 такая, что $0 \leqslant k(A) - K \leqslant \varepsilon/2$. Убедимся, что существуют точка $B \in \gamma_0$ и натуральное число m такие, что

$$k(A) - \varepsilon/2 \leqslant \frac{|\xi(A) - \xi(B)|}{\eta(A, B)} \leqslant k(A) + \varepsilon/2; \tag{11}$$

для некоторого целого числа p справедливо равенство

$$G_m^p(A) = B, \tag{12}$$

где G_m^p, $p \in \mathbf{Z}$, обозначает p-ю итерацию отображения G_m, т. е. $G_m^1 \equiv G_m$, $G_m^p \equiv G_m \circ G_m^{p-1}$;

$$\eta(G_m(A), A) < \delta; \tag{13}$$

$$\eta(A, B) < \delta. \tag{14}$$

Действительно, можно найти точку $b \in \gamma_0$ такую, что $\eta(a, b) < \delta$ и

$$k(A) - \varepsilon/2 < \frac{|\xi(A) - \xi(b)|}{\eta(A, b)} < k(A) + \varepsilon/2.$$

В силу непрерывности функций ξ и η эти неравенства будут выполняться для всех таких точек $c \in \gamma_0$, что $\eta(b, c) < \delta'$, где δ' — некоторое положительное число. Выберем теперь m так, чтобы $\eta(G_m(A), A) < \min(\delta, \delta')$. Тогда найдется целое число p, для которого $\eta\left(G_m^p(A), b\right) < \delta'$. Наконец, положив $B = G_m^p(A)$, мы, очевидно, удовлетворим условиям (11)—(14).

Возьмем теперь две произвольные точки a и b кривой γ_0. Занумеруем последовательно все точки кривой γ_0 вида $C_m^p(A)$, $p \in \mathbf{Z}$, лежащие между a и b. Будем их обозначать A_i, $i = 1, \ldots, n$. Справедливо неравенство

$$|\xi(a) - \xi(b)| \leqslant |\xi(a) - \xi(A_1)| + \sum_{i=1}^{n-1} |\xi(A_i) - \xi(A_{i+1})| + |\xi(A_n) -$$

$$- \xi(b)| \leqslant \varepsilon + (K + \varepsilon) \sum_{i=1}^{n-1} \eta(A_i, A_{i+1}) + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon + (K + \varepsilon)\eta(a, b).$$

Откуда в силу произвольности ε

$$\overline{\lim_{b\to a}}\frac{|\xi(a)-\xi(b)|}{\eta(a, b)}\leqslant K.$$

Полученное неравенство в совокупности с (9), (10) доказывает, что кривая γ_0 в каждой своей точке имеет кривизну, равную константе K. Следовательно, γ_0 — либо отрезок прямой, либо дуга окружности.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть даны область $D\subset\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 2$, со связной гладкой границей $\partial D\subset\Delta(D)$, область $D^*\subset\mathbf{R}^n$ с гладкой границей и сюръективное изометрическое в относительных метриках границ областей D и D^* отображение $f\colon\partial D\to\partial D^*$. По лемме 1 $f|_{\partial D}$ — евклидова изометрия. Из условия $\partial D\subset\Delta(D)$, очевидно, следует, что D не является полупространством. Но тогда ∂D не является гиперплоскостью и отображение f единственным образом продолжается до некоторой евклидовой изометрии P всего пространства. В силу сюръективности отображения f реализуется одна из следующих двух возможностей: либо $P(D)=D_0^*$, либо $P(D)=D^*$. (Здесь D_0^* — внутренность дополнения области D^*.) Допустив первую возможность, получим, что тождественное отображение границы области D^* на себя является изометрией в относительных метриках границ областей D^* и D_0^*, поскольку для любых точек a, $b\in\partial D^*$

$$\rho_{D_0^*}(a, b)=\rho_D\left(P^{-1}(a), P^{-1}(b)\right)=\rho_D\left(f^{-1}(a), f^{-1}(b)\right)=\rho_{D^*}(a, b).$$

Тогда в силу леммы 2 область D_0^*, совпадающая согласно допущению с областью $P(D)$, является полупространством, что противоречит условию $\partial D\subset\Delta(D)$. Значит, реализуется вторая возможность, т. е. области D и D^* изометричны. Теорема 1 доказана.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть $\partial D\not\subset\Delta(D)$. Тогда $\Delta(D)$ не совпадает со всей плоскостью, а значит, $\partial\Delta(D)\neq\varnothing$. Кроме того, нетрудно видеть, что $\partial\Delta(D)$ — одномерное многообразие класса C^1.

Рассмотрим множество Γ всевозможных интервалов кривой $\partial\Delta(D)$, каждый из которых не является отрезком прямой. Множество Γ не пусто, поскольку в противном случае каждая компонента связности кривой $\partial\Delta(D)$ является прямой линией, и тогда выпуклая область $\Delta(D)$ будет полуплоскостью или полосой. Первое противоречит условию теоремы, второе — связности области D.

Далее рассмотрим два случая: в множестве Γ существует интервал γ_0, содержащийся в кривой ∂D; такого интервала не существует.

В первом случае поскольку интервал γ_0 компактен, а ∂D является многообразием класса C^1, то существует число $\delta_0>0$ такое, что для всех чисел δ, $0<\delta<\delta_0$, и каждого замкнутого круга B радиуса δ с центром, принадлежащим интервалу γ_0, пересечение $B\cap\partial D$ является интервалом кривой ∂D. Выберем теперь интервал γ кривой ∂D и число δ, $0<\delta<\delta_0$, такие, что

1) γ содержится во внутренности интервала γ_0 так, что множество $\gamma_0\setminus\gamma$ представляет собой объединение двух интервалов, причем евклидово расстояние между концами каждого из них больше δ;

2) дл $\gamma<\delta$;

3) интервал γ не является отрезком прямой.

Такой выбор возможен, поскольку γ_0 не является отрезком прямой, а значит, найдется точка a, лежащая внутри интервала γ_0, такая, что всякий интервал кривой ∂D, содержащий точку a, не является отрезком прямой. Кроме того, если ∂D не является окружностью, то, уменьшая интервал γ, можем найти интервал γ^1 кривой ∂D, который не является ни отрезком прямой, ни дугой окружности, и $\gamma^1 \cap \gamma = \varnothing$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Возьмем $\gamma_\varepsilon \in \widetilde{\Gamma}_\varepsilon(\gamma)$. Множество $\gamma_\varepsilon \cup \cup((\partial D) \setminus \gamma)$ является связным многообразием класса C^1 без края. Действительно, γ_ε и $\gamma_0 \setminus \gamma$ не пересекаются, так как лежат по разные стороны от прямой, проходящей через концы интервала γ. Множества γ_ε и $(\partial D) \setminus \gamma_0$ также не пересекаются, поскольку в противном случае евклидово расстояние от одного из концов кривой γ_ε до точки пересечения было бы меньше δ, что невозможно в силу выбора числа δ_0 и условия 1), наложенного на интервал γ.

Покажем теперь, что можно выбрать γ_ε таким образом, что кривая $\gamma_\varepsilon \cup ((\partial D) \setminus \gamma)$ не будет изометрична ∂D. Если ∂D — окружность, то это очевидно, так как годится любая γ_ε, отличная от γ. Если же ∂D не является окружностью, то рассмотрим построенный выше интервал γ^1. По лемме 6 существует не более чем счетное число интервалов кривой ∂D евклидово изометричных γ^1. Следовательно, существует не более чем счетное множество кривых γ_ε таких, что $\gamma_\varepsilon \cup ((\partial D) \setminus \gamma)$ изометрична ∂D. Но лемма 5 утверждает, что множество $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon(\gamma)$ имеет мощность континуум, что и доказывает возможность выбора.

Кривая $\gamma_\varepsilon \cup ((\partial D) \setminus \gamma)$ разбивает плоскость на две открытые компоненты связности. В качестве области D^* выберем ту компоненту, для которой выполнено следующее условие: если t — произвольная точка множества $(\partial D) \setminus \gamma$, то области D и D^* локально лежат по одну сторону от кривой ∂D в точке t.

Построим отображение f: $\partial D \to \partial D^*$, удовлетворяющее следующим условиям: на множестве $(\partial D) \setminus \gamma$ отображение f является тождественным, т. е. если $t \in (\partial D) \setminus \gamma$, то $f(t) = t$; f отображает интервал γ на интервал γ_ε изометрично во внутренних метриках этих интервалов; f непрерывно. Очевидно, что f однозначно определяется этими тремя условиями и является изометрическим в относительных метриках границ областей D и D^* отображением. Однако области D и D^* не изометричны в евклидовых метриках, поскольку не изометричны их границы. Тем самым мы показали, что область D не определяется однозначно относительной метрикой своей границы.

Рассмотрим второй случай. Выберем произвольный интервал γ кривой $\partial\Delta(D)$, который не является отрезком прямой. Кривая γ содержит хотя бы один замкнутый прямолинейный отрезок: пусть $t \in \gamma \setminus \partial D \neq \varnothing$; ближайшие к t точки множества $\gamma \cap \partial D$ обозначим a и b; отрезок $[a, b]$ принадлежит кривой γ в силу выпуклости последней.

Замкнутый прямолинейный отрезок $[a, b]$, содержащийся в кривой γ, назовем максимальным, если ни один из замкнутых прямолинейных отрезков, содержащихся в кривой γ, не содержит отрезка $[a, b]$ в качестве собственного подмножества.

Отметим следующие два свойства максимальных отрезков кривой γ.

(γ_1) Если σ — объединение всех максимальных отрезков кривой γ, то замыкание множества σ совпадает с γ.

Действительно, допустив противное, найдем точку $t \in \gamma$ и интервал γ_0 кривой γ, для которого t является внутренней точкой и $\gamma_0 \cap \sigma = \varnothing$. Каждая точка интервала γ_0 принадлежит кривой ∂D (иначе она принадлежала бы σ). Значит, мы находимся в условиях первого случая, поскольку очевидно, что γ_0 не является отрезком прямой. Противоречие.

(γ_2) Никакие два максимальных отрезка кривой γ не могут иметь общего конца.

В противном случае в силу гладкости кривой $\partial\Delta(D)$ они принадлежали бы одной прямой, что противоречило бы их максимальности.

Максимальные отрезки кривой γ будем обозначать символами σ_m, $m \in \mathbf{N}$. Из приведенных свойств следует, что множество всех максимальных отрезков кривой γ счетно.

Возьмем кривую $\gamma_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon(\gamma)$ (см. лемму 4). Как и в первом случае, можем считать, что кривая γ_ε выбрана так, что множество $\gamma_\varepsilon \cup ((\partial D)\setminus\gamma)$ не является евклидово изометричным множеству ∂D.

Концы отрезка σ_m обозначим a_m и b_m. Интервал кривой ∂D, заключенный между точками a_m и b_m, обозначим δ_m. Если ∂D гомеоморфна прямой, то интервал δ_m определен однозначно. Если же ∂D гомеоморфна окружности, то таковых интервалов два; в этом случае в качестве δ_m выберем тот из них, для которого пересечение кривой ∂D и замкнутого ограниченного множества, границей которого является $\sigma_m \cup \delta_m$, совпадает с кривой δ_m. Аналогично определим интервал δ кривой ∂D, заключенный между концами кривой γ.

Параметризуем кривую δ с помощью натурального параметра q: $[0, \text{дл}\,\delta] \to \mathbf{R}^2$ так, чтобы $q(0) = r(0)$. Определим отображение $f_\varepsilon\colon \partial D \to \mathbf{R}^2$ следующим образом: $f_\varepsilon(t) = t$, если $t \in (\partial D)\setminus\delta$, $f_\varepsilon(t) = r_\varepsilon[r^{-1}(t)]$, если $t \in \delta \cap \gamma$. Если же $t \in \delta\setminus\gamma$, то $t \in \delta_m$ для некоторого натурального m; для таких t полагаем $f_\varepsilon(t) = P_m(t)$, где P_m обозначает изометрию евклидовой плоскости на себя такую, что $P_m(a_m) = f_\varepsilon(a_m)$; $P_m(b_m) = f_\varepsilon(b_m)$ и множество $P_m(\delta_m)$ лежит со стороны вогнутости кривой γ_ε. (Отметим, что каждая кривая δ_n лежит со стороны вогнутости кривой γ.)

При каждом $\varepsilon > 0$ отображение f_ε является C^1-гладким отображением многообразия ∂D в $\mathbf{R}^2$. Очевидным образом указывается дифференциал отображения f_ε в точке $t \in \partial D$ и проверяется его непрерывность.

Пусть α и β — функции из следствий 1 и 2 леммы 4. Поскольку γ — компактное подмножество многообразия ∂D класса C^1, то для каждого $\theta > 0$ существует $\rho > 0$ такое, что для всякого замкнутого круга B с центром, лежащим на γ, и радиусом ρ пересечение $B \cap \partial D$ является интервалом кривой ∂D и угол, образованный касательными к кривой ∂D в двух произвольных точках множества $B \cap \partial D$, меньше θ. Покажем теперь, что если числа ρ, θ и ε, кроме того, подобраны так, что

$$\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)\,\text{дл}\,\delta < \rho/2, \tag{15}$$

$$\theta + 2\beta(\varepsilon) < \pi/4, \tag{16}$$

то отображение f_ε инъективно.

Прежде всего оценим евклидово расстояние между точками $t \in \partial D$ и $f_\varepsilon(t)$. Если $t \in \delta\setminus\gamma$, то t принадлежит некоторому интервалу δ_m кривой ∂D. По определению, $f_\varepsilon(t) = P_m(t)$, где P_m — некоторая сохраняющая ориентацию изометрия всей плоскости на себя. Но, очевидно, $P_m \equiv P^* \circ P$, где P — параллельный перенос такой, что $P(a_m) = f_\varepsilon(a_m)$, а P^* — поворот относительно точки $f_\varepsilon(a_m)$ такой, что $P^*(P(t)) = P_m(t)$. Значит, при $t \in \delta\setminus\gamma$

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(t) - t| &= |(P^* \circ P)(t) - t| \leqslant |(P^* \circ P)(t) - P(t)| + |P(t) - t| \leqslant \\ &\leqslant \beta(\varepsilon)\,\text{дл}\,\delta_m + \alpha(\varepsilon) \leqslant \beta(\varepsilon)\,\text{дл}\,\delta + \alpha(\varepsilon). \end{aligned} \tag{17}$$

Если $t \in \delta \cap \gamma$, то $|f_\varepsilon(t) - t| \leqslant \alpha(\varepsilon)$, если же $t \in (\partial D)\setminus\delta$, то $f_\varepsilon(t) = t$, т. е. неравенство (17) выполнено и в этих случаях.

Допустим теперь, что отображение f_ε не является инъективным, т. е. существуют точки t_1, $t_2 \in \partial D$, $t_1 \neq t_2$, для которых $f_\varepsilon(t_1) = f_\varepsilon(t_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} |t_1 - t_2| &\leqslant |t_1 - f_\varepsilon(t_1)| + |f_\varepsilon(t_2) - t_2| \leqslant \\ &\leqslant 2[\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)\,\text{дл}\,\delta] < \rho. \end{aligned}$$

Следовательно, точка t_2 принадлежит кругу B с центром в точке t_1 и радиусом ρ. Значит, весь интервал $\varkappa$ кривой ∂D с концами t_1 и t_2 содержится в этом круге; кроме того, в силу выбора числа ρ касательная к кривой ∂D в произвольной точке интервала $\varkappa$ образует с касательной к ∂D в точке t_1 угол, меньший θ.

Прямую l будем называть *касательной к множеству* $f_\varepsilon(\partial D)$ *в точке* $f_\varepsilon(t)$, если l является касательной к многообразию $f_\varepsilon(U \cap \partial D)$, где U — такая окрестность точки $t \in \partial D$, что отображение $f_\varepsilon|_U$ инъективно. (Подчеркнем, что a priori в точке множества $f_\varepsilon(\partial D)$ касательная не единственна.) Очевидно, для любой точки $t \in \partial D$ угол между касательной к ∂D в точке t и касательной к $f_\varepsilon(\partial D)$ в точке $f_\varepsilon(t)$ не превосходит $\beta(\varepsilon)$. Следовательно, касательная к множеству $f_\varepsilon(\partial D)$ в любой точке множества $f_\varepsilon(\varkappa)$ образует с касательной к множеству $f_\varepsilon(\partial D)$ в точке $f_\varepsilon(t_1)$ угол, меньший $\theta + 2\beta(\varepsilon) < \pi/4$. С другой стороны, поскольку $f_\varepsilon(t_1) = f_\varepsilon(t_2)$, то в множестве $f_\varepsilon(\varkappa)$ найдется точка, касательная в которой к множеству $f_\varepsilon(\partial D)$ ортогональна касательной к $f_\varepsilon(\partial D)$ в точке $f_\varepsilon(t_1)$. Пришли к противоречию, которое и доказывает инъективность отображения f_ε.

Фиксируем теперь $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы построенное выше отображение f_ε было инъективным. Тогда множество $f_\varepsilon(\partial D)$ является одномерным связным многообразием класса C^1 без края и, следовательно, разбивает плоскость на две открытые компоненты связности. Обозначим через D^* ту компоненту, для которой выполнено следующее условие: если t — произвольная точка множества $(\partial D)\setminus\gamma$, то области D и D^* локально лежат по одну сторону от кривой ∂D в точке t. Рассуждения, опирающиеся на способ построения f_ε, показывают, что f_ε является изометрическим в относительных метриках границ областей D и D^* отображением. Однако области D и D^* заведомо не изометричны. Следовательно, область D не определяется однозначно относительной метрикой своей границы в классе областей с гладкими границами. Теорема 2 доказана.

§ 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 3—5

Доказательство теоремы 3. Точку на сфере, из которой осуществляется стереографическая проекция, использованная при построении метрики μ, обозначим N.

Пусть $D \in \mathscr{D}_0$. Тогда $\Delta(D)$ есть полуплоскость, а $\varphi(\Delta(D))$ — область на сфере, ограниченная окружностью, проходящей через точку N.

Зададим произвольно число $\varepsilon > 0$. На сфере построим открытый круг B с центром в N и радиусом (во внутренней метрике сферы) $\varepsilon/3$. Множество $D_1 = D \cup \varphi^{-1}(B) \subset \mathbf{R}^2$, очевидно, обладает следующими свойствами:

а) D_1 открыто и связно, т. е. D_1 — область;

б) $\Delta(D_1)$ не является полуплоскостью;

в) $\mu(D_1, D) \leqslant \varepsilon/3$;

г) область D_1 имеет кусочно-гладкую границу.

Построим область $D_2 \subset \mathbf{R}^2$ с гладкой границей такую, что $\mu(D_1, D_2) \leqslant \varepsilon/3$ и $\mathbf{R}^2 \setminus D_2$ ограничено. В силу последнего $D_2 \notin \mathscr{D}_0$.

Пусть $\mathscr{A} \subset (\mathscr{D}, \mu)$ состоит из областей d, каждая из которых имеет ограниченное дополнение и удовлетворяет неравенству $\mu(d, D_2) < \varepsilon/3$. Множество $\mathscr{A}$ открыто в пространстве $(\mathscr{D}, \mu)$, так как оно является пересечением двух открытых множеств, и, кроме того, $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}_0 = \varnothing$.

Итак, в произвольной ε-окрестности произвольной точки $D \in \mathscr{D}_0$ мы нашли открытое множество $\mathscr{A}$, не пересекающееся с множеством $\mathscr{D}_0$, что и доказывает нигде не плотность последнего. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть даны область $D^* \subset \mathbf{R}^n$ с аналитической границей и сюръективное изометрическое в относительных метриках границ областей D и D^* отображение $f\colon \partial D \to \partial D^*$.

Произвольную непустую компоненту связности множества $\Delta(D) \cap \partial D$ обозначим S. По лемме 1 $f|_S$ — евклидова изометрия. Поскольку S не содержится ни в какой гиперплоскости, то отображение $f|_S$ единственным образом продолжается до евклидовой изометрии P всего пространства.

Покажем, что поверхности $P(\partial D)$ и ∂D^* совпадают. Их пересечение содержит множество $P(S) = f(S)$, и, следовательно, открытое ядро A этого пересечения, рассматриваемого как подмножество поверхности $P(\partial D)$, не пусто. Если поверхности $P(\partial D)$ и ∂D^* не совпадают, то множество A имеет непустую границу (в смысле топологии поверхности $P(\partial D)$). Пусть $a \in \partial A$, тогда $a \in P(\partial D) \cap \partial D^*$, причем поверхности $P(\partial D)$ и ∂D^* имеют в точке a общую касательную плоскость. Известно, что всякая аналитическая поверхность локально представляется графиком вещественно-аналитической функции. Следовательно, мы можем считать, что поверхности $P(\partial D)$ и ∂D^* локально являются графиками вещественно-аналитических функций $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, заданных в некотором шаре $B \subset \mathbf{R}^{n-1}$. Так как отображение $B \ni (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) \in P(\partial D)$ непрерывно, то прообраз A при этом отображении является открытым множеством X в шаре B. Но отображения φ и ψ, очевидно, совпадают на X, а значит, совпадают и во всем шаре B. Следовательно, $a \in A$. Пришли к противоречию, которое и доказывает, что поверхности $P(\partial D)$ и ∂D^* совпадают.

Далее, рассуждая аналогично как в § 4, можно вывести изометричность областей D и D^* из изометричности поверхностей ∂D и ∂D^*. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Из условий теоремы следует, что область D является дополнением к выпуклому замкнутому множеству. Поскольку граница ∂D не пуста и связна, D гомеоморфна либо дополнению к кругу, либо полуплоскости. В обоих случаях легко построить примеры области $D^* \subset \mathbf{R}^2$, не изометричной D и имеющей аналитическую границу, изометричную ∂D в относительных метриках границ областей D и D^*. В первом случае, очевидно, годится внешность эллипса, имеющего тот же периметр, что и кривая ∂D, но ей не изометричного; во втором — полуплоскость, или внешность параболы.

§ 7. ПРИМЕРЫ

В первом примере мы покажем, что при $n \geqslant 3$ условие $\partial D \subset \Delta(D)$ не является необходимым для того, чтобы область $D \subset \mathbf{R}^n$, имеющая гладкую границу, однозначно определялась относительной метрикой своей границы в классе областей с гладкими границами.

Пример 1. Пусть область $D \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, есть дополнение к замкнутому шару. Тогда $(\partial D) \setminus \Delta(D) = \varnothing$, однако область D однозначно определяется относительной метрикой своей границы в классе областей с гладкими границами.

Действительно, если D^* — область с гладкой границей в пространстве $\mathbf{R}^n$, а f: $\partial D \to \partial D^*$ — изометрическое в относительных метриках границ областей D и D^* отображение, то согласно лемме 3 из [2] ∂D^* является выпуклой поверхностью, причем область D^* ограничена. Но тогда отображение f является изометрическим во внутренних метриках выпуклых поверхностей ∂D и ∂D^*. Теорема об однозначной определенности замкнутых гладких выпуклых поверхностей [6, 7] утверждает, что поверхности ∂D и ∂D^* евклидово изометричны. Наконец, поскольку неограниченная область не может быть изометрична ограниченной, то области D и D^* евклидово изометричны.

Подчеркнем, что в рассмотренном примере однозначная определенность дополнения шара пространства $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, была доказана в классе всех (а не только имеющих выпуклое дополнение) областей с гладкими границами. Остается открытым вопрос о том, будет ли дополнение шара однозначно определяться относительной метрикой своей границы в классе областей, например, с кусочно-гладкими границами.

Далее заметим, что в работах [1, 3, 4] (см. введение к настоящей работе) полностью решен вопрос об однозначной определенности области пространства $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, с компактной гладкой границей в классе областей с гладкими границами. С другой стороны, теоремы 1, 2 полностью решают тот же вопрос для всякой плоской области D с гладкой (вообще говоря, некомпактной) границей, для которой $\Delta(D)$ не является полуплоскостью. Пример 2 посвящен пояснению случая области $D \subset \mathbf{R}^3$ с некомпактной гладкой границей и указывает на следующие обстоятельства.

1. Задача не сводится к плоской. В примере 2 построена неограниченная область $D \subset \mathbf{R}^3$ с гладкой некомпактной границей, содержащей некоторую прямую l такую, что всякое сечение области D плоскостью τ ортогональной l не определяется однозначно (даже ни в какой окрестности точки $l \cap \tau$) относительной метрикой границы плоской области $D \cap \tau$. Однако область D однозначно определяется относительной метрикой своей границы.

2. Ослабевает связь изучаемой задачи с проблемой однозначной определенности выпуклых поверхностей. В самом деле, как следует из [1, 3, 4] (см. введение), для области $D \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, с компактной гладкой границей справедливо утверждение: область D однозначно определяется относительной метрикой своей границы тогда и только тогда, когда выпуклая поверхность $\partial\Delta(D)$ (возможно, $\partial\Delta(D) = \varnothing$) однозначно определяется своей внутренней метрикой. Пример 2 показывает, что в случае некомпактной границы и $n \geqslant 3$ требование однозначной определенности $\partial\Delta(D)$ не является необходимым (хотя, конечно, остается достаточным).

Пример 2. На евклидовой плоскости возьмем полосу, образованную выпуклой оболочкой двух параллельных прямых l_1 и l_2. Из этой полосы удалим счетное множество замкнутых кругов так, чтобы

1) никакие два круга не пересекались между собой;

2) ни один из кругов не пересекался ни с прямой l_1, ни с прямой l_2;

3) если λ — прямая, перпендикулярная l_1, и λ_0 — ее открытый отрезок, заключенный между прямыми l_1 и l_2, то проекция внутренностей всех кругов на прямую λ совпадала с отрезком λ_0.

Свернем полученную таким образом полосу с дырками в цилиндрическую поверхность $C \subset \mathbf{R}^3$, отождествив прямые l_1 и l_2. Цилиндр, образованный выпуклой оболочкой поверхности C, обозначим X. Каждую из дырок цилиндрической поверхности C заклеим некоторой поверхностью Y_m, $\operatorname{int} Y_m \subset X$, $m \in \mathbf{N}$, гомеоморфной двумерному кругу, чтобы в результате получилось двумерное многообразие класса C^1. Полученная поверхность разбивает пространство на две компоненты связности. В качестве области D возьмем ту компоненту, которая содержит дополнение цилиндра X.

Построенная область D обладает следующими свойствами:

а) D имеет гладкую границу;

б) $\Delta(D) = \operatorname{int} X$ и, следовательно, $\Delta(D)$ не является полупространством;

в) множество $(\partial D) \setminus \Delta$ содержит прямую l_1.

Однако область D однозначно определяется относительной метрикой своей границы даже в классе областей с кусочно-гладкими границами.

Действительно, пусть $D^* \subset \mathbf{R}^3$ — область с кусочно-гладкой границей, а f: $\partial D \to \partial D^*$ — изометрическое в относительных метриках границ областей D и D^* отображение. Согласно пп. 2—6 из § 3 [2], можно построить отображение g: $\partial\Delta(D) \to \partial\Delta(D^*)$, изометрическое во внутренних метриках выпуклых поверхностей $\partial\Delta(D)$ и $\partial\Delta(D^*)$, такое, что отображения g и f совпадают на множестве $\partial D \cap \partial\Delta(D)$. Следовательно, выпуклая поверхность $\partial\Delta(D^*)$ гомеоморфна цилиндрической поверхности, а значит, сама цилиндрическая. Но тогда изометрическое во внутренних метриках поверхностей $\partial\Delta(D)$ и $\partial\Delta(D^*)$ отображение g, очевидно, отображает образующую цилиндрической поверхности $\partial\Delta(D)$ в образующую цилиндрической поверхности $\partial\Delta(D^*)$.

Через каждую точку множества $Y_m \cap \partial\Delta(D)$ проведем образующую цилиндрической поверхности $\partial\Delta(D)$. Объединение этих образующих обозначим Z_m. Далее, заметим, что $\operatorname{int} Y_m \subset \Delta(D)$ и, согласно лемме 1, $f|_{Y_m}$ — евклидова изометрия. Поскольку на множестве $\partial D \cap \partial\Delta(D)$ отображения g и f совпадают, то $g|_{Z_m}$ — евклидова изометрия. Если $\operatorname{int} Z_n \cap \operatorname{int} Z_m = \varnothing$, то, поскольку это пересечение не содержится ни в какой плоскости, получаем, что $g|_{Z_n \cup Z_m}$ — евклидова изометрия. Наконец, так как $\operatorname{int} Z_m$, $m \in \mathbf{N}$, покрывают все множество $(\partial\Delta(D))\setminus l_1$, то $g|_{(\partial\Delta(D))\setminus l_1}$ (а значит, и g) — евклидова изометрия. Поэтому $\Delta(D^*)$ евклидово изометрично $\Delta(D)$. Поскольку граница каждого множества Y_m не содержится ни в какой гиперплоскости, то ∂D^* евклидово изометрично ∂D. Следовательно, D и D^* изометричны.

Пример 3. Пусть функция φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ задана формулой $\varphi(x) = -x^2 \exp(-|x|)$. Очевидно, φ непрерывно дифференцируема и обладает следующими свойствами:

1) φ — четная функция;
2) $\varphi(0) = 0$;
3) для всех $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, справедливо неравенство $\varphi(x) < 0$;
4) $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

В качестве области D возьмем надграфик функции φ. Тогда $\Delta(D)$ является полуплоскостью $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y < 0\}$. Следовательно, множество $(\partial D)\setminus\Delta(D)$ состоит из одной точки $(0, 0)$, т. е. не пусто. Однако область D однозначно определяется относительной метрикой своей границы в классе областей с гладкими границами, что доказывает существенность условия «$\Delta(D)$ не является полуплоскостью» в теореме 2.

Действительно, пусть $D^* \subset \mathbf{R}^2$ — область с гладкой границей, а f: $\partial D \to \partial D^*$ — изометрическое в относительных метриках границ областей D и D^* отображение. Часть кривой ∂D, содержащуюся в правой полуплоскости $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$, обозначим γ_1, а в левой полуплоскости — γ_2. Тогда по лемме 1 $f|_{\gamma_i}$ — евклидова изометрия для каждого $i = 1, 2$. Поскольку множество $f(\gamma_1) \cup f((0, 0)) \cup f(\gamma_2)$ является одномерным многообразием класса C^1, то f — евклидова изометрия. Наконец, евклидова изометричность областей D и D^* следует из леммы 2, поскольку D не является полуплоскостью.

Построенная в примере 3 область D уже не будет однозначно определяться относительной метрикой своей границы в классе областей с кусочно-гладкими границами, так как в этом классе можно повернуть кривую γ_1 относительно точки $(0, 0)$ на некоторый угол. Но, очевидно, пример можно модифицировать так, что область D будет однозначно определяться и в классе областей с кусочно-гладкими границами.

Наконец, перейдем к обсуждению последнего примера, который показывает, что аналог теоремы 2 в классе областей с кусочно-линейными границами не справедлив.

Пример 4. Зададим на плоскости $\mathbf{R}^2$ декартову систему координат и рассмотрим шесть точек $A_1 = (-4, -3)$, $A_2 = (0, 1)$, $A_3 = (4, -3)$, $A_4 = (1, 0)$, $A_5 = (0, 4)$, $A_6 = (-1, 0)$. Замкнутая ломаная $\left(\bigcup_{i=1}^{5} [A_i, A_{i+1}]\right) \cup [A_1, A_6]$ разбивает плоскость на две открытые компоненты связности. В качестве области D выберем неограниченную компоненту. Тогда $\Delta(D)$ является внутренностью треугольника $A_1A_3A_5$. Поэтому множество $(\partial D)\setminus\Delta(D)$ состоит из трех точек A_1, A_3 и A_5 и, следовательно, не пусто. Однако область D однозначно определяется относительной метрикой своей границы в классе областей с кусочно-линейными границами.

Действительно, пусть D^* — некоторая область с кусочно-линейной границей и f: $\partial D \to \partial D^*$ — изометрическое в относительных метриках границ областей D и D^* отображение. Пусть, кроме того, Q — один из отрезков $[A_1, A_6]$ или $[A_i, A_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, 5$, а A — одна из точек A_j, $j = 1, \ldots, 6$, такие, что $(A, B) \subset D$ при любой точке $B \in \operatorname{int} Q$. Тогда $f|_{Q \cup \{A\}}$ — евклидова изометрия. (По существу, это следует из леммы 1, хотя ссылаться на нее здесь нельзя: в ней требуется, чтобы области D и D^* имели гладкие границы. Однако в рассматриваемой ситуации это утверждение справедливо даже при кусочно-гладких границах (см. [3]).) Поэтому треугольник $f(A_1)f(A_3)f(A_5)$ равен треугольнику $A_1A_3A_5$, откуда f — евклидова изометрия и, следовательно, области D и D^* изометричны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров В. А., Копылов А. П.** Граничные значения квазиизометрических отображений и однозначная определенность замкнутых выпуклых поверхностей.— В кн.: Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности. Тезисы докладов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982, с. 3—4.
2. **Копылов А. П.** О граничных значениях отображений, близких к изометрическим.— Сиб. мат. журн., 1984, т. 25, № 3, с. 120—131.
3. **Александров В. А.** Изометричность областей в $\mathbf{R}^n$ и относительная изометричность их границ. I.— Сиб. мат. журн., 1984, т. 25, № 3, с. 3—13.
4. **Александров В. А.** Изометричность областей в $\mathbf{R}^n$ и относительная изометричность их границ. II.— Сиб. мат. журн., 1985, т. 26, № 6, с. 3—8.
5. **Александров А. Д.** Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.— Л.: Гостехиздат, 1948.
6. **Погорелов А. В.** Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.: Наука, 1969.
7. **Сенькин Е. П.** Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей.— Укр. геометр. сб. 1972, вып. 12, с. 131—152.

О. Л. БЕЗРУКОВА, Н. С. ДАИРБЕКОВ, А. П. КОПЫЛОВ

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, БЛИЗКИХ В C-НОРМЕ К КЛАССАМ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В статьях [1, 2] на основе концепции, предложенной в [3], построены основы теории устойчивости в C-норме классов многомерных голоморфных отображений. В работе [4] показано, что аналог теории устойчивости классов голоморфных отображений имеет место и в случае класса решений системы Моисила — Теодореско. В недавней работе [5] (см. также [6]) предложено следующее направление исследований устойчивости. Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех C^∞-решений $g\colon \Delta \to \mathbf{R}^m$, $\Delta \subset R^n$, системы дифференциальных уравнений с частными производными

$$F_j\left(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_m, \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g_m}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 g_m}{\partial x_n^2}, \ldots\right) = 0, \tag{1}$$

$$j = 1, 2, \ldots, k,$$

где каждая из функций F_j является многочленом относительно всех своих аргументов, начиная с $(n+1)$-го, причем коэффициенты этих многочленов постоянны. Требуется выяснить, при каких дополнительных условиях на систему (1) класс $\mathfrak{G}$ устойчив в C-норме (ξ-устойчив по терминологии работы [3]). Оказывается, что необходимым условием устойчивости класса $\mathfrak{G}$ является эквивалентность данной системы некоторой системе первого порядка такой, что левая часть каждого из ее уравнений задается однородным многочленом относительно символов (только лишь) первых производных искомых функций. Для линейной системы вида (1) обсуждаемая задача сводится к исследованию на устойчивость класса решений системы

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{si}^{j}\frac{\partial g_s}{\partial x_i} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{2}$$

Главный результат работы [5] состоит в том, что класс решений системы (2) устойчив в том и только том случае, когда эта система эллиптическая.

В данной работе, продолжая построение теории устойчивости классов решений систем вида (2) в духе статей [2, 4], мы изучаем ряд свойств отображений, близких к классам решений таких систем. Получены оценки степени суммируемости частных производных первого порядка, теорема устойчивости в W_p^1- нормах и аналоги теорем Коши, Мо-