ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. А., Копылов А. П. Граничные значения квазиизометрических отображений и однозначная определенность замкнутых выпуклых поверхностей.— В кн.: Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности. Тезисы докладов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982, с. 3—4.
2. Копылов А. П. О граничных значениях отображений, близких к изометрическим.— Сиб. мат. журн., 1984, т. 25, № 3, с. 120—131.
3. Александров В. А. Изометричность областей в $\mathbf{R}^n$ и относительная изометричность их границ. I.— Сиб. мат. журн., 1984, т. 25, № 3, с. 3—13.
4. Александров В. А. Изометричность областей в $\mathbf{R}^n$ и относительная изометричность их границ. II.— Сиб. мат. журн., 1985, т. 26, № 6, с. 3—8.
5. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.— Л.: Гостехиздат, 1948.
6. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.: Наука, 1969.
7. Сенькин Е. П. Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей.— Укр. геометр. сб. 1972, вып. 12, с. 131—152.

О. Л. БЕЗРУКОВА, Н. С. ДАИРБЕКОВ, А. П. КОПЫЛОВ

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, БЛИЗКИХ В C-НОРМЕ К КЛАССАМ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В статьях [1, 2] на основе концепции, предложенной в [3], построены основы теории устойчивости в C-норме классов многомерных голоморфных отображений. В работе [4] показано, что аналог теории устойчивости классов голоморфных отображений имеет место и в случае класса решений системы Моисила — Теодореско. В недавней работе [5] (см. также [6]) предложено следующее направление исследований устойчивости. Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех C^∞-решений $g\colon \Delta \to \mathbf{R}^m$, $\Delta \subset R^n$, системы дифференциальных уравнений с частными производными

$$F_j\left(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_m, \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g_m}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 g_m}{\partial x_n^2}, \ldots\right) = 0, \tag{1}$$

$$j = 1, 2, \ldots, k,$$

где каждая из функций F_j является многочленом относительно всех своих аргументов, начиная с $(n+1)$-го, причем коэффициенты этих многочленов постоянны. Требуется выяснить, при каких дополнительных условиях на систему (1) класс $\mathfrak{G}$ устойчив в C-норме (ξ-устойчив по терминологии работы [3]). Оказывается, что необходимым условием устойчивости класса $\mathfrak{G}$ является эквивалентность данной системы некоторой системе первого порядка такой, что левая часть каждого из ее уравнений задается однородным многочленом относительно символов (только лишь) первых производных искомых функций. Для линейной системы вида (1) обсуждаемая задача сводится к исследованию на устойчивость класса решений системы

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{si}^{j}\frac{\partial g_s}{\partial x_i} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{2}$$

Главный результат работы [5] состоит в том, что класс решений системы (2) устойчив в том и только том случае, когда эта система эллиптическая.

В данной работе, продолжая построение теории устойчивости классов решений систем вида (2) в духе статей [2, 4], мы изучаем ряд свойств отображений, близких к классам решений таких систем. Получены оценки степени суммируемости частных производных первого порядка, теорема устойчивости в W_p^1- нормах и аналоги теорем Коши, Морера и Лиувилля для голоморфных функций. Если система (2) не переопределена, то вычислен точный порядок оценок устойчивости в C- и W^1_p-нормах.

Кроме того, мы даем ответ на следующий вопрос, возникший в связи с исследованиями на устойчивость класса решений системы (1) общего вида [5]: верно ли, что исследование на устойчивость в C-норме классов решений систем вида (1) с коэффициентами из класса $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ сводится к подобной задаче для систем того же вида, но уже с постоянными коэффициентами? Наш ответ утвердительный и говорит о том, что априорное предположение о постоянстве коэффициентов системы (1) в описанном выше направлении исследований устойчивости классов отображений является естественным.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть n, m — пара произвольных натуральных чисел и $\mathfrak{G}$ — класс отображений областей пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ такой, что каждая область из $\mathbf{R}^n$ является областью определения хотя бы одного отображения из $\mathfrak{G}$ и выполнены следующие условия [3].

($\mathfrak{g}_1$) Класс $\mathfrak{G}$ состоит из локально ограниченных отображений.

($\mathfrak{g}_2$) Класс $\mathfrak{G}$ инвариантен относительно параллельного переноса и растяжения в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$.

($\mathfrak{g}_3$) Для любых области $\Delta \subset \mathbf{R}^n$ и семейства $G = \{g\colon \Delta \to \mathbf{R}^m\} \subset \mathfrak{G}$ отображений области Δ в $\mathbf{R}^m$ из равномерной ограниченности семейства G следует его равностепенная непрерывность на компактных подмножествах Δ.

($\mathfrak{g}_4$) Класс $\mathfrak{G}$ замкнут относительно топологии равномерной сходимости на компактах.

($\mathfrak{g}_5$) Если отображение $g\colon \Delta \to \mathbf{R}^m$ принадлежит классу $\mathfrak{G}$, то сужение g на любую подобласть Δ' также принадлежит $\mathfrak{G}$.

($\mathfrak{g}_6$) Если $g\colon \Delta \to \mathbf{R}^m$ — отображение области Δ, обладающее свойством: для любой точки $x \in \Delta$ существует окрестность $U(x) \subset \Delta$ такая, что сужение g на $U(x)$ принадлежит $\mathfrak{G}$, то само отображение g также принадлежит $\mathfrak{G}$.

Для локально ограниченного отображения $f\colon \Delta \to \mathbf{R}^m$ области $\Delta \subset \mathbf{R}^n$, следуя [3], определим функционалы локальной и глобальной близости отображения f к классу $\mathfrak{G}$:

$$\Xi_{\lim}(f, \mathfrak{G}) = \sup_{x \in \Delta} \left[\varlimsup_{r \to 0} \xi_{B(x,r)}(f, \mathfrak{G}) \right],$$

$$\xi(f, \mathfrak{G}) = \sup_{B(x,r) \subset \Delta} \xi_{B(x,r)}(f, \mathfrak{G}),$$

где

$$\xi_{B(x,r)}(f, \mathfrak{G}) = \int_0^1 \xi_{\rho, B(x,r)}(f, \mathfrak{G})\, d\rho,$$

$$\xi_{\rho, B(x,r)}(f, \mathfrak{G}) = \begin{cases} \inf\limits_{(g: B(x,r) \to \mathbf{R}^m) \in \mathfrak{G}} \ \sup\limits_{t \in B(x,\rho r)} \dfrac{|f(t) - g(t)|}{\operatorname{diam} f(B(x,r))}, \\ \qquad \text{если } \operatorname{diam} f(B(x,r) \neq 0, \infty; \\ 0, \ \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функционал ξ глобальной близости измеряет отклонение в C-норме отображения f от отображений класса $\mathfrak{G}$ на компактных подобластях в каждом шаре, лежащем в области определения f, а функционал $\Xi_{\lim}$ локальной близости — в бесконечно малых шарах.

Пусть $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{Y}$ — два класса отображений, причем запас отображений класса $\mathfrak{Y}$ достаточно широк. Тогда согласно [3] класс $\mathfrak{G}$ называется *ξ-устойчивым в предельном смысле* (*устойчивым в C-норме*) *относительно класса* $\mathfrak{Y}$, если он (класс $\mathfrak{G}$) удовлетворяет условиям ($\mathfrak{g}_1$) — ($\mathfrak{g}_6$) и существует вещественная неотрицательная функция α, определенная на некотором полуинтервале $[0, \varepsilon^0) = \{\varepsilon \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon^0\}$, $\varepsilon^0 > 0$, такая, что

1) $\alpha(\varepsilon) \to \alpha(0) = 0$ при $\varepsilon \to 0$,

2) если $(f\colon \Delta \to \mathbf{R}^m) \in \mathfrak{Y}$ и $\Xi_{\mathrm{lim}}(f, \mathfrak{G}) \leqslant \varepsilon < \varepsilon^0$, то $\xi(f, \mathfrak{G}) \leqslant \alpha(\varepsilon)$.

Другими словами, это означает, что из локальной близости отображения $f \in \mathfrak{Y}$ к классу $\mathfrak{G}$ следует его глобальная близость к этому классу.

Всюду далее (за исключением добавления) $\mathfrak{G}$ есть класс решений эллиптической системы (2), которую мы запишем в матричной форме

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g(x) = 0, \tag{3}$$

где $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, дифференциальный оператор $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ определяется своей характеристической матрицей (символом) $A(t) = A(t, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i$, $A_i = \left(a_{js}^i\right)_{\substack{j=1,\ldots,k\\ s=1,\ldots,m}}$ — вещественные матрицы порядка $k \times m$, $i = 1, \ldots, n$ и $g = (g_1, \ldots, g_m)\colon \Delta \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ — решение системы. Напомним, что эллиптичность системы (3) означает, что $\operatorname{rang} A(t) = m$ для всех $t \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

Так как отображения, локально близкие к классу постоянных отображений, также постоянны [3], то будем в дальнейшем предполагать, что класс $\mathfrak{G}$ отличен от класса постоянных отображений.

Для отображений класса $\mathfrak{G}$ имеют место теоремы, аналогичные теоремам Коши и Морера, и интегральные представления, подобные представлениям Коши и Мартинелли — Бохнера для голоморфных функций [5, 7, 8].

Теорема 1 (аналог теоремы Коши). *Пусть $g\colon \mathrm{cl}\,\Delta \to \mathbf{R}^m$ — непрерывное отображение замыкания $\mathrm{cl}\,\Delta$ ограниченной области Δ в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Delta$ такое, что сужение $g \mid \Delta$ отображения g на область Δ принадлежит классу $\mathfrak{G}$. Тогда*

$$\int_{\partial\Delta} A(\nu(x))\, g(x)\, dS = 0.$$

Здесь $\nu(x)$ — вектор единичной внешней нормали к границе $\partial\Delta$ в точке $x \in \partial\Delta$, а dS — поверхностная мера $\partial\Delta$.

Теорема 2 (аналог теоремы Морера). *Пусть $g\colon \Delta \to \mathbf{R}^m$ — непрерывное отображение такое, что для каждого n-мерного шара B, замыкание $\mathrm{cl}\,B$ которого принадлежит Δ, имеет место равенство*

$$\int_{\partial B} A(\nu(x))\, g(x)\, dS = 0.$$

Тогда g — решение системы (3).

Для построения интегрального представления нам потребуется фундаментальное решение $H = (H_{js})_{\substack{j=1,\ldots,k\\ s=1,\ldots,m}}$ формально сопряженной системы

$$A^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x) = 0, \tag{4}$$

где
$$A^*(t) = -\sum_{i=1}^{n} A_i^T t_i, \text{ а } A_i^T = \left(a_{sj}^{iT}\right)_{\substack{s=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,k}}$$

получена транспонированием A_i, т. е. $a_{sj}^{iT} = a_{js}^i$, $s = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, k$; $i = 1, \ldots, n$.

На H налагаем следующие условия.

1. H в $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ вещественно-аналитично и является классическим решением системы (4).

2. H положительно однородно степени $1 - n$. Относительно конкретного вида нужного нам отображения H см., например, [5].

Теорема 3. *Пусть f: $\mathrm{cl}\,\Delta \to \mathbf{R}^m$ — непрерывное отображение класса $W_1^1(\Delta)$ замыкания $\mathrm{cl}\,\Delta$ ограниченной области Δ в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Delta$. Тогда при $x \in \Delta$*

$$f(x) = -\int\limits_{\partial\Delta} H^T(y-x)\,A(\nu(y))\,f(y)\,dS_y + \int\limits_{\Delta} H^T(y-x)\,A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f(y)\,dy \equiv$$

$$\equiv (\Phi_{\partial\Delta} f)(x) + \left(R_\Delta\left(A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f\right)\right)(x). \tag{5}$$

Здесь H^T — матрица, транспонированная к H, и второй интеграл в (5) вычисляется относительно n-мерной меры Лебега в смысле главного значения по Коши.

Введем следующие классы отображений: $W^1_{p,\mathrm{loc}} = \bigcup\limits_{\Delta\subset\mathbf{R}^n} W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Delta)$, где $p \geqslant 1$ и объединение строится по всем областям Δ пространства $\mathbf{R}^n$, $W^1 = \bigcup\limits_{p>n} W^1_{p,\mathrm{loc}}$.

Основным результатом работы [5] является следующая

Теорема 4. *Класс $\mathfrak{S}$ ξ-устойчив в предельном смысле относительно класса W^1.*

В [5] получена также характеризация отображений, локально близких к классу $\mathfrak{S}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = Q(x)\,f'(x), \tag{6}$$

где $Q(x)$ — $(k\times mn)$-матрица $(Q_{\mu\nu}(x))_{\substack{\mu=1,\dots,k\\ \nu=1,\dots,mn}}$, а $f'(x) = (f_{1x_1}(x), \dots, f_{1x_n}(x), \dots, f_{mx_1}(x), \dots, f_{mx_n}(x))^T$. Областью определения матричного отображения Q является область Δ пространства $\mathbf{R}^n$, причем отображение Q является измеримым по Лебегу (последнее означает измеримость каждой из функций $Q_{\mu\nu}$: $\Delta \to \mathbf{R}$, $\mu = 1, \dots, k$; $\nu = 1, \dots, mn$). Полагая для такого рода отображений $\|Q\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Delta}\|Q(x)\|$, где $\|Q(x)\|$ означает норму линейного отображения, соответствующего (относительно канонических базисов в $\mathbf{R}^{mn}$ и $\mathbf{R}^k$) матрице $Q(x)$, введем при $\varepsilon \geqslant 0$ и $p \geqslant 1$ множество $\mathfrak{D}_p(\varepsilon) = \mathfrak{D}_{A,p}(\varepsilon)$ $(\mathfrak{D}(\varepsilon) = \mathfrak{D}_A(\varepsilon))$ всех решений класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}$ (W^1) всевозможных систем типа (6) с $\|Q\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Под решением класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}$ (W^1) системы (6) мы понимаем непрерывное отображение $f: \Delta \to \mathbf{R}^m$ класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}$ (W^1), обобщенные первые производные которого почти всюду удовлетворяют этой системе. Подчеркнем, что в построении класса $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$ $(\mathfrak{D}(\varepsilon))$ используются все области пространства $\mathbf{R}^n$. Имеет место

Теорема 5. *Семейство $\{\mathfrak{S}(\varepsilon, \Xi_{\mathrm{llm}}) \cap W^1\}$ асимптотически эквивалентно при $\varepsilon \to 0$ любому из семейств $\{\mathfrak{D}_p(\varepsilon)\}$, $p > 1$.*

З а м е ч а н и е. Символ $\mathfrak{S}(\varepsilon, \Xi_{\mathrm{llm}})$ обозначает класс отображений f: $\Delta \to \mathbf{R}^m$ областей пространства $\mathbf{R}^n$ с $\Xi_{\mathrm{llm}}(f, \mathfrak{S}) \leqslant \varepsilon$, а асимптотическая эквивалентность двух семейств $\{A(\varepsilon)\} = \{A(\varepsilon)\}_{0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_1}$ и $\{B(\varepsilon)\} = \{B(\varepsilon)\}_{0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_2}$ классов $A(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$ отображений означает (согласно [3]) существование неотрицательной функции δ: $[0, \varepsilon') \to [0, \varepsilon'')$, определенной на некотором полуинтервале $[0, \varepsilon')$, $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon'' = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, и такой, что

1) $\delta(\varepsilon) \to \delta(0) = 0$ при $\varepsilon \to 0$,

2) если $f \in A(\varepsilon)$ с $\varepsilon < \varepsilon'$, то $f \in B(\delta(\varepsilon))$ и наоборот: если $f \in B(\varepsilon)$ с $\varepsilon < \varepsilon'$, то $f \in A(\delta(\varepsilon))$.

Как уже отмечалось выше, цель данной статьи — изучение свойств отображений, близких к классу $\mathfrak{S}$. Отправляясь от теоремы 5, мы будем в качестве такого рода отображений рассматривать отображения классов $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$, $p > 1$, при достаточно малых значениях параметра ε. Для изучения свойств последних нам потребуется еще один результат из [5], лежащий в основе исследований устойчивости в C-норме классов решений систем вида (3).

Рассмотрим интегральный оператор

$$(Rh)(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} H^T(y-x)\, h(y)\, dy, \tag{7}$$

порождаемый вторым слагаемым в интегральном представлении (5). Здесь h: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ — отображение класса $L_p(\mathbf{R}^n)$ с компактным носителем. Отображение Rh имеет при $p>1$ обобщенные производные по x_i, $i=1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial Rh}{\partial x_i}(x) \equiv (\overline{P}_i h)(x) = ((\overline{P}_{1i} h)(x), \ldots, (\overline{P}_{mi} h)(x)), \tag{8}$$

причем оператор $\overline{P}$, определенный формулой (8), является линейным сингулярным интегральным оператором и при $p>1$ определена его L_p-норма:

$$\Upsilon_p = \sup\left\{\|\,|\overline{P}h|\,\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \,\Big|\, \|\,|h|\,\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} = 1\right\} < \infty.$$

Справедлива (см. [5])

Теорема 6. *Предположим, что вещественные числа* ε, d_1, d_2 *и* ν *удовлетворяют условиям*: $1>\varepsilon\geqslant 0$, $1>\nu>0$, $d_1>1$, $d_2>1$, $\varepsilon\Upsilon_{d_1}<1$ *и* $\varepsilon\Upsilon_{d_2}\nu^{-n}<1$. *Тогда для каждого отображения* f: $B(0,1)\to\mathbf{R}^m$ ($B(0,1)$ — *шар из* $\mathbf{R}^n$), *принадлежащего классу* $\mathfrak{D}_{d_1}(\varepsilon)$, *имеет место неравенство*

$$\|\,|f'|\,\|_{L_{d_2}(B(0,1-\nu))} = \left\{\int\limits_{B(0,1-\nu)} |f'(x)|^{d_2} dx\right\}^{1/d_2} \leqslant$$

$$\leqslant C v_n^{1/d_2} [\nu(1-\nu)]^{-n} \frac{1}{1-\nu^{-n}\Upsilon_{d_2}\varepsilon} \operatorname{diam} f(B(0,1)),$$

где постоянная $C=C(A)$ *зависит только от оператора* A.

§ 2. СТЕПЕНЬ СУММИРУЕМОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССА $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$

Пусть $d_p(\varepsilon)$ есть точная верхняя граница положительных чисел d таких, что частные производные каждого отображения из $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$ принадлежат локально классу L_d, т. е.

$$d_p(\varepsilon) = \inf_{(f:\Delta\to\mathbf{R}^m)\in\mathfrak{D}_p(\varepsilon)} \sup\{d>0 \mid f'\in L_{d;\mathrm{loc}}(\Delta)\}.$$

Теорема 7. *Если* $p>1$, *то* $d_p(\varepsilon)\to\infty$ *при* $\varepsilon\to 0$ *как* $1/\varepsilon$.

Доказательство следует схеме, предложенной О. Лехто в [9] и использованной затем в [2, 4] для доказательства аналогов теоремы 7 в тех частных случаях, когда речь идет об отображениях, близких к решениям многомерных систем Коши — Римана и системы Моисила — Теодореско.

Так как класс $\mathfrak{G}$ состоит не только из констант, то он содержит линейное отображение, отличное от тождественно равного нулю. Обозначим его V: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$.

Пусть $p>1$ фиксировано и $\varepsilon>0$ таково, что $p<[(1+\varepsilon)/\varepsilon]n$. Отображение $\varphi(x)=|x|^{-\alpha}V(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, где $\alpha=\varepsilon/(1+\varepsilon)$, обладает свойствами

1) $\left|A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right| \leqslant a\varepsilon\,|\varphi'(x)|$, где $a=\left(\sum\limits_{i,j,s}(a^i_{js})^2\right)^{1/2}$,

2) $\varphi\in W^1_{d,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ при $d<n(1+\varepsilon)/\varepsilon$ и $\varphi\notin W^1_{[(1+\varepsilon)/\varepsilon]n,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, из которых следует, что $\varphi\in\mathfrak{D}_p(a\varepsilon)$ и $\sup\{d>0|\varphi'\in L_{d,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)\}=$

$=n(1+\varepsilon)/\varepsilon$. Поэтому $d_p(a\varepsilon)\leqslant n(1+\varepsilon)/\varepsilon$ для достаточно малых ε. Следовательно,

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon d_p(\varepsilon)\leqslant an<\infty. \tag{9}$$

Если $\varepsilon>0$, $d>1$ таковы, что $\varepsilon\Upsilon_p<1$ и $\varepsilon\Upsilon_d<1$, то из теоремы 6 нетрудно вывести, что частные производные первого порядка отображений класса $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$ принадлежат $L_{d,\,\mathrm{loc}}$. Отсюда рассуждениями, аналогичными использованным в [2, 4], получаем, что $d_p(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$. Далее, если $a\varepsilon\Upsilon_p<1$, то из того, что $\varphi\notin W^1_{n(1+\varepsilon)/\varepsilon,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ следует соотношение $a\varepsilon\Upsilon_{n(1+\varepsilon)/\varepsilon}\geqslant 1$, откуда $C_0=\varlimsup_{d\to\infty}\frac{\Upsilon_d}{d}\geqslant\frac{1}{an}>0$. Из результатов работы А. П. Кальдерона и А. Зигмунда [10] можно также вывести, что $C_0<\infty$.

Нетрудно доказать, что

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon d_p(\varepsilon)\geqslant 1/C_0. \tag{10}$$

Действительно, покажем, что $\varepsilon\Upsilon_{d_p(\varepsilon)}\geqslant 1$ при $\varepsilon<1/\Upsilon_p$. Если это не так, то в силу непрерывности Υ_d по d найдется $d_0>d_p(\varepsilon)$, для которого выполняется неравенство, $\varepsilon\Upsilon_{d_0}<1$. Но тогда согласно вышесказанному $f'\in L_{d_0,\mathrm{loc}}$ для каждого отображения f класса $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$, т. е. $d_p(\varepsilon)\geqslant d_0$, и мы приходим к противоречию.

Используя доказанное, получаем

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon d_p(\varepsilon)\geqslant \varliminf_{\varepsilon\to 0}\frac{d_p(\varepsilon)}{\Upsilon_{d_p(\varepsilon)}}\geqslant\varliminf_{d\to\infty}\frac{d}{\Upsilon_d}=\frac{1}{C_0}.$$

Соотношения (9) и (10) и составляют утверждение теоремы.

§ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ КЛАССА $\mathfrak{G}$ В W^1_p-НОРМАХ

Пусть D — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и $f\colon D\to\mathbf{R}^m$ — отображение класса $W^1_p(D)$, $p>1$. Положим

$$\|f\|^0_{W^1_p(D)}=(\operatorname{diam} D)^{-n/p}\|f\|_{L_p(D)}+(\operatorname{diam} D)^{1-n/p}\|f'\|_{L_p(D)}.$$

Теорема 8. *Пусть p и d таковы, что $p>1$ и $d>1$. Тогда существует $\varepsilon^0=\varepsilon^0_{p,d}>0$ и неотрицательная функция $\beta=\beta_{p,d}\colon[0,\varepsilon^0)\times(0,1)\to\mathbf{R}$ такие, что*

1) *$\beta(\varepsilon,\delta)\to\beta(0,\delta)=0$ при $\varepsilon\to 0$,*

2) *если $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon^0$ и отображение $f\colon\Delta\to\mathbf{R}^m$ области Δ пространства $\mathbf{R}^n$ принадлежит классу $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$, то $f\in W^1_{d,\mathrm{loc}}(\Delta)$ и для каждого $\delta\in(0,1)$ и для каждой ограниченной подобласти Δ', лежащей в Δ вместе со своей φ-окрестностью $U_\varphi(\Delta')$, $\varphi=[(1-\delta)/2\delta]\operatorname{diam}\Delta'$, найдется отображение $g\colon\Delta'\to\mathbf{R}^m$ класса $\mathfrak{G}$,* удовлетворяющее неравенству

$$\|f-g\|^0_{W^1_d(\Delta)}\leqslant\beta(\varepsilon,\delta)\operatorname{diam} f(U_\varphi(\Delta')).$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующего утверждения для класса многомерных голоморфных отображений (теорема 2 [2]) и для класса решений системы Моисила — Теодореско (теорема 10 [4]). Поэтому доказательство опускаем, заметим только лишь, что, как и в случае отображений, близких к решениям систем Коши — Римана и системы Моисила — Теодореско, функция $\beta(\varepsilon,\delta)$ в обсуждаемом нами случае также линейно выражается через функцию α (см. теорему 15 [5]), измеряющую отклонение в C-норме рассматриваемого отображения f от класса $\mathfrak{G}$.

§ 4. АНАЛОГИ ТЕОРЕМ КОШИ И МОРЕРА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССА $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$

В этом параграфе мы устанавливаем, что аналоги теорем Коши (теорема 1) и Морера (теорема 2) имеются и для классов отображений, локально близких в C-норме к классу $\mathfrak{G}$ (ср. с теоремами 4 и 5 из [2] и 11, 12 из [4]).

Теорема 9. *Существует неотрицательная функция $\gamma(\varepsilon, \delta, p)$, определенная при $\varepsilon \geqslant 0$, $0<\delta<1$, $1<p<\infty$ и обладающая свойствами:*

1) $\gamma(\varepsilon, \delta, p) \to \gamma(0, \delta, p) = 0$ *при* $\varepsilon \to 0$,

2) *если* $f\colon \Delta \to \mathbf{R}^m$ — *отображение класса* $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$, *то для каждого* $\delta \in (0, 1) = \{t \in \mathbf{R} | 0<t<1\}$ *и каждой ограниченной подобласти* $\Delta' \subset \Delta$ *с гладкой границей* $\partial\Delta'$, *причем такой, что при* $\varphi = \varphi(\delta, \Delta') = [(1-\delta)/2\delta] \operatorname{diam} \Delta'$, $U_\varphi(\Delta')$ *лежит в* Δ, *имеет место неравенство*

$$\left| \int_{\partial\Delta'} A(\nu(x))\, f(x)\, dS \right| \leqslant \gamma(\varepsilon, \delta, p) \operatorname{diam} f(U_\varphi(\Delta'))\, S(\partial\Delta').$$

Здесь $\nu(x)$ — внешняя единичная нормаль к $\partial\Delta'$ в точке x, а $S(\partial\Delta')$ — $(n-1)$-мерная площадь $\partial\Delta'$.

Доказательство. Рассмотрим область $\Delta'' = U_{\varphi'}(\Delta')$, где $\varphi' = [(1-\sqrt{\delta})/2\sqrt{\delta}] \operatorname{diam} \Delta'$. Согласно теореме 15 [5] существует отображение $g\colon \Delta'' \to \mathbf{R}^m$ класса $\mathfrak{G}$ такое, что при $x \in \Delta''$

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \alpha(\varepsilon, \sqrt{\delta}, p) \operatorname{diam} f\left(U_{\varphi(\sqrt{\delta}, \Delta'')}\right)(\Delta''),$$

причем функция α из цитированной теоремы не зависит от f и $\alpha(\varepsilon, \delta, p) \to \alpha(0, \delta, p) = 0$ при $\varepsilon \to 0$. Учитывая, что $U_{\varphi(\sqrt{\delta}, \Delta'')}(\Delta'') = U_\varphi(\Delta')$, последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$f(x) = g(x) + \alpha(\varepsilon, \sqrt{\delta}, p) \operatorname{diam} f(U_\varphi(\Delta'))\, v(x),$$

где $|v(x)| \leqslant 1$. Применим к обеим частям равенства оператор $I\colon h \mapsto \int_{\partial\Delta'} A(\nu(x))\, h(x)\, dS$. По теореме 1 $Ig = 0$. Так как $|Iv| \leqslant \int_{\partial\Delta'} \|A(\nu(x))\|\, dS \leqslant aS(\partial\Delta')$, получим $|If| \leqslant \alpha(\varepsilon, \sqrt{\delta}, p)\, aS(\partial\Delta') \times \operatorname{diam} f(U_\varphi(\Delta'))$. Полагая в последнем соотношении $\gamma(\varepsilon, \delta, p) = a\alpha(\varepsilon, \sqrt{\delta}, p)$, приходим к доказываемому неравенству.

Теорема 10. *Пусть f — отображение области Δ пространства $\mathbf{R}^n$ в пространство $\mathbf{R}^m$, принадлежащее классу W^1. Пусть $\delta \in (0, 1]$ и $\varepsilon > 0$. Если для каждого шара $B = B(x_0, r)$ такого, что шар $B_\delta = B(x_0, r/\delta)$ лежит в Δ, выполняется неравенство*

$$\left| \int_{\partial B} A(\nu(x))\, f(x)\, dS \right| \leqslant \varepsilon \operatorname{diam} f(B_\delta)\, S(\partial B), \tag{11}$$

то $f \in \mathfrak{D}(2n\varepsilon/\delta)$.

Доказательство. Так как $f \in W^1$, то f дифференцируемо почти всюду в Δ. Пусть $x_0 \in \Delta$ — точка дифференцируемости отображения f, а $B = B(x_0, r)$ — шар такой, что $B_\delta = B(x_0, r/\delta) \subset \Delta$. Применяя к равенству $f(x) = f(x_0) + (d_{x_0} f)(x - x_0) + o(x - x_0)$ (где $d_{x_0} f$ — дифференциал отображения f в точке x_0, а $o(x - x_0)/|x - x_0| \to 0$ при $x \to x_0$) оператор $I\colon h \to \int_{\partial B} A(\nu(x))\, h(x)\, dS$, получим

$$I(f) = I(f(x_0)) + I(d_{x_0} f(x - x_0)) + I(o(x - x_0)). \tag{12}$$

Имеем $I(f(x_0)) = 0$, $I(d_{x_0} f(x - x_0)) = r^n v_n A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x_0)$, $I(o(x - x_0)) = o_1(r) r^n v_n$ и $\operatorname{diam} f(B_\delta) = (2r/\delta) \|d_{x_0} f\| + o_2(r)$, где $o_i(r)/r \to 0$ при $r \to$

$\to 0$, $i=1, 2$. Учитывая также (11), из (12) выводим

$$r^n v_n \left| A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x_0) \right| + o_1(r) r^n v_n n \leqslant \{\varepsilon [2r/\delta] \| d_{x_0} f \| + o_2(r)\} n r^{n-1} v_n.$$

Разделим обе части последнего неравенства на $r^n v_n$ и устремим r к нулю. Тогда

$$\left| A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x_0) \right| \leqslant (2n\varepsilon/\delta) \| d_{x_0} f \| \leqslant (2n\varepsilon/\delta) | f'(x_0) |.$$

Полученное неравенство и означает, что $f \in \mathfrak{D}(2n\varepsilon/\delta)$ (см. доказательство теоремы 11 из [5]).

§ 5. ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССА $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$

Теорема 11. *Пусть $p>1$. Существует положительное число $\varepsilon_p>0$ такое, что каждое ограниченное отображение f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, принадлежащее классу $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$ с $\varepsilon<\varepsilon_p$, является тождественно постоянным.*

Доказательство. Теорема следует из устойчивости в C-норме класса $\mathfrak{G}$ в классах $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$ (теорема 14 из [5]) и общей теоремы Лиувилля для классов отображений, удовлетворяющих условиям $(\mathfrak{g}_1)-(\mathfrak{g}_6)$ (см. следствие 2 теоремы 15 из [3]).

§ 6. О ПОРЯДКЕ ОЦЕНОК УСТОЙЧИВОСТИ В C- И W_p^1-НОРМАХ

Если $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — определенный эллиптический оператор, т. е. матрицы A_i, $i=1, \ldots, n$, определяющие систему (3), являются квадратными матрицами порядка $m\times m$, то удается вычислить порядок устойчивости класса $\mathfrak{G}$ относительно параметра ε. А именно, мы устанавливаем ниже, что функция $\alpha(\varepsilon, \delta, p)$ из теоремы 15 [5] и функции $\beta(\varepsilon, \delta)$ и $\gamma(\varepsilon, \delta, p)$ из данной статьи имеют в этом случае линейный по ε порядок (ср. с соответствующими результатами из [1, 2, 4]).

Предварительно отметим, что матричное отображение H^T, используемое при построении интегрального представления в теореме 3, является в этом случае фундаментальным решением системы уравнений (3):

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) H^T(x) = \delta(x)$$

и, следовательно, в $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ — классическим решением системы (3). Таким образом, первое слагаемое в интегральном представлении (5) является отображением класса $\mathfrak{G}$.

Теорема 12. *Пусть система (3) является эллиптической и определенной (т. е. $k=m$). Тогда, если $\varepsilon>0$, $\varepsilon\Upsilon_p<1$, $3^n\varepsilon\Upsilon_{n+1}<1$ и $0<\delta<1$, то для каждого отображения f: $\Delta\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ класса $\mathfrak{D}_p(\varepsilon)$ и для каждой ограниченной подобласти Δ', лежащей в области Δ вместе со своей φ-окрестностью $U_\varphi(\Delta')$ с $\varphi=[(1-\delta)/2\delta]\operatorname{diam}\Delta'$, существует непрерывное отображение g: $\operatorname{cl}\Delta'\to\mathbf{R}^m$ такое, что $g|\Delta'\in\mathfrak{G}$ и при $x\in\operatorname{cl}\Delta'$*

$$|f(x)-g(x)| \leqslant \varkappa(\delta)\frac{\varepsilon}{1-3^n\Upsilon_{n+1}\varepsilon}\operatorname{diam} f(U_\varphi(\Delta')). \tag{13}$$

Здесь $\varkappa(\delta)$ — функция от δ, не зависящая от f.

Доказательство. Пусть f: $\Delta\to\mathbf{R}^m$ и $\Delta'\subset\Delta$ удовлетворяет условиям теоремы. Рассмотрим минимальное покрытие $\{B_1, B_2, \ldots, B_\lambda\}$ замыкания области Δ' шарами радиуса $r=\varphi/4$ (заметим, что λ допускает оценку $\lambda\leqslant[4\delta\sqrt{n}/(1-\delta)+1]^n$) и пусть $D=\bigcup\limits_{s=1}^{\lambda} B'_s$, где B'_s — шар, концентричный B_s, но вдвое большего радиуса. Ясно, что $\operatorname{cl} D\subset U_\varphi(\Delta')\subset\Delta$.

Согласно теореме 3 при $x \in D$

$$f(x) = -\int_{\partial D} H^T(y-x)\,A(\nu(y))\,dS_y + \int_D H^T(y-x)\,A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f(y)\,dy =$$

$$= (\Phi_{\partial D} f)(x) + \left(R_D A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f\right)(x).$$

По замечанию, сделанному в начале параграфа, $\Phi_{\partial D} f$ в D является отображением класса $\mathfrak{G}$. Положим $g = \Phi_{\partial D} f | \mathrm{cl}\,\Delta'$. Тогда отображение g — искомое. Действительно, при $x \in \mathrm{cl}\,\Delta'$

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - \Phi_{\partial D} f(x)| \leqslant \int_D \|H^T(y-x)\| \left| A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f(y) \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_D \|H^T(y-x)\|^{(n+1)/n} dy\right)^{n/(n+1)} \left(\int_E \left| A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f(y)\right|^{n+1} dy\right)^{1/(n+1)}. \qquad (14)$$

Применяя теорему 6 к шару B_s'', концентричному B_s, но радиуса $3r$, и $\nu = 1/3$, получим

$$\|f'\|_{L_{n+1}(B_s')} \leqslant C v_n^{1/n+1} \left(\frac{9}{2}\right)^n \frac{\mathrm{diam}\, f(B_s'')}{1 - 3^n \Upsilon_{n+1} \varepsilon} (3r)^{n/(n+1)-1}.$$

Так как $B_s'' \subset U_\varphi(\Delta')$, то $\mathrm{diam}\, f(B_s'') \leqslant \mathrm{diam}\, f(U_\varphi(\Delta'))$ и, следовательно,

$$\|f'\|_{L_{n+1}(D)} \leqslant \sum_{s=1}^{\lambda} \|f'\|_{L_{n+1}(B_s')} \leqslant \lambda C v_n^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{9}{2}\right)^n \frac{\mathrm{diam}\, f(U_\varphi(\Delta'))}{1 - 3^n \Upsilon_{n+1}\varepsilon} \times$$

$$\times \left(3 \frac{1-\delta}{8\delta} \mathrm{diam}\,\Delta'\right)^{-1/(n+1)}.$$

Таким образом,

$$\left(\int_D \left| A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f(y)\right|^{n+1} dy\right)^{1/(n+1)} \leqslant \varepsilon \left(\int_D |f'(y)|^{n+1} dy\right)^{1/(n+1)} \leqslant$$

$$\leqslant C v_n^{1/(n+1)} \left(\frac{9}{2}\right)^n \left(\frac{3}{8}\right)^{-1/(n+1)} \frac{\varepsilon\,(\mathrm{diam}\,\Delta')^{-1/(n+1)}}{1 - 3^n \Upsilon_{n+1}\varepsilon}\, \mathrm{diam}\, f(U_\varphi(\Delta')). \qquad (15)$$

Оценим теперь первый сомножитель в неравенстве (14). Так как $|y - x| \leqslant \mathrm{diam}\,\Delta' + 3r$ при $x \in \mathrm{cl}\,\Delta'$ и $y \in D$, то

$$\int_D \|H^T(y-x)\|^{(n+1)/n} dy \leqslant \int_{B(0,\mathrm{diam}\,\Delta'+3r)} \|H(y)\|^{(n+1)/n} dy \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int_{B(0,\mathrm{diam}\,\Delta'+3r)} |y|^{-(n-1)(n+1)/n} dy = C_1 v_n (\mathrm{diam}\,\Delta' + 3r)^{1/n} =$$

$$= C_1 v_n \left(\frac{3+5\delta}{8\delta}\right)^{1/n} (\mathrm{diam}\,\Delta')^{1/n},$$

где $C_1 = \max\limits_{|t|=1} \|H(t)\|$. Следовательно,

$$\left(\int_D \|H^T(y-x)\|^{(n+1)/n} dy\right)^{n/(n+1)} \leqslant (C_1 v_n)^{n/(n+1)} \times$$

$$\times \left(\frac{3+5\delta}{8\delta}\right)^{1/(n+1)} (\mathrm{diam}\,\Delta')^{1/(n+1)}. \qquad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (14) при $x \in \mathrm{cl}\,\Delta'$, получим искомое неравенство

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \varkappa(\delta) \frac{\varepsilon}{1 - 3^n \Upsilon_{n+1}\varepsilon}\, \mathrm{diam}\, f(U_\varphi(\Delta')),$$

где

$$\varkappa(\delta) = CC_1^{n/(n+1)} v_n \left(\frac{3+5\delta}{1-\delta}\right)^{1/(n+1)} \left(\frac{9}{2}\right)^n \left(\frac{8}{3}\right)^{1/(n+1)}.$$

Следствие. Функции $\beta(\varepsilon, \delta)$ и $\gamma(\varepsilon, \delta, p)$ в теоремах 8 и 9 имеют линейный по ε порядок.

Доказательство. Функции β и γ выражаются линейно через функцию α (см. теорему 15 [5]), которая, согласно доказанной теореме, имеет линейный по ε порядок.

Следующий пример показывает, что линейный по ε порядок рассматриваемых функций не может быть улучшен.

Пусть $h = V + h_\varepsilon$, где V — произвольное отличное от тождественно нулевого линейное отображение $V\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ из класса $\mathfrak{G}$, $h_\varepsilon(x) = (\varepsilon x_1, 0, \ldots, 0)$ при $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ и $0 < \varepsilon \leqslant \|V\|/2$. Так как

$$\left|A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)h(x)\right| = \left|A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)h_\varepsilon(x)\right| = \left[\sum_{j=1}^m (a_{j1}^1)^2\right]^{1/2} \varepsilon = a_1\varepsilon,$$

$$|h'(x)| \geqslant \|V\| - \varepsilon \geqslant \|V\|/2,$$

то $h \in \mathfrak{D}(2a_1\varepsilon/\|V\|)$ (здесь, как и выше, a_{js}^i — элементы матриц A_i, определяющих оператор $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$).

Предположим теперь, что Δ' есть шар $B = B(0, r)$. Тогда $U_\varphi(\Delta') = B(0, r/\delta)$ при $0 < \delta < 1$ и

$$\left|\int_{\partial\Delta'} A(\nu(x))\, h(x)\, dS\right| = \left|\int_{\Delta'} A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x)\, dx\right| = v_n r^n a_1 \varepsilon.$$

Учитывая также, что $\operatorname{diam} h(U_\varphi(\Delta')) \leqslant \frac{2r}{\delta}(\|V\| + \varepsilon) \leqslant \frac{3r\|V\|}{\delta}$, отсюда выводим

$$\left|\int_{\partial\Delta'} A(\nu(x))\, h(x)\, dS\right| \leqslant \frac{a_1\delta\varepsilon}{3n\|V\|} \operatorname{diam} h(U_\varphi(\Delta'))\, S(\partial\Delta'). \tag{17}$$

Далее, для любого непрерывного отображения $g\colon \operatorname{cl} B \to \mathbf{R}^m$ такого, что сужение $g|_B$ этого отображения на шар B принадлежит классу $\mathfrak{G}$, имеем

$$\sup_{x \in \operatorname{cl} B} |h(x) - g(x)| \geqslant \sup_{x \in \partial B} |h(x) - g(x)| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{aS(\partial B)} \left|\int_{\partial B} A(\nu(x))(h(x) - g(x))\, dS\right| = \frac{1}{anv_n r^{n-1}} \left|\int_{\partial B} A(\nu(x)) h(x)\, dS\right|.$$

Воспользовавшись этими соотношениями и (17), приходим к такому неравенству:

$$\sup_{x \in \operatorname{cl}\Delta'} |h(x) - g(x)| \geqslant \frac{a_1\delta\varepsilon}{3an\|V\|} \operatorname{diam} h(U_\varphi(\Delta')). \tag{18}$$

Наконец, отправляясь от (18), последовательно выводим

$$\|f - g\|_{\overset{0}{W}{}_d^1(B)} \geqslant (\operatorname{diam} B)^{-n/d} \|h - g\|_{L_d(B)} \geqslant$$

$$\geqslant (2r)^{-n/d} \sup_{x \in \operatorname{cl} B} |h(x) - g(x)|\, v_n^{1/d} r^{n/d} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a_1\delta(2^{-n}v_n)^{1/d}}{3an\|V\|} \operatorname{diam} h(U_\varphi(\Delta')). \tag{19}$$

Неравенства (17), (18) и (19) показывают, что для определенной системы (3) полученные выше оценки близости отображения f к классу $\mathfrak{G}$ точны по порядку.

Имеет место следующее

Предложение. *Пусть коэффициенты системы* (1) *принадлежат* $C^\infty(\mathbf{R}^n) = C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ *и класс* $\mathfrak{S}$ *ее* C^∞*-решений инвариантен относительно параллельных переносов пространства* $\mathbf{R}^n$. *Тогда класс* $\mathfrak{S}$ *совпадает с классом* C^∞*-решений некоторой системы того же вида, но уже с постоянными коэффициентами.*

Доказательство. Для любого натурального числа ν обозначим через $C^\infty_{n,\nu} = \bigcup C^\infty(\Delta, \mathbf{R}^\nu)$ — объединение по всем областям Δ из $\mathbf{R}^n$ пространств бесконечно дифференцируемых отображений области Δ со значениями в $\mathbf{R}^\nu$. Пусть l — порядок системы (1), а r — максимальная из степеней многочленов F_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, участвующих в этой системе. Для каждого отображения $g \in C^\infty_{n,m}$ рассмотрим совокупность всех частных производных порядка, не превосходящего l, всех компонент g_s, $s = 1, 2, \ldots, m$, этого отображения (включая и производные нулевого порядка, т. е. сами эти функции g_s, $s = 1, 2, \ldots, m$) и упорядочим ее каким-либо образом. Ставя отображению g в соответствие этот упорядоченный набор производных, мы получаем дифференциальный оператор, действующий из $C^\infty_{n,m}$ в $C^\infty_{n,\omega}$, где

$$\omega = \omega(n, m, l) = \frac{m\,(n+l)!}{l!\; n!}.$$

Рассмотрим теперь набор всех одночленов $y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_\omega^{\nu_\omega}$, $\nu_j \in \{0, \ldots, r\}$, $\sum_{j=1}^{\omega} \nu_j \leqslant r$, от ω переменных $y_1, y_2, \ldots, y_\omega$. Количество таких одночленов равно

$$\varphi = \varphi(\omega, r) = \frac{(\omega + r)!}{\omega!\; r!}.$$

Упорядочивая теперь и этот набор каким-либо образом и ставя его в соответствие набору $(y_1, y_2, \ldots, y_\omega)$, мы построим оператор T алгебраической природы.

Теперь для каждого отображения $(g\colon \Delta \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m) \in C^\infty_{n,m}$ можно определить

$$Eg(x) = T(Dg(x)), \quad x \in \Delta.$$

Так определенный оператор E представляет собой (вообще говоря) нелинейный дифференциальный оператор, действующий из пространства $C^\infty_{n,m}$ в $C^\infty_{n,\varphi}$.

Возвращаясь к системе (1), мы можем рассматривать каждый многочлен F_j, $j = 1, \ldots, k$, как линейную комбинацию одночленов $y_1^{\nu_1} \ldots y_\omega^{\nu_\omega}$, вводя при необходимости дополнительные коэффициенты, равные нулю тождественно. Введенный выше в множестве одночленов порядок приводит к упорядочиванию коэффициентов этих многочленов F_j. Следовательно, наборы λ_j коэффициентов многочленов F_j мы можем считать элементами пространства $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^\varphi)$. Это позволяет охарактеризовать C^∞-решение $g\colon \Delta \to \mathbf{R}^m$ системы (1) как отображение класса C^∞ такое, что для каждой точки $x \in \Delta$ вектор $Eg(x)$ пространства $\mathbf{R}^\varphi$ ортогонален каждому из векторов $\lambda_j(x) \in \mathbf{R}^\varphi$:

$$\langle Eg(x),\ \lambda_j(x) \rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{1'}$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_j(x) \mid x \in \mathbf{R}^n,\ j \in \{1, \ldots, k\}\} \subset \mathbf{R}^\varphi$. Построим линейную оболочку Γ множества Λ в $\mathbf{R}^\varphi$ и рассмотрим какой-либо базис $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_0}$ подпространства Γ пространства $\mathbf{R}^\varphi$. Мы утверждаем, что система

$$\langle Eg,\ \gamma_s \rangle = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, k_0, \tag{20}$$

искомая. В самом деле, в силу построения коэффициенты ее постоянны.

Далее, каждое ее решение является также и решением исходной системы. А так как класс $\mathfrak{G}$ C^∞-решений исходной системы инвариантен относительно параллельных переносов пространства $\mathbf{R}^n$, то легко видеть, что при каждых фиксированных $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и $j \in \{1, \ldots, k\}$ отображение $g \in \mathfrak{G}$ является решением уравнения

$$\langle Eg, \lambda_j(x_0) \rangle = 0$$

и, следовательно, системы (20). Предложение доказано.

В силу теорем 4 и 5 работы [5] это предложение приводит к следующей теореме.

Теорема 13. *Пусть класс $\mathfrak{G}$ C^∞-решений системы типа* (1) *с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами является ξ-устойчивым в предельном смысле относительно класса C^∞. Тогда эта система эквивалентна системе такого же вида, но первого порядка и с постоянными коэффициентами, причем левая часть каждого из ее уравнений задается однородным многочленом относительно символов (только лишь) первых производных искомых функций.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Копылов А. П.** Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. II. Устойчивость классов голоморфных отображений.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 4, с. 65—89.
2. **Копылов А. П.** Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. III. Свойства отображений, близких к голоморфным.— Сиб. мат. журн., 1983, т. 24, № 3, с. 70—91.
3. **Копылов А. П.** Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. I. Концепция устойчивости. Теорема Лиувилля.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 2, с. 88—111.
4. **Безрукова О. Л.** Устойчивость классов решений системы Моисила — Теодореско.— Новосибирск, 1983.— 49 с. (Препринт/Ин-т математики СО АН СССР).
5. **Даирбеков Н. С., Копылов А. П.** ξ-Устойчивость классов отображений и системы линейных уравнений с частными производными.— Сиб. мат. журн., 1985, т. 26, № 2, с. 73—90.
6. **Даирбеков Н. С., Копылов А. П.** Об устойчивости в C-норме классов решений систем линейных уравнений с частными производными.— В кн.: IX школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Тернополь: Тернопольск. гос. пед. ин-т, 1984, с. 137.
7. **Кренделев С. Ф.** Интегральные представления для эллиптических систем первого порядка.— Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск, 1980, с. 43—50.
8. **Тарханов Н. Н.** Об интегральном представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка в частных производных и некоторые его приложения.— В кн.: Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск, 1980, с. 147—160.
9. **Lehto O.** Remarks on the integrability of the derivatives of quasiconformal mappings.— Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A1, 1965, N 371, p. 1—8.
10. **Calderon A. P., Zygmund A.** On the existence of certain singular integrals.— Acta Math., 1952, v. 88, p. 85—139.

М. З. БЕРКОЛАЙКО

СЛЕДЫ ФУНКЦИЙ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ КООРДИНАТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ. I

В статье описываются следы функций из обобщенных пространств Лизоркина — Трибеля (ОПЛТ), построенных по идеальным пространствам (ИП) со смешанной нормой $E=(E_1, \ldots, E_n)$, где E_j — симметричные пространства (СП). В частности, полностью исследован вопрос, поставленный Я. С. Бугровым [1]: каково пространство следов функций из пространства Соболева $W_p^r(\mathbf{R}^n)$, $p=(p_1, \ldots, p_n)$, $r=(r_1, \ldots, r_n)$, со смешанной нормой (определение см., например, в [2]) на гиперплоскости $x_\nu=0$,