Далее, каждое ее решение является также и решением исходной системы. А так как класс $\mathfrak{G}$ C^∞-решений исходной системы инвариантен относительно параллельных переносов пространства $\mathbf{R}^n$, то легко видеть, что при каждых фиксированных $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и $j \in \{1, \ldots, k\}$ отображение $g \in \mathfrak{G}$ является решением уравнения

$$\langle Eg, \lambda_j(x_0) \rangle = 0$$

и, следовательно, системы (20). Предложение доказано.

В силу теорем 4 и 5 работы [5] это предложение приводит к следующей теореме.

Теорема 13. *Пусть класс $\mathfrak{G}$ C^∞-решений системы типа* (1) *с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами является ξ-устойчивым в предельном смысле относительно класса C^∞. Тогда эта система эквивалентна системе такого же вида, но первого порядка и с постоянными коэффициентами, причем левая часть каждого из ее уравнений задается однородным многочленом относительно символов* (*только лишь*) *первых производных искомых функций.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Копылов А. П.** Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. II. Устойчивость классов голоморфных отображений.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 4, с. 65—89.
2. **Копылов А. П.** Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. III. Свойства отображений, близких к голоморфным.— Сиб. мат. журн., 1983, т. 24, № 3, с. 70—91.
3. **Копылов А. П.** Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. I. Концепция устойчивости. Теорема Лиувилля.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 2, с. 88—111.
4. **Безрукова О. Л.** Устойчивость классов решений системы Моисила — Теодореско.— Новосибирск, 1983.— 49 с. (Препринт/Ин-т математики СО АН СССР).
5. **Даирбеков Н. С., Копылов А. П.** ξ-Устойчивость классов отображений и системы линейных уравнений с частными производными.— Сиб. мат. журн., 1985, т. 26, № 2, с. 73—90.
6. **Даирбеков Н. С., Копылов А. П.** Об устойчивости в C-норме классов решений систем линейных уравнений с частными производными.— В кн.: IX школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Тернополь: Тернопольск. гос. пед. ин-т, 1984, с. 137.
7. **Кренделев С. Ф.** Интегральные представления для эллиптических систем первого порядка.— Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск, 1980, с. 43—50.
8. **Тарханов Н. Н.** Об интегральном представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка в частных производных и некоторые его приложения.— В кн.: Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск, 1980, с. 147—160.
9. **Lehto O.** Remarks on the integrability of the derivatives of quasiconformal mappings.— Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A1, 1965, N 371, p. 1—8.
10. **Calderon A. P., Zygmund A.** On the existence of certain singular integrals.— Acta Math., 1952, v. 88, p. 85—139.

М. З. БЕРКОЛАЙКО

СЛЕДЫ ФУНКЦИЙ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ КООРДИНАТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ. I

В статье описываются следы функций из обобщенных пространств Лизоркина — Трибеля (ОПЛТ), построенных по идеальным пространствам (ИП) со смешанной нормой $E = (E_1, \ldots, E_n)$, где E_j — симметричные пространства (СП). В частности, полностью исследован вопрос, поставленный Я. С. Бугровым [1]: каково пространство следов функций из пространства Соболева $W_p^r(\mathbf{R}^n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, со смешанной нормой (определение см., например, в [2]) на гиперплоскости $x_\nu = 0$,

$1 \leqslant \nu \leqslant n-1$ *? Известно [1—3], что

$$\operatorname{Tr} W_p^r\big|_{x_n=0} = B^{\rho}_{p',p_n}$$

где символ Tr означает след, $p'=(p_1, \ldots, p_{n-1})$, $\rho_j = \varkappa r_j$, $j<n$; $\varkappa = 1 - (r_n p_n)^{-1} > 0$. Что же касается случая $\nu < n$, то здесь Я. С. Бугровым получена некоторая теорема вложения для пространства следов, позже мы сравним ее с нашими результатами.

Отметим, что описание $\operatorname{Tr} W_p^r\big|_{x_\nu=0}$ получено нами при единственном предположении $1<p<\infty$ (под этой записью мы понимаем систему неравенств $1<p_j<\infty$, где p_j — координаты вектора p), естественно возникающем в связи с включением пространств Соболева в шкалу ОПЛТ.

Основные результаты этой работы анонсированы в [4].

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Все встречающиеся ниже понятия и факты из теории ИП и СП, а также интерполяции линейных операторов можно найти, например, в [5—8]. Символы $\sim$ $\frown$ означают прямое и обратное преобразование Фурье соответственно, $\rightarrow$ — вложение пространства следов (на протяжении всей работы вложения считаются непрерывными), $\leftarrow$ — наличие оператора продолжения. Знак $\ll$ используется в таком же смысле, как и в [3]. Условия Лозинского — Стечкина (определение см. в [9]) обозначаются через (S) и (S_1). Все СП, используемые на протяжении работы, предполагаются интерполяционными между L_1 и L_∞ и изометрично вложенными в свои вторые двойственные (ассоциированные). Такими свойствами обладают все практически важные СП: пространства Орлича L_M, пространства Лоренца Λ_φ и $L_{p\theta}$, пространства Марцинкевича M_φ, а также замыкания в нормах пространств Орлича и Марцинкевича множества бесконечно дифференциальных финитных функций, т. е. пространства E_M и M^0_φ.

Пространство $E=(E_1, \ldots, E_n)$ — это банахово пространство измеримых на $\mathbf{R}^n$ функций $f(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_E = \|\ldots\|\|f(x)\|_{E_1,x_1}\|_{E_2,x_2}\ldots\|_{E_n,x_n}$$

(в дальнейшем индексы x_j в обозначении $\|\cdot\|_E$ будут опускаться). Здесь $E_j = E_j(R_{x_j})$ — СП функций, зависящих от x_j.

Известно, что $E=L_p$ при $E_j = L_{p_j}$, $p_j \in [1, \infty]$, $E'=(E_1', \ldots, E_n')$, и что E сепарабельно если и только если сепарабельны все E_j (E' — двойственное пространство).

Разбиение единицы Σ. Введем необходимое для дальнейшего разбиение единицы в двойственных переменных. Здесь индекс j принимает значения во множестве $\{1, \ldots, n\}$, а индекс k — в $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Пусть

$$N = \{N_k\}_{k=0}^{\infty} = \{(N_{1,k}; \ldots; N_{n,k})\}_{k=0}^{\infty},$$

где $\{N_{j,k}\}_{k=0}^{\infty}$ — числовые последовательности, обладающие следующими свойствами:

а) $N_{j,0}>0$; *для определенности будем считать, что* $N_{j,0}=1$;

б) *существует константа* $c>1$ *такая, что* $N_{j,k+1} > cN_{j,k}$, $j=1, 2, \ldots, n$.

В некоторых случаях будем также требовать выполнения следующего условия:

в) *существует константа* $c_1>1$ *такая, что* $N_{j,k+1} < c_1 N_{j,k}$.

Зафиксируем теперь две константы c_2, c_3, $1<c_2<c_3<c$, и функцию

---

* Буквами p, p', r, ρ и т. д. обозначаются, как правило, векторные величины, при этом скаляры мы, для единообразия, записываем, как $p=(p, \ldots, p)$.

$\tau(\zeta) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\tau(\zeta) \geqslant 0$, такие, что

$$\tau(\zeta) = \begin{cases} 1 \text{ при } |\zeta| \leqslant c_2, \\ 0 \text{ при } |\zeta| \geqslant c_3. \end{cases}$$

Положим

$$\mu_k(\xi) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{n} \tau(\xi_j), \quad \xi_j \in \mathbf{R}, \quad k = 0, 1; \\ \mu_0 \left(N_{1,k-1}^{-1} \xi_1; \ldots; N_{n,k-1}^{-1} \xi_n\right), \; k \geqslant 2; \end{cases}$$

$$\sigma_k(\xi) = \begin{cases} \mu_0(\xi), \quad k = 0, \\ \mu_k(\xi) - \mu_{k-1}(\xi), \quad k \geqslant 1. \end{cases}$$

Пусть $V_k(x) = \widehat{\sigma_k}$. Нетрудно проверить, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sigma_k(\xi) = 1$. В дальнейшем разбиение единицы будем обозначать через Σ, подразумевая, что оно всегда зависит от N и, кроме того, в некоторых случаях (в каких именно и в каком смысле, будет ясно далее, см., например, предложение 4) еще и от «начальной» функции $\tau(\zeta)$.

Легко проверяется

Предложение 1. *Пусть выполнено одно из следующих двух условий:*

(i) *существуют сепарабельные* СП G_j, $j = 1, \ldots, n$, *такие, что* $E_j \subset G_j$, $j = 1, \ldots, n$;

(ii) *существует число* $r > 0$ *такое, что*

$$G_r(x) = \widehat{(1 + |\xi^2|)^{-r/2}} \in E'.$$

Тогда

$$f \underset{S'(\mathbf{R}^n)}{=\!=} \sum_{k=0}^{\infty} V_k * f \quad \forall f \in E. \tag{1}$$

Если же E сепарабельно, то сходимость в (1) *имеет место и по норме E.*

Идеальное пространство $G = (G_1, \ldots, G_n)$, где все G_j удовлетворяют условию (i), будем называть *сепарабельным расширением* ИП E.

Предложение 2. *С константой, не зависящей от k и f*

$$\|V_k * f\|_E \ll \|f\|_E.$$

Доказательство. Положим, для простоты, $n = 2$, $x = (x_1, x_2)$, $E = E_2[E_1]$. По построению $V_k = \mathcal{U}_k - \mathcal{U}_{k-1}$, где $\mathcal{U}_k = \widehat{\mu_k}$. Кроме того, $\mathcal{U}_k = W_k(x_1) R_k(x_2)$, где $W_k = \widehat{\tau(N_{1,k}^{-1}\xi_1)}$, $R_k = \widehat{\tau(N_{2,k}^{-1}\xi_2)}$. Ясно также, что $\|W_k\|_{L_1} \ll 1$, $\|R_k\|_{L_1} \ll 1$ с константами, не зависящими от k.

Пусть теперь $\|h(x_1)\|_{E_1'} \leqslant 1$ и

$$g(x_1, x_2) = \int_{\mathbf{R}^2} \mathcal{U}_k(x - u) f(u)\, du, \quad f \in E_2[E_1].$$

Тогда, вводя обозначение $z(u_1) = \int_{\mathbf{R}} |W_k(x_1 - u_1) h(x_1)|\, dx_1$, можно записать

$$\int_{\mathbf{R}} g(x_1, x_2) h(x_1) |\, dx_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^2} |R_k(x_2 - u_2) f(u_1, u_2)| \left(\int_{\mathbf{R}} |W_k(x_1 - u_1) h(x_1)| \right) du_1\, du_2 =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} |R_k(x_2 - u_2)| \left(\int_{\mathbf{R}} |z(u_1) f(u_1, u_2)|\, du_1 \right) du_2 \ll$$

$$\ll \int_{\mathbf{R}} |R_k(x_2 - u_2)| \|f(\cdot, u_2)\|_{E_1}\, du_1.$$

Здесь использованы неравенство Гельдера, свойства функции W_k и интерполяционность $\mathcal{I}^1$ между L_1 и L_∞. Из условий на E_j и свойств функций R_k следует, что

$$\|g(\cdot, x_2)\|_{E_1} \ll \int\limits_{\mathbf{R}} |R_k(x_2 - u_2)| \, \|f(\cdot, u_2)\|_{E_1} du_1 \in E_2.$$

Пространство $L_{E,\Phi}^{(\beta,N,\Sigma)}(\mathbf{R}^n)$. Пусть $\beta = \{\beta_k\}_{k=0}^{\infty} \uparrow$, $\beta_0 = 1$, $\beta_{k+1} \ll \ll \beta_k$, Φ — идеальное пространство последовательностей такое, что $l_1 \subset \subset \Phi \subset l_\infty$. ОПЛТ $L_{E,\Phi}^{(\beta,N,\Sigma)}(\mathbf{R}^n)$—это банахово пространство измеримых на $\mathbf{R}^n$ функций $f(x)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_E + \|\{\beta_k | V_k * f | (x)\}_{k=0}^{\infty}\|_{E[\Phi]}.$$

В случае $E = L_p$, $p = (p, \ldots, p) \in (1, \infty)$, $\beta_k = 2^{k/r}$, $N_{j,k} = 2^k$, $\Phi = l_\theta$ пространство $L_{E,\Phi}^{(\beta,N,\Sigma)}$ было рассмотрено Г. Трибелем [8]. Предшествовала такому рассмотрению работа П. И. Лизоркина [10], в которой разбиение единицы производилось характеристическими функциями и рассматривались анизотропные дифференциальные свойства. Работа П. И. Лизоркина [11] открыла следующий этап подобных исследований, в ней L_p-норма заменялась на смешанную L_p-норму. В работе Г. А. Калябина [12] было введено пространство $L_{p\theta}^{(\beta,N)}$, причем разбиение единицы производилось характеристическими функциями; аналогичные рассмотрения провел М. Л. Гольдман [13]. В заметке автора [14] изучались ОПЛТ с общей смешанной нормой, но разбиение единицы также производилось характеристическими функциями.

Покажем, что введенное нами в [4] и здесь ОПЛТ $L_{\mathbf{E},\Phi}^{(\beta,N,\Sigma)}$ является непосредственным обобщением указанных выше пространств.

Предложение 3. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда при* $\theta \in [1, \infty)$

$$\|\{V_k * f_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{L_p[l_\theta]} \ll \|\{f_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{L_p[l_\theta]}. \tag{2}$$

Кроме того, при $\theta \in (1, \infty)$

$$\|\{|V_k| * f_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{L_p[l_\theta]} \ll \|\{f_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{L_p[l_\theta]}. \tag{2'}$$

Доказательство. Для доказательства формулы (2) достаточно повторить рассуждения из [8, с. 191—195], воспользовавшись в соответствующем месте не теоремой Шварца, а теоремой Кре, которая для нашего случая утверждает, что если:

1) $$\int\limits_{\mathbf{R}^n \setminus \square_{k-A}} \|\mathfrak{K}(x-y) - \mathfrak{K}(x)\|_{l_\theta \to l_\theta} dx \leqslant M, \tag{3}$$

где $\mathfrak{K} = \{V_k\}_{k=0}^{\infty}$, $y \in \square_{k-A}$, $k \in \mathbf{Z}$, $\square_k = \{x \in \mathbf{R}^n: |x_j| < N_{j,k}\}$, $A \in \mathbf{N}$ фиксировано;

2) $\exists p_0$, $1 < p_0 < \infty$, такое, что

$$\|\{V_k * f_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{L_{p_0}[l_\theta]} \ll \|\{f_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{L_{p_0}[l_\theta]}, \tag{4}$$

то имеет место (2) (см. [11]).

Формула (2′) вытекает из этой же теоремы. При этом оценка (3) для случая $\mathfrak{K} = \{|V_k|\}_{k=0}^{\infty}$ получается так же, как и для $\mathfrak{K} = \{V_k\}_{k=0}^{\infty}$ ввиду очевидной цепочки соотношений

$$\|\mathfrak{K}(x-y) - \mathfrak{K}(x)\|_{l_\theta \to l_\theta} \leqslant \sup_k ||V_k(x-y)| - |V_k(x)|| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_k |V_k(x-y) - V_k(x)|.$$

Неравенство (4) легко получить для $p_0=(\theta, \ldots, \theta)$, поскольку

$$\|\{|V_k| * f_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{L_\theta[l_\theta]} = \|\{\||V_k| * f_k\|_{L_\theta}\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_\theta} \ll \|\{\|f_k\|_{L_\theta}\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_\theta} =$$
$$= \|\{f_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{L_\theta[l_\theta]}.$$

Здесь использованы равномерная ограниченность величин $\|V_k\|_{L_1}$ и теорема Хаусдорфа — Юнга.

Воспользовавшись интерполяционной теоремой из [15] и предложением 3, можно получить

Предложение 4. *Пусть $E_1, \ldots, E_{n-1}$ — рефлексивные пространства Орлича, а E_n интерполяционно между L_{p_1} и L_{p_2} при некоторых p_1, p_2 таких, что $1<p_1\leqslant p_2<\infty$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

А. ОПЛТ $L_{E,l_\theta}^{(\beta,N,\Sigma)}$ *с точностью до эквивалентных норм не зависит от разбиения единицы Σ. Кроме того, разбиение единицы можно производить характеристическими функциями коридоров* $\Gamma_0=\Delta_0$, $\Gamma_k=\Delta_k\backslash\Delta_{k-1}$, где $\Delta_k=\{\xi\in\mathbf{R}^n\colon |\xi_j|\leqslant N_{j,k}\}$.

Б. *При* $\beta_k=2^k$, $N_{j,k}=2^{k/r_j}$, $\theta=2$ ОПЛТ $L_{E,l\theta}^{(\beta,N,\Sigma)}$ *совпадает с* L_E^r *при* $r_j>0$ *и с* W_E^r *при натуральных* r_j.

Напомним, что если E — ИП на $\mathbf{R}^n$, то пространство лиувиллевского типа L_E^r (соотв. W_E^r) определяется аналогично L_p^r (соотв. W_p^r) с заменой L_p-нормы на норму ИП E. Отметим также, что при $\theta=2$ формула (2) фактически содержится в [11].

Введем используемые далее обозначения. Пространство E будем рассматривать как $F[E_\nu[\mathcal{Y}]]$, где $\mathcal{Y}=(E_1, \ldots, E_{\nu-1})$, $F=(E_{\nu+1}, \ldots, E_n)$. В случае $\nu=1$ под $\|f\|_{\mathcal{Y}}$ мы понимаем $|f(x_1)|$, аналогично рассматривается F при $\nu=n$. Если представить $x=(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$ как $x=(w, x_\nu, z)$, то $\mathcal{Y}$ — это пространство со смешанной нормой функций $u(w)=u(x_1, \ldots, x_{\nu-1})$; F — такого же вида пространство функций $u(z)=u(x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$; E_ν — СП на $\mathbf{R}_{x_\nu}$. Через $\mathbf{R}_\nu^{n-1}$, $1\leqslant\nu\leqslant n$, мы обозначаем гиперплоскость $x_\nu=0$; $N^{(\nu)}=\{N_k^{(\nu)}\}_{k=0}^{\infty}=\{(N_{1,k}, \ldots, N_{\nu-1,k}, N_{\nu+1,k}, \ldots, N_{n,k})\}_{k=0}^{\infty}$. Пусть $p_w=(p_1, \ldots, p_{\nu-1})$, $p_z=(p_{\nu+1}, \ldots, p_n)$, тогда $L_p=L_{p_z}[L_{p_\nu}[L_{p_w}]]$. Через G^d обозначено некоторое ИП последовательностей; $(G^d)'$ — двойственное к нему.

Пространство $\mathfrak{B}_{\mathcal{Y},G^d;F}^{(\alpha,N^{(\nu)})}(\mathbf{R}_\nu^{n-1})$ — это банахово пространство измеримых на $\mathbf{R}_\nu^{n-1}$ функций $f(w, z)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{F[\mathcal{Y}]}+\inf\|\|\{\alpha_k\|Q_k(\cdot, z)\|_{\mathcal{Y}}\}_{k=0}^{\infty}\|_{G^d}\|_F,$$

где инфимум берется по всем разложениям вида

$$f(w, z)\underset{S'\left(\mathbf{R}_\nu^{n-1}\right)}{=}\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(w, z), \tag{5}$$

Q_k — целая функция экспоненциального типа (ЦФЭТ), причем при почти всех z, $Q_k\in\mathcal{Y}$; $L=\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\alpha_k>0$.

Можно показать, что условие $\{\alpha_k^{-1}\}_{k=0}^{\infty}\in(G^d)'$ необходимо для того, чтобы пространство $\mathfrak{B}_{\mathcal{Y},G^d;F}^{(\alpha,N^{(\nu)})}$ было правильной частью пространства $F[\mathcal{Y}]$.

Введем обозначения: $Q=\{Q_k\}_{k=0}^{\infty}$,

$$A(Q; f)=\|\|\{\alpha_k\|Q_k(\cdot, z)\|_{\mathcal{Y}}\}_{k=0}^{\infty}\|_{G^d}\|_F.$$

Ниже под сходимостью по мере на множестве бесконечной меры мы понимаем сходимость по мере на любом подмножестве конечной меры.

Предложение 5. *Пусть* $\{\alpha_k^{-1}\}_{k=0}^{\infty} \in (G^d)'$ *и для некоторого* Q *из* (5) $A(Q, f) < \infty$. *Тогда* $Q_k \in F[\mathcal{Y}]$, *а ряд сходится к* f *по мере. Если также выполнено одно из условий*

1) *пространство* $(G^d)'$ *сепарабельно,*
2) $\|\{\alpha_k^{-1}\}_{k=s}^{\infty}\|_{(G^d)'} \to 0$ *при* $s \to \infty$,
3) F *сепарабельно,*

то ряд в (5) *сходится (не обязательно абсолютно) в* $F[\mathcal{Y}]$.

Доказательство. Докажем, что $Q_k \in F[\mathcal{Y}]$. Пусть $f = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k$, Q_k — ЦФЭТ $N_k^{(\nu)}$ и $\|Q_k(\cdot, z)\|_{\mathcal{Y}} < \infty$ при почти всех z. Применяя неравенство Гельдера, получаем для любого $s = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \|Q_k(\cdot, z)\|_{\mathcal{Y}} \right\|_F \leqslant A(Q; f) \|\{\alpha_k^{-1}\}_{k=0}^{\infty}\|_{(G^d)'},$$

откуда заключаем, что $Q_k \in F[\mathcal{Y}]$.

Ясно, что при почти всех z ряд сходится в $\mathcal{Y}$ абсолютно, а значит, сходится по $(n-1)$-мерной мере к некоторой функции $f_1(w, z)$, которая, очевидно, совпадает почти всюду с $f(w, z)$. Из условия 1) следует, что условие 2) выполняется для любой последовательности из $(G^d)'$. Поэтому условия 1) и 2) используются единообразно. Пусть выполнено одно из них, тогда

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{s-1} Q_k \right\|_{F[\mathcal{Y}]} \leqslant \left\| \sum_{k=s}^{\infty} \|Q_k(\cdot, z)\|_{\mathcal{Y}} \right\|_F \leqslant$$
$$\leqslant A(Q; f) \|\{\alpha_k^{-1}\}_{k=s}^{\infty}\|_{(G^d)'} \to 0, \quad s \to \infty.$$

Пусть теперь выполнено условие 3). Тогда, поскольку при каждом фиксированном z последовательность функций $\sum_{k=s}^{\infty} \|Q_k(\cdot, z)\|_{\mathcal{Y}}$, убывая, стремится к нулю, она стремится к нулю и по норме ИП F. Дальнейшие рассуждения аналогичны вышеизложенным. Предложение доказано.

Пусть $p^{(\nu)} = (p_w, p_z)$, $f \in L_{p^{(\nu)}}$, $\omega_{l_j}(f; t; z)_{p_w}$ — модуль непрерывности функции f (при каждом фиксированном z) порядка l_j по направлению x_j в норме L_{p_w}. Обычными методами теории функций действительного переменного доказывается

Предложение 6. *Функция* $\omega_{l_j}(f; t; z)_{p_w}$ *измерима по* (t, z).

Пространство $L_{p_z}\left[B^{\rho w}_{p_w, p_\nu}\right]$ — это банахово пространство измеримых на $\mathbf{R}_\nu^{n-1}$ функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{p^{(\nu)}}} + \left\| \sum_{j=1}^{\nu-1} \left\{ \int_0^1 \left(t^{-\rho_j} \omega_{l_j}(f; t; z)_{p_w} \right)^{p_\nu} t^{-1}\, dt \right\}^{1/p_\nu} \right\|_{p_z},$$

где $l_j > \rho_j$, $j = 1, \ldots, \nu - 1$.

Обозначим через $\{Z_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ такую систему функций, что система $\{\widetilde{Z}_k\}_{k=0}^{\infty}$ образует разбиение единицы Σ в пространстве двойственных переменных $(\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_n)$, соответствующее последовательности векторов $\{2^{k/\rho_z}\}_{k=0}^{\infty}$.

Пространство $\mathfrak{H}^{\rho_z}_{p_w, p_\nu; p_z}$ — это банахово пространство измеримых на $\mathbf{R}_\nu^{n-1}$ функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{p^{(\nu)}}} + \left\| \left\| \{2^k \|(Z_{k_2}^* f)(\cdot, z)\|_{p_w}\}_{k=0}^{\infty} \right\|_{l_{p_\nu}} \right\|_{p_z},$$

где $(Z_{k_2}^* f)(w, z) = (\widetilde{Z}_k \widetilde{f})(w, z)$.

Предложение 7. *Если* $f \in \mathfrak{H}^{\rho_z}_{p_w, p_\nu; p_z}$, то $f = \sum_{k=0}^{\infty} z_{k_2^*} f$ *по норме* $L_{p(\nu)}$.

Доказательство. Пусть $Q_k \in \mathfrak{M}_{2^{k/\rho}, L_p(\nu)}$ (обозначения см. в [3]), тогда аналогично лемме 8.5.2 из [3], учитывая, что R_k — мультипликатор в $L_{p(\nu)}$, мы получаем, что $Q_{k_2^*} R_k = Q_k$. Здесь R_k — это функция из разбиения единицы такая, что $Z_k = R_k - R_{k-1}$ (напомним, что $\tilde{R}_k = 1$ при $|\xi_j| < c_2 2^{k/\rho_j}$, $j \neq \nu$). Имеем

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{M} Z_{k_2^*} f \right\|_{L_p(\nu)} = \| f - R_{M_2^*} f \|_{L_p(\nu)} =$$
$$= \| f - R_{M_2^*} f + R_{M_2^*} f - Q_M \|_{L_p(\nu)} \ll \mathfrak{E}_M (f)_{L_p(\nu)} \to 0$$

при $M \to \infty$; здесь $\mathfrak{E}_M (f)_{L_p(\nu)}$ — наилучшее приближение в норме $L_{p(\nu)}$ функции f функциями из $\mathfrak{M}_{2^{M/\rho}, L_p(\nu)}$, и в последнем неравенстве учтена равномерная ограниченность величины $\| R_{M_2^*} f \|_{L_p(\nu) \to L_p(\nu)}$ (см. предложение 2).

Пусть $\{\mathcal{U}_k(w)\}_{k=0}^{\infty}$ — система функций, порождённая разбиением единицы в пространстве двойственных переменных $(\xi_1, \ldots, \xi_{\nu-1})$, соответствующим системе векторов $\{2^{k/\rho} w\}_{k=0}^{\infty}$. Справедливо

Предложение 8. *В* $L_{p_z}\left[B^{\rho_w}_{p_w, p_\nu}\right]$ *можно задать эквивалентную норму вида*

$$\| f \|_{L_p(\nu)} + \left\| \| \{2^k \| (\mathcal{U}_{k_1^*} f)(\cdot, z) \|_{p_w} \}_{k=0}^{\infty} \| l_{p_\nu} \right\|_{p_z},$$

где $(\mathcal{U}_{k_1^*} f)(w, z) = (\widetilde{\tilde{\mathcal{U}}_k \tilde{f}})(w, z)$.

§ 2. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Всюду ниже ИП E считается удовлетворяющим условию предложения 1. След на $\mathbf{R}_\nu^{n-1}$ понимается в смысле ИП $F[\mathcal{Y}]$; $P_k = N_{\nu,k}^{-1}$.

Теорема 1. А. *Пусть* $E_\nu = M_\psi$, $\psi \in (S_1)$, $\alpha_k = \beta_k \psi(P_k)$. *Если*

$$\{\alpha_k^{-1}\}_{k=0}^{\infty} \in l_1, \tag{6}$$

то

$$L_{E, \Phi}^{(\beta, N, \Sigma)}(\mathbf{R}^n) \to \mathfrak{B}^{(\alpha, N(\nu))}_{\mathcal{Y}, l_\infty; F}(\mathbf{R}_\nu^{n-1}). \tag{7}$$

Если дополнительно $\psi \in (S)$ *и для последовательности* $\{N_{\nu,k}\}_{k=0}^{\infty}$ *выполнено условие* в) (см. § 1), *то в* (7) *справедливо и соотношение* «$\leftarrow$».

Б. *Пусть* $E_\nu = \Lambda_\psi$, $\psi \in (S_1) \cap (S)$, $\alpha_k = \beta_k \psi(P_k)$. *Если*

$$\{\alpha_k^{-1}\}_{k=0}^{\infty} \in l_\infty, \tag{8}$$

то

$$L_{E, \Phi}^{(\beta, N, \Sigma)}(\mathbf{R}^n) \to \mathfrak{B}^{(\alpha, N(\nu))}_{\mathcal{Y}, l_1; F}(\mathbf{R}_\nu^{n-1}), \tag{9}$$

а соотношение «$\leftarrow$» *имеет место при любых фундаментальных функциях.*

В. *Пусть* $E_\nu = L_{q\theta}$, q, $\theta \in (1, \infty)$, *и для последовательности* $\{N_{\nu,k}\}_{k=0}^{\infty}$ *выполнено условие* в), *а*

$$\{\alpha_k^{-1}\}_{k=0}^{\infty} = \{\beta_k^{-1} P_k^{-1/q}\}_{k=0}^{\infty} \in l_{\theta'}, \tag{10}$$

где θ' *сопряжена с* θ. *Тогда*

$$L_{E, \Phi}^{(\beta, N, \Sigma)}(\mathbf{R}^n) \rightleftarrows \mathfrak{B}^{(\alpha, N(\nu))}_{\mathcal{Y}, l_\theta; F}(\mathbf{R}_\nu^{n-1}). \tag{11}$$

Г. *Пусть* $E_\nu = L_M$ *и* $M(u)$ *удовлетворяет* Δ_2*-условию. Рассмотрим* *пространства последовательностей*

$$l_M^{(P_k)} = \Big\{ u = (u_0, u_1, \ldots) \colon \|u\|_{l_M^{(P_k)}} =$$

$$= \inf\Big\{\lambda > 0 \colon \sum_{k=0}^{\infty} M\Big(\frac{|u_k|}{\lambda}\Big) P_k \leqslant 1\Big\} < \infty\Big\};$$

$$l_{N,P_k^{-1}}^{(P_k)} = \Big\{ v \colon \|v\|_{l_{N,P_k^{-1}}^{(P_k)}} = \inf\Big\{\lambda > 0 \colon \sum_{k=0}^{\infty} N\Big(\frac{|v_k|P_k^{-1}}{\lambda}\Big) P_k \leqslant 1\Big\} < \infty\Big\}.$$

Если

$$\{\beta_k^{-1}\}_{k=0}^{\infty} \in l_{N,P_k^{-1}}^{(P_k)}, \tag{12}$$

то

$$L_{E,\Phi}^{(\beta,N,\Sigma)}(\mathbf{R}^n) \rightleftarrows \mathfrak{B}_{\mathcal{Y},l_M^{(p_k)};F}^{(\beta,N^{(\nu)})}(\mathbf{R}_\nu^{n-1}). \tag{13}$$

Д. *Каждое из условий* (6), (8), (10), (12) *является необходимым для того, чтобы любая функция из соответствующего пространства* $L_{E,\Phi}^{(\beta,N,\Sigma)}$ *имела бы след на гиперплоскости* $x_\nu = 0$.

Замечание. В случае $F = L_{p_z}$, $E_\nu = L_{p_\nu,\theta}$ линейный оператор продолжения существует, если для последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ выполнено условие $\alpha_{k+1}/\alpha_k > c_4 > 1$. Это утверждение устанавливается на основе рассуждений доказательства теоремы 2 (см. § 3) и связано с тем, что при этом условии для $f \in \mathfrak{B}_{\mathcal{Y},l_{p_\nu};F}^{(\alpha,N^{(\nu)})}$ можно указать такое разложение (5), которое зависит от f линейно. В общем же случае для доказательства существования линейного оператора продолжения приходится постулировать, что некоторая система функций является мультипликатором в $F[l_{p_\nu}]$.

Если $\mathcal{Y} = L_{p_w}$, $F = L_{p_z}$, $l_\theta = l_{p_\nu}$, то пространство $\mathfrak{B}_{\mathcal{Y},l_\theta;F}^{(\alpha,N^{(\nu)})}$ мы будем обозначать через $\mathfrak{B}_{p_w,p_\nu;p_z}^{(\alpha,N^{(\nu)})}$, а если к тому же $N_{j,k} = 2^{k/\rho_j}$, $j \neq \nu$, $\alpha_k = 2^k$, — то через $\mathfrak{B}_{p_w,p_\nu;p_z}^{\rho}$.

Из (11), (13), учитывая предложения 2—4, получаем

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Условие*

$$\varkappa = 1 - (p_\nu r_\nu)^{-1} > 0 \tag{14}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы каждая функция из L_p^r *имела след на* $\mathbf{R}_\nu^{n-1}$. *При выполнении* (14)

$$L_p^r(\mathbf{R}^n) \rightleftarrows \mathfrak{B}_{p_w,p_\nu;p_z}^{\rho}(\mathbf{R}_\nu^{n-1}); \quad \rho_j = \varkappa r_j, \quad j \neq \nu, \tag{15}$$

и существует линейный оператор продолжения.

При натуральных r_j (15) дает решение проблемы Я. С. Бугрова. Сравним (15) с теоремой Я. С. Бугрова из [1].

Теорема А. *Пусть* $\tau = \min(p_\nu, \ldots, p_n)$, $\sigma = \max(p_\nu, \ldots, p_n)$. *Тогда*

$$B_{p(\nu),\tau}^{\rho}(R_\nu^{n-1}) \subset \operatorname{Ir} W_p^r(\mathbf{R}^n)\big|_{x_\nu=0} \subset B_{p(\nu),\sigma}^{\rho},$$

где ρ *определяется, как в* (15).

Из следствия 1 и теоремы Я. С. Бугрова вытекает

Следствие 2. *Для* $1 < p < \infty$

$$B_{p(\nu),\tau}^{\rho} \subset \mathfrak{B}_{p_w,p_\nu;p_z}^{\rho} \subset B_{p(\nu),\sigma}^{\rho}.$$

Это следствие важно тем, что дает информацию о гладкости по совокупности переменных (w, z) функций из пространства следов $\mathfrak{B}_{p_w,p_\nu;p_z}^{\rho}$, в то время как точное структурное описание этого пространства (см. [4]) говорит лишь о гладкости по каждой переменной.

Теорема 1 дает конструктивное описание пространства следов. Мы приведем сейчас еще одну форму конструктивного описания пространства $\mathfrak{B}^{\rho}_{p_w,p_v;p_z}$, из которой будет сразу вытекать структурное его описание в случае, когда $\nu=1$ (случай $\nu>1$ см. в [4]).

Теорема 2.

$$\mathfrak{B}^{\rho}_{p_w,p_v;p_z}=L_{p_z}\left[B^{\rho_w}_{p_w,p_v}\right]\cap\mathfrak{H}^{\rho_z}_{p_w,p_v;p_z}.$$

Применяя эту теорему при $\nu=1$ и определение ОПЛТ, получаем важное

Следствие 3. *Пусть* $1<p<\infty$, *тогда*

$$L^r_p(\mathbf{R}^n)\rightleftarrows L^{\rho}_{p^{(1)},p_1}(\mathbf{R}^{n-1}_1),\tag{16}$$

где $\rho_j=\varkappa r_j$, $j>1$; $\varkappa=1-(r_1p_1)^{-1}>0$, $p^{(1)}=(p_2,\ldots,p_n)$, *причем условие* $\varkappa>0$ *является также необходимым для того, чтобы каждая функция из* $L^r_p(R^n)$ *имела бы след на* $\mathbf{R}^{n-1}_1$. *Кроме того, существует линейный оператор продолжения.*

При $p_1=2$ (16) принимает вид

$$L^r_{(2,p_2,\ldots,p_n)}(\mathbf{R}^n)\rightleftarrows L^{\rho}_{(p_2,\ldots,p_n)}(\mathbf{R}^{n-1}_1)$$

где неравенство $\varkappa=1-(2r_1)^{-1}>0$ необходимо и достаточно в смысле следствия 3, $\rho_j=\varkappa r_j$, $j\neq 1$.

В [4] приведен следующий результат: пусть $\mathbf{R}^{n-m}_{1,\ldots,m}$ — подпространство, определенное равенствами $x_1=\ldots=x_m=0$, и пусть $p_1=\ldots=p_m=2$, $m<n$; $\rho_j=\varkappa r_j$, $j\geqslant m+1$, $\varkappa=1-\frac{m}{2}\prod_{j=1}^{m}r_j^{-1}>0$. Тогда

$$L^r_{(\underbrace{2,\ldots,2}_{m};p_{m+1},\ldots,p_n)}(\mathbf{R}^n)\rightleftarrows L^{\rho}_{(p_{m+1},\ldots,p_n)}(\mathbf{R}^{n-m}_{1,\ldots,m}).\tag{17}$$

Если, в частности, $m/2\in\mathbf{N}$; $r_1=\ldots=r_m=r\in\mathbf{N}$, $r>m/2$, то из (17) вытекает

$$W^r_{(2,\ldots,2;p_{m+1},\ldots,p_n)}(\mathbf{R}^n)\rightleftarrows W^{r-m/2}_{(p_{m+1},\ldots p_n)}(\mathbf{R}^{n-m}_{1,\ldots,m}).\tag{18}$$

Формула (18) показывает, что пространство Соболева со смешанной нормой может служить пространством следов для другого пространства Соболева со смешанной нормой. Ранее подобные факты были известны лишь для пространства W^r_2.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приведем ряд лемм. Первая из них доказывается при помощи оценок из [16] и рассуждений, близких к рассуждениям из [12].

Лемма 1. *Пусть* $f(x)$ *принадлежит* $L^{\text{loc}}_1[\mathcal{Y}]$ *и при каждых* w, z *является* ЦФЭТ $\mu>0$ *по* x_ν. *Тогда с константой, не зависящей от* f, μ, x_ν, $t\in\mathbf{R}$, $z\in\mathbf{R}^{n-\nu}$,

$$F(x_\nu,z)=\|f(\cdot,x_\nu,z)\|_{\mathcal{Y}}\ll(1+\mu|t-x_\nu|)(MF)(t,z),$$

где $(MF)(t,z)$ — *максимальная функция Харди — Литтлвуда по переменной* x_ν *в точке* (t,z).

Пусть $\Omega_k=\{x_\nu\colon |x_\nu|\leqslant P_k\}$, а T — нелинейный оператор, сопоставляющий функции $v(t)\in L_1(\Omega_0)$ последовательность $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ по формуле

$$(Tv)_k=v_k\inf_{x_\nu\in\Omega_k}|v(x_\nu)|.\tag{19}$$

Через $l^{(\gamma_k)}_\theta$, $\gamma_k>0$, $\theta\in[1,\infty]$, обозначается весовое пространство последовательностей с обычной нормой. Непосредственной проверкой доказывается

Лемма 2. (а) $T\colon M_\psi(\Omega_0)\to l_\infty^{(\psi(P_k))}$;

б) $T\colon L_{p\theta}(\Omega_0)\to l_\theta^{\left(P_k^{1/p}\right)}$;

в) $T\colon L_M(\Omega_0)\to l_M^{(P_k)}$.

Пусть $I=[-1,\ 1]$. Рассмотрим нелинейный оператор T_1, сопоставляющий функции $v\in L_1(2I)$ последовательность $\{v_k\}_{k=0}^\infty$ по формуле

$$(T_1v)_k=v_k=\sup_{x_\nu\in I}\ \inf_{y\in\Omega_k(x_\nu)}|v(y)|,$$

где $\Omega_k(x_\nu)=\{y\in\mathbf{R}\colon |x_\nu-y|\leqslant P_k\}$.

Лемма 3. *Если* $\psi\in(S)$, *то* $T_1\colon \Lambda_\psi\to l_1^{(\psi(P_k))}$.

Доказательство. Рассмотрим точки $x_\nu^{(k)}$ такие, что

$$v_k'=\inf_{y\in\Omega_k\left(x_\nu^{(k)}\right)}|v(y)|\geqslant v_k/2,$$

и введем функцию

$$v_1(y)=\begin{cases}v_k' \text{ при } y\in\Omega_k\left(x_\nu^{(k)}\right)\setminus\Omega_{k+1}\left(x_\nu^{(k+1)}\right),\\ 0 \text{ в остальных точках.}\end{cases}$$

Ясно, что $v_1(y)\leqslant v(y)$. Кроме того, $P_k-P_{k+1}\leqslant \operatorname{mes}\left(\Omega_k\left(x_\nu^{(k)}\right)\setminus\Omega_{k+1}\times\right.$ $\left.\times\left(x_\nu^{(k+1)}\right)\right)\leqslant P_k\ll P_k-P_{k+1}$, поэтому, если ввести функцию $(\tau\in\mathbf{R}_+)$

$$v_2(\tau)=\begin{cases}v_k' \text{ при } \tau\in(P_{k+1},\ P_k],\\ 0 \text{ в остальных точках,}\end{cases}$$

то ее функция распределения эквивалентна функции распределения функции $v_1(y)$. Это означает, что

$$\|v_2\|_{\Lambda_\psi}\ll\|v_1\|_{\Lambda_\psi}\leqslant\|v\|_{\Lambda_\psi}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^\infty v_k\psi(P_k)\ll\int_0^{P_1}v_2(t)\,\psi'(t)\,dt\leqslant\int_0^{P_1}v_2^*(s)\,(\psi'(s))^*ds\ll\|v\|_{\Lambda_\psi}.$$

Определим линейный оператор $\mathfrak{C}$, сопоставляющий последовательности $u=\{u_k\}_{k=0}^\infty\in l_\infty$ функцию

$$(\mathfrak{C}u)(x_\nu)=\sum_{k=0}^\infty u_k\left(1+N_{\nu,k}^2x_\nu^2\right)^{-1}. \tag{20}$$

Можно показать, что справедлива

Лемма 4. (а) *Если* $\psi\in(S)\cap(S_1)$ *и для последовательности* $\{N_{\nu,k}\}_{k=0}^\infty$ *выполнено условие* в) (см. § 1), *то* $\mathfrak{C}\colon l_\infty^{(\psi(P_k))}\to M_\psi$;

б) *в условиях утверждения* (а) $\mathfrak{C}\colon l_\theta^{\left(P_k^{1/p}\right)}\to L_{p\theta}$;

(в) *если функция* $M(u)$ *удовлетворяет* Δ_2*-условию, то* $\mathfrak{C}\colon l_M^{(P_k)}\to L_M$.

Установим следующую лемму.

Лемма 5. $\left(l_M^{(P_k)}\right)'=l_{N,P_k^{-1}}^{(P_k)}$.

Доказательство. Пусть $v\in l_{N,P_k^{-1}}^{(P_k)}$. Покажем, что ряд $\sum_{k=0}^\infty|u_kv_k|$ сходится для любой последовательности $u\in l_M^{(P_k)}$. Для этого рассмотрим функции

$$u(t)=\begin{cases}|u_k| & \text{при } t\in[P_{k+1}, P_k),\\ 0 & \text{при остальных } t>0;\end{cases}$$
$$v(t)=\begin{cases}|v_k|P_k^{-1} & \text{при } t\in[P_{k+1}, P_k),\\ 0 & \text{при остальных } t>0.\end{cases} \qquad (21)$$

Поскольку $P_k-P_{k+1}\asymp P_k$, то $u\in l_M^{(P_k)}\Leftrightarrow u(t)\in L_M$, $v\in l^{(P_k)}_{N,P_k^{-1}}\Leftrightarrow v(t)\in L_N$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty}|u_kv_k|=\int_0^{\infty}|u(t)v(t)|dt<\infty.$$

Обратное вложение докажем от противного. Пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|u_kv_k|<\infty$ для всех $u\in l_M^{(P_k)}$, но $v\notin l^{(P_k)}_{N,P_k^{-1}}$. Определим функцию $v(t)$ по формуле (21), тогда $v(t)\notin L_N$, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty}|v_k|P_k^{-1}\int_{P_{k+1}}^{P_k}|u_0(t)|dt=\infty \qquad (22)$$

для некоторой функции $u_0\in L_M$.

Рассмотрим квазилинейный оператор, сопоставляющий суммируемой на $(0, P_1]$ функции $u(t)$ последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}=\left\{P_k^{-1}\int\limits_{P_{k+1}}^{P_k}|u(t)|dt\right\}_{k=0}^{\infty}$. Очевидно, этот оператор действует из L_1 в $l_1^{(P_k)}$, а из L_∞ в $l_\infty\subset l_\infty^{(P_k)}$. По интерполяционной теореме из [17] он действует из L_M в $l_M^{(P_k)}$. Тогда и $\left\{P_k^{-1}\int\limits_{P_{k+1}}^{P_k}|u_0(t)|dt\right\}_{k=0}^{\infty}\in l_M^{(P_k)}$, что противоречит (22).

Доказательство теоремы 1. Шаг 1. Докажем справедливость соотношения (7). Пусть выполнено (6), и пусть функция $f(x)$ принадлежит наиболее широкому (по индексу Ф) пространству $L_{E,l_\infty}^{(\beta,N,\Sigma)}$, где $E_\nu=M_\psi$. Это означает, что

$$H(x)=\sup_k\{\beta_k|(V_k*f)(x)|\}\in F[M_\psi[\mathcal{Y}]]. \qquad (23)$$

Из (23) следует, что для любых x_ν, z, k

$$\beta_k\|(V_k*f)(\cdot, x_\nu, z)\|_{\mathcal{Y}}\leqslant\|H(\cdot, x_\nu, z)\|_{\mathcal{Y}}=H_1(x_\nu, z)\in M_\psi[\mathcal{Y}]. \qquad (24)$$

При каждом фиксированном z применим к обеим частям (24) оператор максимальной функции Харди — Литтлвуда по x_ν, учитывая, что в наших условиях он ограничен в M_ψ:

$$\beta_k(M\|V_k*f\|_{\mathcal{Y}})(x_\nu, z)\leqslant(MH_1)(x_\nu, z). \qquad (25)$$

Используя (25) и лемму 1, получим

$$\beta_k\|(V_k*f)(\cdot, x_\nu, z)\|_{\mathcal{Y}}\ll\inf_{t\in\Omega_k(x_\nu)}(MH_1)(t, z). \qquad (26)$$

Применим теперь лемму 2 (а):

$$\{\alpha_k\|(V_k*f)(\cdot, x_\nu, z)\|_{\mathcal{Y}}\}_{k=0}^{\infty}\in l_\infty, \qquad (27)$$

причем норма этой последовательности в l_∞, как функция от x_ν, z, ограничена. В силу условия (6) и неравенства Гельдера при каждых x_ν, z ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(V_k * f)(w, x_\nu, z)$$

абсолютно сходится в $\mathcal{Y}$. Определенную таким образом сумму этого ряда обозначим через $f_1(x)$, тогда

$$f_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(V_k * f)(x)$$

в смысле сходимости по n-мерной мере. Но этот же ряд по предложению 1 слабо сходится к $f(x)$. Теперь нетрудно показать, что $f_1=f$ почти всюду в $\mathbf{R}^n$.

Покажем теперь, что функция

$$f_1(w, 0, z)=\sum_{k=0}^{\infty}(V_k * f)(w, 0, z),$$

которая, как это следует из (27), принадлежит $\mathfrak{B}^{(\alpha, N^{(\nu)})}_{\mathcal{Y}, l_\infty; F}$, есть след в смысле пространства $F[\mathcal{Y}]$ функции $f_1(x)$. Для этого достаточно установить, что $f_1(x)-f_1(w, 0, z)\to 0$ в $F[\mathcal{Y}]$ при $|x_\nu|\to 0$. Поскольку $\|\{\alpha_k^{-1}\}_{k=s}^{\infty}\|_{l_1}\to 0$ при $s\to\infty$, то, используя неравенство Гельдера и (27), получим, что равномерно по x_ν при $s\to\infty$ $\left\|\sum_{k=s}^{\infty}\|V_k * f\|_{\mathcal{Y}}\right\|_F\to 0$ (см. также доказательство предложения 5). Соответствующую же конечную сумму можно оценить с помощью формулы конечных приращений ($V_k * f$ — ЦФЭТ) и неравенства Бернштейна, справедливого в любом СП. Соотношение (7) доказано.

Шаг 2. Соотношение «$\to$» в (11) доказывается совершенно аналогично с применением в нужном месте п. (б) леммы 2. Доказательство (9) осложняется тем, что в условии (8) фигурирует несепарабельное пространство последовательностей. Поэтому леммой 3 следует воспользоваться дважды: в первый раз, когда доказывается принадлежность последовательности $\{\alpha_k\|V_k * f\|_{\mathcal{Y}}(x_\nu, z)\}_{k=0}^{\infty}$ пространству l_1; во второй раз, когда обосновывается тот факт, что соответствующее сужение функции $f_1(x)$ есть ее след в смысле $F[\mathcal{Y}]$; при этом в силу леммы 3 остаток ряда будет стремиться к нулю лишь равномерно по достаточно малым x_ν. Ясно, что это оказывается достаточно. Если функция $N(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то доказательство соотношения «$\to$» в (13) полностью повторяет шаг 1, если же нет — то пространство, фигурирующее в (12), также оказывается несепарабельным, и тогда следует воспользоваться соответствующим аналогом леммы 3.

Шаг 3. Построим теперь оператор продолжения. Пусть $\gamma_{\nu,k}=(1+d^{-1})N_{\nu,k}$, а число d выбрано из условия $2d^{-1}<c_2-1$, где c_2 — константа из разбиения единицы. Рассмотрим функцию

$$Q_k(x_\nu)=4d^2\frac{\sin^2\left(\frac{N_{\nu,k}x_\nu}{2d}\right)}{(N_{\nu,k}x_\nu)^2}e^{i\gamma_{\nu,k}x_\nu},\tag{28}$$

где i — мнимая единица. Обозначим через G^d то симметричное пространство последовательностей, которое фигурирует в определениях пространства следов, например в (13) $G^d=l_M^{(P_k)}$. Пусть $f\in\mathfrak{B}^{(\alpha, N^{(\nu)})}_{\mathcal{Y}, G^d; F}$, т. е. существует разложение $f(w, z)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k(w, z)$, $q_k\in\mathfrak{M}_{N_k^{(\nu)}, F[\mathcal{Y}]}$, такое, что $A(q, f)<\infty$ (см. § 1).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}q_k(w, z)Q_k(x_\nu).$$

Из расположения спектра функции Q_k, очевидных оценок

$$|Q_k(x_\nu)| \ll (1 + N^2_{\nu,k}x^2_\nu)^{-1} \leqslant (1 + x^2_\nu)^{-1} \in L_1 \cap L_\infty$$

и леммы 4 следует, что этот ряд определяет функцию $F(x)$, норма которой в $L^{(\beta,N,\Sigma)}_{E,\Phi}$ не превосходит (с константой, не зависящей от f) величины $A(q, f)$, причем, как нетрудно убедиться, $f(w, z) = F|_{x_\nu=0}$ в смысле $F[\mathcal{Y}]$.

Шаг 4. Покажем необходимость условий (6), (8), (10), (12), которые ввиду леммы 5 могут быть записаны единообразно: $\{\alpha_k^{-1}\}_{k=0}^\infty \in (G^d)'$. Предположим противное, тогда $\sum\limits_{k=0}^\infty \alpha_k^{-1}\delta_k = \infty$ для некоторой последовательности $\{\delta_k\}_{k=0}^\infty \in G^d$. По известной теореме Абеля последовательность $\{\delta'_k\}_{k=0}^\infty = \left\{\delta_k \left(\sum\limits_{s=0}^k \alpha_s^{-1}\delta_s\right)^{-1}\right\}$ такова, что $\{\alpha_k^{-1}\delta'_k\}_{k=0}^\infty \in l_\infty$, $\sum\limits_{k=0}^\infty \alpha_k^{-1}\delta'_k = \infty$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^\infty \alpha_k^{-1}\delta'_k Q_k(x_\nu), \tag{29}$$

где функции Q_k определяются как в (28). Из оценки

$$(1 + N^2_{\nu,k}x^2_\nu)^{-1} \ll |Q_k(x_\nu)| \ll (N_{\nu,k}x_\nu)^{-2}$$

и вышеизложенного следует, что ряд (29) сходится при $x_\nu \neq 0$, а функция $Q(x_\nu)$, равная сумме этого ряда, неограничена в любой окрестности этой точки. Возьмем функцию $Q_0(w, z) \in \mathfrak{M}_{1,F[\mathcal{Y}]}$, тогда $Q_0(w, z)\,Q(x_\nu) \in L^{(\beta,N,\Sigma)}_{E,l_1}$, но $\|Q_0\|_{F[\mathcal{Y}]}Q(x_\nu) \to \infty$ при $x_\nu \to 0$, что противоречит определению следа.

Доказательство теоремы 2. Для краткости записи обозначим пространства через $\mathfrak{V}$ и $X = X_1 \cap X_2$.

Шаг 1. Пусть $f \in \mathfrak{V}$ и $A(z) = \left\{\sum\limits_{k=0}^\infty (2^k \|q_k(\cdot, z)\|_{p_w})^{p_\nu}\right\}^{1/p_\nu}$. Имеем: $A \in L_{p_z}$. Покажем, что $f \in X_1$. Рассмотрим систему $\{\mathcal{U}_k\}_{k=0}^\infty$ из предложения 8. Тогда $\mathcal{U}_k \underset{1}{*} f = \sum\limits_{s=k-1}^\infty \mathcal{U}_k \underset{1}{*} q_s$. При любом фиксированном z_0 таком, что $A(z_0)$ конечна, в силу предложения 2 и непрерывности в l_{p_ν} оператора типа Харди справедливо неравенство

$$\left\|\left\{2^k \left\|\left(\mathcal{U}_k \underset{1}{*} f\right)(\cdot, z_0)\right\|_{p_w}\right\}_{k=0}^\infty\right\|_{l_{p_\nu}} \ll$$

$$\ll \left\|\left\{2^k \sum_{s=k-1}^\infty 2^{-s}(2^s\|q_s(\cdot, z_0)\|_{p_w})\right\}_{k=0}^\infty\right\|_{l_{p_\nu}} \ll A(z_0),$$

с константой, не зависящей от z. Покажем, что $f \in X_2$. Пусть $\{Z_k\}_{k=0}^\infty$ — система функций из § 1. Поскольку $\left(Z_k \underset{2}{*} f\right)(w, z) = \left(Z_k \underset{2}{*} \sum\limits_{s=k-1}^\infty q_s\right)(w, z)$, то

$$2^k \left\|Z_k \underset{2}{*} f\right\|_{p_w} \leqslant |Z_k| \underset{2}{*} 2^k \sum_{s=k-1}^\infty \|q_s(\cdot, z)\|_{p_w} = |Z_k| \underset{2}{*} Q_k.$$

Из вышеизложенного ясно, что $\{Q_k\}_{k=0}^\infty \in L_{p_z}[l_{p_\nu}]$, потому, применяя предложение 3, получим требуемое.

Шаг 2. Пусть $f \in X$. Поскольку $f \in X_2$, то в L_{p_ν}

$$f = \sum_{k=0}^\infty Z_k \underset{2}{*} f_k$$

причем

$$\| A_k \|_{L_{p_z}[l_{p_\nu}]} = \left\| \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^k \left\| Z_k \underset{2}{*} f \right\|_{p_w} \right)^{p_\nu} \right\}^{1/p_\nu} \right\|_{p_z} < \infty.$$

В то же время, поскольку $f \in X_1$, то в L_{p_ν}

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{U}_k \underset{1}{*} f,$$

причем

$$\| B_k \|_{L_{p_z}[l_{p_\nu}]} = \left\| \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^k \left\| \mathcal{U}_k \underset{1}{*} f \right\|_{p_w} \right)^{p_\nu} \right\}^{1/p_\nu} \right\|_{p_z} < \infty.$$

Рассмотрим функции $q_s = Z_s \underset{2}{*} \sum_{k=0}^{s} \mathcal{U}_k \underset{1}{*} f$, $Q_s = \mathcal{U}_s \underset{1}{*} \sum_{k=0}^{s-1} Z_k \underset{2}{*} f$, принадлежащие $\mathfrak{M}_{2s/\rho,\infty}$. Пусть, как при доказательстве предложения 7, $Z_k = R_k - R_{k-1}$, $\mathcal{U}_k = T_k - T_{k-1}$, тогда $q_s = (R_s - R_{s-1}) \underset{2}{*} T_s \underset{1}{*} f$; $Q_s = (T_s - - T_{s-1}) \underset{1}{*} R_s \underset{2}{*} f$, что означает

$$q_s + Q_s = (T_s \otimes R_s - T_{s-1} \otimes R_{s-1}) * f = \Theta_s * f,$$

где $(T_s \otimes R_s)(w, z) = T_s(w) R_s(z)$. Легко проверить, что в L_{p_ν}

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_k * f = \sum_{k=0}^{\infty} (q_k + Q_k). \tag{30}$$

Покажем справедливость оценок

$$\left\| \left\| \left\{ 2^k \| q_k(\cdot, z) \|_{p_w} \right\}_{k=0}^{\infty} \right\|_{l_{p_\nu}} \right\|_{p_z} \ll \| A_k + B_k \|_{L_{p_z}[l_{p_\nu}]}, \tag{31}$$

$$\left\| \left\| \left\{ 2^k \| Q_k(\cdot, z) \|_{p_w} \right\}_{k=0}^{\infty} \right\|_{l_{p_\nu}} \right\|_{p_z} \ll \| A_k + B_k \|_{L_{p_z}[l_{p_\nu}]}. \tag{32}$$

Используя (30), получим

$$2^k \| q_k(\cdot, z) \|_{p_w} \leqslant 2^k \left\| Z_k \underset{2}{*} f \right\|_{p_w} + 2^k \left\| Z_k \underset{2}{*} \sum_{s=k+1}^{\infty} \mathcal{U}_s \underset{1}{*} f \right\|_{p_w} = A_k(z) + C_k(z).$$

Далее,

$$C_k(z) \leqslant | Z_k | \underset{2}{*} \left(\sum_{s=k}^{\infty} 2^k \left\| \mathcal{U}_s \underset{1}{*} f \right\|_{p_w} \right) = \left(| Z_k | \underset{2}{*} D_k \right)(z).$$

Однако $\| \{D_k\}_{k=0}^{\infty} \|_{l_{p_\nu}} \ll \| \{B_k\}_{k=0}^{\infty} \|_{l_{p_\nu}}$, откуда ввиду предложения 3 следует (31). Аналогично проверяется и оценка (32).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бугров Я. С.** Теоремы вложения для классов функций со смешанной нормой.— Мат. сб., 1973, т. 92, № 4, с. 611—621.
2. **Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.
3. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.
4. **Берколайко М. З.** Теоремы о следах на координатных подпространствах для некоторых пространств дифференцируемых функций.— Докл. АН СССР, 1985, т. 282, № 5, с. 1042—1046.
5. **Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.** Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1979.
6. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.
7. **Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А.** Нормированные решетки.— В кн.: Итоги науки. Математический анализ. М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1980.
8. **Трибель Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.— М.: Мир, 1980.

9. **Бари Н. К., Стечкин С. Б.** Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, т. 5, с. 484—521.
10. **Лизоркин П. И.** Свойства функций из пространств $\Lambda^r_{p\theta}$. — Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1974, т. 131, с. 158—181.
11. **Лизоркин П. И.** Мультипликаторы интегралов Фурье и оценки сверток.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, т. 34, с. 218—247.
12. **Калябин Г. А.** Описание следов для анизотропных пространств типа Лизоркина — Трибеля.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1979, т. 150, с. 160—173.
13. **Гольдман М. Л.** Описание следов для некоторых функциональных классов.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1979, т. 150, с. 99—126.
14. **Берколайко М. З.** О следах обобщенных пространств дифференцируемых функций со смешанной нормой.— Докл. АН СССР, 1985, т. 277, № 2, с. 270—274.
15. **Бухвалов А. В.** Интерполяция операторов в пространствах вектор-функций с приложениями к сингулярным интегральным операторам.— Докл. АН СССР, 1984, т. 278, № 3, с. 523—526.
16. **Берколайко М. З., Овчинников В. И.** Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1983, т. 161, с. 3—17.
17. **Овчинников В. И.** Интерполяционные теоремы, вытекающие из неравенства Гротендика.— Функцион. анализ и его прил., 1976, т. 10, № 4, с. 45—54.

Б. И. БОТВИННИК

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ В ТЕОРИЯХ КОБОРДИЗМОВ МНОГООБРАЗИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Наиболее известные экстраординарные теории когомологий (теории кобордизмов, k-теории) обладают естественной мультипликативной структурой, которая играет важную роль в приложениях этих теорий. Вопрос о сохранении этой структуры при переходе к теориям когомологий с коэффициентами нетривиален и требует специального рассмотрения (см. [1]).

Теории кобордизмов многообразий с особенностями естественно обобщают теории кобордизмов с коэффициентами. Мультипликативность в некоторых конкретных теориях кобордизмов многообразий с особенностями изучена в работах Дж. Моравы [2] и У. Вёрглера [3]. Общее геометрическое исследование мультипликативности в теориях кобордизмов многообразий с особенностями было проведено О. К. Мироновым в работах [4, 5]. Именно он построил геометрические препятствия, которые отвечают за существование допустимого внешнего умножения и за его коммутативность и ассоциативность. (Допустимое внешнее умножение — это умножение, которое согласовано с мультипликативной структурой в исходной теории кобордизмов.) Конструкция О. К. Миронова позволила полностью изучить допустимое внешнее умножение во многих теориях кобордизмов многообразий с особенностями. Тем не менее препятствия к коммутативности и ассоциативности допустимого внешнего умножения были определены О. К. Мироновым при условии, что на многообразиях, по которым вводятся особенности, определена инволюция, обращающая на них (B, f)-структуру. В конкретных ситуациях это условие проверить довольно трудно — далеко не всегда класс кобордизмов задается геометрически, он может быть задан как характеристический класс некоторого расслоения или описан чисто алгебраически в терминах спектральной последовательности и т. д. Такова ситуация для теорий симплектических кобордизмов с особенностями, введенных В. В. Вершининым [6].

Целью настоящей работы является изучение мультипликативности в теориях кобордизмов многообразий с особенностями в общем случае, т. е. когда на многообразия, по которым вводятся особенности, не наложены априорные ограничения. Отметим, что в геометрических конструкциях этой работы активно используются методы, разработанные О. К. Мироновым (см. [4, 5]).

Автор выражает искреннюю благодарность В. В. Вершинину и О. К. Миронову за полезные обсуждения материала этой статьи.