но $4(2^k)-4<2^{k+2}-3$, поэтому $[B_k]_{\Sigma_k}=0$. Наконец, элемент $[\Gamma_k]_{\Sigma_k}$ имеет третий порядок согласно лемме 4.4, но в кольце $Sp^*_{\Sigma_k}(pt)$ нет элементов третьего порядка, поэтому $[\Gamma_k]_{\Sigma_k}=0$. Мы доказали следующий результат.

Теорема 6.2. *Для всех $k=1, 2, \ldots$ допустимые внешние умножения μ_k в теориях $Sp^*_{\Sigma_k}$ и умножение μ в теории Sp^*_Σ коммутативны и ассоциативны.*

Из теоремы 6.2 вытекает (см. [11])

Следствие 6.3. *Теория кобордизмов $(Sp^*_\Sigma)_{(2)}$ с мультипликативной структурой μ изоморфна прямой сумме теорий когомологий Брауна — Петерсона BP^*.*

Тем самым, в частности, отождествляются соответствующие спектральные последовательности Адамса — Новикова для спектра MSp. Более того, тесная взаимосвязь между теориями кобордизмов Sp^* и Sp^*_Σ позволяет дать геометрическое описание этой спектральной последовательности Адамса — Новикова в геометрических терминах (см. [11]), в частности, мультипликативная структура в ней порождается умножением μ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Araki S., Toda H.** Multiplicative structure in mod q cohomology theories. I.— Osaka J. Math., 1965, v. 2, N 1, p. 71—115; II — Osaka J. Math., 1966, v. 3, N 1, p. 81—120.
2. **Morava J.** A product for the odd-primary bordism of manifolds witw singularities.— Topology, 1979, v. 18, N 2, p. 177—186.
3. **Wurgler U.** On products in a family of cohomology theories associated to the invariant prime ideals of $BP^*(pt)$.— Comment. math. helv., 1977, v. 55, p. 457—481.
4. **Миронов О. К.** Существование мультипликативных структур в теориях кобордизмов с особенностями.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, т. 39, № 5, с. 1065—1092.
5. **Миронов О. К.** Мультипликативность в кобордизмах с особенностями и операции Стинрода — Дика.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, т. 42, № 4, с. 789—806.
6. **Вершинин В. В.** Симплектические кобордизмы с особенностями.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1983, т. 47, № 2, с. 230—247.
7. **Стонг Р.** Заметки по теории кобордизмов.— М.: Мир, 1973.
8. **Baas N. A.** On the bordism theory of manifolds with singularities.— Math. Scand, 1973, v. 33, p. 279—302.
9. **Ботвинник Б. И.** О мультипликативности в кобордизмах с особенностями.— В кн.: Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности. Тезисы докладов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982, с. 16—17.
10. **Ray N.** Indecomposables in Tors Ω^*_{Sp}. — Topology, 1971, v. 10, N 4, p. 261—270.
11. **Ботвинник Б. И.** Геометрические свойства спектральной последовательности Адамса — Новикова для симплектических кобордизмов.— Деп. ВИНИТИ, № 250—84 Деп.— 59 с.

В. В. ВЕРШИНИН

УМНОЖЕНИЕ В СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Алгебраические структуры спектральных последовательностей, несущие информацию о соответствующих структурах в тех объектах, к которым эти последовательности сходятся, являются также одним из основных средств для вычисления дифференциалов. Однако существование таких структур, как умножение, зачастую лишь подразумевается или, во всяком случае, принадлежит фольклору. Одной из причин этого, по-видимому, является необходимость проведения кропотливых рассмотрений, результатом которых может быть лишь подтверждение того, что должно быть по природе вещей. С точки зрения мультипликативных структур нас интересуют спектральная последовательность Атьи — Хирцебруха и экстраординарная спектральная последовательность Адамса, в частности последовательность, построенная на основе унитарных кобордизмов или спектра Брауна — Петерсона,— спектральная последовательность Адамса — Новикова. Эта спектральная последовательность в некоторых случаях изоморфна спектральной последовательности особенностей [1, 2], причем в случае бесконечного числа особенностей изучение мультипликативных свойств спектральной последовательности особенностей крайне сложно, и поэтому остается перенести в эту последовательность умножение из последовательности Адамса — Новикова с помощью изоморфизма [2]. Отчасти этим объясняется то, что мы вновь обращаемся к мультипликативным свойствам спектральных последовательностей. Результаты настоящей работы частично опубликованы в [3].

Напомним конструкции интересующих нас спектральных последовательностей. Пусть даны обобщенная теория гомологий $h_*(\ )$ и соответствующая ей теория когомологий $h^*(\ )$, определенные на категории Бордмана [4]. Эта категория является основной в нашей работе. Любой объект X категории спектров Бордмана обладает фильтрацией остовами X^k:

$$X \supset \ldots \supset X^k \supset \ldots, \quad X^k/X^{k-1} = \bigvee_{\alpha\in A_k} S^k_\alpha,$$

S^k есть сферический спектр размерности k, где k пробегает целые числа, т. е. клетки могут быть и отрицательными. Спектральная последовательность Атьи — Хирцебруха возникает из точного треугольника

$$\begin{tikzcd} h_*(X^{k-1}) \arrow[rr] & & h_*(X^k) \arrow[dl] \\ & h_*\left(X^k/X^{k-1}\right), \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

ее начальный член E_2 изоморфен $H_*(X, h_*)$, где $h_* = h_*(S^0)$.

Теорема А. Дуади [5] о мультипликативных свойствах спектральных последовательностей, которую мы приведем ниже, сформулирована для спектральных последовательностей, заданных с помощью спектральных систем [6, с. 400]. Поэтому нужно задавать интересующие нас спектральные последовательности с помощью спектральных систем. Спектральная последовательность Атьи — Хирцебруха задается с помощью спектральной системы

$$H(p, q) = h_*\left(X^p/X^q\right), \quad p \geqslant q,$$

в которой гомоморфизм

$$\delta_*\colon H(p, q) \to H(q, r), \quad p \geqslant q \geqslant r,$$

возникает из точного треугольника

$$X^q/X^r \xrightarrow{i} X^p/X^r \xrightarrow{j} X^p/X^q \xrightarrow{\delta} X^q/X^r.$$

Спектральная последовательность Адамса для спектра Y строится следующим образом [7, 8]. Пусть $Y_0 = Y$, положим $W_0 = h \wedge Y_0$. Тогда имеем морфизм

$$\beta_0\colon Y_0 \cong S^0 \wedge Y_0 \xrightarrow{i\wedge 1} h \wedge Y_0 = W_0,$$

где $i\colon S^0 \to h$ — единичный морфизм мультипликативного спектра h, представляющего теорию гомологий $h_*(\ )$. Морфизм β_0 порождает точный треугольник

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[dr, "\beta_0"'] & & Y_1 \arrow[ll, "\alpha_0"'] \\ & W_0 \arrow[ur, "\delta_0"'] & \end{tikzcd},$$

в котором морфизм α_0: $Y_1 \to Y_0$ имеет степень 0, а морфизм δ_0: $W_0 \to Y_1$ имеет степень -1. Мы построили Y_1, продолжая этот процесс по индукции, получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] Y_0 \arrow[dr] & & Y_1 \arrow[ll] \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[ll] & \ldots \arrow[l] & Y_p \arrow[l] \arrow[dr] & & Y_{p+1} \arrow[ll] & \ldots \arrow[l] \\ & W_0 \arrow[ur] & & W_1 \arrow[ur] & & & & W_p \arrow[ur] & & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Применяя конструкцию телескопа, можем считать все отображения $Y_{p+1} \to Y_p$ вложениями:

$$Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots \supset Y_p \supset Y_{p+1} \supset \ldots .$$

Можно представить спектры Y_p и W_p несколько иначе. Морфизм i: $S^0 \to h$ порождает точный треугольник

$$\begin{tikzcd} S^0 \arrow[dr, "i"'] & & \bar{h} \arrow[ll, "j"'] \\ & h \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

в котором морфизм j: $\bar{h} \to S^0$ имеет степень 0. Пусть $\bar{h}^p = \bar{h} \wedge \ldots \wedge \bar{h}$ (p сомножителей), тогда получаем точный треугольник

$$\begin{tikzcd} \bar{h}^p \wedge Y \arrow[dr, "i\wedge 1"'] & & \bar{h}^{p+1} \wedge Y \arrow[ll, "j\wedge 1"'] \\ & h \wedge \bar{h}^p \wedge Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}.$$

Следовательно, можно считать

$$Y_p = \bar{h}^p \wedge Y, \quad W_p = h \wedge \bar{h}^p \wedge Y.$$

Применяя к диаграмме (1) функтор $[X, -]_*$ (мы считаем, что Y есть h-полный спектр), получаем спектральную последовательность Адамса. Нас будет интересовать случай $X = S^0$. Построим (p, q)-систему для этой спектральной последовательности. Пусть Σ есть цилиндр отображения j: $\bar{h} \to S^0$, тогда Σ — строгий деформационный ретракт S^0 с морфизмами in: $S^0 \subset \Sigma$ и pr: $\Sigma \to S^0$. Имеем также вложение g: $\bar{h} \subset \Sigma$, которое порождает мономорфизм

$$g^{q-p} \wedge 1: \bar{h}^q = \bar{h}^{q-p} \wedge \bar{h}^p \subset \Sigma^{q-p} \wedge \bar{h}^p.$$

Определим $\pi(p, q) = \pi_*\left(\left(\left(\Sigma^{q-p}\wedge\bar{h}^p\right)/_{\bar{h}^q}\right) \wedge Y\right) = \pi_*\left(\left(\Sigma^{q-p}/_{\bar{h}^{q-p}}\right) \wedge \bar{h}^p \wedge Y\right).$
Гомоморфизм δ_*: $\pi(p, q) \to \pi(q, s)$ возникает из точного треугольника

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{s-p}/_{\bar{h}^{s-p}} \arrow[dr, "j"'] & & \left(\Sigma^{s-q}\wedge\bar{h}^{q-p}\right)/_{\bar{h}^{s-p}} \arrow[ll, "i"'] \\ & \Sigma^{s-p}/_{\left(\Sigma^{s-q}\wedge\bar{h}^{q-p}\right)} \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}.$$

Перейдем к определению спаривания спектральных систем для спектров X и Y в спектральную систему спектра $X \wedge Y = Z$. Имеем эквивалентность

$$\nu: \left(X^p/_{X^{p-r}}\right) \wedge \left(Y^q/_{Y^{q-r}}\right) \to \left(X^p\wedge Y^q\right)/_{\left(X^p\wedge Y^{q-r}\cup X^{p-r}\wedge Y^q\right)},$$

а также вложение

$$\gamma: \left(X^p\wedge Y^q\right)/_{\left(X^p\wedge Y^{q-r}\cup X^{p-r}\wedge Y^q\right)} \subset Z^{p+q}/_{Z^{p+q-r}},$$

порожденное вложением пар

$$\left(X^p \wedge Y^q, X^p \wedge Y^{q-r} \cup X^{p-r} \wedge Y^q\right) \subset \left((X \wedge Y)^{p+q}, (X \wedge Y)^{p+q-r}\right).$$

Определим спаривание φ как следующую композицию:

$$\varphi: H(p, p-r; X) \otimes H(q, q-r; Y) = h_*\left(X^p/_{X^{p-r}}\right) \otimes h_*\left(Y^q/_{Y^{q-r}}\right) \to$$
$$\to h_*\left(\left(X^p/_{X^{p-r}}\right) \wedge \left(Y^q/_{Y^{q-r}}\right)\right) \xrightarrow{\nu_*} h_*\left(\left(X^p\wedge Y^q\right)/_{\left(X^p\wedge Y^{q-r}\cup X^{p-r}\wedge Y^q\right)}\right) \xrightarrow{\gamma_*}$$
$$\xrightarrow{\gamma_*} h_*\left(Z^{p+q}/_{Z^{p+q-r}}\right) = H(p+q, p+q-r; Z).$$

В этой композиции первое отображение порождено функтором смэш-произведения и мультипликативной структурой теории гомологий $h_*(\ )$.

Для определения спаривания спектральных систем $\pi(q,\ s)$ рассмотрим морфизмы

$$\nu\colon\ \left(\Sigma^r/\bar h^r\right)\wedge\left(\Sigma^r/\bar h^r\right)\to \Sigma^{2r}/(\Sigma^r\wedge\bar h^r\cup \bar h^r\wedge\Sigma^r),$$

$$\mu\colon\ \Sigma\wedge\Sigma \xrightarrow{\mathrm{pr}\wedge\mathrm{pr}} S^0\wedge S^0\simeq S^0\xrightarrow{\mathrm{in}}\Sigma,$$

$$\omega\colon\ \Sigma^r\wedge\Sigma^r\xrightarrow{T}(\Sigma\wedge\Sigma)^r\xrightarrow{\mu^r}\Sigma^r,$$

где T есть перестановка, которая ставит сомножитель с номером k из второго экземпляра Σ^r строго за k-м сомножителем Σ из первого экземпляра Σ^r. Морфизм ω переводит подспектр $\Sigma^r\wedge\bar h^r\cup\bar h^r\wedge\Sigma^r$ в подспектр $\bar h^r$. Определим спаривание спектральных систем $\pi(p,s)$ как композицию

$$\begin{aligned}\varphi\colon\ &\pi(p,\ p+r;\ X)\otimes\pi(q,\ q+r;\ Y)=\\ &=\pi_*\left(\left(\Sigma^r/\bar h^r\right)\wedge\bar h^p\wedge X\right)\otimes\pi_*\left(\left(\Sigma^r/\bar h^r\right)\wedge\bar h^q\wedge Y\right)\to\\ &\to\pi_*\left(\left(\Sigma^r/\bar h^r\right)\wedge\bar h^p\wedge X\wedge\left(\Sigma^r/\bar h^r\right)\wedge\bar h^q\wedge Y\right)\to\\ &\to\pi_*\left(\left(\Sigma^r/\bar h^r\right)\wedge\left(\Sigma^r/\bar h^r\right)\wedge\bar h^p\wedge\bar h^q\wedge X\wedge Y\right)\xrightarrow{(\eta\wedge 1)_*}\\ &\to\pi_*\left(\left(\Sigma^{2r}/(\Sigma^r\wedge\bar h^r\cup\bar h^r\wedge\Sigma^r)\right)\wedge\bar h^{p+q}\wedge X\wedge Y\right)\xrightarrow{(\omega\wedge 1)_*}\\ &\to\pi_*\left(\left(\Sigma^r/\bar h^r\right)\wedge\bar h^{p+q}\wedge X\wedge Y\right)=\pi(p+q,\ p+q+r;\ Z),\end{aligned}$$

в которой второй гомоморфизм индуцирован перестановкой сомножителей.

Мультипликативные свойства спектральных последовательностей устанавливаются с помощью следующих рассмотрений А. Дуади [5].

Пусть даны три спектральные системы: G', G'' и G. *Произведением φ спектральных систем G' и G'' со значениями в G называется набор* гомоморфизмов φ_r, определенный для всех целых p, q и $r\geqslant 0$, а также для значений $p,q=\pm\infty$ и $r=+\infty$:

$$\varphi_r\colon\ G'(p,\ p+r)\otimes G''(q,\ q+r)\to G(p+q,\ p+q+r)$$

и удовлетворяющий следующим двум аксиомам.

1. Если $p\geqslant p'$, $q\geqslant q'$, $p+r\geqslant p'+r'$, $q+r\geqslant q'+r'$, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} G'(p,\ p+r)\otimes G''(q,\ q+r) \arrow[r, "\varphi_r"] \arrow[d, "\eta'\oplus\eta''"] & G(p+q,\ p+q+r) \arrow[d, "\eta"] \\ G'(p',\ p'+r')\otimes G''(q',\ q'+r') \arrow[r, "\varphi_{r'}"] & G(p'+q',\ p'+q'+r') \end{tikzcd}$$

коммутативна.

2. При всех целых p, q и $r\geqslant 1$ для морфизмов диаграммы

$$\begin{tikzcd} G'(p,\ p+r)\otimes G''(q,\ q+r) \arrow[rr, "\varphi_r"] \arrow[dr, "\eta'\otimes\delta''"] \arrow[dd, "\delta'\otimes\eta''"'] & & G(p+q,\ p+q+r) \arrow[dd, "\delta"] \\ & G'(p,\ p+1)\otimes G''(q+r,\ q+r+1) \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\ G'(p+r,\ p+r+1)\otimes G''(q,\ q+1) \arrow[rr, "\varphi_1"] & & G(p+q+r,\ p+q+r+1) \end{tikzcd}$$

имеем $\delta\circ\varphi_r=\varphi_1\circ(\eta'\otimes\delta'')+\varphi_1\circ(\delta'\otimes\eta'')$.

Теорема (А. Дуади [5]). *Произведение спектральных систем φ порождает произведение спектральных последовательностей $\varphi^r\colon {'E^r}\otimes {''E^r}\to E^r$ такое, что*

а) $\varphi^1=\varphi_1\colon G'(p,\ p+1)\otimes G''(q,\ q+1)\to G(p+q,\ p+q+1)$;

б) $d^r(\varphi(a\otimes b))=\varphi(d^r(a)\otimes b)+(-1)^{\deg a}\varphi(a\otimes d^r(b))$, *где* $\deg a$ *есть полная степень* a;

в) φ^{r+1} *индуцировано* φ^r, φ^∞ *индуцировано* φ^r;

г) φ^∞ *индуцировано также*

$$\varphi_\infty\colon G'(-\infty,\ +\infty)\otimes G''(-\infty,\ +\infty)\to G(-\infty,\ +\infty).$$

Замечание. Для спектральных систем $G(p,\ q)$ с $p\geqslant q$ все вышесказанное справедливо с заменой r на $-r$ и $+1$ на -1.

Проверка первого условия для спаривания φ спектральных систем $H(p,\ q)$ трудностей не представляет и основывается на том, что все участвующие в определении спаривания морфизмы естественны по отношению к вложениям остовов друг в друга. Для спектральных систем $\pi(p,\ q)$ проверка основывается на коммутативности диаграмм типа

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{p+r-p'}\wedge \bar{h}^{p'} & \supset & \Sigma^{p+r-r'-p'}\wedge \bar{h}^{p'+r'} \\ \cup & & \cup \\ \Sigma^{r}\wedge \bar{h}^{p} & \supset & \bar{h}^{p+r}. \end{array}$$

Прежде чем перейти к проверке второго условия на спаривание, докажем нужную нам лемму.

Лемма. *Пусть даны спектр A и два его подспектра $A_1,\ A_2\subset A$, $A_1\cap A_2=P$, где P — одноточечный спектр. Имеем отображения*

$$\psi\colon A\cup C_1A_1\cup C_2A_2\subset A\cup C_1A_1\cup C_2A\cup C_3A\simeq SA_1\vee SA_2,$$

$$\psi_1\colon A\cup C_1A_1\cup C_2A_2\subset A\cup C_1A_1\cup C_2A_2\cup C_4(A\cup C_2A_2)\simeq SA_1,$$

$$\psi_2\colon A\cup C_1A_1\cup C_2A_2\subset A\cup C_1A_1\cup C_2A_2\cup C_5(A\cup C_1A_1)\simeq SA_2,$$

где C_k — конусы над спектрами. Тогда $\psi=i_1\psi_1+i_2\psi_2$, где i_n — вложение $SA_n\subset SA_1\vee SA_2$.

Доказательство. Категория спектров Бордмана аддитивна, следовательно, конечные прямые суммы являются прямыми произведениями. Утверждение леммы следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} A\cup C_1A_1\cup C_2A_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\psi"'] & SA_1\vee SA_2 \arrow[d, "pr_n"] \\ & SA_n, \quad n=1,\ 2. \end{tikzcd}$$

Перейдем к проверке второго условия. Рассмотрим соответствующую диаграмму для системы $H(p,\ q)$

$$\begin{tikzcd} h_*\left(X^p/X^{p-r}\right)\otimes h_*\left(Y^b/Y^{q-r}\right) \arrow[rr, "\varphi_r"] \arrow[dr, "\eta\otimes\delta_*"] \arrow[dd, "\delta_*\otimes\eta"'] & & h_*\left(Z^{p+q}/Z^{p+q-r}\right) \arrow[dd, "\delta_*"] \\ & h_*\left(X^p/X^{p-1}\right)\otimes h_*\left(Y^{q-r}/Y^{q-r-1}\right) \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\ h_*\left(X^{p-r}/X^{p-r-1}\right)\otimes h_*\left(Y^q/Y^{q-1}\right) \arrow[rr, "\varphi_1"] & & h_*\left(Z^{p+q-r}/Z^{p+q-r-1}\right). \end{tikzcd}$$

Должно быть: $\delta_*\varphi_r=\varphi_1(\eta\otimes\delta_*)+\varphi_1(\delta_*\otimes\eta)$. Докажем соотношение на уровне спектров

$$
\begin{tikzcd}
\left({}^{X^p}/_{X^{p-1}}\right)\wedge\left({}^{Y^q}/_{Y^{q-r}}\right) \arrow[rr, "\nu"] \arrow[d, "\delta\wedge j"'] \arrow[dr, "1\wedge\delta"] & & \left({}^{X^p\vee Y^q}/_{X^p\wedge Y^{q-r}\cup X^{p-s}\wedge Y^q}\right) \arrow[dd, "\gamma"] \\
& \left({}^{X^p}/_{X^{p-1}}\right)\wedge\left({}^{Y^{q-r}}/_{Y^{q-r-1}}\right) \arrow[d, "\nu"] & \\
\left({}^{X^{p-r}}/_{X^{p-r-1}}\right)\wedge\left({}^{Y^q}/_{Y^{q-1}}\right) \arrow[d, "\nu"] & {}^{(X^p\wedge Y^{q-r})}/_{(X^p\wedge Y^{q-r-1}\cup X^{p-1}\wedge Y^{q-r})} \arrow[dr, "\gamma"] & {}^{Z^{p+q}}/_{Z^{p+q-r}} \arrow[d, "\delta"] \\
{}^{(X^{p-r}\wedge Y^q)}/_{(X^{p-r}\wedge Y^{q-1}\cup X^{p-r-1}\wedge Y^q)} \arrow[rr, "\gamma"] & & {}^{Z^{p+q-r}}/_{Z^{p+q-r-1}}.
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

Обозначим $\left({}^{X^p}/_{X^{p-r-1}}\right)\wedge\left({}^{Y^q}/_{Y^{q-r-1}}\right)$ через Q, $\left({}^{X^{p-1}}/_{X^{p-r-1}}\right)\wedge\left({}^{Y^{q-r}}/_{Y^{q-r-1}}\right)$ — через Q_1, $\left({}^{X^{p-r}}/_{X^{p-r-1}}\right)\wedge\left({}^{Y^{q-1}}/_{Y^{q-r-1}}\right)$ — через Q_2, $\left({}^{X^p}/_{X^{p-1}}\right)\wedge\left({}^{Y^{q-r}}/_{Y^{q-r-1}}\right)$ — через B_1, $\left({}^{X^{p-r}}/_{X^{p-r-1}}\right)\wedge\left({}^{Y^p}/_{Y^{p-1}}\right)$ — через B_2. Имеем $Q_1,\ Q_2\subset Q$. Пусть $B=Q/(Q_1\cup Q_2)$, тогда $B_1,\ B_2\subset B$, $B_1\cap B_2=P$ и $B\cup C_1B_1\cup C_2B\simeq\left({}^{X^p}/_{X^{p-r}}\right)\wedge\left({}^{Y^q}/_{Y^{q-r}}\right)$. Введем также обозначения

$$V^{p,q,r}=\bigcup_{\substack{i+j=p+q-r,\\ i\geqslant p,\, j\geqslant q}} X^i\wedge Y^j;\quad L={}^{V^{p,q,r}}/_{(X^{p-1}\wedge Y^{q-r}\cup X^{p-r}\wedge Y^{q-1})};$$

$$V^{p,q,r}\subset X^p\wedge Y^q;\quad L\subset B;\quad B_1,\ B_2\subset L;$$

$$M={}^{V^{p-1,q-1,r-1}}/_{(X^{p-1}\wedge Y^{q-r}\cup X^{p-r}\wedge Y^{q-1})};\quad M\subset L.$$

Имеем коммутативные диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
{}^{(X^p\wedge Y^q)}/_{(X^p\wedge Y^{q-r}\cup X^{p-r}\wedge Y^q)} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\gamma"'] & {}^{(X^p\wedge Y^q)}/_{V^{p,q,r}} \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
& {}^{Z^{p+q}}/_{Z^{p+q-r}},
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{}^{(X^p\wedge Y^q)}/_{V^{p,q,r}} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\delta"] & {}^{Z^{p+q}}/_{Z^{p+q-r}} \arrow[d, "\delta"] \\
{}^{V^{p,q,r}}/_{V^{p,q,r+1}} \arrow[r, phantom, "\subset"] & {}^{Z^{p+q-r}}/_{Z^{p+q-r-1}}.
\end{tikzcd}
$$

Поэтому вместо композиции $\delta\gamma\nu$ из диаграммы (2) можно рассматривать $\delta j\nu$, вместо $\gamma\nu(j\wedge\delta)-j\nu(j\wedge\delta)$ и $j\nu(\delta\wedge j)$ — вместо $\gamma\nu(\delta\wedge j)$. В принятых обозначениях композиция $\delta j\nu$ эквивалентна следующей:

$$
\begin{array}{ccc}
B\cup C_1B_1\cup C_2B_2 & \subset & B\cup C_3L \\
 & & \cap \\
 & & B\cup C_3L\cup C_4(B\cup C_5M).
\end{array}
$$

Дополним эту диаграмму до коммутативной:

$$
\begin{array}{ccc}
B\cup C_1B_1\cup C_2B_2 & \subset & B\cup C_3L \\
\cap & & \cap \\
B\cup C_1B_1\cup C_2B\cup C_4B & \subset & B\cup C_3L\cup C_4(B\cup C_5M) \\
\wr| & & \| \\
SB_1\vee SB_2 & \subset & B\cup C_3L\cup C_4(B\cup C_5M).
\end{array}
$$

Композиции $j\nu(1 \wedge \delta)$ и $j\nu(\delta \wedge 1)$ эквивалентны следующим:

$$\begin{array}{l}
B \cup C_1B_1 \cup C_2B_2 \\
\qquad\qquad\quad \cap \\
B \cup C_1B_1 \cup C_2B_2 \cup C_4(B \cup C_2B_2) \\
\qquad\qquad\quad \wr\!\wr \\
\qquad\qquad\quad SB_1 \xrightarrow{i_1} SB_1 \vee SB_2 \subset B \cup C_3L \cup C_4(B \cup C_5M),
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
B \cup C_1B_1 \cup C_2B_2 \\
\qquad\qquad\quad \cap \\
B \cup C_1B_1 \cup C_2B_2 \cup C_4(B \cup C_2B_2) \\
\qquad\qquad\quad \wr\!\wr \\
\qquad\qquad\quad SB_2 \xrightarrow{i_2} SB_1 \vee SB_2 \subset B \cup C_3L \cup C_4(B \cup C_5M).
\end{array}$$

Для окончания проверки второго условия для систем $H(p, q)$ остается воспользоваться леммой.

Перейдем к системам $\pi(p, q)$. Ясно, что достаточно рассматривать случай $p = q = 0$, $X = Y = S^0$. Докажем соотношение на уровне спектров.

$$\begin{tikzcd}
\left(\Sigma^{r+1}/(\Sigma\wedge\bar{h}^r)\right) \wedge \left(\Sigma^{r+1}/(\Sigma\wedge\bar{h}^r)\right) \arrow[rr, "\nu"] \arrow[dr, "j\wedge\delta"] \arrow[dd, "\delta\wedge j"'] & & \Sigma^{2(r+1)}/(\Sigma^{r+2}\wedge\bar{h}^r\cup\Sigma\wedge\bar{h}^r\wedge\Sigma^{r+1}) \arrow[dd, "\gamma"] \arrow[ddd, "\delta"] \\
& \left(\Sigma^{r+1}/(\Sigma^r\wedge\bar{h})\right) \wedge \left(\Sigma\wedge\bar{h}^r/\bar{h}^{r+1}\right) & \\
\left((\Sigma\wedge\bar{h}^r)/\bar{h}^{r+1}\right) \wedge \left(\Sigma^{r+1}/(\Sigma^r\wedge\bar{h})\right) \arrow[dr] & & \Sigma^{r+1}/(\Sigma\wedge\bar{h}^r) \arrow[dd, "\delta"] \\
& (\Sigma^{r+2}\wedge\bar{h}^r\cup\Sigma\wedge\bar{h}^r\wedge\Sigma^{r+1})/\Gamma \arrow[dr] & \\
& & (\Sigma\wedge\bar{h}^r)/\bar{h}^{r+1},
\end{tikzcd}$$

где $\Gamma = \Sigma^{r+1} \wedge \bar{h}^{r+1} \cup \Sigma^r \wedge \bar{h} \wedge \Sigma \wedge \bar{h}^r \cup \Sigma \wedge \bar{h}^r \wedge \Sigma^r \wedge \bar{h} \cup \bar{h}^{r+1} \wedge \Sigma^{r+1}$. Так же как при рассмотрении аналогичной диаграммы для системы $H(p, q)$, введем обозначения

$$Q = \left(\Sigma^{r+1}/\bar{h}^{r+1}\right) \wedge \left(\Sigma^{r+1}/\bar{h}^{r+1}\right),$$

$$Q_1 = \left((\Sigma^r\wedge\bar{h})/(\Sigma\wedge\bar{h}^r)\right) \wedge \left((\Sigma\wedge\bar{h}^r)/\bar{h}^{r+1}\right),$$

$$Q_2 = \left((\Sigma\wedge\bar{h}^r)/\bar{h}^{r+1}\right) \wedge \left((\Sigma^r\wedge\bar{h})/(\Sigma\wedge\bar{h}^r)\right).$$

Имеем $Q_1, Q_2 \subset Q$, пусть

$$B_1 = \left(\Sigma^{r+1}/(\Sigma^r\wedge\bar{h})\right) \wedge \left((\Sigma\wedge\bar{h}^r)/\bar{h}^{r+1}\right),$$

$$B_2 = \left((\Sigma\wedge\bar{h}^r)/\bar{h}^{r+1}\right) \wedge \left((\Sigma^r\wedge\bar{h})/\bar{h}^{r+1}\right),$$

$$B = Q/(Q_1 \cup Q_2),\ B_1, B_2 \subset B,\ B_1 \cap B_2 = P,$$

$$B \cup C_1B_1 \cup C_2B_2 \simeq \left(\Sigma^{r+1}/(\Sigma\wedge\bar{h}^r)\right) \wedge \left(\Sigma^{r+1}/(\Sigma\wedge\bar{h}^r)\right).$$

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{2(r+1)}/(\Sigma^{r+2}\wedge\bar{h}^r\cup\Sigma\wedge\bar{h}^r\wedge\Sigma^{r+1}) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\delta"'] & \Sigma^{r+1}/(\Sigma\wedge\bar{h}^r) \arrow[d, "\delta"] \\
(\Sigma^{r+2}\wedge\bar{h}^r\cup\Sigma\wedge\bar{h}^r\wedge\Sigma^{r+1})/\Gamma \arrow[r, "\nu"] & (\Sigma\wedge\bar{h}^r)/\bar{h}^{r+1},
\end{tikzcd}$$

и интересующие нас отображения имеют вид

$$\begin{array}{c}B \cup C_1B_1 \cup C_2B_2 \subset B \cup C_1B_1 \cup C_2B_2 \cup C_3B \\ \wr\| \\ SB_1 \vee SB_2, \\ B \cup C_1B_1 \cup C_2B_2 \subset B \cup C_1B_1 \cup C_4(B \cup C_2B_2) \\ \wr\| \\ SB_1 \xrightarrow{i_1} SB_1 \vee SB_2; \\ B \cup C_1B_1 \cup C_2B_2 \subset B \cup C_1B_1 \cup C_4(B \cup C_1B_1) \\ \wr\| \\ SB_2 \xrightarrow{i_2} SB_1 \vee SB_2.\end{array}$$

Проверка условия 2 будет закончена, если воспользоваться леммой.

На уровне члена E_1 для спектральной последовательности Атьи — Хирцебруха наше спаривание дает стандартное спаривание цепей, следовательно, на уровне члена E_2 мы получаем каноническое спаривание в гомологиях.

$$H_*(X, h_*) \otimes H_*(Y, h_*) \to H_*(X \wedge Y, h_*).$$

Для спектральной последовательности Адамса на уровне члена E_1 мы имеем спаривание

$$\pi_*(h \wedge \overline{h}^p \wedge X) \otimes \pi_*(h \wedge \overline{h}^q \wedge Y) \to$$
$$\to \pi_*(h \wedge h \wedge \overline{h}^{p+q} \wedge X \wedge Y) \xrightarrow{\mu_*} \pi_*(h \wedge \overline{h}^{p+q} \wedge X \wedge Y),$$

где μ есть умножение для спектра h. Это спаривание после изоморфизмов типа

$$\pi_*(h \wedge \overline{h}^p \wedge X) \cong \mathrm{Hom}_{h_*(h)}(h_*, h_*(h) \otimes_{h_*} h_*(\overline{h}^p \wedge X))$$

переходит в спаривание

$$\mathrm{Hom}_{h_*(h)}(h_*, h_*(h) \otimes_{h_*} h_*(X^p)) \otimes \mathrm{Hom}_{h_*(h)}(h_*, h_*(h) \otimes_{h_*} h_*(Y^q)) \to$$
$$\to \mathrm{Hom}_{h_*(h) \otimes_{h_*} h_*(h)}(h_*, h_*(h) \otimes_{h_*} h_*(h) \otimes_{h_*} h_*(X^p) \otimes_{h_*} h_*(Y^q)) \to$$
$$\to \mathrm{Hom}_{h_*(h)}(h_*, h_*(h) \otimes_{h_*} h_*(X^p \wedge Y^q)). \qquad (3)$$

Вспомним, что изоморфизм члена E_2 спектральной последовательности Адамса доказывается в предположении, что $h_*(h)$ есть плоский правый h_*-модуль. Из коммутативности спектра h получаем, что перестановка сомножителей $T\colon h \wedge h \to h \wedge h$ индуцирует аддитивный изоморфизм $h_*(h)$, переводящий правое действие h_* в левое. Отсюда легко следует, что $h_*(h)$ есть плоский левый h_*-модуль. Тогда $h_*(\overline{h})$ также есть плоский h_*-модуль, и мы имеем

$$\pi_*(h \wedge \overline{h}^p \wedge X) \cong h_*(\overline{h}) \otimes_{h_*} \ldots \otimes_{h_*} h_*(\overline{h}) \otimes_{h_*} h_*(X),$$

где тензорное произведение рассматривается над h_*, а действие h_* есть стандартное левое действие коммутативного кольца h_*. Член E_2 вычисляется как гомологии комплекса

$$\mathrm{Hom}_{h_*(h)}(h_*, B(h_*(h), h_*(X))),$$

где $B(h_*(h), h_*(X))$ есть резольвента комодуля $h_*(X)$. Таким образом, имеется изоморфизм

$$E_2 \cong \mathrm{Ext}_{(h_*(h), h_*)}(h_*, h_*(X))$$

члена E_2 с относительным функтором Ext. Изоморфизм относительно функтора с абсолютным вытекает из $\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*, -)$-ацикличности модулей $h_*(W_p)$. На алгебраическом языке спаривание (3) порождено спариванием ко-B-резольвент $B(h_*(h), h_*(X))$ и $B(h_*(h), h_*(Y))$ в ко-B-резольвенту $B(h_*(h),\ h_*(X)\otimes_{h_*}h_*(Y))$ и затем сравнением последней в ко-B-резольвенту $B(h_*(h),\ h_*(X\wedge Y))$. Изоморфизм относительного и абсолютного функторов Ext можно задать с помощью некоторого сравнения

$$\sigma\colon B(h_*(h),\ h_*(X))\to J(X),$$

где $J(X)$ — инъективная резольвента $h_*(X)$ [9, с. 51]. В случае, когда $J(X)\otimes J(Y)$ — резольвента, определено внешнее умножение для абсолютного функтора

$$\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*,\ M')\otimes \mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*,\ M'')\to \mathrm{Ext}_{h_*(h)\otimes_{h_*}h_*(h)}(h_*,\ M'\otimes_{h_*}M''),$$

которое благодаря структуре алгебры Хопфа на $h_*(h)$ порождает умножение

$$\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*,\ M')\otimes \mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*,\ M'')\to \mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*,\ M'\otimes_{h^*}M'').$$

Если предположить дополнительно, что $B(h_*(h),\ h_*(X))\otimes_{h_*}B(h_*(h),\ h_*(Y))$ есть точный комплекс (все условия будут выполнены, если h_* — поле), то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}_{(h_*(h),h_*)}(h_*,h_*(X))\otimes\mathrm{Ext}_{(h_*(h),h_*)}(h_*,h_*(Y)) & \to & \mathrm{Ext}_{(h_*(h),h_*)}(h_*,h_*(X\wedge Y)) \\
\wr\| & & \wr\| \\
\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*,h_*(X))\otimes\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*,h_*(Y)) & \to & \mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*,h_*(X\wedge Y)),
\end{array}$$

где в верхней строке умножение построено для относительного функтора, а в нижней — для абсолютного.

В итоге доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует спаривание спектральных последовательностей Атьи — Хирцебруха для X и для Y в спектральную последовательность для $X\wedge Y$ такое, что на уровне члена E_2 это есть спаривание в гомологиях*

$$H_*(X,\ h_*)\otimes H_*(Y,\ h_*)\to H_*(X\wedge Y,\ h_*),$$

а на уровне члена E_∞ оно порождено спариванием

$$h_*(X)\otimes h_*(Y)\to h_*(X\wedge Y) \tag{4}$$

(если спектральные последовательности сходятся, то присоединено к спариванию (4)).

Следствие 1. *Для мультипликативного спектра X спектральная последовательность Атьи — Хирцебруха обладает мультипликативными свойствами.*

Теорема 2. *Существует спаривание спектральных последовательностей Адамса для спектров X и Y в спектральную последовательность Адамса для $X\vee Y$. Если член E_2 изоморфен*

$$\mathrm{Ext}_{(h_*(h),h_*)}(h_*,\ -)\cong \mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*,\ -),$$

где первый функтор относительный, а второй — абсолютный, то на уровне члена E_2 это спаривание порождено алгебраическим спариванием для относительного функтора $\mathrm{Ext}_{(h_*(h),h_*)}(h_*,\ -)$:

$$\begin{gathered}
\mathrm{Ext}_{(h_*(h),h_*)}(h_*,\ h_*(X))\otimes \mathrm{Ext}_{(h_*(h),h_*)}(h_*,\ h_*(Y))\to\\
\to \mathrm{Ext}_{(h_*(h),h_*)}(h_*,\ h_*(X)\otimes_{h_*}h_*(Y))\to\\
\to \mathrm{Ext}_{(h_*(h),h_*)}(h_*,\ h_*(X\wedge Y)).
\end{gathered}$$

Если h_* — поле, то это спаривание совпадает со спариванием, определяемым через абсолютный функтор $\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*,\ -)$, *которое в этом случае определено. На уровне члена E_∞ это спаривание порождено канони-*

ческим морфизмом

$$\pi_*(X)\otimes\pi_*(Y)\to\pi_*(X\wedge Y) \tag{5}$$

(если последовательности сходятся, то присоединено к спариванию (5)).

Следствие 2. *Для мультипликативного спектра X спектральная последовательность Адамса обладает мультипликативными свойствами.*

Для спектральной последовательности Адамса — Новикова $h_*(\ )$ есть теория унитарных бордизмов $MU_*(\ )$ или теория, определяемая спектром Брауна — Петерсона $BP_*(\ )$. В последнем случае ее член E_2 изоморфен

$$\operatorname{Ext}_{A_*}(BP_*, BP_*(X))\cong\operatorname{Ext}_A(BP^*(X), BP^*),$$

где $A_*=BP_*(BP)$, $A=BP^*(BP)$. Спектральная последовательность Адамса — Новикова обладает хорошими свойствами сходимости. Из теоремы 2 и следствия 2 следует, что эта последовательность обладает также и мультипликативными свойствами.

В заключение автор выражает благодарность В. Г. Горбунову за полезные обсуждения материала настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вершинин В. В.** Симплектические кобордизмы с особенностями.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1983, т. 47, № 2, с. 230—247.
2. **Ботвинник Б. И.** Алгебраические и геометрические свойства спектральной последовательности Адамса — Новикова: Дис... канд. физ.-мат. наук/Ин-т математики СО АН СССР. Новосибирск, 1984.
3. **Вершинин В. В.** Умножение в экстраординарной спектральной последовательности Адамса.— Деп. ВИНИТИ № 2351—77 Деп.— 14 с.
4. **Vogt R.** Boardman's stable homotopy category.— Aarhus, 1970.
5. **Duady A.** La suite spectrale d Adams.— Seminaire Henry Cartan, 1958—1959, exposes 18 et 19.
6. **Картан А., Эйленберг С.** Гомологическая алгебра.— М.: ИЛ, 1960.
7. **Adams J. F.** Stable homotopy and generalised homology.— Chicago, 1974.
8. **Baas N.-A.** On the stable Adams spectral sequences.— Aarhus, 1969.
9. **Гротендик А.** О некоторых вопросах гомологической алгебры.— М.: ИЛ, 1961.

С. К. ВОДОПЬЯНОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБЛАСТЕЙ И ОТОБРАЖЕНИЙ. ОЦЕНКИ СНИЗУ НОРМЫ ОПЕРАТОРА ПРОДОЛЖЕНИЯ

Рассмотрим шкалу анизотропных пространств Соболева $W_p^l(G)$ при $l\in N^n$, $p\in[1,\infty]$ (изотропных пространств $W_p^{(l)}(G)$ при $l\in N$, $p\in[1,\infty]$), состоящих из локально суммируемых на открытом множестве $G\subset\mathbf{R}^n$ функций $f\colon G\to\mathbf{R}$, имеющих на G обобщенные в смысле Соболева производные $D_i^{l_i}f$ $(D^\alpha f, |\alpha|=l)$ и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^l(G)}=\|f\|_{L_p(G)}+\sum_{i=1}^n\|D_i^{l_i}f\|_{L_p(G)}$$

$$\left(\|f\|_{W_p^{(l)}(G)}=\|f\|_{L_p(G)}+\|\nabla_l f\|_{L_p(G)}\right),$$

где ∇_l — градиент порядка l.

Оператор (не обязательно линейный) $\operatorname{ext}\colon W_p^l(G)\to W_p^l(\mathbf{R}^n)$ называется *оператором продолжения, если* $\operatorname{ext}f|_G=f$, где $f\in W_p^l(G)$.

В статье выводятся оценки снизу нормы оператора $\operatorname{ext}\colon W_p^l(G)\to$ $\to W_p^l(\mathbf{R}^n)$, представляющие интерес в связи с некоторыми задачами интерполяции и теории функциональных пространств. Для частных случаев, когда G — шар и пространство Соболева изотропно, С. Г. Михлин [1, 2] нашел точные нижние оценки нормы оператора ext. В работе [3]