23. Gehring F. W. Rings and quasiconformal mapping in space.— Trans. Amer. Math. Soc., 1965, N 362, p. 1—12.
24. Väisälä J. Two new characterizations for quasiconformality.— Ann. Acad. Sci. Fenn., 1965, N 362, p. 1—12.
25. Решетняк Ю. Г. Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщенными производными.— Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 4, с. 886—919.
26. Maz'a V. G. Einbettungssätze für Sobolewsche Räume.— Leipzig: Teubner, I, 1979; II, 1980. (Texte für Math.).
27. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева.— Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1985.
28. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.
29. Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.— М.: Наука, 1983.
30. Солонников В. А. О некоторых неравенствах для функций из классов $W_p^l(\mathbf{R}^n)$.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1972, т. 27, с. 194—210.
31. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.— М.: Мир, 1980.
32. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение.— М.: Мир, 1980.
33. Бесов О. В., Лизоркин П. И. Сингулярные интегральные операторы и последовательности сверток в пространствах L_p.— Мат. сб., т. 73, № 1, с. 65—88.
34. Dappa H., Trebels W. On L^1-criteria for quasiradial Fourier multipliers with application to some anisotropic function spaces.— Anal. Math., 1983, t. 9, Fasc. 4, p. 275—290.
35. Sundberg C. Truncation of *BMO* functions.— Indiana Univ. Math. J., 1984, v. 33, N 5, p. 749—772.
36. Calderon A. P. Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions.— Studia math., 1972, v. 44, p. 563—582.
37. Devore R. A., Sharpley R. C. Maximal functions measuring smoothness.— Memoirs of Amer. Math. Soc., 1984, N 293.
38. Vodopianov S. K. As condiçoes necessárias de prolongamento para espaços funcionais.— Ciência e tecnologia, 1982, N 6, p. 22—25.
39. Christ M. The axtension problem for certain function spaces involving fractional orders of differentiability.— Ark. Math., 1984, v. 22, N 1, p. 63—81.
40. Буренков В. И., Файн Б. Л. О продолжении функций из анизотропных пространств с сохранением класса.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1979, т. 150, с. 52—66.
41. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Латфуллин Т. Г. Критерий продолжения функций класса L_2^1 из неограниченных плоских областей.— Сиб. мат. журн., 1979, т. 20, № 2, с. 416—419.
42. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Структурные изоморфизмы пространств W_n и квазиконформные отображения.— Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 1, с. 24—26.
43. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения.— Сиб. мат. журн., 1975, т. 16, № 2, с. 224—246.
44. Reimann H. M. Functions of Bounded mean Oscillation and Quasiconformal Mapping.— Comm. Math. Helv., 1974, v. 49, Fasc. 2, p. 260—276.
45. Astala K. A remark on quasiconformal mapping and *BMO*-functions.— Mich. Math. J., 1983, v. 30, N 2, p. 209—212.
46. Мостов Г. Д. Квазиконформные отображения в n-мерном пространстве и жесткость гиперболических пространственных форм.— В кн.: Математика, 1972, т. 16, № 5, с. 105—157.
47. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Новый функциональный вариант для квазиконформных отображений.— В кн.: Некоторые вопросы современной теории функций. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976, с. 18—20.
48. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces of homogeneous groups.— Math. Notes, 1982, v. 28. 284 p.
49. Korányi A., Reimann H. M. Quasiconformal mappings of the Heisenberg group.— Inventiones Math., 1985, v. 80, Fasc. 2, p. 309—338.
50. Романов А. С. О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса.— В кн.: Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985, с. 117—133.

В. М. ГОЛЬДШТЕЙН, В. И. КУЗЬМИНОВ, И. А. ШВЕДОВ

L_p-КОГОМОЛОГИИ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Для риманова многообразия X и числа $p \geqslant 1$ банахово пространство $W_p^k(X)$ образовано дифференциальными формами степени k на X, модуль и модуль дифференциала которых интегрируемы в степени p. Пространства $W_p^k(X)$ вместе с оператором внешнего дифференцирования d

образуют комплекс. Группы гомологий этого комплекса называются L_p-когомологиями риманова многообразия X. Вместе с $W_{(p)}(X)$ рассматриваются его подкомплексы, подчиненные тем или иным условиям на «идеальной границе многообразия X». Их группы гомологий естественно возникают при изучении краевых задач для оператора d и связанных с ним операторов δ, $d+\delta$. В работе установлено соотношение типа двойственности Пуанкаре для гомологий подкомплексов, соответствующих сопряженным граничным условиям. Отметим, что L_p-когомологии компактного многообразия X не зависят от p и совпадают с его обычными когомологиями $H^*(X, R)$. Но уже для простейших примеров некомпактных многообразий появляется зависимость L_p-когомологий от параметра p. Мы исследуем эту зависимость в модельном случае конуса над римановым многообразием. Отметим, что L_2-когомологии многообразий с коническими особенностями подробно рассмотрел Чигер в работе [1]. Наши вычисления L_p-когомологий конуса следуют в общих чертах вычислениям Чигера, но существенно отличаются в некоторых деталях, поскольку мы не можем воспользоваться имеющимся в L_2-случае ортогональным разложением Кодаиры пространства дифференциальных форм.

Пространство $W^0_{(p)}(X)$ совпадает с пространством Соболева $W_p^{(1)}(X)$. В теории пространств Соболева известна следующая задача об устранимых особенностях: каким должно быть открытое множество U в X для того, чтобы пространства $W_p^{(h)}(U)$ и $W_p^{(h)}(X)$ совпали? (см., например, [2]). Мы приведем некоторые результаты по аналогичной задаче для дифференциальных форм.

В последнем параграфе работы приведены примеры подкомплексов комплекса $W_{(2)}(X)$, позволяющие интерпретировать некоторые результаты о краевых задачах для оператора d, полученные ранее Кодаирой [3], Даффом и Спенсером [4], Дезиным [5], в рамках наших конструкций.

§ 1. ГОМОЛОГИИ БАНАХОВЫХ КОМПЛЕКСОВ

Последовательность $C=\{C^k, d^k\}$ банаховых пространств C^k и ограниченных линейных операторов d^k: $C^k\to C^{k+1}$ называется *банаховым комплексом*, если $d^{k+1}\circ d^k=0$ для каждого k. Индекс k в обозначении дифференциала d^k будем иногда опускать.

Векторные пространства гомологий

$$H^k(C)=\operatorname{Ker} d^k\Big/\operatorname{Im} d^{k-1}$$

снабдим полунормой

$$\|h\|=\inf\{\|z\|:\ z\in h\},\quad h\in H^k(C).$$

Через $\overline{H}^k(C)$ обозначим банахово пространство

$$\operatorname{Ker} d^k\Big/[\operatorname{Im} d^{k-1}]=H^k(C)\Big/\{h:\|h\|=0\}.$$

Лемма 1. *Если* $\dim H^k(C)<\infty$, *то подпространство* $\operatorname{Im} d^{k-1}$ *замкнуто в* C^k, *и поэтому* $H^k(C)=\overline{H}^k(C)$.

Эта лемма является следствием хорошо известного факта: если d: $B_1\to B_2$ — ограниченный линейный оператор, B_1 и B_2 — банаховы пространства, коразмерность подпространства $\operatorname{Im} d$ в B_2 конечна, то подпространство $\operatorname{Im} d$ замкнуто в B_2.

Вместе с комплексом $C=\{C^k, d^k\}$ будем рассматривать сопряженный комплекс $C'=\{C_k, d_k\}$, образованный банаховыми пространствами C_k, сопряженными к C^k, и операторами d_k: $C_{k+1}\to C_k$, сопряженными в d^k.

Лемма 2. *Если в банаховом комплексе* $C=\{C^k, d\}$ *все пространства* C^k *рефлексивны, то каноническое спаривание между* C^k *и* C_k *индуцирует спаривание* $\overline{H}^k(C)$ *и* $\overline{H}_k(C')$, *относительно которого эти банаховы пространства сопряжены одно к другому.* (Эта лемма доказана в [6].)

Если для каждого k $C_1^k \subset C^k$ (C_1^k — замкнутое подпространство банахова пространства C^k и $d(C_1^k) \subset C_1^{k+1}$), то комплекс $C_1 = \{C_1^k, d\}$ будем называть *подкомплексом комплекса* C.

Лемма 3. *Пусть $C = \{C^k, d\}$ — банахов комплекс, $\|d\| \leqslant 1$, C_1 — подкомплекс комплекса C и $C_2 = C/C_1$ — фактор-комплекс. Если существуют такие операторы s: $C^{k+1} \to C^k$, что $\|s\| \leqslant 1$ и $ds + sd = 1$, то граничный гомоморфизм ∂: $H^k(C_2) \to H^{k+1}(C_1)$ является сохраняющим полунорму изоморфизмом.*

Доказательство. Если $z \in C^k$ и $dz = 0$, то $z = dsz$, поэтому $H^k(C) = 0$ и ∂ — изоморфизм. Пусть i: $C_1 \to C$ — каноническое вложение, p: $C \to C_2$ — каноническая проекция и $j = psi$. Тогда $jd = -dj$ и j индуцирует отображение пространств гомологий j_*: $H^{k+1}(C_1) \to H^k(C)$. Это отображение является изоморфизмом, обратным к ∂. Поскольку $\|j\|_* \leqslant 1$ и $\|\partial\| \leqslant 1$, то оба изоморфизма j_* и ∂ сохраняют полунормы элементов. Лемма доказана.

Пусть $C = \{C^k, d\}$ — банахов комплекс, s: $C^{k+1} \to C^k$ — линейные операторы, $\|s\| \leqslant 1$, $sd + ds = 1$, C_1 — подкомплекс комплекса C, $C_1^{\perp}$ — подкомплекс комплекса C', образованный аннуляторами подпространств $C_1^k \subset C^k$ относительно канонического спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между C^k и $C_k = (C_k)'$. Положим $\langle x | y \rangle = \langle sx, y \rangle$ для $x \in C^k$.

Теорема 1. *Если в банаховом комплексе $C = \{C^k, d\}$ все пространства C^k рефлексивны, $\|d\| \leqslant 1$, то спаривание $\langle \cdot | \cdot \rangle$ индуцирует спаривание банаховых пространств $\overline{H}^k(C_1)$ и $\overline{H}^{k-1}(C_1^{\perp})$, относительно которого эти пространства сопряжены одно к другому.*

Доказательство. Точной последовательности $0 \to C_1 \to C \to C_2 \to 0$ комплексов соответствует точная последовательность $0 \to C_2' \to C' \to C_1' \to 0$ сопряженных комплексов, при этом $C_2' = (C_1)^{\perp}$. Ввиду леммы 3 отображение s индуцирует изоморфизм пространств гомологий $\overline{H}^k(C_1)$ и $\overline{H}^{k-1}(C_2)$. По лемме 2 спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ индуцирует спаривание между $\overline{H}^{k-1}(C_2)$ и $\overline{H}_{k-1}(C_2')$, относительно которого эти банаховы пространства сопряжены. Теорема доказана.

§ 2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПУАНКАРЕ

Пусть X — ориентированное риманово многообразие, $\dim X = n$, $L_p^k(X)$ — банахово пространство дифференциальных форм степени k на X, модуль которых интегрируем в степени $p \geqslant 1$. Норма в $L_p^k(X)$ задается обычным образом:

$$\|\alpha\| = \left\{\int_X |\alpha|^p d\mu\right\}^{1/p}.$$

Если $1 \leqslant p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, то пространство $L_q^{n-k}(X)$ является сопряженным к $L_p^k(X)$ пространством относительно спаривания (см., например, [6])

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \alpha \wedge \beta.$$

В пространстве $L_{(p)}^k(X) = L_p^k(X) \otimes L_p^{k+1}(X)$ вводится следующая норма:

$$\|(\alpha, \beta)\|_{L_{(p)}^k(X)} = \left\{\|\alpha\|^2_{L_p^k(X)} + \|\beta\|^2_{L_p^{k+1}(X)}\right\}^{1/2}.$$

Определим операторы $\tilde{d}$: $L_{(p)}^k(X) \to L_{(p)}^{k+1}(X)$ и s: $L_{(p)}^{k+1}(X) \to L_{(p)}^k(X)$, полагая $d(\alpha, \beta) = (\beta, 0)$, $s(\alpha, \beta) = (0, \alpha)$. Ясно, что $\|s\| = \|d\| = 1$ и $ds + sd = 1$. Для $1 \leqslant p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$ пространство $L_{(q)}^{n-k-1}(X)$ будем отождествлять с пространством, сопряженным к $L^k_{(p)}(X)$, посредством спаривания

$$\langle(\alpha, \beta), (\varphi, \psi)\rangle = (-1)^k\langle\alpha, \psi\rangle + \langle\beta, \varphi\rangle. \qquad (1)$$

Здесь $(\alpha, \beta) \in L^k_{(p)}(X)$; $(\varphi, \psi) \in L^{n-k-1}_{(q)}(X)$.

Дифференциалы комплексов $L_{(p)}(X)$ и $L_{(q)}(X)$ сопряжены с точностью до знака:

$$\langle d(\alpha, \beta), (\varphi, \psi)\rangle = (-1)^{k+1}\langle(\alpha, \beta), d(\varphi, \psi)\rangle.$$

Предположим, что в комплексе $L_{(p)}(X)$ выбран некоторый подкомплекс Γ, а через $\Gamma^\perp$ обозначен его аннулятор в $L_{(q)}(X)$ относительно спаривания (1).

Теорема 2. *Если $1 < p < \infty$, то спаривание между Γ и $\Gamma^\perp$, заданное формулой*

$$\langle(\alpha, \beta) | (\varphi, \psi)\rangle = \int_X \alpha \wedge \varphi,$$

индуцирует спаривание банаховых пространств $\overline{H}^k(\Gamma)$ и $\overline{H}^{n-k}(\Gamma^\perp)$, относительно которого каждое из этих пространств сопряжено к другому.

Эта теорема вытекает из теоремы 1. В [6] теорема 2 была установлена в том случае, когда $\Gamma = W_{(p)}(X)$. Напомним определение комплекса $W_{(p)}(X)$. Обозначим через $D^k(X)$ пространство гладких форм степени k, имеющих компактный носитель в X, не пересекающийся с краем ∂X. Определим вложение $i: D^k(X) \to L^k_{(p)}(X)$, полагая $i(\varphi) = (\varphi, d\varphi)$, где d — оператор внешнего дифференцирования. Пространство $W^k_{(p)}(X)$ — аннулятор подпространства $i(D^{n-k-1}(X)) \subset L^{n-k-1}_{(q)}(X)$ относительно спаривания (1). Пара $(\alpha, \beta) \in L^k_{(p)}(X)$ принадлежит $W^k_{(p)}(X)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_X \beta \wedge \varphi = (-1)^{k+1} \int_X \alpha \wedge d\varphi \qquad (2)$$

для любой формы $\varphi \in D^{n-k-1}(X)$.

Соотношение (2) показывает, что форма β однозначно находится по форме α и является ее внешним дифференциалом в смысле потоков де Рама. Пространство $W^k_{(p)}(X)$ можно считать подпространством пространства $L^k_p(X)$, если отождествлять пару $(\alpha, \beta) \in W^k_{(p)}(X)$ с формой $\alpha \in L^k_p(X)$. В дальнейшем мы будем использовать обе точки зрения на пространство $W^k_{(p)}(X)$, причем из контекста будет ясно, какая именно используется.

Оператор d комплекса $L_{(p)}(X)$ переводит форму $\alpha \in W^k_{(p)}(X)$ в форму $d\alpha \in W^{k+1}_{(p)}(X)$, т. е. совпадает на $W^k_{(p)}(X) \subset L^k_p(X)$ с оператором внешнего дифференцирования. Обозначим через $V^k_{(p)}(X)$ аннулятор подпространства $W^{n-k-1}_{(q)}(X) \subset L^{n-k-1}_{(q)}(X)$ относительно спаривания (1). Так как это спаривание коммутативно с точностью до знака, то $D^k(X) \subset V^k_{(p)}(X)$. Более того, каждая форма α из $W^k_{(p)}(X)$, имеющая компактный носитель в $X \backslash \partial X$, принадлежит $V^k_{(p)}(X)$. В [6] установлено, что $D^k(X)$ плотно в $V^k_{(p)}(X)$, если $p < \infty$.

Пусть Γ — подкомплекс комплекса $W_{(p)}(X)$ и $V_{(p)}(X) \subset \Gamma$. Рассмотрим оператор d_Γ: $L^k_p(X) \to L^{k+1}_p(X)$, графиком которого является множество $\Gamma^k \subset W^k_{(p)}(X) \subset L^k_{(p)}(X)$. Оператор d_Γ — замкнутый неограниченный оператор, определенный на плотном множестве в $L^k_p(X)$. Пусть $(d_\Gamma)'$: $L^{n-k-1}_q(X) \to L^{n-k}_q(X)$ — сопряженный к d_Γ оператор. Установим, что $(d_\Gamma)' = (-1)^{k+1} d_{\Gamma^\perp}$ (ср. [7, с. 213]). Условие $\beta \in \mathrm{Dom}(d_\Gamma)'$ эквивалентно следующему утверждению: существует такая форма $\gamma \in L^{n-k}_q(X)$, что $\langle d\alpha, \beta\rangle = \langle\alpha, \gamma\rangle$ для любой формы $\alpha \in \mathrm{Dom}\, d_\Gamma$; при этом $\gamma = (d_\Gamma)'\beta$. Условие $\beta \in \mathrm{Dom}\, d_{\Gamma^\perp}$ эквивалентно утверждению: найдется такая форма $\gamma \in L_q^{n-k}(X)$, что $(-1)^k\langle\alpha, \gamma\rangle + \langle d\alpha, \beta\rangle = 0$ для любой формы $\alpha \in \operatorname{Dom} d_\Gamma$, при этом $\gamma = d_{\Gamma\perp}\beta$. Ясно теперь, что условия $\beta \in \operatorname{Dom}(d_\Gamma)'$ и $\beta \in \operatorname{Dom} d_{\Gamma\perp}$ эквивалентны и $(d_\Gamma)'\beta = (-1)^{k+1}d_{\Gamma\perp}\beta$.

Отметим, что подпространство $\operatorname{Im} d_\Gamma$ замкнуто в $W_{(p)}^{k+1}(X)$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто в $L_p^{k+1}(X)$. Кроме того, $\operatorname{Im} d_\Gamma$ замкнуто в $L_p^{k+1}(X)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}(d_\Gamma)'$ замкнуто в $L_q^{n-k}(X)$ [7, теорема 5.13]. Следовательно, $H^{k+1}(\Gamma) = \overline{H}^{k+1}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $H^{n-k}(\Gamma^\perp) = \overline{H}^{n-k}(\Gamma^\perp)$.

Предложение 1. *Для компактного риманова многообразия X подпространство $d(W_{(p)}^k(X))$ замкнуто в $L_p^{k+1}(X)$ и $H^k(W_{(p)}(X)) = \overline{H}^k(W_{(p)}(X)) \cong H^k(X, R)$ для любого k.*

Доказательство. Определим предпучок на X, поставив в соответствие каждому открытому множеству $U \subset X$ векторное пространство $W_{(p)}^k(U)$. Обозначим через $\mathscr{F}^k$ пучок, ассоциированный с этим предпучком. Пучки $\mathscr{F}^k$ мягкие, а последовательность $\{\mathscr{F}^k, d\}$ образует резольвенту [8] постоянного пучка R. Так как $\mathscr{F}^k(X) = W_{(p)}^k(X)$, то $H^k(W_{(p)}(X)) \cong H^k(X, R)$. Поскольку $\dim H^k(X, R) < \infty$, то по лемме 1 $d(W_{(p)}^k(X))$ замкнуто в $W_{(p)}^{k+1}(X)$. Предложение доказано.

Для того, чтобы установить совпадение $H^k(V_{(p)}(X))$ и $H^k(X, \partial X; R)$ в случае компактного X, сделаем ряд предварительных замечаний.

Лемма 4. *Пусть X — n-мерное гладкое подмногообразие n-мерного риманова многообразия Y и $\alpha \in W_{(p)}^k(X)$. Тогда существуют такое открытое в Y множество U и форма $\beta \in W_{(p)}^k(U)$, что $X \subset U$ и $\beta = \alpha$ на X.* (Эта лемма доказана в [9].)

Пусть X — компактное n-мерное гладкое подмногообразие n-мерного риманова многообразия Y, $X \cap \partial Y = \varnothing$. Для каждой формы α на X обозначим через $\tilde{\alpha}$ форму на Y, равную α на X и равную 0 на $Y \setminus X$.

Лемма 5. *Форма $\alpha \in L_p^k(X)$ принадлежит $V_{(p)}^k(X)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\alpha} \in W_{(p)}^k(Y)$.*

Доказательство. Если $\alpha \in V_{(p)}^k(X)$, то для произвольной формы $\varphi \in W_{(q)}^{n-k-1}(Y)$ имеем

$$\langle(\tilde{\alpha}, d\tilde{\alpha}), (\varphi, d\varphi)\rangle_Y = \int_Y [d\tilde{\alpha} \wedge \varphi + (-1)^k \tilde{\alpha} \wedge d\varphi] =$$

$$= \int_X [d\alpha \wedge \varphi + (-1)^k \alpha \wedge d\varphi] = \langle(\alpha, d\alpha), (\varphi, d\varphi)\rangle_X = 0.$$

Следовательно, $\tilde{\alpha} \in V_{(p)}^k(Y) \subset W_{(p)}^k(Y)$. Обратно, пусть $\tilde{\alpha} \in W_{(p)}^k(Y)$, $\varphi \in W_{(q)}^{n-k-1}(Y)$. Используя лемму 4, найдем форму $\psi \in W_{(q)}^{n-k-1}(Y)$, продолжающую форму φ. Можно считать, что носитель формы ψ компактен и не пересекает край ∂Y многообразия Y. В этом случае $\psi \in V_{(q)}^{n-k-1}(Y)$. Имеем

$$\langle(\alpha, d\alpha), (\varphi, d\varphi)\rangle_X = \langle(\tilde{\alpha}, d\tilde{\alpha}), (\psi, d\psi)\rangle_Y = 0,$$

откуда $\alpha \in V_{(p)}^k(X)$. Лемма доказана.

Замечание. Гладкая (вплоть до края) форма α на компактном многообразии X тогда и только тогда принадлежит пространству $V_{(p)}^k(X)$, когда $i^*\alpha = 0$, где $i\colon \partial X \subset X$. В самом деле, гладкие формы плотны в $W_{(q)}^{n-k-1}(X)$ [9, лемма 3]. Следовательно, $\alpha \in W_{(p)}^k(Y)$ тогда и только тогда, когда для любой гладкой формы β на Y выполнено равенство

$$0 = \int_X d(\alpha \wedge \beta) = \int_{\partial X} i^*\alpha \wedge i^*\beta.$$

Справедливость этого равенства эквивалентна условию $i^*\alpha = 0$.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — локальная система координат, заданная в области $U \subset X$. В области $I \times U$ многообразия $I \times X$ будем рассматривать координаты $(r, x_1, \ldots, x_n)$, $r \in I$. Каждая форма α на $I \times X$ записывается в виде $\alpha = \alpha_1 + dr \wedge \alpha_2$, где формы α_1 и α_2 не содержат в координатной записи dr. Пусть

$$\alpha_2 = \sum a_{i_1, \ldots, i_{k-1}}(s, x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k-1}}.$$

Для любых δ, r положим

$$\int_\delta^r \alpha = \sum \left(\int_\delta^r a_{i_1, \ldots, i_k}(s, x)\, ds \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k-1}}.$$

По определению, $\int_\delta^r \alpha$ — форма на многообразии X. Рассматривая в этом интеграле r как одну из переменных, получим форму на $I \times X$, которую будем обозначать через $s_\delta \alpha$. Для гладких на $I \times X$ форм α справедливы формулы гомотопии

$$d\left(\int_\delta^r \alpha \right) - \int_\delta^r d\alpha = i_r^* \alpha - i_\delta^* \alpha, \tag{3}$$

$$d s_\delta \alpha - s_\delta d\alpha = \alpha - \pi^* i_\delta^* \alpha, \tag{4}$$

где $i_\delta \colon X \to I \times X$, $i_\delta(x) = (\delta, x)$, $\pi \colon I \times X \to X$, $\pi(t, x) = x$. Будем рассматривать $I \times X$ как произведение римановых многообразий, другими словами, снабдим $I \times X$ метрическим тензором $dr^2 + g$, где g — метрический тензор многообразия X.

Лемма 6. *Для любых r, δ $\int_\delta^r \alpha$ является ограниченным линейным оператором из $L_p^k(I \times X)$ в $L_p^{k-1}(X)$, а s_δ — ограниченным линейным оператором из $L_p^k(I \times X)$ в $L_p^{k-1}(I \times X)$; при этом нормы указанных операторов не превосходят* 1.

Доказательство. Используя неравенства Минковского и Гельдера, получаем

$$\left\| \int_\delta^r \alpha \right\|_{L_p^{k-1}(X)} = \left\{ \int_X \left| \int_\delta^r \alpha \right|^p dx \right\}^{1/p} \leqslant \int_\delta^r \left\{ \int_X |\alpha|^p dx \right\}^{1/p} dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_\delta^r dt \right\}^{1/q} \left\{ \int_\delta^r \int_X |\alpha|^p dx dt \right\}^{1/p} \leqslant \|\alpha\|_{L_p^k(I \times X)}.$$

Оценка $\|s_\delta \alpha\| \leqslant \|\alpha\|$ получается аналогично.

Лемма 7. *Пусть $\alpha \in W_{(p)}^k(I \times X)$ и $\delta \in I$. Предположим, что существует такая последовательность $\{\alpha_j\}$ гладких форм из $W_{(p)}^k(I \times X)$, что $\{\alpha_j\}$ сходится к α в $W_{(p)}^k(I \times X)$ и $\{i_\delta^* \alpha_j\}$ сходится к некоторой форме β в $L_p^k(X)$. Тогда форма β зависит только от α и δ и не зависит от выбора последовательности $\{\alpha_j\}$.*

Доказательство. По формуле (4)

$$d s_\delta \alpha_j + s_\delta d\alpha_j = \alpha_j - \pi^* i_\delta^* \alpha_j.$$

Так как $\alpha_j \to \alpha$, $\pi^* i_\delta^* \alpha_j \to \pi^* \beta$, $s_\delta d\alpha_j \to s_\delta \alpha$ в $L_p^k(I \times X)$, то последовательность $d s_\delta \alpha_j$ имеет предел в $L_p^k(I \times X)$, а в силу $s_\delta \alpha_j \to s_\delta \alpha$, этот предел равен $d s_\delta \alpha$. Следовательно, $d s_\delta \alpha + s_\delta d\alpha = \alpha - \pi^* \beta$, и β не зависит от выбора последовательности $\{\alpha_j\}$. Лемма доказана.

Для формы $\alpha \in W_{(p)}^k(I \times X)$ назовем $\delta \in I$ *допустимым значением*, если существует такая последовательность α_j гладких форм, что $\alpha_j \in$

$\in W^k_{(p)}(I\times X)$ и $\{i^*_\delta\alpha\}$ сходится в $W^k_{(p)}(X)$. Обозначим предел последовательности $\{i^*_\delta\alpha_j\}$ в $W^k_{(p)}(X)$ через $i^*_\delta\alpha$. Лемма 7 оправдывает это обозначение.

Формулы гомотопии (3) и (4) выполнены для формы $\alpha\in W^k_{(p)}(X)$ и допустимых значений r и δ. Установим это для формулы (3) (для (4) очевидно). Пусть $\alpha_j\to\alpha$ и $\gamma_j\to\alpha$ в $W^k_{(p)}(I\times X)$, α_j, γ_j — гладкие формы, $i^*_\delta\alpha_j\to i^*_\delta\alpha$ и $i^*_r\gamma_j\to i^*_r\alpha$ в $W^k_{(p)}(X)$. Можно считать, переходя к подпоследовательностям, что $i^*_t\alpha_j$ и $i^*_t\gamma_j$ сходятся в $W^k_{(p)}(X)$ для почти всех $t\in I$. Зафиксируем одно такое t. Перейдя к пределу в формуле

$$d\left(\int_\delta^t\alpha_j\right)-\int_\delta^t d\alpha_j=i^*_t(\alpha_j)-i^*_\delta(\alpha_j),$$

получаем равенство

$$d\left(\int_\delta^t\alpha\right)-\int_\delta^t d\alpha=i^*_t\alpha-i^*_\delta\alpha.$$

Аналогично

$$d\left(\int_t^r\alpha\right)-\int_t^r d\alpha=i^*_s\alpha-i^*_t\alpha.$$

Сложив предыдущие равенства, получаем (3).

Для каждой формы $\alpha\in W^k_{(p)}(I\times X)$ почти все значения $\delta\in I$ допустимы.

Обозначим через $M^k_{(p)}$ замыкание в $W^k_{(p)}(I\times X)$ множества форм из $W^k_{(p)}(I\times X)$, каждая из которых равна 0 на некотором пояске $[0,\varepsilon]\times X$, $\varepsilon>0$.

Лемма 8. *$H^k(M_{(p)})=0$ для любого k.*

Доказательство. Пусть $\alpha\in M^k_{(p)}$ и $d\alpha=0$. Так как значение $\delta=0$ допустимо для α и $i^*_0\alpha=0$, то по формуле гомотопии $\alpha=ds_0\alpha$. Ясно, что $s_0\alpha\in M^{k-1}_{(p)}$, поэтому $H^k(M_{(p)})=0$. Лемма доказана.

Пусть X — компактное многообразие. Обозначим через $W^k_{(p)}(X,\partial X)$ подпространство пространства $W^k_{(p)}(X)$, состоящее из форм, каждая из которых обращается в 0 в некоторой окрестности края ∂X. Пространство $W^k_{(p)}(X,\partial X)$ совпадает с пространством сечений пучка $\mathcal{F}^k$ с носителями в $X\backslash\partial X$. Пучки $\mathcal{F}^k$, образующие мягкую резольвенту пучка R, построены в доказательстве предложения 1. Согласно теории пучков (см., например, [10])

$$H^k(W_{(p)}(X,\partial X))\cong H^k(X,\partial X;R).$$

Предложение 2. *Для компактного риманова многообразия X и любого k подпространство $d(V^k_{(p)}(X))$ замкнуто в $L^{k+1}_p(X)$ и $H^k(V_{(p)}(X))=\bar{H}^k(V_{(p)}(X))\cong H^k(X,\partial X;R)$.*

Доказательство. Покажем, что вложение $W_{(p)}(X,\partial X)\subset V_{(p)}(X)$ индуцирует изоморфизм групп гомологий. Некоторая окрестность U края ∂X в X диффеоморфна произведению $I\times\partial X$. Риманова метрика на U не является, вообще говоря, произведением метрик на ∂X и I, но эквивалентна ему. Поэтому мы можем применять лемму 8 к окрестности U так, как будто она изометрична произведению $I\times X$. Пусть $\alpha\in V^k_{(p)}(X)$, $d\alpha=0$, $i\colon U\subset X$ — тождественное вложение. Тогда $i^*\alpha\in M^k_{(p)}$, где M^k_p — замыкание в $W^k_{(p)}(U)$ множества форм, обращающихся в 0 в некоторой окрестности края ∂X. По лемме 8 существует такая форма $\beta\in M^{k-1}_{(p)}$, что $i^*\alpha=d\beta$. Используя лемму 4, продолжим форму β в некоторую форму $\gamma\in W^{k-1}_{(p)}(X)$. Тогда $\alpha-d\gamma\in W^k_{(p)}(X, \partial X)$. Тем самым вложение $W_{(p)}(X, \partial X)\subset V_{(p)}(X)$ индуцирует эпиморфизм групп гомологий. Приклеим поясок $I\times\partial X$ к краю ∂X многообразия X. Продолжим риманову метрику с X на все многообразие $Y=X\cup(I\times\partial X)$. Вложение $W_{(p)}(X, \partial X)\to W_{(p)}(Y, \partial Y)$ индуцирует изоморфизм групп гомологий. А так как $W_{(p)}(X, \partial X)\subset V_{(p)}(X)\subset W_{(p)}(Y, \partial Y)$, то вложение $W_{(p)}(X, \partial X)\subset V_{(p)}(X)$ индуцирует мономорфизм гомологий. Так как $H^k(V_{(p)}(X))=H^k(W_{(p)}(X, \partial X))\cong H^k(X, \partial X; R)$ — конечномерное пространство, то по лемме 1 $d\left(V^k_{(p)}(X)\right)$ замкнуто в $V^{k+1}_{(p)}(X)$, а следовательно, и в $L^{k+1}_p(X)$. Предложение доказано.

Предложения 1 и 2 показывают, что обычная двойственность Пуанкаре пространств когомологий $H^k(X; R)$ и $H^{n-k}(X, \partial X; R)$ является частным случаем теоремы 1.

§ 3. УСТРАНИМЫЕ ОСОБЕННОСТИ

Пусть K — замкнутое подмножество меры 0 в римановом многообразии X и $U=X\setminus K$. Вложение i: $U\subset K$ индуцирует изометрические вложения i_*: $V^k_{(p)}(U)\to V^k_{(p)}(X)$ и i^*: $W^k_{(p)}(X)\to W^k_{(p)}(U)$ банаховых пространств.

Лемма 9. *Для того, чтобы отображение i^*: $W^k_{(p)}(X)\to W^k_{(p)}(U)$ было изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы изоморфизмом было отображение i_*: $V^{n-k-1}_{(q)}(U)\to V^{n-k-1}_q(X)$.*

Доказательство. Вложение i: $U\subset X$ индуцирует изоморфизм $L^k_{(p)}(X)\cong L^k_{(p)}(U)$. Два замкнутых подпространства $W^k_{(p)}(X)$ и $W^k_{(p)}(U)$ пространства $L^k_{(p)}(X)$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их аннуляторы в сопряженном пространстве, т. е. пространства $V^{n-k-1}_{(q)}(X)$ и $V^{n-k-1}_{(q)}(U)$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть K — гладкое подмногообразие размерности r риманова n-мерного многообразия X, $m=n-r\geqslant 1$. Тогда отображение i_*: $V^k_{(p)}(X\setminus K)\to V^k_{(p)}(X)$ является изоморфизмом в каждом из следующих случаев:*

а) $k>r$;

б) $k\leqslant r$, $m>1$, $p\leqslant m$;

а отображение i^*: $W^k_{(p)}(X\setminus K)\to W^k_{(p)}(X)$ является изоморфизмом в каждом из следующих случаев:

а′) $k<m-1$;

б′) $k\geqslant m-1$, $p\geqslant m/(m-1)$, $m>1$;

в′) $k=n$.

Доказательство. Вторая часть теоремы ввиду леммы 9 следует из ее первой части. Поэтому теорема будет полностью доказана, если мы установим, что при выполнении каждого из условий а′) и б′) произвольная гладкая форма с компактным носителем в $X\setminus\partial X$ может быть сколь угодно точно аппроксимирована в $V^k_{(p)}(X)$ формами с компактным носителем в $X\setminus(\partial X\cup K)$. Эта задача с помощью подходящего выбора локальных координат и разбиения единицы сводится к своему частному случаю, когда $X=I^m\times I^r$, $K=\{0\}\times I^r$.

Пусть $(x_1, \ldots, x_m)$ — координаты в кубе I^m, $(y_1, \ldots, y_r)$ — координаты в кубе I^r, α — гладкая финитная форма на X. Предположим сначала, что $k>r$. В этом случае каждое слагаемое координатного подставления формы α содержит по крайней мере одно dx_i. Рассматривая каждое слагаемое в отдельности, сводим задачу к случаю, когда α имеет следующий вид:

$$\alpha=a(x, y)\,dx_1\wedge\ldots dx_s\wedge dy_1\wedge\ldots\wedge dy_{k-s},\quad s>0.$$

Рассмотрим какую-нибудь гладкую функцию $\varphi(t)$, заданную на вещественной прямой и удовлетворяющую условиям $0\leqslant\varphi(t)\leqslant 1$, $\varphi(t)=0$

в окрестности точки 0 при $t \geqslant 1$. Положим $\alpha_\varepsilon = \varphi(x_1/\varepsilon)\alpha$. Тогда

$$\|\alpha - \alpha_\varepsilon\|_{L_p^k(I^m\times I^r)} = \left\{\int\limits_{I^m\times I^r} |a(x, y)|^p (1 - \varphi(x_1/\varepsilon))^p dxdy\right\}^{1/p}.$$

По теореме Лебега правая часть этого равенства стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. Далее,

$$d\alpha_\varepsilon = d(\varphi(x_1/\varepsilon)) \wedge \alpha + \dot\varphi(x_1/\varepsilon) \wedge d\alpha.$$

Так как в координатном представлении формы α содержится dx_1, то $d(\varphi(x_1/\varepsilon)) \wedge \alpha = 0$. Вновь используя теорему Лебега, заключаем, что $\|d\alpha - d\alpha_\varepsilon\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тем самым $\alpha_\varepsilon \to \alpha$ в $V_{(p)}^k(I^m \times I^r)$, а носитель формы α_ε не пересекается с $\{0\} \times I^r$.

Рассмотрим теперь случай $k \leqslant r$. Для каждого $\varepsilon > 0$ положим

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 - (-\ln\varepsilon)^{-1}\ln(\varepsilon/t) & \text{при } \varepsilon^2 \leqslant t < \varepsilon, \\ 0 & \text{при } t < \varepsilon^2, \\ 1 & \text{при } t > \varepsilon. \end{cases}$$

Пусть $\alpha_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(|x|)\alpha$. Так как $\varphi_\varepsilon(t) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$ и $t > 0$ и $|\varphi_\varepsilon(t)| < 1$, то

$$\|\alpha - \alpha_\varepsilon\|_{L_p^k(I^m\times I^r)} = \left\{\int\limits_{I^m\times I^r} |\alpha|^p (1 - \varphi_\varepsilon(t))^p dxdy\right\}^{1/p} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Далее,

$$\|d\alpha - d\alpha_\varepsilon\|_{L_p^{k+1}(I^m\times I^r)} \leqslant \|d\alpha - \varphi_\varepsilon(|x|)\, d\alpha\|_{L_p^{k+1}(I^m\times I^r)} + \\ + \|d(\varphi_\varepsilon(|x|)) \wedge \alpha\|_{L_p^{k+1}(I^m\times I^r)}.$$

Так же как и в предыдущем случае, заключаем, что первое слагаемое в правой части этого неравенства стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. Оценим второе слагаемое:

$$\|d(\varphi_\varepsilon(|x|)) \wedge \alpha\| = \left\{\int\limits_{I^m\times I^r} |d(\varphi_\varepsilon(|x|)) \wedge \alpha|^p dxdy\right\}^{1/p} \leqslant \\ \leqslant C(-\ln\varepsilon)^{-1} \left\{\int\limits_{\varepsilon^2}^{\varepsilon} \frac{|x|^{m-1} d(x)}{|x|^p}\right\}^{1/p} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$ и $p \leqslant m$, $1 < m$. Тем самым $\alpha_\varepsilon \to \alpha$ в $V_{(p)}^k(I^m \times I^r)$, а форма α_ε равна 0 в окрестности множества $\{0\} \times I^r$. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть X — шар в $\mathbf{R}^n$ с центром в точке 0, множество K задано условиями $x_1 = \ldots = x_m = 0$. Для $k \geqslant m - 1$ рассмотрим форму

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^m \frac{(-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_m}{|x|^m}\right) \wedge dx_{m+1} \wedge \ldots \wedge dx_{k+1}.$$

Тогда $\alpha \in W_{(p)}^k(X \setminus K)$ при любом $p < m/(m-1)$, но $\alpha \notin W_{(p)}^k(X)$, поскольку ее дифференциал является потоком с носителем, сосредоточенным на K, и не является формой на X. Этот пример показывает, что теорема 3 не может быть усилена.

Следствие. *Пусть K — гладкое подмногообразие риманова многообразия X, $\dim X = n$, $\dim K = r$, $r < n$, $W_{(p)}^k(X) = V_{(p)}^k(X)$. Тогда $W_{(p)}^k(X \setminus K) = V_{(p)}^k(X \setminus K)$ в каждом из следующих случаев:*

а) $n - r - 1 > k > r$;

б) $k \geqslant \max\{r + 1, n - r - 1\}$, $p \geqslant (n - r)/(n - r - 1)$;

в) $k < \min\{n - r - 1, r + 1\}$, $p \leqslant n - r$;

г) $n - r - 1 \leqslant k \leqslant r$, $(n - r)/(n - r - 1) \leqslant p \leqslant n - r$.

Введем обозначения: $H^k_{(p)}(X)=H^k(W_{(p)}(X))$, $\overline{H}^k_{(p)}(X)=\overline{H}^k(W_{(p)}(X))$. Проекция $\pi\colon I\times X\to X$ индуцирует сохраняющее норму отображение $\pi^*\colon W_{(p)}(X)\to W_{(p)}(I\times X)$ и непрерывный гомоморфизм $\pi^*\colon H^k_{(p)}(X)\to H^k_{(p)}(I\times X)$.

Лемма 10. *$\pi^*\colon H^k_{(p)}(X)\to H^k_{(p)}(I\times X)$ — сохраняющий полунорму изоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\alpha\in W^k_{(p)}(I\times X)$ и $d\alpha=0$. Для каждого допустимого значения δ по формуле гомотопии имеем:

$$\alpha=\pi^*i^*_\delta\alpha+ds_\delta\alpha,\quad i^*_\delta\alpha\in W^k_{(p)}(X).$$

Следовательно, π^* — эпиморфизм. Если же $\alpha\in W^k_{(p)}(X)$ и $\pi^*\alpha=d\beta$, где $\beta\in W^{k-1}_{(p)}(I\times X)$, то для допустимых значений δ по формуле гомотопии имеем:

$$ds_\delta\beta+s_\delta\pi^*\alpha=\beta-\pi^*i^*_\delta\beta.$$

Так как $s_\delta\pi^*\alpha=0$, то $d\beta=\pi^*di^*_\delta\beta$, $\alpha=di^*_\delta\beta$. Поэтому π^* — мономорфизм.

Пусть $\alpha\in W^k_{(p)}(I\times X)$, $d\alpha=0$ и $\varepsilon>0$. Используя оператор регуляризации форм [11], найдем такую гладкую форму $\beta\in W^k_{(p)}(I\times X)$, что $\|\alpha-\beta\|_{W^k_{(p)}(I\times X)}\leqslant\varepsilon$, $d\beta=0$ и циклы α и β гомологичны в комплексе $W_{(p)}(I\times X)$. Если для каждого $t\in I$

$$\|i^*_t\beta\|_{W^k_{(p)}(X)}\geqslant(1+\varepsilon)\|\beta\|_{W^k_{(p)}(I\times X)},$$

то

$$\|\beta\|_{W^k_{(p)}(I\times X)}=\left\{\int_0^1\int_X|\beta|^p\,dx\,dt\right\}^{1/p}\geqslant$$

$$\geqslant\left\{\int_0^1\|i^*_t\beta\|^p_{W^k_{(p)}(X)}dt\right\}^{1/p}\geqslant(1+\varepsilon)\|\beta\|_{W^k_{(p)}(I\times X)}.$$

Следовательно, найдется такое $t\in I$, что

$$\|i^*_t\beta\|_{W^k_{(p)}(X)}\leqslant(1+\varepsilon)\|\beta\|_{W^k_{(p)}(I\times X)}\leqslant(1+\varepsilon)\left(\|\alpha\|_{W^k_{(p)}(I\times X)}+\varepsilon\right).$$

Эта оценка показывает, что норма изоморфизма $(\pi^*)^{-1}$ не превосходит единицы, а так как и $\|\pi^*\|\leqslant 1$, то оба изоморфизма π^* и $(\pi^*)^{-1}$ сохраняют полунорму. Лемма доказана.

Лемма 10, так же как и последующие леммы 11—16, установлена в [1] при $p=2$. Мы не приводим доказательств лемм 12—16, поскольку они аналогичны доказательствам в случае $p=2$.

Лемма 11. *Если* $W^k_{(p)}(X)=V^k_{(p)}(X)$, $W^{k-1}_{(p)}(X)=V^{k-1}_{(p)}(X)$, $\alpha\in W^k_{(p)}(I\times X)$, $\beta\in W^{n-k}_{(q)}(I\times X)$, *то для почти всех $r\in I$ имеем для почти всех $s\in I$*

$$\int_{[r,s]\times X}d(\alpha\wedge\beta)=\int_X i^*_r(\alpha\wedge\beta)-\int_X i^*_s(\alpha\wedge\beta).$$

Через CX обозначим многообразие $I\times X$, снабженное римановой метрикой dr^2+r^2g, где g — риманова метрика многообразия X. Отметим, что CX — конус над X.

Лемма 12. *При $k<(n+1)/p$ проекция $\pi\colon I\times X\to X$ индуцирует ограниченный линейный оператор $\pi^*\colon L^k_p(X)\to L^k_p(CX)$.*

Лемма 13. *Для каждой формы $\alpha\in L^k_p(CX)$*

$$\left\|\int_\delta^r\alpha\right\|_{L^{k-1}_p(X)}\leqslant\left\{\int_\delta^r t^{(k-1-n/p)q}dt\right\}^{1/q}\|\alpha\|_{L^k_p(X)}.$$

Лемма 14. *Оператор* s_δ: $L_p^k(CX) \to L_p^{k-1}(CX)$ *ограничен в каждом из следующих случаев:* а) $\delta \neq 0$, $k < (n+1)/p + 1$, б) $\delta = 0$, $k > (n+1)/p$.

Лемма 15. *Для каждого* $\delta > 0$

$$\| s_0\alpha - s_\varepsilon \|_{L_p^{k-1}([\delta,1]\times X)} \to 0$$

при $k > (n+1)/p$ *и* $\varepsilon \to 0$.

Лемма 16. *Если* $\alpha \in W_{(p)}^k(CX)$, *то в каждом множестве меры 1 на отрезке* I *можно выбрать такую сходящуюся к 0 последовательность* $\{t_j\}$, *что*

$$\| i_{t_j}^* \alpha \|_{L_p^k(X)} = o\left(t_j^{k-(n+1)/p} |\ln t_j|^{-1/p}\right).$$

Теорема 4. *Для произвольного риманова многообразия* X *отображение* π^*: $H_{(p)}^k(X) \to H_{(p)}^k(CX)$ *является топологическим изоморфизмом при* $k < (n+1)/p$ *и* $H_{(p)}^k(CX) = 0$ *при* $k > (n+1)/p$. *Если* $k = (n+1)/p$ *и* $H_{(p)}^k(X) = \overline{H}_{(p)}^k(X)$, *то* $H_{(p)}^k(CX) = 0$.

Доказательство. Пусть $k < (n+1)/p$, $\alpha \in W_{(p)}^k(CX)$, $d\alpha = 0$. По формуле гомотопии для допустимых значений δ имеем $ds_\delta\alpha = \alpha - \pi^* i_\delta^*\alpha$. По лемме 12 $\pi^* i_\delta^*\alpha \in W_{(p)}^k(CX)$, а по лемме 14 $s_\delta\alpha \in L_{(p)}^{k-1}(CX)$. Следовательно, π^* — эпиморфизм.

Рассмотрим вложение i: $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times X \to CX$ и проекцию π_1: $[1/2, 1] \times X \to X$. Так как $\pi_1^* = i^*\pi^*$ и π_1^* по лемме 10 сохраняет полунорму, то π^* — мономорфизм и отображение $(\pi^*)^{-1} = i^*(\pi_1^*)^{-1}$ непрерывно.

Рассмотрим теперь случай $k > (n+1)/p$. Пусть $\alpha \in W_{(p)}^k(CX)$, $d\alpha = 0$. По лемме 14 $s_0\alpha \in L_p^{i-1}(CX)$, а по лемме 15

$$\| s_0\alpha - s_\varepsilon\alpha \|_{L_p^{k-1}([\delta,1]\times X)} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$ для любого $\delta > 0$. Можно считать (лемма 16), что $\| i_\varepsilon^* \alpha \|_{L_p^k(X)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. По формуле гомотопии

$$ds_\varepsilon\alpha = \alpha - \pi^* i_\varepsilon^*\alpha. \tag{5}$$

Перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в $L_p^k([\delta, 1] \times X)$, получаем из (5) равенство $ds_0\alpha = \alpha$ на каждом цилиндре $[\delta, 1] \times X$, $\delta > 0$. Поскольку $\delta > 0$ произвольно, то это равенство выполняется на всем конусе CX, так что $H_{(p)}^k(CX) = 0$.

Рассмотрим, наконец, случай $k = (n+1)/p$. Пусть $\alpha \in W_{(p)}^k(CX)$, $d\alpha = 0$. Выберем последовательность $\{\alpha_j\}$ гладких форм, сходящуюся в $W_{(p)}^k(CX)$ к α, и такую, что $d\alpha_j = 0$ для каждого j. Это можно сделать, используя оператор регуляризации форм [11]. Перейдя, если потребуется, к подпоследовательности, будем считать, что для почти всех $t \in I$ последовательность $\{i_t^*\alpha_j\}$ сходится в $W_{(p)}^k(X)$ к $i_t^*\alpha$. По лемме 13

$$\int_\delta^r \alpha_j \in L_p^{k-1}(X).$$

Используя лемму 16 и формулу гомотопии

$$i_r^*\alpha_j - i_\delta^*\alpha_j = d\left(\int_\delta^r \alpha_j\right),$$

заключаем, что для почти всех $r \in I$ форма $i_r^*\alpha$ принадлежит замыканию в $W_{(p)}^k(X)$ множества $d\left(W_{(p)}^{k-1}(X)\right)$. По предположению теоремы это множество замкнуто в $W_{(p)}^k(X)$. Следовательно, $i_r^*\alpha = d\gamma$ для некоторой формы $\gamma \in W^{k-1}_{(p)}(X)$. По лемме 12 $\pi^*\gamma \in W^{k-1}_{(p)}(CX)$, а из (5) получаем $\alpha = ds_\delta\alpha + d\pi^*\gamma$. По лемме 14 $s_\delta\alpha \in L_p^{k-1}(CX)$, но тогда $\alpha = d(s_\delta\alpha + \pi^*\gamma)$, причем $s_\delta\alpha + \pi^*\gamma \in W^{k-1}_{(p)}(CX)$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть X — такое риманово многообразие, что $V^k_{(p)}(X) = W^k_{(p)}(X)$ для каждого k. Тогда для любого $k \notin ((n+1)/p - 1, (n+1)/p)$ и любых форм $\alpha \in W^k_{(p)}(CX)$, $\beta \in W^{n-k}_{(q)}(CX)$ при почти всех $t \in I$ выполняется равенство*

$$\int_X i_t^*(\alpha \wedge \beta) = \int_{C_tX} d(\alpha \wedge \beta), \tag{6}$$

где $C_tX = \{(r, x) \in CX \colon r \leqslant t\}$. Если $k \in ((n+1)/p - 1, (n+1)/p)$, то равенство (6) выполняется при следующих дополнительных условиях: $H^k_{(p)}(X) = 0$, $H^{k+1}_{(p)}(X) = \overline{H}^{k+1}_{(p)}(X)$.

Доказательство. По лемме 11 для почти всех t имеем для почти всех r равенство

$$\int_{[t,r]\times X} d(\alpha \wedge \beta) = \int_X i_t^*(\alpha \wedge \beta) - \int_X i_r^*(\alpha \wedge \beta). \tag{7}$$

Зафиксируем такое t и, используя лемму 16 (точнее ее очевидную модификацию на случай нескольких форм), выберем из множества тех r, для которых выполнено (7), сходящуюся к нулю последовательность $\{r_j\}$, для которой

$$\begin{aligned}
&\|i^*_{r_j}\alpha\|_{L^k_p(X)} = o\left(r_j^{k-(n+1)/p}\,|\ln r_j|^{1/p}\right),\\
&\|i^*_{r_j}\beta\|_{L^{n-k}_q(X)} = o\left(r_j^{(n+1)/p-k-1}\,|\ln r_j|^{-1/q}\right),\\
&\|i^*_{r_j}d\alpha\|_{L^{k-1}_p(X)} = o\left(r_j^{k+1-(n+1)/p}\,|\ln r_j|^{-1/p}\right),\\
&\|i^*_{r_j}d\beta\|_{L^{n-k-1}_q(X)} = o\left(r^{(n+1)/p-k}\,|\ln r_j|^{-1/q}\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Введем обозначения: $\alpha_j = i^*_{r_j}\alpha$, $\beta_j = i^*_{r_j}\beta$. Предположим сначала, что $k \leqslant (n+1)/p - 1$. По формуле гомотопии (3)

$$\alpha_j = \alpha_1 - d\left(\int_{r_j}^{r_1} \alpha\right) - \int_{r_j}^{r_1} d\alpha. \tag{9}$$

По лемме 13

$$\left\|\int_{r_j}^{r_1} \alpha\right\|_{L^{k-1}_p(X)} \leqslant C r_j^{k-(n+1)/p} \text{ при } k < \frac{n+1}{p},$$

$$\left\|\int_{r_j}^{r_1} d\alpha\right\|_{L^k_p(X)} \leqslant \begin{cases} r_j^{k+1-(n+1)/p} & \text{при } k < \dfrac{n+1}{p} - 1,\\ |\ln r_j|^{1/q} & \text{при } k > \dfrac{n+1}{p} - 1. \end{cases}$$

Используя (9), получаем

$$\int_X \alpha_j \wedge \beta_j = \int_X \alpha_1 \wedge \beta_j - \int_X \left(d\int_{r_j}^{r_1} \alpha\right) \wedge \beta_j - \int_X \left(\int_{r_j}^{r_1} d\alpha\right) \wedge \beta_j.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части этого равенства. Ввиду (8) и леммы 13

$$\left|\int_X \alpha_1 \wedge \beta_j\right| \leqslant \|\alpha_1\|_{L^k_p(X)} \|\beta_j\|_{L^{n-k}_q(X)} = o\left(r^{(n+1)/p-k-1}\right),$$

$$\left|\int_X\left(d\int_{r_j}^{r_1}\alpha\right)\wedge\beta_j\right|=\left|\int_X\left(\int_{r_j}^{r_1}\alpha\right)\wedge d\beta_j\right|\leqslant\left\|\int_{r_j}^{r_1}\alpha\right\|_{L_p^{k-1}(X)}\|d\beta_j\|_{L_q^{n-k+1}(X)}=o(1),$$

$$\left|\int_X\left(\int_{r_j}^{r_1}d\alpha\right)\wedge\beta_j\right|\leqslant\left\|\int_{r_j}^{r_1}d\alpha\right\|_{L_p^k(X)}\|\beta_j\|_{L_q^{n-k}(X)}=o(1).$$

Если в предыдущих вычислениях поменять местами α_j и β_j, то получим такие же оценки для интеграла $\int_X\alpha_j\wedge\beta_j$, но при $n-k\leqslant(n+1)/q-1$, т. е. при $k\geqslant(n+1)/p$. Оценим теперь этот интеграл в случае $(n+1)/p-1<k<(n+1)/p$. Так как $H_{(p)}^{k+1}(X)=\overline{H}_{(p)}^{k+1}(X)$, то множество значений оператора d: $W_{(p)}^k(X)\to W_{(p)}^{k+1}(X)$ замкнуто. С помощью теоремы Банаха об открытом отображении легко найти такую константу K, что для формы $\gamma\in\operatorname{Im}d$ будет существовать такая форма $\gamma'\in\in W_{(p)}^k(X)$, что $d\gamma'=\gamma$ и $\|\gamma'\|_{W_{(p)}^k(X)}\leqslant K\|\gamma\|_{L_p^{k+1}(X)}$. Положим $\overline{\alpha}_j=(d\alpha_j)'$, $\overline{\overline{\alpha}}_j=\alpha_j-\overline{\alpha}_j$. Учитывая (8), получаем

$$\|\overline{\alpha}_j\|_{L_p^k(X)}=o\left(r_j^{k+1-(n+1)/p}\right),\ \|\overline{\overline{\alpha}}_j\|_{L_p^k(X)}=o\left(r^{k-(n+1)/p}\right).$$

Так как $H_{(p)}^k(X)=0$, то найдутся такие формы $\varphi_j\in W_{(p)}^{k-1}(X)$, что $d\varphi_j=\overline{\overline{\alpha}}_j$. Область значений оператора d: $W_{(p)}^{k-1}(X)\to W_{(p)}^k(X)$ замкнута. Поэтому можно предполагать, что $\|\varphi_j\|_{W_{(p)}^{k-1}(X)}\leqslant K_1\|d\varphi_j\|_{L_p^k(X)}$ для некоторой константы K_1. Получаем

$$\left|\int_X\alpha_j\wedge\beta_j\right|\leqslant\left|\int_X\overline{\ }\wedge\beta_j\right|+\left|\int_X\varphi_j\wedge d\beta_j\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|\overline{\alpha}_j\|_{L_p^k(X)}\|\beta_j\|_{L_q^{n-k}(X)}+\|\varphi_j\|_{L_p^{k-1}(X)}\|d\beta_j\|_{L_q^{n-k-1}(X)}=o(1).$$

Итак, установлено, что во всех случаях $\int_X\alpha\wedge\beta_j\to 0$ при $j\to\infty$. Переходя к пределу в (7) при $j\to\infty$, получим равенство (6). Теорема доказана.

Следствие. *Если условия теоремы* 5 *выполнены, то пространство* $V_{(p)}^k(CX)$ *совпадает с замыканием в* $W_{(p)}^k(CX)$ *множества тех форм из* $W_{(p)}^k(CX)$, *каждая из которых обращается в* 0 *на некотором воротничке* $[\delta, 1]\times X$ *края* $X\times\{1\}$ *конуса* CX.

З а м е ч а н и е. Условие $H_{(p)}^k(X)=0$ в теореме 5 существенно. Соответствующий пример для $p=2$ имеется в работе Чигера [1]. Пусть X — замкнутое многообразие. В этом случае все условия теоремы 5, кроме условия $H_{(p)}^k(X)=0$, выполнены автоматически. Обозначим через $\Gamma_{(p)}(CX)$ подкомплекс комплекса $W_{(p)}(CX)$, образованный замыканием в $W_{(p)}(CX)$ множества форм, каждая из которых обращается в 0 на некотором воротничке $[\delta, 1]\times X$ края $\{1\}\times X$ конуса CX. Из теоремы 5 следует, что комплексы $\Gamma_{(p)}(CX)$ и $V_{(p)}(CX)$ совпадают во всех размерностях, кроме, может быть, размерности k, $(n+1)/p-1<k<(n+1)/p$. Сравним группы гомологий этих комплексов. Точной последовательности комплексов

$$0\to\Gamma_{(p)}(CX\setminus([1/2,1]\times X))\to W_{(p)}(CX)\to W_{(p)}([1/2,1]\times X)\to 0$$

соответствует точная последовательность когомологий

$$\ldots\to H_{(p)}^k(CX)\xrightarrow{i^*}H_{(p)}^k(X)\to H^{k+1}(\Gamma_{(p)}(CX))\to H_{(p)}^{k+1}(CX)\to\ldots$$

Отсюда в силу теоремы 4 $H^{k+1}(\Gamma_{(p)}(CX))=0$ для $(n+1)/p-1<k<(n+1)/p$.

Используя двойственность из теоремы 2, получаем

$$H^{k+1}(V_{(p)}(CX)) \cong \operatorname{Hom}\left(H^k_{(p)}(CX), R\right) \cong H^k(X).$$

Итак, комплексы $\Gamma_{(p)}(CX)$ и $V_{(p)}(CX)$ заведомо отличаются в размерности k, если $(n+1)/p-1<k<(n+1)/p$ и $H^k(X)\neq 0$.

§ 5. ПРИМЕРЫ КОМПЛЕКСОВ Г

В этом параграфе мы хотим проиллюстрировать связь когомологий $H^*_{(p)}\Gamma$ с некоторыми граничными задачами для оператора d на примерах, которые, по существу, хорошо известны. Ограничимся случаем $p=2$. Пространство $L^k_2(X)$ является гильбертовым. Скалярное произведение связано со спариванием форм операцией $*$: $L^k_2(X)\to L^{n-k}_2(X)$, а именно:

$$(\alpha, \beta) = \langle \alpha, *\beta\rangle = \int_X \alpha \wedge *\beta.$$

Отметим, что $*^2=(-1)^{k(n-k)}$ на $L^k_2(X)$. Оператор δ, формально сопряженный к d, может быть определен следующим образом: $\delta=(-1)^{kn+n+1} * d *$ на формах степени k.

Пусть Γ — такой подкомплекс комплекса $W_{(2)}(X)$, что $V_{(2)}(X)\subset\Gamma$. Обозначим через $\widetilde{\Gamma}^k$ подпространство $*(\Gamma^{k-1})^{\perp}$ пространства $L^k_2(X)$. Пространства $\widetilde{\Gamma}^k$ вместе с оператором δ образуют комплекс. Оператор δ: $L^{k-1}_2(X)\to L^k_2(X)$, заданный на множестве $\widetilde{\Gamma}^{k+1}\subset L^{k+1}_2(X)$, сопряжен замкнутому оператору d: $L^k_2(X)\to L^{k+1}_2(X)$, заданному на Γ^k.

Обозначим через $\mathscr{H}^k_\Gamma$ множество форм α из $\Gamma^k\cap\widetilde{\Gamma}^k$, удовлетворяющих условиям $d\alpha=\delta\alpha=0$. Используя сопряженность операторов (d, Γ^k) и $(\delta, \widetilde{\Gamma}^{k+1})$, легко доказать следующий факт: пространство $L^k_2(X)$ разлагается в ортогональную сумму подпространств:

$$L^k_2(X) = \left[d\Gamma^{k-1}\right] \oplus \left[\delta\widetilde{\Gamma}^{k+1}\right] \oplus \mathscr{H}^k_\Gamma. \tag{10}$$

Подпространство $d\Gamma^{k-1}$ замкнуто в $L^k_2(X)$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто в $W^k_2(X)$. Следовательно, $d\Gamma^{k-1}=[d\Gamma^{k-1}]$, если $\dim H^k(\Gamma)<\infty$. Ввиду сопряженности операторов (d, Γ^k) и $(\delta, \widetilde{\Gamma}^{k+1})$ подпространство $\delta\widetilde{\Gamma}^{k+1}$ замкнуто в $L^k_2(X)$, если $\dim H^{k+1}(\Gamma)<\infty$.

Форма $\alpha\in L^k_2(X)$ является циклом комплекса Γ тогда и только тогда, когда $\alpha\in\left[d\Gamma^{k-1}\right]\oplus\mathscr{H}^k_\Gamma$. Поэтому $\overline{H}^k(\Gamma)\cong\mathscr{H}^k_\Gamma$. Аналогично, $\overline{H}^k(\widetilde{\Gamma})\cong\mathscr{H}^k_\Gamma$. Изоморфизм $\overline{H}^k(\Gamma)\cong\overline{H}^k(\widetilde{\Gamma})$ эквивалентен в рассматриваемом случае $p=2$ двойственности, указанной в теореме 2.

Используя разложение (10), легко проверить равенства

$$d\Gamma^k = d(\Gamma^k\cap\delta[\widetilde{\Gamma}^{k+1}]), \quad \delta\widetilde{\Gamma}^k = \delta(\widetilde{\Gamma}^k\cap[d\Gamma^{k-1}]), \tag{11}$$

из которых следует

Предложение 3. *Если уравнение $dx=\alpha$ имеет решение, принадлежащее Γ^k, а уравнение $\delta y=\beta$ имеет решение y, принадлежащее $\widetilde{\Gamma}^k$, то система уравнений*

$$dx=\alpha, \quad \delta x=\beta \tag{12}$$

имеет решение $x\in\Gamma^k\cap\widetilde{\Gamma}^k$.

Допустим, что каким-то образом выбраны формы $\{z_j\}$, $j\in J$, удовлетворяющие условиям: $dz_j=0$, $z_j\in\Gamma^{\perp}$, линейные комбинации элементов гомологий $[z_j]$ плотны в $\overline{H}^{n-k-1}(\Gamma^{\perp})$. Тогда для разрешимости в Γ^k уравнения $dx=\alpha$ необходимы следующие условия: $\alpha\in\Gamma^{k+1}$, $d\alpha=0$, $\int_X \alpha\wedge z_j = 0$ для всех $j\in J$. Эти условия достаточны, если $H^{k+1}(\Gamma)=\overline{H}^{k+1}(\Gamma)$ (например, если $\dim H^{k+1}(\Gamma)<\infty$). Аналогично, для разрешимости в $\widetilde{\Gamma}^k$

уравнения $\delta y = \beta$ необходимы условия: $\beta \in \widetilde{\Gamma}^{k-1}$, $\delta\beta = 0$, $\int\limits_X \beta \wedge u_j =$,
где $\{u_j\}$ — множество $(n-k+1)$-мерных циклов комплекса Г, линейные комбинации которых плотны в $\overline{H}^{n-k+1}(\Gamma)$. Эти условия достаточны, если $H^k(\Gamma) = \overline{H}^k(\Gamma)$.

Пример 2. Рассмотрим задачу $dx = \alpha$, $\delta x = \beta$ в классе $V^k_{(2)}(X)$ (т. е. в классе форм, ограничение которых на край многообразия равно 0). Пусть X — компактное многообразие. Рассмотрим комплекс $\Gamma = V_{(2)}X$. В этом случае $\Gamma^\perp = W_{(2)}X$, а условия разрешимости системы (12) в $V^k_{(2)}(X)$ принимают вид:

$$\alpha \in V^{k+1}_{(2)}(\Gamma),\ d\alpha = 0,\ \int\limits_X \alpha \wedge z_j = 0$$

$$\left(\text{соотв. } \delta\beta = 0,\ \int\limits_X \beta \wedge u_j = 0\right),$$

где циклы Z_j (соотв. u_j) образуют базу векторного пространства $H^{n-k-1}(X;\ R)$ (соотв. $H^{n-k-1}(X,\ \partial X;\ R)$).

Исследуем теперь вопрос о разрешимости системы (12) в классе форм, принимающих на ∂X заранее заданное значение [4], т. е. для заданной формы $\omega \in W^k_{(2)}(X)$ разыскивается решение x системы (12), удовлетворяющее условию $x - \omega \in V^k_{(2)}(X)$.

Разложение (10) для $\Gamma = V_{(2)}(X)$ имеет вид

$$L^k_2(X) = dV^{k-1}_2(X) \oplus \delta * W^{n-k-1}_{(2)}(X) \oplus \mathcal{H}^k_{(V)}.$$

Отметим, что $\mathcal{H}^k_V \cong H^k(V_{(2)}(X)) \cong H^k(X,\ \partial X;\ R)$. Обозначим через ω' проекцию формы ω на слагаемое $\delta * W^{n-k-1}_{(2)}(X)$. Тогда $\omega' - \omega \in V^k_{(2)}(X)$, где $\tilde{V}_{(2)}(X) = *(W_{(2)}(X))$.

Обозначив через y форму $x - \omega'$, сводим задачу к уже рассмотренной:

$$dy = \alpha - d\omega',\ \delta y = \beta - d\omega',\ y \in V^k_{(2)}(X).$$

Условия разрешимости состоят в следующем:

$$\alpha - d\omega \in V^{k+1}_{(2)}(X),\ d\alpha = 0,\ \delta\beta = 0,$$

$$\int\limits_X \alpha \wedge z_j = \int\limits_{\partial X} \omega \wedge z_j \left(\text{соотв. } \int\limits_X (*\beta) \wedge u_j = 0\right),$$

где $z_1, \ldots, z_s$ (соотв. $u_1, \ldots, u_t$) — базис векторного пространства $H^{n-k-1}(X,\ R)$ (соотв. $H^{k-1}(X,\ \partial X,\ R)$). Решение рассматриваемой задачи единственно с точностью до слагаемого из $\mathcal{H}^k_V$.

Пример 3. Пусть $\Gamma = W_{(2)}(X)$, а риманово многообразие X компактно. Разложение (10) в этом случае имеет вид

$$\begin{gathered} L^k_2(X) = dW^{k-1}_{(2)}(X) \oplus \delta * W^{n-k-1}(X) \oplus \mathcal{H}^k_W, \\ \mathcal{H}^k_W \cong H^k(W_{(2)}(X)) \cong H^k(X;\ R). \end{gathered} \tag{13}$$

Представляет интерес описание граничных условий $\alpha \in W_{(2)}(X) \cap * V_{(2)}(X)$. Обозначим через $\tilde{X}$ дубль многообразия X, т. е. многообразие, полученное склеиванием двух экземпляров X и X' многообразия X по тождественному отображению их границ. Пусть $f\colon \tilde{X} \to X$ — отображение, совпадающее на каждой половине X и X' многообразия $\tilde{X}$ с тождественным отображением. Будем называть *четным продолжением* α^+ *формы* $\alpha \in L_2(X)$ форму $f^*\alpha$, а ее *нечетным продолжением* α^- форму, совпадающую с $f^*\alpha$ на X и с $-f^*\alpha$ на X'.

Метрика многообразия $\tilde{X}$ не является гладкой. Однако пространства $L^k_2(\tilde{X})$, $W^k_{(2)}(X)$ и операторы $*$, d, δ на $\tilde{X}$ все еще определены (см., например, [5, 12]). Отображение f^* переводит $W^k_{(2)}(X)$ в $W^k_{(2)}(\widetilde{X})$. Пусть $\beta = *\alpha$. Используя лемму 5, легко установить, что $\beta \in V^{n-k}_{(2)}(X)$ тогда и только тогда, когда $\beta^- \in W^{n-k}_{(2)}(\widetilde{X})$. Так как $*(\beta^-) = (*\beta)^+$, то $\alpha \in V^{n-k}_{(2)}(X)$ тогда и только тогда, когда $\alpha^+ \in *W^{n-k}_{(2)}(\widetilde{X})$. Тем самым $\alpha \in W_{(2)}(X) \cap *V_{(2)}(X)$ тогда и только тогда, когда форма α^+ принадлежит областям определения операторов d и δ на $\widetilde{X}$.

Операция четного продолжения, примененная к разложению (13), приводит к ортогональному разложению пространства четных форм на $\widetilde{X}$ из [5].

Так же как в примере 1, с помощью предложения 3 можно выписать условия разрешимости системы (12) в классе форм $W_{(2)}(X) \cap *V_{(2)}(X)$.

Пример 4. Рассмотрим комплекс Γ, определенный следующим образом:

$$\Gamma^k = V^k_{(2)}(X) \text{ при } k < i, \quad \Gamma^k = W^k_{(2)}(X) \text{ при } k \geqslant i.$$

В этом случае $\widetilde{\Gamma}^k = *V^{n-k}_{(2)}(X)$ при $k > i$ и $\widetilde{\Gamma}^k = *W^{n-k}_{(2)}(X)$ при $k \leqslant i$. Поскольку гладкие финитные формы плотны в $V_{(2)}(X)$, то $[dV^{i-1}_{(2)}(X)] = [dD^{i-1}]$, $[\delta * V^{n-i-1}_{(2)}(X)] = [\delta D^{i+1}]$, где D^{i-1} и D^{i+1} — пространства гладких финитных форм степени $(i-1)$ и $(i+1)$ на X. Разложение (10) принимает вид

$$L^i_2(X) = [dD^{i-1}] \oplus [\delta D^{i+1}] \oplus \mathscr{H}^i; \tag{14}$$

причем $\mathscr{H}^i$ состоит из всех форм $\alpha \in W^i_{(2)}(X) \cap *W^{n-i}_{(2)}(X)$, для которых $d\alpha = 0$ и $\delta\alpha = 0$.

Формула (14) — это известное разложение Кодаиры [3].

В заключение отметим, что вычисления, приведенные в § 4, позволяют рассмотреть аналогично примерам 2—4 краевые задачи на римановых многообразиях с коническими особенностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Cheeger J.** On the Hodge theory of Rimanian pseudomanifolds.— Proc. Symp. Pure Math., 1980, v. 36, p. 91—146.
2. **Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.** Критерий устранимости множеств для пространств W^1_p, квазиконформных и квазиизометрических отображений.— Сиб. мат. журн., 1977, т. 18, № 1, с. 48—68.
3. **Kodaira K.** Harmonic fields in Rimanian manifolds (generalized potential theory).— Ann. of Math., 1949, v. 50, p. 587—665.
4. **Duff G. F., Spencer D. C.** Harmonic tensors on Rimanian manifolds with boundary.— Ann. of Math., 1952, v. 56, p. 118—157.
5. **Дезин А. А.** Инвариантные дифференциальные операторы и граничные задачи.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1962, т. 68, с. 3—88.
6. **Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.** Сопряженные пространства к пространствам дифференциальных форм.— Сиб. мат. журн., 1985, т. 26, № 6, с. 45—56.
7. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.
8. **Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.** Дифференциальные формы на липшицевом многообразии.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 2, с. 16—30.
9. **Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.** Интегральное представление интеграла дифференциальной формы.— В кн.: Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск, 1985, с. 53—87.
10. **Годеман Р.** Алгебраическая топология и теория пучков.— М.: ИЛ, 1961.
11. **Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.** Об одном свойстве операторов регуляризации де Рама.— Сиб. мат. журн., 1984, т. 25, № 2, с. 104—111.
12. **Teleman N.** The index of signature operators on Lipschitz manifolds.— Publ. Math. I. H. E. S., 1983, v. 58, p. 39—78.