Э. Р. ЦЕКАНОВСКИЙ

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И СЕКТОРИАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

В настоящей работе выделен новый класс матриц-функций, которые реализуются как характеристические матрицы-функции [1] некоторых операторов (близких к самосопряженным и являющихся сжатием). В терминах ХМФ установлен критерий того, когда заданное сжатие является θ-косекториальным сжатием [2]. Эта теорема, которая, как нам представляется, имеет и самостоятельный интерес, позволяет для минимального положительного обыкновенного дифференциального оператора $2n$-го порядка в $L_2[a, +\infty)$, имеющего индексы дефекта (n, n) (а также для минимального положительного оператора на конечном отрезке), дать полное решение остававшейся открытой задачи: как в терминах граничных условий дать описание и установить критерии существования максимальных несамосопряженных аккретивных (m-аккретивных) расширений T (граничных задач) $(\mathrm{Re}(Tx, x)\geqslant 0,\ x\in D(T))$ этого минимального оператора и дать описание (в терминах граничных условий) m-аккретивных и θ-секториальных в смысле Т. Като [3] *) граничных задач, т. е. граничных задач, для которых задача Коши

$$\frac{dx}{dt}+Tx=0,\ \ x(0)=x_0\ \ (x_0\in D(T)) \tag{1}$$

порождает сжимающую полугруппу (полугруппу, голоморфно продолженную как полугруппу сжатий в некоторый сектор комплексной плоскости).

Для оператора Штурма — Лиувилля в $L_2[a, +\infty)$

$$B_h=y''+q(x)y,\quad y'(a)=hy(a)\quad (q(x)=\overline{q(x)}) \tag{2}$$

удается получить простые формулы, позволяющие описывать в терминах параметра h все аккретивные и θ-секториальные граничные задачи, а также находить точное значение угла секториальности по заданному h.

В работе найдено также значение вещественного параметра h (оно равно $-m_\infty(0)$, где $m_\infty(\lambda)$ — функция Вейля [5]), при котором оператор B_h вида (2) порождает мягкое по М. Г. Крейну расширение соответствующего минимального оператора **). Отметим еще, что другой подход (с помощью граничных пространств) к описанию m-аккретивных расширений при условии, что минимальный оператор имеет положительную нижнюю грань, предложен в работах А. Кочубея и В. Михайлеца [6—8]. Наша работа также тесно соприкасается с исследованиями [9, 10] (см. [11, 12]).

Автор выражает благодарность Ю. М. Березанскому и всем участникам руководимого им семинара за ценные обсуждения настоящей работы.

§ 1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ θ-КОСЕКТОРИАЛЬНЫХ СЖАТИЙ

Определение. *Сжатие S в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется θ-косекториальным, если существует θ, $0<\theta<\pi/2$, такое, что*

$$\operatorname{ctg}\theta\,|(2\operatorname{Im}Sf, f)|\leqslant\|f\|^2-\|Sf\|^2,\quad f\in\mathfrak{H}. \tag{3}$$

Отметим, что неравенство (3) эквивалентно следующему: $\|S\pm i\operatorname{ctg}\theta\cdot I\|\leqslant\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\theta}$. Поэтому, если S — θ-косекториальное сжатие, то S^* — также θ-косекториальное сжатие.

*) В терминологии С. Г. Крейна — регулярно диссипативных [4].

**) М. Г. Крейн обратил наше внимание, что этот факт может быть также установлен на основе ряда его работ. Другой подход к нахождению мягкого расширения, отличный от нашего, предложен М. М. Маламудом [13] и А. В. Штраусом [14].

Как известно [8], если замкнутый линейный оператор T $(\overline{D(T)}=\mathfrak{H})$ m-аккретивен, то открытая левая полуплоскость состоит из регулярных точек оператора T.

Определение. *Аккретивный оператор T называется θ-секториальным* [3], *если существует $\theta\in(0, \pi/2)$ такое, что*

$$\operatorname{ctg}\theta|\operatorname{Im}(Tx, x)|\leqslant \operatorname{Re}(Tx, x), \quad x\in D(T). \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть T — замкнутый m-аккретивный оператор с плотной областью определения в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Оператор $S=(I-T)(I+T)^{-1}$ — θ-косекториальное сжатие тогда и только тогда, когда T — θ-секториальный оператор.*

Доказательство этой леммы проводится простым вычислением.

Пусть A — сжимающий линейный эрмитов оператор, определенный на подпространстве $D(A)$ гильбертова пространства $\mathfrak{H}$.

Определение. *Оператор $S\in[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ называется квазисамосопряженным сжимающим расширением* (*qsc-расширением*) *оператора A, если $A\subset S$, $A\subset S^*$, $\|S\|\leqslant 1$.*

Самосопряженные сжимающие расширения (*sc*-расширения) были введены и изучены М. Г. Крейном [15] в связи с задачей описания самосопряженных расширений симметрического оператора с сохранением его нижней грани. Как установлено в [15], существуют два «крайних» *sc*-расширения A_μ и A_M такие, что множество всех *sc*-расширений A образует операторный сегмент $[A_\mu, A_M]$.

Пусть B — положительный (замкнутый) эрмитов оператор с плотной областью определения. Рассмотрим оператор $A=(I-B)(I+B)^{-1}$, который является эрмитовым сжатием [15]. Пусть A_μ и A_M — два «крайних» *sc*-расширения эрмитова сжатия A. Тогда, как известно [15], операторы $B_\mu=(I-A_\mu)(I+A_\mu)^{-1}$ и $B_M=(I-A_M)(I+A_M)^{-1}$ являются положительными самосопряженными расширениями B по К. Фридрихсу и М. Г. Крейну («жесткое» и «мягкое» расширение) соответственно.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема, которая установлена в [11].

Теорема 1. *Равенство*

$$S=\frac{1}{2}(A_\mu+A_M)+\frac{1}{2}(A_M-A_\mu)^{1/2}X_S(A_M-A_\mu)^{1/2} \tag{5}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между qsc-расширениями S эрмитова сжатия A и сжатиями X_S в подпространстве $\mathfrak{R}_0=\mathfrak{R}(A_M-A_\mu)$. Для того, чтобы оператор S вида (5) *являлся θ-косекториальным qsc-расширением эрмитова сжатия A, необходимо и достаточно, чтобы X_S являлся θ-косекториальным.*

Пусть S — некоторый линейный ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$, для которого $\dim\operatorname{Im}S\mathfrak{H}<\infty$. Обозначим через $\{e_\alpha\}_1^r$ — ортонормированный базис собственных векторов оператора $\operatorname{Im}S$ в подпространстве $\operatorname{Im}S\mathfrak{H}$, отвечающих ненулевым собственным значениям. Тогда, как легко видеть,

$$\operatorname{Im}S=\sum_{\alpha=1}^{r}(\cdot, e_\alpha)w_\alpha e_\alpha=\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}(\cdot, g_\alpha)j_{\alpha\beta}g_\beta, \tag{6}$$

где $g_\alpha=\sum_{k=1}^{r}c_{\alpha k}e_k$, $J=\|j_{\alpha\beta}\|=J^*=J^{-1}$ и матрица $C=\|C_{\alpha k}\|$ не вырождена. Рассмотрим матрицу-функцию

$$V(\lambda)=\|((\operatorname{Re}S-\lambda I)^{-1}g_\alpha, g_\beta)\|. \tag{7}$$

Как известно [1], $V(\lambda)$ связана с характеристической матрицей-функцией $W(\lambda)$ оператора S следующими соотношениями:

$$V(\lambda)=i(W(\lambda)+I)^{-1}(W(\lambda)-I)J, \tag{8}$$
$$W(\lambda)=(I-iV(\lambda)J)(I+iV(\lambda)J)^{-1},$$

где

$$W(\lambda)=I-2i\|((S-\lambda I)^{-1}g_\alpha, g_\beta)\|J. \tag{9}$$

Теорема 2. *Для того, чтобы линейный ограниченный оператор S с конечномерной мнимой компонентой являлся сжатием, необходимо, а для простого S и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия.*

1. $V(\lambda)$ *голоморфна в* $\mathrm{Ext}[-1, 1]$.
2. *Матрицы* $V^{-1}(-1)=[V(-1-0)]^{-1}$, $V^{-1}(-1)=V[(1+0)]^{-1}$, $[V^{-1}(-1)-V^{-1}(1)]^{-1/2}$ *существуют, и*

$$K_J=[V^{-1}(-1)-V^{-1}(1)]^{-1/2}\{2iJ+[V^{-1}(-1)+V^{-1}(1)]\}\times \times[V^{-1}(-1)-V^{-1}(1)]^{-1/2} \tag{10}$$

является сжатием.

Сжатие S является θ-косекториальным сжатием тогда и только тогда, когда матрица (10) является θ-косекториальным сжатием, при этом, если S — θ-косекториальное сжатие, точное значение угла θ определяется из уравнения

$$\| K_J\pm i\operatorname{ctg}\theta I\|^2=1+\operatorname{ctg}^2\theta. \tag{11}$$

Доказательство. (Для скалярного случая доказательство, отличное от нашего, предложено В. А. Деркачем.) Пусть S — сжатие в $\mathfrak{H}$. Обозначим $D(A)=\mathrm{Ker}(S-S^*)$, $\mathfrak{N}=\mathfrak{R}(S-S^*)$, $\dim\mathfrak{N}<\infty$. Введем оператор $Ax=Sx$, $x\in D(A)$. Оператор S является, очевидно, qsc-расширением эрмитова сжатия A. Как известно [11], всякое qsc-расширение эрмитова сжатия представляется в виде

$$S=\frac{1}{2}(A_M+A_\mu)+\frac{1}{2}(A_M-A_\mu)^{1/2}X(A_M-A_\mu)^{1/2},$$

где X — сжатие в $\mathfrak{N}_0=\mathfrak{R}(A_M-A_\mu)\supseteq\mathfrak{N}$. Так как $\operatorname{Im}S=\frac{1}{2}(A_M-A_\mu)^{1/2}\operatorname{Im}X(A_MA_\mu)^{1/2}$ и $\mathfrak{N}=\mathfrak{R}(S-S^*)$, то $\mathfrak{R}(A_M-A_\mu)=\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_0=\mathfrak{N}$, $\mathrm{Ker}\operatorname{Im}X=0$. Нетрудно видеть, что

$$\mathfrak{R}(A_M-\tilde{A})=\mathfrak{N},\quad \mathfrak{R}(\tilde{A}-A_\mu)=\mathfrak{N},\quad \tilde{A}=\operatorname{Re}S. \tag{12}$$

Так как $\tilde{A}$ — sc-расширение эрмитова сжатия A, то согласно результатам М. Г. Крейна [15]

$$A_\mu=\tilde{A}-(I+\tilde{A})_{\mathfrak{N}},\quad A_M=\tilde{A}+(I-\tilde{A})_{\mathfrak{N}}, \tag{13}$$

где

$$(I-\tilde{A})_{\mathfrak{N}}=(I-\tilde{A})^{1/2}P_\Omega(I-\tilde{A})^{1/2} \tag{14}$$

и P_Ω — оператор ортогонального проектирования на подпространство Ω, состоящее из векторов $x\in\mathfrak{H}$, для которых $(I-\tilde{A})^{1/2}x\in\mathfrak{N}$ (определение $(I+\tilde{A})_{\mathfrak{N}}$ аналогично определению $(I-\tilde{A})_{\mathfrak{N}}$ см. в [15]). Учитывая (5), (12), (13), (14), получаем

$$\mathfrak{R}[(I-\tilde{A})^{1/2}]\supset\mathfrak{N},\ \mathfrak{R}[(I+\tilde{A})^{1/2}]\supset\mathfrak{N}. \tag{15}$$

Поэтому

$$\mathfrak{N}\cap\mathfrak{R}[(I-\tilde{A})^{1/2}]=\mathfrak{N},\ \mathfrak{N}\cap\mathfrak{R}[(I+\tilde{A})^{1/2}]=\mathfrak{N}. \tag{16}$$

Ввиду результатов работы [15] фридрихсовское A_μ и крейновское A_M расширения оператора A представляются в виде

$$A_\mu=\tilde{A}-(I+\tilde{A})_{\mathfrak{N}},\quad A_M=\tilde{A}+(I-\tilde{A})_{\mathfrak{N}}.$$

Операторы $(I+\tilde{A})_{\mathfrak{N}}$, $(I-\tilde{A})_{\mathfrak{N}}$ в силу [15] и (16) определяются по формулам

$$\begin{aligned}(I+\tilde{A})_{\mathfrak{N}}&=\sum_{j,k=1}^{r}\gamma_{jk}^{(\mu)}(\cdot,e_j)e_k,\\(I-\tilde{A})_{\mathfrak{N}}&=\sum_{j,k=1}^{r}\gamma_{jk}^{(M)}(\cdot,e_j)e_k,\end{aligned} \tag{17}$$

где матрицы $\Gamma_\mu=\|\gamma_{jk}^{(\mu)}\|$, $\Gamma_M=\|\gamma_{jk}^{(M)}\|$ являются обратными по отношению к матрицам

$$\Phi_\mu = \| [e_j, \ e_k]_\mu \|, \quad \Phi_M = \| [e_j, \ e_k]_M \| \tag{18}$$

соответственно, причем для $j, \ k = 1, 2, \ldots, r$

$$[e_j, e_k]_\mu = \int_{-1}^{1} \frac{d(E(\lambda) e_j, e_k)}{1+\lambda}, \ [e_j e_k]_M = \int_{-1}^{1} \frac{d(E(\lambda) e_j, e_k)}{1-\lambda}, \tag{19}$$

где $E(\lambda)$ — разложение единицы, соответствующее оператору $\widetilde{A}$. В силу (15) и результатов работы [15] интегралы, стоящие в правой части (19), сходятся. Поскольку $\widetilde{A}$ — сжатие, то при $\varepsilon \to 0$ $(j, \ k = 1, \ 2, \ \ldots, \ r)$

$$\begin{gathered} \int_{-1}^{1} \frac{d(E(\lambda) e_j, e_k)}{1+\varepsilon-\lambda} \to \int_{-1}^{1} \frac{d(E(\lambda) e_j, e_k)}{1-\lambda}, \\ \int_{-1}^{1} \frac{d(E(\lambda) e_j, e_k)}{1+\varepsilon+\lambda} \to \int_{-1}^{1} \frac{d(E(\lambda) e_j, e_k)}{1+\lambda}. \end{gathered} \tag{20}$$

Из соотношений (13) и (17) следует, что

$$A_M - A_\mu = \sum_{j,k=1}^{r} \left(\gamma_{jk}^{(M)} + \gamma_{jk}^{(\mu)}\right)(\cdot, e_j) e_k. \tag{21}$$

Из равенств (5), (13), (17), (21) получаем

$$S = \widetilde{A} + i \operatorname{Im} S = \widetilde{A} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{r} \left(\gamma_{jk}^{(M)} - \gamma_{jk}^{(\mu)}\right)(\cdot, e_j) e_k + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{r} d_{jk}(\cdot, e_j) e_k,$$

где матрица $D = \| d_{jk} \|$ представляется в виде

$$D = (\Gamma_M + \Gamma_\mu)^{1/2} X (\Gamma_M + \Gamma_\mu)^{1/2},$$

причем $X = \| x_{jk} \|$ — матрица оператора X в базисе $\{e_j\}_1^r$. Учитывая (6) и (21), получаем

$$i \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} (\cdot, g_\alpha) j_{\alpha\beta} g_\beta = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{r} \left(\gamma_{jk}^{(M)} - \gamma_{jk}^{(\mu)}\right)(\cdot, e_j) e_k + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{r} d_{jk}(\cdot, e_j) e_k.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$2iC^* JC = (\Gamma_M - \Gamma_\mu) + (\Gamma_M + \Gamma_\mu)^{1/2} X (\Gamma_M + \Gamma_\mu)^{1/2}, \tag{22}$$

причем матрица $C = \| c_{jk} \|$ определяется соотношением (6).

В силу (18), (19)

$$\begin{gathered} V(1+\varepsilon) = -C \left\| \int_{-1}^{1} \frac{d(E(\lambda) e_j, e_k)}{1+\varepsilon-\lambda} \right\| C^*, \\ V(-1-\varepsilon) = C \left\| \int_{-1}^{1} \frac{d(E(\lambda) e_j, e_k)}{1+\varepsilon+\lambda} \right\| C^*. \end{gathered} \tag{23}$$

Отсюда следует, что существуют $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} V(1+\varepsilon)$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} V(-1-\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, и в силу соотношений (18), (19), (20) и (23)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} V(1+\varepsilon) = -C\Phi_M C^*,\ \lim_{\varepsilon\to 0} V(-1-\varepsilon) = C\Phi_\mu C^*, \tag{24}$$

где C — матрица из (6). В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями $V(1) = V(1+0)$, $V(-1) = V(-1-0)$. В силу (24)

$$V(1) = -C\Phi_M C^*, \quad V(-1) = C\Phi_\mu C^*. \tag{25}$$

Из (18) и (25) вытекает, что матрицы $V(\pm 1)$ обратимы, и поэтому с учетом (18) получаем

$$\Gamma_M = -C^* V^{-1}(1) C, \quad \Gamma_\mu = C^* V^{-1}(-1) C. \tag{26}$$

Подставим соотношение (26) в (22):

$$\begin{gathered} C^* \{2iJ + [V^{-1}(1) + V^{-1}(-1)]\} C = \\ = \{C^*[V^{-1}(-1) - V^{-1}(1)]C\}^{1/2} X \{C^*[V^{-1}(-1) - V^{-1}(1)]C\}^{1/2}. \end{gathered} \tag{27}$$

Так как $(A_M - A_\mu)\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ (это вытекает из (5) и определения оператора A), то из (21), (25) и (26) следует, что матрица $[V^{-1}(-1) - V^{-1}(1)]$ не вырождена. Из соотношения (27) имеем

$$\begin{gathered} 2iJ + [V^{-1}(1) + V^{-1}(-1)] = \\ = \underbrace{C^{*-1}\{C^*[V^{-1}(-1) - V^{-1}(1)]C\}^{1/2}}_{P} X \underbrace{\{C^*[V^{-1}(-1) - V^{-1}(1)]C\}^{1/2} C^{-1}}_{P^*}. \end{gathered} \tag{28}$$

Учитывая указанные обозначения, получаем $PP^* = V^{-1}(-1) - V^{-1}(1)$. Отсюда

$$\begin{gathered} P^* = U(PP^*)^{1/2} = U[V^{-1}(-1) - V^{-1}(1)]^{1/2}, \\ P = [V^{-1}(-1) - V^{-1}(1)]^{1/2} U^*, \end{gathered} \tag{29}$$

где U — унитарная матрица. Поэтому

$$\begin{gathered} X = U[V^{-1}(-1) - V^{-1}(1)]^{-1/2} \{2iJ + [V^{-1}(1) + V^{-1}(-1)]\} \times \\ \times [V^{-1}(1) - V^{-1}(1)]^{-1/2} U^{-1}, \end{gathered} \tag{30}$$

т. е. $X = UK_J U^{-1}$, откуда и вытекает необходимость.

Пусть теперь выполнены условия (10). Так как $V(\lambda)$ голоморфна в $\mathrm{Ext}[-1, 1]$ и имеет вид (7), то она может быть представлена в виде [1]

$$V(\lambda) = \int_{-1}^{1} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}, \quad \lambda \in \mathrm{Ext}[-1, 1],$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая на $[-1, 1]$ матрица-функция ($d\sigma(t)$ — неотрицательная). Рассмотрим гильбертово пространство $L^\sigma_{2,r}[-1,1]$ вектор-функций $f(t) = \| f_1(t), \ldots, f_r(t) \|$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, d\sigma(t)\, g^*(t),$$

и в этом пространстве оператор

$$(\vec{B}f)(t) = tf(t) + i \int_{-1}^{1} f(t)\, d\sigma(t)\, J. \tag{31}$$

Обозначим через φ_k вектор, k-я координата которого равна единице, а все остальные — нулю. Тогда $\mathrm{Im}\,\vec{B}f = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} (f, \varphi_\alpha) j_{\alpha\beta}\varphi_\beta = \int_{-1}^{1} f(t)\, d\sigma(t)\, J$.

Поэтому, как легко видеть,

$$
\begin{gathered}
\left((\operatorname{Re}\vec{B}-\lambda I)^{-1} f\right)(t)=\frac{f(t)}{t-\lambda}\ (\lambda \in \operatorname{Ext}[-1,1]),\\
\left\|\left((\operatorname{Re}\vec{B}-\lambda I)^{-1} \varphi_\alpha, \varphi_\beta\right)\right\|=\int_{-1}^{1} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}=V(\lambda).
\end{gathered}
\tag{32}
$$

Из последнего соотношения и (8) следует, что характеристические матрицы-функции операторов $\vec{B}$ и S совпадают в окрестности бесконечно удаленной точки. Так как по условию теоремы оператор S простой [1], то он унитарно эквивалентен оператору $\vec{B}$ вида (31). Поэтому оператор $\tilde{A}=\operatorname{Re} S$ унитарно эквивалентен оператору $(\operatorname{Re}\vec{B}f)(t)=tf(t)$, действующему в пространстве $L^{\sigma}_{2,r}[-1,1]$. Из соотношений (32) следует, что спектр самосопряженного оператора $\operatorname{Re}\vec{B}$ лежит на отрезке $[-1, 1]$, и поэтому оператор $\operatorname{Re} B$ является сжатием, а стало быть, сжатием является оператор $\tilde{A}$, т. е. $\|\tilde{A}\| \leqslant 1$. Поскольку существуют $V(1+0)=V(1)$, $V(-1-0)=V(-1)$, то из (20) и (23) с применением теоремы о монотонной сходимости вытекает, что

$$
\int_{-1}^{1} \frac{d(E(\lambda)\varphi,\varphi)}{1\pm\lambda}<\infty,\quad \varphi\in\mathfrak{R}. \tag{33}
$$

По теореме М. Г. Крейна [15] $\tilde{A}\neq A_\mu$ и $\tilde{A}\neq A_M$. Из (33) (см. также [15]) следует, что подпространство $\mathfrak{R}$ удовлетворяет соотношениям (15). Поэтому имеют место соотношения (13) и (17) (см. [15]). Поскольку по условию теоремы матрица K_J вида (10) является сжатием, то сжатием будет и матрица X вида (30), где унитарная матрица U берется из полярного представления матрицы P, определяемой в (28). Кроме того, матрица $[V^{-1}(-1)-V^{-1}(1)]$ не вырождена (по условию), поэтому справедливо (21) и $(A_M-A_\mu)\mathfrak{R}=\mathfrak{R}$. Рассмотрим теперь оператор $\frac{1}{2}(A_M+A_\mu)+\frac{1}{2}(A_M-A_\mu)^{1/2}X(A_M-A_\mu)^{1/2}$, где оператор X в базисе $\{e_k\}_1^r$ задается с помощью матрицы X вида (30). Оператор X является сжатием, и, стало быть, по доказанному ранее правая часть равенства (5) также будет сжатием. Проведя выкладки в обратном порядке (см. доказательство необходимости), получим, что оператор S совпадает с правой частью (5) и, следовательно, является сжатием.

Если матрица (10) является θ-косекториальным сжатием, то, учитывая, что оператор S является θ-косекториальным сжатием тогда и только тогда, когда в (5) оператор X — θ-косекториальное сжатие, получаем (проведя аналогичные выкладки) достаточность. Поскольку условие (3) θ-косекториальности сжатия S, как легко видеть, эквивалентно условию $\|S\pm i\operatorname{ctg}\theta\cdot I\|\leqslant\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\theta}$, то в силу (5) и (30) получим соотношение (11). Теорема доказана.

Пример. Пусть $\alpha(x)$ — неубывающая функция на $[0, l]$. Рассмотрим оператор

$$
(S_\alpha f)(x)=\alpha(x)f(x)+i\int_x^l f(t)\,dt,\quad f\in L_2[0,l),\quad l>0, \tag{34}
$$

действующий в гильбертовом пространстве $L_2[0, l]$. Легко видеть, что

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Im} S_\alpha f=\frac{1}{2}\int_0^l f(t)\,dt=(f,g)\,g,\quad g(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}},\\
\operatorname{Re} S_\alpha f=\alpha(x)f(x)+\frac{i}{2}\int_x^l f(t)\,dt-\frac{i}{2}\int_0^x f(t)\,dt.
\end{gathered}
\tag{35}
$$

Используя (35), простыми вычислениями получим

$$V_\alpha(\lambda) = \left((\operatorname{Re} S_\alpha - \lambda I)^{-1} g, g\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \frac{dt}{\alpha(t)-\lambda}\right). \tag{36}$$

Положим $\alpha(x) \equiv 0$ и рассмотрим оператор

$$(S_0 f)(x) = i\int_x^l f(t)\,dt.$$

Из (36) следует, что

$$V(1) = V_0(1) = -\operatorname{tg}(l/2), \quad V(-1) = V_0(-1) = \operatorname{tg}(l/2). \tag{37}$$

Поскольку в данном случае $J = 1$ и оператор S_0 является простым [1], то, применяя теорему (2), найдем те значения l, при которых число $K_J = K$ вида (10) по модулю не превосходит единицы. Имеем

$$K = \frac{2i + V^{-1}(1) + V^{-1}(-1)}{V^{-1}(-1) - V^{-1}(1)} = \frac{V(-1) + V(1) + 2iV(-1)V(1)}{V(1) - V(-1)}. \tag{38}$$

Учитывая (37), получаем $\operatorname{tg}^4 l/2 - \operatorname{tg}^2 l/2 \leqslant 0$. Из (16) и последнего неравенства следует, что

$$0 < l \leqslant \pi/2. \tag{39}$$

Таким образом, согласно теореме 2 оператор интегрирования S_0 в $L_2[0, l]$ является θ-косекториальным сжатием тогда и только тогда, когда $0 < l < \pi/2$. Пусть оператор S_0 — θ-косекториальное сжатие. Найдем точное значение угла косекториальности θ. Согласно теореме 2 K вида (10) должно быть θ-косекториальным сжатием. Точное значение угла θ для числа k, очевидно, вычисляется по формуле $\operatorname{ctg}\theta = (1 - |k|^2)/|2\operatorname{Im} k|$. Учитывая (38), получаем

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{1 + V(1)V(-1)}{|V(1) - V(-1)|} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{l}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{l}{2}} = \operatorname{ctg} l.$$

Следовательно, точное значение угла θ-косекториальности равно $\theta = l$.

Замечание 1. Мы попутно получили, что если S — θ-косекториальное сжатие с одномерной мнимой компонентой, то точное значение угла θ вычисляется по формуле

$$\theta = \operatorname{arcctg}\frac{1 + V(1)V(-1)}{|V(-1) - V(1)|}, \tag{40}$$

где $V(\lambda)$ — дробно-линейное преобразование (8) характеристической функции $W(\lambda)$ оператора S.

Пусть B — замкнутый, плотно определенный, эрмитов оператор с индексами дефекта (r, r), $r < \infty$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Рассмотрим $\mathfrak{H}_+ = D(B^*)$ со скалярным произведением $(x, y)_+ = (x, y) + (B^*x, B^*y)$, и построим оснащение $\mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_-$ (см. [16]). Пусть оператор T, у которого (-1) — регулярная точка, удовлетворяет условию $B \subset T \subset B^*$. Оператор $\mathbf{A} \in [\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-]$ будем называть $(*)$-*расширением* T, если $\mathbf{A} \supset T$, $\mathbf{A}^* \supset T^*$. Оператор $\mathbf{A}$ будем называть *корректным* (*регулярным*) $(*)$-*расширением* T, *если* $\operatorname{Re}\mathbf{A} \supset \tilde{B}$, где $\tilde{B}$ — самосопряженное расширение B (без выхода из пространства) (см. [17]). Как известно, оператор $\mathbf{A}$ можно так включить в операторный оснащенный узел

$$\xi = (\mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_-, \mathbf{A}, K, J, E), \quad \dim E < \infty, \tag{41}$$

чтобы операторы $K \in [E, \mathfrak{H}_-]$ и $K^*|_{(M+I)\mathfrak{N}_i} \in [\mathfrak{H}_+, E]$*) были обратимы.

---

*) $\mathfrak{N}_{\pm i}$ — дефектные подпространства B, M — ограниченный оператор из $\mathfrak{N}_i$ в $\mathfrak{N}_{-i}$, с помощью которого по формуле $f = g + x + Mx$ $(g \in D(B),\ x \in \mathfrak{N}_i)$ определяется $D(T)$ (см. [12]).

Характеристическая функция узла ξ определяется по формуле

$$W(\lambda)=I-2iK^*(\mathrm{A}-\lambda I)^{-1}KJ. \tag{42}$$

Положим, далее,

$$S=(I-T)(I+T)^{-1}. \tag{43}$$

Теорема 3. *Пусть ξ — операторный узел вида* (41), *в который включено корректное* $(*)$*-расширение оператора* T. *Тогда оператор* S *вида* (43) *можно включить в такой операторный узел*

$$\eta=(\mathfrak{H},\ S,\ \tilde{K},\ \tilde{J},\ E),\quad \tilde{J}=-J, \tag{44}$$

что его характеристическая оператор-функция

$$\Theta(\lambda)=I-2i\tilde{K}^*(S-\lambda I)^{-1}\tilde{K}\tilde{J} \tag{45}$$

вместе с характеристической оператор-функцией $W(\lambda)$ *узла* ξ *удовлетворяет соотношению*

$$W(-1)\Theta(\lambda)=W\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right). \tag{46}$$

Эта теорема доказывается прямым вычислением.

Следствие. *Пусть* $\{a_\alpha\}_1^r$ — *ортонормированный базис в пространстве* E *и* $\mathcal{J}=\|(Ja_\alpha,\ a_\beta)\|$. *Тогда имеет место следующее матричное равенство:*

$$[I-2i\|((\mathrm{A}+I)^{-1}\varphi_\alpha,\ \varphi_\beta)\|\mathcal{J}]\,[I-2i\|((S-\lambda I)^{-1}g_\alpha,\ g_\beta)\|\mathcal{J}]=$$

$$=I-2i\left\|\left(\left(\mathrm{A}-\frac{1-\lambda}{1+\lambda}I\right)^{-1}\varphi_\alpha,\ \varphi_\beta\right)\right\|\mathcal{J},$$

где

$$\varphi_\alpha=Ka_\alpha,\quad g_\alpha=\sqrt{2}(I+\mathrm{A})^{-1}\varphi_\alpha,\quad \tilde{\mathcal{J}}=-\mathcal{J},\quad \alpha=1,\ \ldots,\ r. \tag{47}$$

§ 2. ОПИСАНИЕ АККРЕТИВНЫХ И СЕКТОРИАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим в $L_2[a,\ +\infty)$ самосопряженную квазидифференциальную операцию

$$l(y)=(-1)^n(p_0y^{(n)})^{(n)}+\ldots+p_ny,$$

где $p_0^{-1}(x)$, $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ — локально суммируемые функции на $[a,+\infty)$. Обозначим через D^* множество тех функций $y(x)\in L_2[a,+\infty)$, для которых последовательно составляемые квазипроизводные $y^{[k]}(x)$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1$, абсолютно непрерывны, и $y^{[2n]}=l(y)\in L_2[a,+\infty)$ (см. [15]). Будем предполагать, что симметрический оператор

$$By=l(y), \tag{48}$$

$$y^{[k-1]}(a)=0,\quad y(x)\in D^*,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n,$$

имеет индексы дефекта $(n,\ n)$. Рассмотрим операторы

$$\begin{cases} Ty=l(y),\\ \sum\limits_{k=1}^{2n}u_{jk}y^{[k-1]}(a)=0,\end{cases}\qquad \begin{cases} T^*y=l(y),\\ \sum\limits_{k=1}^{2n}u_{*jk}y^{[k-1]}(a)=0,\quad y\in D^*,\ j=1,\ \ldots,\ n.\end{cases} \tag{49}$$

Легко видеть, что $B\subset T$, $T^*\subset B^*$. Будем предполагать также, что $D(B)=D(T)\cap D(T^*)$ и оператор T имеет непустое множество регулярных точек $\rho(T)$. Как известно [15], $B^*y=l(y)$, $y\in D^*$. Введем в множестве $\mathfrak{H}_+=D(B^*)=D^*$ скалярное произведение $(y,z)_+=(y,z)+(B^*y,B^*z)$ и построим оснащение $\mathfrak{H}_+\subset L_2[a,+\infty)\subset\mathfrak{H}_-$. Рассмотрим систему элементов

$\{u_j\}_1^n$, $\{u_{*j}\}_1^n \in \mathfrak{H}_-$, порождающих функционалы

$$(f,\ u_j) = \sum_{k=1}^{2n} u_{jk} f^{[k-1]}(a),$$
$$(f,\ u_{*j}) = \sum_{k=1}^{2n} u_{*jk} f^{[k-1]}(a),\quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{50}$$

Пусть $\{V_j\}_1^n \in \mathfrak{H}_-$ — система элементов, линейно независимая с $\{u_j\}_1^n$ и порождающая функционалы

$$(f,\ V_j) = \sum_{k=1}^{2n} u_{jk} f^{[k-1]}(a),\quad j = 1, \ldots, n, \tag{51}$$

причем оператор

$$\tilde{B}y = l(y),\qquad (y,\ V_j) = 0,\quad j = 1, \ldots, n \tag{52}$$

является самосопряженным в $L_2[a, +\infty)$. Несколько видоизменив рассуждения из [17], получим следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть T — дифференциальный оператор вида (49) и $\rho(T) \neq \varnothing$. Тогда формула*

$$\mathrm{A}y = l(y) + \sum_{k,j=1}^{n} (y,\ u_j)\, c_{kj} v_k,$$
$$\mathrm{A}^* y = l(y) + \sum_{k,j=1}^{n} (y,\ u_{*j})\, d_{kj} v_k \tag{53}$$

устанавливает биективное соответствие между совокупностью корректных (*)-расширений оператора T и совокупностью матриц $V = \|v_{jk}\|$, удовлетворяющих условиям (51), (52), где обратимые матрицы $C = \|c_{kj}\|$ и $D = \|d_{kj}\|$ однозначно определяются по матрицам $U = \|u_{jk}\|$, $U_* = \|u_{*jk}\|$, из соотношения

$$U_*^* D^* V - V^* C U = \begin{pmatrix} 0 & I_\uparrow \\ -I_\uparrow & 0 \end{pmatrix} \left(\pm I_\uparrow = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \ldots, & \pm 1 \\ \pm 1, & 0, & \ldots, & 0 \end{pmatrix} \right). \tag{54}$$

Предположим, что A таково, что $\operatorname{Im} \mathrm{A} = \sum_{k,1=j}^{n} (\cdot,\ v_k)\, j_{kj} v_j$, где матрица $\mathcal{J} = \|j_{kj}\|$ является эрмитовой и унитарной. Приведем без доказательства необходимый результат из [17] в несколько ином виде.

Теорема 5. *При любом $\lambda \in \rho(T)$ справедливо соотношение*

$$W_{\mathrm{A}}(\lambda) = I - 2i \left\| \left((\mathrm{A} - \lambda I)^{-1} V_\alpha,\ V_\beta \right) \right\| \mathcal{J} = C'^{-1} U(\lambda)\, U_*(\lambda)\, D',$$
$$U(\lambda) = \| (\varphi_i,\ U_j) \|,\quad U_*(\lambda) = \| (\varphi_i,\ U_{*j}) \| \tag{55}$$

где матрицы D и C удовлетворяют соотношению (54), D', C' — транспонированные к D, C, $l(\varphi_i) = \lambda\varphi_i$, $\varphi_i(x,\ \lambda) \in L_2[a, +\infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пример. Пусть $\mathfrak{H} = L_2[a, +\infty)$ и $l(y) = -y'' + q(x)y$, где $q(x)$ — вещественная локально суммируемая функция. Предположим, что минимальный эрмитов оператор

$$\dot{B}y = -y'' + q(x)y,\qquad y(a) = y'(a) = 0 \tag{56}$$

имеет индексы дефекта (1, 1). Пусть $\varphi_k(x, \lambda)$, $k = 1, 2$ — решения задач Коши:

$$l(\varphi_1) = \lambda\varphi_1,\quad l(\varphi_2) = \lambda\varphi_2,$$
$$\varphi_1(a,\ \lambda) = 0,\quad \varphi_2(a,\ \lambda) = -1, \tag{57}$$
$$\varphi_1'(a,\ \lambda) = 1,\quad \varphi_2'(a,\ \lambda) = 0.$$

Тогда существует функция Вейля $m_\infty(\lambda)$ [5] такая, что $\varphi(x, \lambda) = \varphi_2(x, \lambda) + m_\infty(\lambda)\varphi_1(x, \lambda) \in L_2[a, +\infty)$, т. е. $\varphi(x, \lambda) \in \mathfrak{N}_\lambda$, где $\mathfrak{N}_\lambda$ — дефектное подпространство оператора B. Рассмотрим $\mathfrak{H}_+ = D(B^+)$ со скалярным произведением $(f, g)_+ = (f, g) + (B^*f, B^*g)$ и построим оснащение $\mathfrak{H}_+ \subset L_2[a, +\infty) \subset \mathfrak{H}_-$. Пусть U, U_*, $V \in \mathfrak{H}_-$, причем

$$\begin{gathered}(f, V) = (\operatorname{Im} h)^{1/2}/|\mu - h|[\mu f(a) - f'(a)],\\ \operatorname{Im} h > 0, \quad \operatorname{Im}\mu = 0,\\ v = \mu\delta(x-a) + \delta'(x-a),\\ (f, u) = hf(a) - f'(a), \quad (f, u_*) = \bar{h}f(a) - f'(a).\end{gathered} \tag{58}$$

Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} T_h f &= -f'' + q(x) f, & T_h^* f &= -f'' + q(x) f,\\ (f, u) &= 0, & (f, u_*) &= 0, \end{aligned} \tag{59}$$

а также $\tilde{B}f = -f'' + q(x)f$, $(f, v) = 0$. Легко видеть, что $\tilde{B} = \tilde{B}^*$ и $D(\tilde{B}) \cap D(T_h) = D(B)$. Согласно теореме (4) корректное $(*)$-расширение $\mathbf{A}$ оператора T_h можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{A}f &= -f'' + q(x)f + \frac{1}{\mu - h}[f'(a) - hf(a)][\mu\delta(x-a) + \delta'(x-a)],\\ \mathbf{A}^*f &= -f'' + q(x)f + \frac{1}{\mu - \bar{h}}[f'(a) - \bar{h}f(a)][\mu\delta(x-a) + \delta'(x-a)].\end{aligned} \tag{60}$$

В силу теоремы 5

$$W_{\mathbf{A}}(\lambda) = 1 - 2i\left((\mathbf{A} - \lambda I)^{-1} v, v\right)\mathcal{J} = \frac{\mu - h}{\mu - \bar{h}}\,\frac{m_\infty(\lambda) + \bar{h}}{m_\infty(\lambda) + h}, \quad \mathcal{J} = -1. \tag{61}$$

Пусть B — плотно заданный замкнутый эрмитов оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с равными дефектными числами.

Определение. *Замкнутый в $\mathfrak{H}$ оператор $T(\overline{D(T)} = \mathfrak{H})$ называется простым, если не существует приводящего подпространства $\mathfrak{H}_1$, на котором он индуцировал самосопряженный оператор.*

Лемма 2. *Оператор B прост тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N} = \bigvee_{\lambda \neq \bar{\lambda}} \mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{N}_\lambda$ — дефектное подпространство оператора B.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{M} = \bigcap_{\lambda \neq \bar{\lambda}} \mathfrak{M}_\lambda$, где $\mathfrak{M}_\lambda = (B - \lambda I)D(B)$. Легко видеть, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}$. Покажем, что

$$(B - zI)^{-1}\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap D(B)$$

при $z \neq \bar{z}$. Пусть $\tilde{B}$ — произвольное самосопряженное расширение B. Рассмотрим оператор $U_{\zeta z} = (\tilde{B} - \zeta I)(\tilde{B} - zI)^{-1}$. Известно, что $U_{\zeta z}\mathfrak{N}_\zeta = \mathfrak{N}_z$. Пусть $h \in \mathfrak{M}$, тогда для любого $f_\zeta \in \mathfrak{N}_\zeta$ при $\zeta \neq \bar{z}$

$$\left((B - zI)^{-1} h, f_\zeta\right) = \left(h, (\tilde{B} - \bar{z}I)^{-1} f_\zeta\right) = \frac{1}{z - \bar{\zeta}}\left[\left(h, U_{\zeta\bar{z}}f_\zeta\right) - (h, f_\zeta)\right] = 0.$$

При $\zeta = \bar{z}$, учитывая, что $U_{\bar{z}\zeta} \to I$ при $\zeta \to \bar{z}$, получаем

$$\left((B - zI)^{-1} h, f_{\bar{z}}\right) = \lim_{\zeta \to \bar{z}}\left((B - zI)^{-1}h, U_{\bar{z}\zeta}f_{\bar{z}}\right) = 0.$$

Таким образом, $(B - zI)^{-1}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M} \cap D(B)$. Обратно, если $f \in \mathfrak{M} \cap D(B)$, то $h = (B - \zeta I)f = (B - zI)f + (z - \zeta)f \in \mathfrak{M}_z$. Покажем теперь, что $\overline{\mathfrak{M} \cap D(B)} = \mathfrak{M}$. Действительно, пусть $f \in \mathfrak{M}$, $f \perp \mathfrak{M} \cap D(B)$. Тогда $(f, g) = 0$ $\forall g \in \mathfrak{M} \cap D(B)$. Как было показано выше, существует $h \in \mathfrak{M}$, что $g = (B - \bar{z}I)^{-1}h$. Так как $f \in \mathfrak{M}$, то $f = (B - zI)f_0$, где $f_0 \in \mathfrak{M} \cap D(B)$. Поэтому $(f_0, h) = 0$ $\forall h \in \mathfrak{M}$. Отсюда $f = f_0 = 0$. Легко видеть, что $B|_{\mathfrak{M} \cap D(B)}$ является самосопряженным оператором в $\mathfrak{M}$, ибо, как было показано выше, $(B - zI)(\mathfrak{M} \cap D(B)) = \mathfrak{M}$ при любых $z \neq \bar{z}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если B — максимальная эрмитова часть T и T^*, то простота T эквивалентна простоте оператора B.*

Лемма 4. *Пусть $\rho(T)\cap\mathbb{C}_+$ и $\rho(T)\cap\mathbb{C}_-$ не пусты. Тогда простота оператора T эквивалентна условию $\bigvee_{\lambda\in\rho(T)}\mathfrak{R}_\lambda=\mathfrak{H}$.*

Доказательство лемм 3, 4 проводится аналогично доказательству леммы 2.

Теорема 6. *Пусть B — минимальный дифференциальный оператор вида (48) — положителен. Для того, чтобы дифференциальный оператор T вида (49) был аккретивным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия.*

1. *Матрица-функция $Q(\lambda_1)=-i[W^{-1}(-1)W(\lambda)+I]^{-1}[W(-1)W(\lambda)-I]\mathcal{J}$, где $W(\lambda)$ имеет вид (55), голоморфна в* Ext $[0,+\infty)$.

2. *Матрицы $Q^{-1}(0)$, $Q^{-1}(-\infty)$, $[Q^{-1}(-\infty)-Q^{-1}(0)]^{-1/2}$ существуют*), и матрица*

$$K_{-\mathcal{J}}=[Q^{-1}(-\infty)-Q^{-1}(0)]^{-1/2}\{-2i\mathcal{J}+[Q^{-1}(-\infty)+Q^{-1}(0)]\}\times$$
$$\times[Q^{-1}(-\infty)-Q^{-1}(0)]^{-1/2} \tag{62}$$

является сжатием.

Аккретивный оператор T вида (49) θ-секториален тогда и только тогда, когда $K_{-\mathcal{J}}$ вида (62) является θ-косекториальным сжатием. Если оператор T θ-секториален, то точное значение угла θ определяется из уравнения

$$\|K_{-\mathcal{J}}\pm i\operatorname{ctg}\theta\cdot I\|^2=1+\operatorname{ctg}^2\theta. \tag{63}$$

Доказательство. Поскольку (-1) — точка регулярного типа для B и оператор B имеет конечные индексы дефекта, то (-1) — регулярная точка для дифференциального оператора T вида (49). Рассмотрим дробно-линейное преобразование оператора T, т. е. $S=(I-T)(I+T)^{-1}$. Как было показано в лемме 1, оператор S является θ-косекториальным сжатием тогда и только тогда, когда T — θ-секториальный оператор. Из формулы обращения и леммы 3 получаем простоту оператора T. Но тогда простым будет и оператор S. Учитывая соотношения (8), (10), (46), а также лемму 1 и теорему 2, получаем утверждение теоремы.

Для оператора Штурма — Лиувилля теорема 6 принимает следующий вид

Теорема 7. *Для того чтобы оператор Штурма — Лиувилля T_h, $\operatorname{Im}h>0$, вида (59) был аккретивным в $L_2[a,+\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$V_h(\lambda)=-i\,\frac{1-\left[(m_\infty(\lambda)+\bar h)/(m_\infty(\lambda)+h)\right]\left[(m_\infty(-1)+h)/(m_\infty(-1)+\bar h)\right]}{1+\left[(m_\infty(\lambda)+\bar h)/(m_\infty(\lambda)+h)\right]\left[(m_\infty(-1)+h)/(m_\infty(-1)+\bar h)\right]} \tag{64}$$

была голоморфна в Ext $[0,+\infty)$, $V_h(0)\neq0$, $V_h(-\infty)\neq0$, $V_h(0)\neq V_h(-\infty)$, *и*

$$1+V_h(0)V_h(-\infty)\geqslant0. \tag{65}$$

Аккретивный оператор T_h, $\operatorname{Im}h>0$, θ-секториален при каком-либо $\theta\in(0,\pi/2)$ тогда и только тогда, когда имеет место строгое неравенство в (65). Если оператор T_h θ-секториален, то точное значение угла θ определяется из соотношения

$$\theta=\operatorname{arcctg}\frac{1+V_h(0)V_h(-\infty)}{|V_h(-\infty)-V_h(0)|}. \tag{66}$$

---

*) Здесь и в дальнейшем $Q^{-1}(0)$, $Q^{-1}(-\infty)$ понимаются как $Q^{-1}(0)=[Q(-0)]^{-1}$, $Q^{-1}(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}Q^{-1}(x)$ вдоль вещественной оси, $\mathcal{J}=\mathcal{J}^*=\mathcal{J}^{-1}$ и определяется из (53), (54).

Соотношения (65) и (66) сразу же следуют из теоремы 3 и замечания 1 к теореме 2.

Рассмотрим оператор Штурма — Лиувилля вида (56). Согласно теореме 4 совокупность всех самосопряженных (сильных) бирасширений представляется в виде $A_{\mu h}f = B^*f + (f, u)cv$, где

$$(f, U) = f(a) - hf'(a),$$
$$(f, V) = \mu f(a) - f'(a), \quad f \in D(B^*), \quad u, v \in \mathfrak{H}_{-1}, \tag{67}$$
$$B^*f = f'' + q(x)f,$$

причем число c удовлетворяет соотношениям (54). Из (67) следует, что матрицы $\|u_{jk}\|$ и $\|v_{jk}\|$ равны $\|u_{jk}\| = \|1, -h\|$, $\|v_{jk}\| = \|\mu, -1\|$ соответственно. Подставляя их в (54) с учетом $D^* = \overline{C}$, $U_* = U$, получаем

$$A_{\mu h}f = -f'' + q(x)f + \frac{1}{h\mu - 1}(f, u)v,$$
$$v = \mu\delta(x-a) + \delta'(x-a). \tag{68}$$

Пусть $\{\varphi_k(x, \lambda)\}_1^2$ удовлетворяют соотношениям (57). Как уже указывалось, $\varphi(x, \lambda) = \varphi_2(x, \lambda) + m_\infty(\lambda)\varphi_1(x, \lambda) \in L_2[a, +\infty)$. Рассмотрим уравнение относительно неизвестной функции $\psi(x, \lambda)$:

$$(A_{\mu h} - \lambda I)\psi(x, \lambda) = v.$$

Простым вычислением найдем

$$\left((A_{\mu h} - \lambda I)^{-1} v, v\right) = \frac{1 - h\mu}{1 + hm_\infty(\lambda)}[-\mu - m_\infty(\lambda)]. \tag{69}$$

Положим в (69) $h = 0$, $\mu = -m_\infty(0)$ (в предположении, что $m_\infty(0) < \infty$). Тогда, пользуясь обозначением

$$Q_\mu(\lambda) = \left((A_{-m_\infty(0),0} - \lambda I)^{-1} v, v\right) = m_\infty(0) - m_\infty(\lambda), \tag{70}$$

получаем, что функция $Q_\mu(\lambda)$ вида (70) удовлетворяет всем условиям так называемой Q_μ-функции, в частности, $Q_\mu(x) \to -\infty$ (монотонно) при $x \to -\infty$ на вещественной оси (см. [18]). Поэтому $m_\infty(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$ (монотонно).

Теорема 8. *Для того чтобы положительный оператор Штурма — Лиувилля B вида (56) допускал несамосопряженные аккретивные (θ-секториальные при каком-либо $\theta \in (0, \pi/2)$) расширения T_h вида (59), необходимо и достаточно, чтобы $m_\infty(0) < \infty$.*

Доказательство. Пусть $m_\infty(0) < \infty$. Обозначим $m_\infty(0) = b$, $m_\infty(-1) = d$. Выясним сначала, при каких h, $\operatorname{Im} h > 0$, справедливо неравенство (65). В силу (64)

$$1 + V_h(0)V_h(-\infty) = 1 + \frac{(\operatorname{Im} h)^2 (b-d)}{[bd + (b+d)\operatorname{Re} h + h\bar{h}](d + \operatorname{Re} h)}. \tag{71}$$

Полагая $h = x + iy$, ввиду (71) получаем

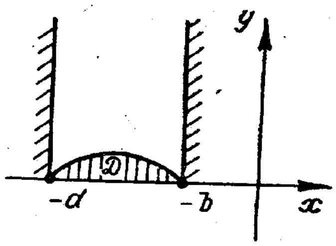
$$1 + V_h(0)V_h(-\infty) = f(x, y)/g(x, y) =$$
$$= \frac{[bd + (b+d)x + x^2 + y^2](d+x) + (b-d)y^2}{[bd + (b+d)x + x^2 + y^2](d+x)}. \tag{72}$$

Перепишем числитель и знаменатель дроби (72) в виде

$$f(x, y) = x^2(b + 2d + x) + y^2(b + x) + (2bd + d^2)x + bd^2,$$
$$g(x, y) = x^2(x + b + 2d) + y^2(x + d) + (2bd + d^2)x + bd^2. \tag{73}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + (b + 2d)x^2 + (2bd + d^2)x + bd^2$. Легко видеть, что $f(x, y) = f(x) + y^2(b + x)$, $g(x, y) = f(x) + y^2(x + d)$. Поэтому область $\mathscr{D}$, где справедливо неравенство $f(x, y)/g(x, y) > 0$, имеет вид

(см. заштрихованную часть)



Проверим далее голоморфность функции $V_h(\lambda)$ в полученной области. Покажем, что голоморфность $V_h(\lambda)$ нарушается в части области $\mathscr{D}$, расположенной в $\operatorname{Re} h < -b$. Для этого достаточно показать, что всегда найдется такое $\lambda \in \operatorname{Ext}[0, +\infty)$, что в этой области

$$1+\frac{m_\infty(\lambda)+\bar{h}}{m_\infty(\lambda)+h}\,\frac{d+h}{d+\bar{h}}=0. \tag{74}$$

Равенство (74) эквивалентно следующему:

$$Q_\mu(\lambda)=m_\infty(0)-m_\infty(\lambda)=b-\frac{-x^2-y^2-dx}{d+x}=\frac{x^2+(b+d)\,x+bd+y^2}{d+x}. \tag{75}$$

Простой проверкой легко убедиться в том, что дробь $(x^2+(b+d)x+bd+$ $+y^2)/(d+x)$, рассматриваемая в заштрихованной области $\mathscr{D}$, отрицательна тогда и только тогда, когда x и y принадлежат этой области. Поскольку Q_μ — функция отрицательная на отрицательной полуоси [18], то уравнение (75) разрешимо относительно λ (в силу монотонности на отрицательной полуоси). Таким образом, только в области

$$\operatorname{Re} h \geqslant -m_\infty(0), \quad \operatorname{Im} h > 0, \tag{76}$$

функция $V_h(\lambda)$ голоморфна и выполняется неравенство (65). Значит, по теореме 7 любое h из области (76) порождает аккретивное расширение T_h оператора B. Учитывая (64) и (71), получаем

$$\frac{1+V_h(0)\,V_h(-\infty)}{V_h(-\infty)-V_h(0)}=\frac{m_\infty(0)+x}{y}=\frac{m_\infty(0)+\operatorname{Re} h}{\operatorname{Im} h}.$$

Таким образом, мы показали, что если при данном h, $\operatorname{Im} h > 0$, оператор T_h вида (59) является θ-секториальным, то точное значение угла секториальности θ определяется так, как указано в (66). Обратное утверждение следует из (66). Теорема доказана.

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 8, вытекает

Теорема 9. *Если аккретивный оператор Штурма — Лиувилля* T_h, $\operatorname{Im} h > 0$, *вида* (59) θ-*секториален, то*

$$\theta=\operatorname{arcctg}\frac{\operatorname{Re} h+m_\infty(0)}{\operatorname{Im} h} \quad (\operatorname{Re} h > -m_\infty(0)). \tag{77}$$

Значение угла θ *является точным в том смысле, что его нельзя, вообще говоря, уменьшить в неравенстве, с помощью которого определяется* θ-*секториальный оператор. Обратно, если* h, $\operatorname{Im} h > 0$, *таково, что* $\operatorname{Re} h+$ $+m_\infty(0)>0$, *то оператор* T_h *вида* (59) θ-*секториален, где* θ *определяется с помощью* (77).

Замечание 2. Поскольку, как легко видеть, $T_h^*=T_{\bar{h}}$, то все аккретивные и θ-секториальные (при каком-либо $\theta \in (0, \pi/2)$) операторы T_h (несамосопряженные) описываются теми и только теми значениями комплексного параметра h, для которых $\operatorname{Re} h \geqslant -m_\infty(0)$.

Замечание 3. Поскольку числовой образ θ-секториального оператора T_h расположен в секторе $|\arg \zeta| \leqslant \theta$, то спектр T_h также лежит в этом секторе. Поэтому из формулы (77) видно, как с помощью граничного параметра h «управлять» спектром.

Замечание 4. Выясним, при каком (вещественном) значении параметра h оператор T_h вида (59) порождает мягкое по М. Г. Крейну расширение B. Пусть $h \neq \bar{h} \in \operatorname{Re} h = -m_\infty(0)$. Тогда оператор $(I-T_h)\times \times(I+T_h)^{-1}$ является сжатием (по доказанному в теореме 8). Учитывая соотношение (5), получаем

$$(I - T_h)(I + T_h)^{-1} = \frac{1}{2}(A_M + A_\mu) + \frac{1}{2}x(h)(A_M - A_\mu),$$

где $|x(h)| \leqslant 1$ при любых h из области $\operatorname{Re} h = -m_\infty(0)$. Так как правая часть при $x(h) = 1$ совпадает с мягким по М. Г. Крейну сжатием A_M, то при $h = -m_\infty(0)$ оператор T_h порождает мягкую по М. Г. Крейну граничную задачу. Таким образом, совокупность всех положительных самосопряженных расширений положительного оператора B вида (56) задается операторами T_h вида (59) при условии, что h вещественно и $h \geqslant -m_\infty(0)$.

Рассмотрим оператор Бесселя

$$By = -y'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}y, \quad \nu \geqslant \frac{1}{2}, \quad \nu = \frac{2m-1}{2},$$

$$y(1) = y'(1) = 0.$$

Можно показать, что $m_\infty(0) = \nu$. Можно показать также, что для всякого несамосопряженного m-аккретивного и одновременно θ-секториального расширения T простого положительного оператора $B(B \subset T \subset B^*, D(B) = D(T) \cap D(T^*))$ решение задачи Коши (1) стремится к нулю при $t \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бродский М. С., Лившиц М. С.** Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы.— Успехи мат. наук, 1958, т. 8, № 1, с. 1—85.
2. **Цекановский Э. Р.** Расширения Фридрихса и Крейна положительных операторов и голоморфные полугруппы сжатий.— Функцион. анализ и его прил., 1981, т. 15, № 4, с. 91—93.
3. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.
4. **Крейн С. Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1967.
5. **Павлов Б. С.** Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов.— В кн.: Труды VII зимней школы по мат. программированию и смежным вопросам. М.: ЦЭМИ, 1976, с. 3—69.
6. **Кочубей А. Н.** О расширениях положительно определенного симметрического оператора.— Докл. АН УССР, 1979. Сер. А, № 3, с. 168—171.
7. **Михайлец В. А.** Спектральный анализ дифференциальных операторов.— В кн.: Сборник научных трудов Института математики АН УССР. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 106—130.
8. **Горбачук В. И., Горбачук М. Л.** Граничные задачи для дифференциально операторных уравнений.— Киев: Наукова думка, 1984.
9. **Кужель А. В., Роткевич Э. С.** Аккретивные расширения неотрицательных эрмитовых операторов.— В кн.: Функцион. анализ. Вып. 21. Ульяновск, 1983, с. 94—99.
10. **Arsene G., Gheondea A.** Completing matrix contractions.— J. of operator theory, 1982, v. 7, p. 179—189.
11. **Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р.** Несамосопряженные сжимающие расширения эрмитова сжатия и теоремы М. Г. Крейна.— Успехи мат. наук, 1982, т. 37, № 1, с. 131—132.
12. **Цекановский Э. Р.** Несамосопряженные аккретивные расширения положительных операторов и теоремы Фридрихса — Крейна — Филлипса.— Функцион. анализ и его прил., 1980, т. 14, № 2, с. 87—89.
13. **Маламуд М. М., Цекановский Э. Р.** О секториальных расширениях положительно определенного оператора. Деп. ВИНИТИ, № 4585-84 Деп.— 3 с.

14. **Штраус В. А.** О самосопряженных расширениях полуограниченных операторов.— В кн.: Функциональный анализ. Вып. 7. Ульяновск, 1976, с. 161.

15. **Крейн М. Г.** Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов.— Мат. сб., 1947, № 20, 21, с. 431—498.

16. **Березанский Ю. М.** Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наукова думка, 1965.

17. **Арлинский Ю. М.** О регулярных (*)-расширениях и характеристических матрицах-функциях обыкновенных дифференциальных операторов.— В кн.: Граничные задачи для дифференциальных уравнений. Донецк: Ин-т прикл. мат. и мех. АН УССР, 1980, с. 3—13.

18. **Крейн М. Г., Овчаренко И. Е.** Обратные задачи для Q-функций и результативных матриц положительных эрмитовых операторов.— Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 8, с. 521—524.