ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫХ АЛГЕБР

О. В. БЕЛЕГРАДЕК

А. И. Мальцев [1] доказал, что класс всех локально свободных алгебр данной конечной сигнатуры является аксиоматизируемым. Рассмотрение этого класса естественно, поскольку класс всех (абсолютно) свободных алгебр неаксиоматизируем, но любая алгебра из аксиоматизируемого замыкания этого класса локально свободна. В [1] описаны все аксиоматизируемые подклассы класса локально свободных алгебр и, в частности, все пополнения теории локально свободных алгебр. Две локально свободные алгебры элементарно эквивалентны, если и только если в них одинаковое конечное число или бесконечно много неразложимых элементов. Доказательства являются синтаксическими и основаны на нахождении для каждой формулы эквивалентной ей относительно теории локально свободных алгебр формулы некоторого специального вида.

В [2] сообщаются некоторые свойства теории локально свободных алгебр, которые нетрудно получить из результатов [1]. В частности, теория локально свободных алгебр без неразложимых элементов является модельным компаньоном теории всех локально свободных алгебр (но, вообще говоря, не модельным пополнением). Отмечено, что существуют локально свободные алгебры, теория которых не тотально трансцендентна.

В данной статье мы предпринимаем более глубокое изучение теории моделей локально свободных алгебр. Исследование было начато автором совместно с В. А. Толстых. На первом этапе, используя [1], удалось доказать, что теория любой локально свободной алгебры конечной сигнатуры стабильна; она суперстабильна, если и только если в сигнатуре нет символов арности не меньше чем 2. Указанные результаты вошли в дипломную работу В. А. Толстых, выполненную им под руководством автора в 1985 г. Они будут изложены в данной статье с новыми доказательствами, не опирающимися на [1] и основанными на другом, принадлежащем автору подходе, который оказался более адекватным и позволил автору улучшить эти и получить дальнейшие результаты.

С каждой локально свободной алгеброй мы свяжем ее определимое обогащение, называемое *сопутствующей алгеброй*, вводя для каждой сигнатурной операции φ арности $n \geqslant 1$ унарные операции $\pi_1^\varphi, \ldots, \pi_n^\varphi$ такие, что

$$\pi_i^\varphi(x) = \begin{cases} x_i, & \text{если } x = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \\ x, & \text{если } x \ \varphi\text{-неразложим.} \end{cases}$$

(В локально свободных алгебрах такое определение операций корректно.)

Для теории сопутствующих алгебр, являющейся определимым расширением теории локально свободных алгебр, удается доказать теорему об элиминации кванторов. Этот факт служит в статье основным инструментом изучения локально свободных алгебр.

Следует отметить, что мы не ограничиваемся, в отличие от [1], случаем конечной сигнатуры. При бесконечной сигнатуре возникают некоторые новые эффекты, в частности, теория локально свободных алгебр оказывается полной.

Основываясь на упомянутом результате об элиминации кванторов, можно дать иное доказательство всех известных результатов о локально свободных алгебрах в более алгебраическом по сравнению с [1] духе. Элиминация кванторов позволяет описать типы над подмножествами локально свободных алгебр и найти их число. Это описание позволяет также вычислять ранги Морли и Шелаха любого типа. В частности, можно в алгебраических терминах описать типы ранга нуль, т. е. найти алгебраическое, а также определимое замыкание любого подмножества в локально свободной алгебре. Удается также описать сильно минимальные типы; предгеометрия каждого такого типа является распадающейся. Обнаружилась связь сильно минимальных типов с минимальными расширениями локально свободных алгебр.

Из результата об элиминации кванторов следует нормальность теории любой локально свободной алгебры. Это недавно появившееся понятие [3, 4] последнее время активно изучается в теории стабильности. Такие нормальные теории имеют некоторые новые свойства по сравнению с ранее известными; например, они содержат типово определимую псевдоплоскость вопреки предположению А. Пиллэя [5] о несовместимости этого свойства со слабой нормальностью.

Мы будем использовать стандартную терминологию и обозначения теории моделей и универсальной алгебры. Не будут различаться обозначениями структуры и их носители, а также операции и функциональные символы, являющиеся их именами. Для символа операции φ через $\operatorname{ar}\varphi$ обозначаем его арность; $L_n=\{\varphi\in L\colon \operatorname{ar}\varphi\geqslant n\}$. Если A — структура, X — множество в A, $\bar a$ — кортеж в A, то под $\operatorname{tp}(\bar a, X)$ понимаем тип, реализуемый $\bar a$ в A над X. *Алгебраическим замыканием X в A* называется $\operatorname{acl}(X)$, объединение всех конечных X-определимых подмножеств структуры A. *Определимым замыканием множества X в A* называется $\operatorname{dcl}(X)$, множество всех X-определимых в A элементов. Через $RM(p)$ и $RS(p)$ мы обозначаем ранг Морли и Шелаха типа p, т. е. $R(p, L, \aleph_0)$ и $R(p, L, \infty)$ соответственно в обозначениях [6]. В [6] содержатся все необходимые сведения по теории стабильности и элементарные свойства RM и RS.

Говоря о *свободных L-алгебрах*, мы имеем в виду *абсолютно свободные L-алгебры*, т. е. алгебры, свободные в классе всех L-алгебр. Очевидно, свободная L-алгебра с множеством свободных порождающих X изоморфна алгебре всех L-термов от переменных из X. Когда в L есть константы, имеет смысл говорить также о свободной L-алгебре с пустым множеством свободных порождающих, подразумевая алгебру всех замкнутых L-термов. Если X свободно порождает подалгебру алгебры A, то мы называем X *свободным в A*. Если любая конечно порожденная подалгебра L-алгебры A свободна, то A называется *локально свободной*. Локально свободные L-алгебры мы будем обозначать прописными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$. Если X — подмножество L-алгебры A, то ее подалгебру, порожденную X, обозначаем через $\langle X\rangle$.

Предложение 0.1 [1]. *Класс всех локально свободных L-алгебр универсально аксиоматизируем. Его аксиомы:*

1° $\varphi(v_1, \ldots, v_n)=\varphi(u_1, \ldots, u_n)\to v_i=u_i \quad (\varphi\in L,\ n=\operatorname{ar}\varphi,\ 1\leqslant i\leqslant n)$,

2° $\varphi(v_1, \ldots, v_n)\neq\psi(u_1, \ldots, u_m) \quad (\varphi, \psi\in L,\ \varphi\neq\psi,\ n=\operatorname{ar}\varphi,\ m=\operatorname{ar}\psi)$,

3° $t\neq v$,

где t — произвольный L-терм длины строго больше, чем 1, *фактически содержащий переменную v.*

Доказательство. Очевидно, любая локально свободная L-алгебра удовлетворяет этим аксиомам. Пусть L-алгебра A удовлетворяет 1°—3°, B — ее конечно порожденная подалгебра. Выберем в B минимальное по включению конечное множество порождающих $\{b_1, \ldots, b_k\}$ (не исключено, что оно окажется пустым). Тогда для любых L-термов

$t(v_1, \ldots, v_k)$, $s(v_1, \ldots, v_k)$, если $t(b_1, \ldots, b_k) = s(b_1, \ldots, b_k)$, то t и s графически равны. (Это доказывается очевидной индукцией по меньшей из длин термов t и s с использованием 1°—3° и минимальности $\{b_1, \ldots, b_k\}$). Поэтому $b_1, \ldots, b_k$ свободно порождают B. Предложение доказано.

Обозначим теорию класса локально свободных L-алгебр через LFA. На протяжении всей статьи мы будем использовать для ссылок на аксиомы LFA номера 1°, 2°, 3°.

§ 1. СОПУТСТВУЮЩИЕ АЛГЕБРЫ

Пусть a — элемент локально свободной L-алгебры A, $\varphi \in L$; $n = \operatorname{ar}\varphi$. Говорят, что a *φ-разложим в A*, если $a = \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n \in A$; в противном случае a называется *φ-неразложимым в A*. Если $n = 0$, то φ-разложимость элемента a в A означает, что a есть интерпретация в A константного символа φ. Элемент a называется *разложимым в A*, если он φ-разложим для некоторого $\varphi \in L$, и *неразложимым в A* в противном случае. Отметим, что если a разложим в A, то его представление в виде $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$, где $\varphi \in L$, $n = \operatorname{ar}\varphi$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ единственно в силу 1°, 2°.

Рассмотрим сигнатуру $\mathbf{L}$, полученную из L добавлением для каждого L-символа φ с $\operatorname{ar}\varphi = n > 0$ функциональных символов $\pi_1^\varphi, \ldots, \pi_n^\varphi$. Через $\mathscr{L}$ обозначим $\mathbf{L} - L$. С каждой локально свободной L-алгеброй A свяжем $\mathbf{L}$-алгебру $\mathbf{A}$, называемую *сопутствующей* алгебре A и являющуюся ее обогащением посредством определений, положив

$$\pi_i^\varphi(a) = \begin{cases} a, & \text{если } a \ \varphi\text{-неразложим,} \\ a_i, & \text{если } a = \varphi(a_1, \ldots, a_n). \end{cases}$$

Алгебры, сопутствующие локально свободным L-алгебрам $A, B, C, \ldots$, будем обозначать через $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$. Если X — подмножество A, то через $[X]$ будем обозначать подалгебру алгебры $\mathbf{A}$, порожденную X.

Лемма 1.1. *Для локально свободной L-алгебры A, $a \in A$ и $\varphi \in L_1$ равносильны условия*

(1) *a φ-неразложим в A,*

(2) *$\pi_i^\varphi(a) = a$ в $\mathbf{A}$ для любого i,*

(3) *$\pi_i^\varphi(a) = a$ в $\mathbf{A}$ для некоторого i.*

Доказательство. Очевидно, (1) ⇒ (2) ⇒ (3); аксиома 3° влечет (3) ⇒ (1).

Лемма 1.2. *Элемент a локально свободной L-алгебры A неразложим в A, если и только если a реализует в $\mathbf{A}$ множество формул*

$$\{\pi_i^\varphi(v) = v\colon \ \varphi \in L, \ 1 \leqslant i \leqslant \operatorname{ar}\varphi\} \cup \{v \neq \varphi\colon \ \varphi \in L, \ \operatorname{ar}\varphi = 0\}.$$

Доказательство очевидно из 1.1.

Лемма 1.3. *Пусть A — локально свободная L-алгебра, φ и ψ — различные L-символы, $1 \leqslant i \leqslant n = \operatorname{ar}\varphi$, $m = \operatorname{ar}\psi$. Тогда в $\mathbf{A}$ тождественно истинны формулы*

4° $\pi_i^\varphi(\varphi(v_1, \ldots, v_n)) = v_i$,

5° $\varphi(\pi_1^\varphi(v), \ldots, \pi_n^\varphi(v)) = v \vee \pi_1^\varphi(v) = v$,

6° $\pi_i^\varphi(\psi(v_1, \ldots, v_m)) = \psi(v_1, \ldots, v_m)$,

7° $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = v \leftrightarrow \pi_i^\varphi(v) \neq v \wedge \bigwedge_{j=1}^n \pi_j^\varphi(v) = v_j$.

Доказательство. Истинность 4°, 5° очевидна. Истинность 6° следует из 2°, а истинность 7° — из 3°.

Предложение 1.4. *Класс всех $\mathbf{L}$-алгебр, сопутствующих локально свободным L-алгебрам, является универсально аксиоматизируемым. Его аксиомы — всевозможные формулы 1°—5°.*

Доказательство очевидно.

Будем обозначать $\mathbf{L}$-теорию, заданную аксиомами 1°—5°, через **LFA**; она является естественным расширением посредством определений теории *LFA*.

Лемма 1.5. *Пусть t — $\mathscr{L}$-терм, r — L-терм, имеющие общую переменную v. Тогда $t=r\to\tau(v)=v$ — теорема* **LFA** *для любого $\mathscr{L}$-символа τ, входящего в t. Если длина r больше 1, то $t\neq r$ — теорема* **LFA**.

Доказательство. Докажем первое утверждение индукцией по длине t. Если она равна 1, то ничего не утверждается. Пусть t имеет вид $\pi_i^\varphi s(v)$, где $\varphi\in L$, $1\leqslant i\leqslant m=\operatorname{ar}\varphi$, s — $\mathscr{L}$-терм, а переменные r суть $v, v_1, \ldots, v_n$. Предположим, в некоторой модели **LFA** имеем $t(a)=r(a, a_1, \ldots, a_n)$. Тогда либо $s(a)$ является φ-неразложимым, либо

$$s(a)=\varphi(b_1, \ldots, b_{i-1}, r(a, a_1, \ldots, a_n), b_{i+1}, \ldots, b_m)$$

для некоторых b_j. В первом случае $s(a)=t(a)=r(a, a_1, \ldots, a_n)$, и по индуктивному предположению $\tau(a)=a$ для всех $\mathscr{L}$-символов τ, входящих в s; значит, $s(a)=a$. Поскольку $\pi_i^\varphi s(a)=s(a)$, то $\pi_i^\varphi(a)=a$, и наше утверждение справедливо. Но второй случай невозможен, так как по индуктивному предположению мы имели бы $\tau(a)\neq a$ для всех $\mathscr{L}$-символов τ, входящих в s, и, значит,

$$a=s(a)=\varphi(b_1, \ldots, b_{i-1}, r(a, a_1, \ldots, a_n), b_{i+1}, \ldots, b_m)$$

вопреки 3°. Первая часть леммы доказана. Вторая следует из первой и 3°.

§ 2. ЭЛИМИНАЦИЯ L-СИМВОЛОВ

Лемма 2.1. *Любой* $\mathbf{L}$*-терм* **LFA***-эквивалентен терму вида $r(t_1, \ldots, t_n)$, где r — L-терм, а все t_i — $\mathscr{L}$-термы.*

Доказательство проводится индукцией по длине терма с использованием **LFA**-тождеств 4°, 6° леммы 1.3.

Лемма 2.2. *Любая атомарная* $\mathbf{L}$*-формула* **LFA***-эквивалентна конъюнкции формул одного из видов: $t(v)=s(u)$, $t(v)=\psi$, $v\neq v$, $\tau t(v)\neq t(v)$, где t, s — $\mathscr{L}$-термы, $\tau\in\mathscr{L}$, $\psi\in L$,* $\operatorname{ar}\psi=0$.

Доказательство. Достаточно рассматривать формулы вида $q=q'$, где q, q' — термы вида, указанного в 2.1. Доказательство ведем индукцией по числу L-символов в этой формуле. Возможны следующие случаи:

1) q начинается с φ, а q' — с ψ;
2) q есть $\varphi(q_1, \ldots, q_n)$, q' есть $\varphi(q_1', \ldots, q_n')$;
3) q есть $\varphi(q_1, \ldots, q_n)$, q' есть $\mathscr{L}$-терм;
4) q есть $\mathscr{L}$-терм, q' есть $\varphi(q_1', \ldots, q_n')$;
5) q, q' являются $\mathscr{L}$-термами.

Здесь φ, ψ — различные L-символы, $n=\operatorname{ar}\varphi$, q_i, q_i' — термы вида, указанного в 2.1.

В случае 1 $q=q'\equiv v\neq v$ в силу 2°. В случае 2 в силу 1°, если $n>0$, то $q=q'\equiv q_1=q_1'\wedge\ldots\wedge q_n=q_n'$, и работает индуктивное предположение. Если же $n=0$, то, очевидно, $q=q'\equiv v=v$. В случае 3 в силу 7°, $q=q'\equiv\pi_1^\varphi q'=q_1\wedge\ldots\wedge\pi_n^\varphi q'=q_n\wedge\pi_0^\varphi q'\neq q'$, и можно применить индуктивное предположение к формулам $\pi_i^\varphi q'=q_i$. Случай 4 аналогичен случаю 3, а в случае 5 нечего доказывать. (Везде здесь $\equiv$ означает эквивалентность относительно **LFA**.) Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Любая экзистенциальная* $\mathbf{L}$*-формула* **LFA***-эквивалентна экзистенциальной* $\mathbf{L}$*-формуле, все атомарные подформулы которой имеют один из видов $\varphi(v_1, \ldots, v_n)=v$, $\pi_i^\varphi(v)=v$, $v=u$, где $\varphi\in L$, $1\leqslant i\leqslant n=\operatorname{ar}\varphi$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать утверждение для атомарных формул, так как $q=q'\equiv\exists vu(q=v\wedge q'=u\wedge v\neq u)$, где v, u — новые переменные. Хорошо известно, что любая атомарная **L**-формула эквивалентна формуле вида $\exists x_1 \ldots x_m \theta$, где θ — конъюнкция формул одного из видов $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = v$, $\pi_i^\varphi(v) = v$, $v = u$. Но в **LFA** $\pi_i^\varphi(v) = u \equiv (\pi_i^\varphi(v) = v \wedge v = u) \vee \exists u_1 \ldots u_{i-1} u_{i+1} \ldots u_n (\varphi(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n) = v)$. Лемма доказана.

§ 3. СВОБОДНЫЕ МНОЖЕСТВА

Обозначим через $\mathscr{A}$ алгебру $\mathbf{A} \restriction \mathscr{L}$ для модели **A** теории **LFA**. Если X — подмножество $\mathscr{A}$, то через $\langle X \rangle_{\mathscr{A}}$ обозначим подалгебру алгебры $\mathscr{A}$, порожденную X.

Предложение 3.1. *Пусть $a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ — элементы локально свободной L-алгебры A такие, что*

(1) $a_1, \ldots, a_n$ *свободны в* A,

(2) $b_j \notin \langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_m \rangle$, $1 \leqslant j \leqslant m$,

(3) $b_j \notin \langle a_i \rangle_{\mathscr{A}}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Тогда $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ свободны в A.

Доказательство. Предположим противное и выберем соотношение в A минимальной длины вида $r(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = q(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$, где $r(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, $q(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ — различные L-термы, причем длина r не больше длины q. Тогда ввиду 1°, 2° и минимальности длины соотношения длина r равна 1, т. е. r имеет вид x_i или y_j.

Пусть сначала r есть x_i, и, следовательно, q отлично от x_i. В силу (1) в q фактически входит один из y_j. Но тогда соотношение $a_i = q(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ влечет $b_j \in \langle a_i \rangle_{\mathscr{A}}$. (Для установления этого надо индукцией по длине q доказывать более сильное утверждение: если $t(x_i)$ — $\mathscr{L}$-терм и $t(a_i) = q(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$, то $b_j \in \langle a_i \rangle_{\mathscr{A}}$.) Но это противоречит (3).

Пусть теперь r есть y_j, и, следовательно, q отлично от y_j. Согласно 3° y_j не входит в q; противоречие с (2). Предложение доказано.

Следствие 3.2. *Пусть $b_1, \ldots, b_m$ — элементы локально свободной L-алгебры A такие, что $b_i \notin \langle b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_m \rangle$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда $b_1, \ldots, b_m$ свободны в A.*

Следствие 3.3. *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ свободны в локально свободной L-алгебре A, $b \in A - [a_1, \ldots, a_n]$. Тогда $a_1, \ldots, a_n, b$ свободны в A.*

Предложение 3.4. *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ свободны в локально свободной L-алгебре A, $A \neq [a_1, \ldots, a_n]$, $\varphi \in L_1$. Тогда существует φ-разложимый в A элемент b такой, что $a_1, \ldots, a_n, b$ свободны в A.*

Доказательство. Выберем $c \in A - [a_1, \ldots, a_n]$ и положим $b = \varphi(c, \ldots, c)$; тогда $b \notin [a_1, \ldots, a_n]$. В силу 3.3 $a_1, \ldots, a_n, b$ свободны.

Предложение 3.5. *Множество всех неразложимых элементов локально свободной алгебры A свободно в A.*

Доказательство. Если $b_1, \ldots, b_m$ — различные неразложимые в A элементы, то они удовлетворяют условию 3.2 и, значит, свободны. Отсюда следует, что множество всех неразложимых в A элементов свободно.

Предложение 3.6. *Любая подалгебра свободной L-алгебры свободна.*

Доказательство. Пусть A — свободная L-алгебра с базой X, B — ее подалгебра. Обозначим через Y множество всех неразложимых в B элементов. В силу 3.5 достаточно показать, что Y порождает B. Предположим противное: пусть b — элемент из $B - \langle Y \rangle$, имеющий кратчайшее среди всех таких элементов выражение через элементы множества X с помощью L-терма, скажем, $b = r(a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in X$. Поскольку $b \notin Y$, то b разложим в B; пусть $b = \varphi(b_1, \ldots, b_m)$, где $b_1, \ldots, b_m \in B$.

Тогда $m = \operatorname{ar}\varphi > 0$, иначе $b \in \langle Y\rangle$. Имеем $r(a_1, \ldots, a_n) = \varphi(b_1, \ldots, b_m)$. Так как любой элемент базы X неразложим в A, то длина r больше 1. Учитывая 2°, получаем, что r имеет вид $\varphi(r_1, \ldots, r_m)$ для некоторых L-термов r_i. Тогда в силу 1° $r_i(a_1, \ldots, a_n) = b_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. Ввиду минимальности длины r имеем $b_i \in \langle Y\rangle$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. Отсюда $b \in \langle Y\rangle$; противоречие.

Предложение 3.7. *Пусть F_n — свободная L-алгебра ранга n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$. Тогда равносильны условия*

(1) *F_ω вложима в F_1,*

(2) *F_m вложима в F_n для некоторых $n < m \leqslant \omega$,*

(3) *$L_2 \neq \varnothing$ либо $|L_1| \geqslant 2$.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2) очевидно. Легко показать, что (2)$\Rightarrow$(3); это устанавливается путем явного описания свободных L-алгебр в случае $L_2 = \varnothing$, $|L_1| \leqslant 1$. Покажем (3)$\Rightarrow$(1). Нам понадобится следующее замечание: если $a_0, \ldots, a_n$ свободны в произвольной L-алгебре A, и $r(v)$, $q(v)$ — такие L-термы, что $r(a) \notin \langle q(a)\rangle$ и $q(a) \notin \langle r(a)\rangle$ для свободных элементов a, то $a_0, \ldots, a_{n-1}, r(a_n), q(a_n)$ свободны в A. Действительно, можно считать, что $A = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$. В силу 3.2 достаточно проверить, что каждый элемент из $a_0, \ldots, a_{n-1}, r(a_n), q(a_n)$ не принадлежит подалгебре, порожденной остальными. Для $a_0, \ldots, a_{n-1}$ это верно ввиду свободы $a_0, \ldots, a_n$. Если бы, скажем, $r(a_n) \in \langle a_0, \ldots, a_{n-1}, q(a_n)\rangle$, то ввиду того, что $a_0, \ldots, a_n$ свободны, выполнялось бы $r(a_n) \in \langle q(a_n)\rangle$ вопреки выбору r, q.

Пусть a свободно порождает F_1. Достаточно указать r, q с указанными выше свойствами. В самом деле, полагая $a_0 = r(a)$, $b_0 = q(a)$ и $a_{n+1} = r(b_n)$, $b_{n+1} = q(b_n)$ для $n < \omega$, получили бы по приведенному выше замечанию, что $a_0, \ldots, a_n, b_n$ свободны для любого $n < \omega$. Значит, $\{a_n\colon n < \omega\}$ свободны в F_1, и F_ω вложима в F_1.

Если $L_2 \neq \varnothing$, $\varphi \in L_2$, то полагаем $r(v) = \varphi(v, \ldots, v)$, $q(v) = \varphi(r(v), v, \ldots, v)$. Если же $L_2 = \varnothing$, $|L_1| \geqslant 2$, то в качестве r, q берем $\varphi(v)$, $\psi(v)$ для различных унарных символов $\varphi, \psi \in L$. Предложение доказано.

§ 4. ПРОДОЛЖЕНИЕ МОНОМОРФИЗМОВ СОПУТСТВУЮЩИХ АЛГЕБР

Предложение 4.1. *Пусть* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — *модели* $\mathbf{LFA}$, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ $|B|^+$-*насыщена. Предположим, что в* $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$ *число неразложимых элементов бесконечно или конечно и одинаково. Тогда любой мономорфизм* $\alpha\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *можно продолжить до мономорфизма* $\beta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$.

Для доказательства предложения 4.1 нам понадобится

Лемма 4.2. *Пусть* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — *модели* $\mathbf{LFA}$, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $\alpha\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ — *мономорфизм,* $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$, $c \in \mathbf{C} - \alpha(\mathbf{A})$. *Тогда, если b неразложим в B, c неразложим в C, то α можно продолжить до мономорфизма* $\beta\colon [\mathbf{A} \cup \{b\}] \to \mathbf{C}$ *такого, что* $\beta(b) = c$.

Доказательство 4.2. Покажем сначала, что для любых атомарной $\mathbf{L}$-формулы $\theta(v, u_1, \ldots, u_n)$ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$

$$\mathbf{B} \models \theta(b, a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathbf{C} \models \theta(c, \alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)).$$

В силу 2.2 достаточно доказать это для формул θ видов $t(v) = s(u)$, $t(v) = s(v)$, $t(v) = \psi$, где t, s — $\mathscr{L}$-термы, v, u — различные переменные, $\psi \in L$, $\operatorname{ar}\psi = 0$. Так как b, c неразложимы, то $t(b) = b$ в $\mathbf{B}$, $t(c) = c$ в $\mathbf{C}$ для любого $\mathscr{L}$-терма t. Поэтому все сводится к рассмотрению формул видов $v = s(u)$, $v = v$, $v = \psi$. Для формулы $v = v$ доказывать нечего. Поскольку $s(a) \in \mathbf{A}$, $s(\alpha(a)) \in \alpha(\mathbf{A})$ для любого $a \in \mathbf{A}$, и интерпретации константного символа ψ в $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ принадлежат $\mathbf{A}$, $\alpha(\mathbf{A})$ соответственно, то ввиду $b \notin \mathbf{A}$, $c \notin \alpha(\mathbf{A})$ все формулы $b = s(a)$, $c = s(\alpha(a))$, $b = \psi$, $c = \psi$ ложны в соответствующих алгебрах.

Теперь очевидно, что отображение β, заданное для **L**-термов $t(v, u_1, \ldots, u_n)$ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$ правилом

$$\beta(t(b, a_1, \ldots, a_n)) = t(c, \alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)),$$

является корректно определенным мономорфизмом β: $[\mathbf{A} \cup \{b\}] \to \mathbf{C}$, причем $\alpha \subseteq \beta$, $\beta(b) = c$. Лемма доказана.

Доказательство 4.1. Среди всех мономорфизмов подалгебр алгебры **B** в алгебру **C**, продолжающих α, выберем, используя лемму Цорна, максимальный мономорфизм α^*: $\mathbf{A}^* \to \mathbf{C}$. Наша цель — показать, что $\mathbf{A}^* = \mathbf{B}$.

Докажем сначала, что $\mathbf{A}^*$ содержит все неразложимые в B элементы. Если в C имеется бесконечно много неразложимых элементов, то ввиду $|B|^+$-насыщенности **C** хотя бы один из них лежит вне $\alpha^*(\mathbf{A}^*)$. Поэтому если бы вне $\mathbf{A}^*$ нашелся неразложимый в B элемент, то в силу 4.2 α^* не был бы максимальным вопреки его выбору. Пусть в C число неразложимых элементов конечно. Тогда по условию в B имеется в точности то же число неразложимых элементов. Учитывая 1.2, легко видеть, что $a \in \mathbf{A}^*$ неразложим в B, если и только если $\alpha^*(a)$ неразложим в C. Поэтому в $\mathbf{B} - \mathbf{A}^*$ столько же неразложимых B элементов, сколько имеется неразложимых в C элементов, принадлежащих $\mathbf{C} - \alpha^*(\mathbf{A}^*)$. Если бы это число было отлично от нуля, то ввиду 4.2 α^* не был бы максимальным вопреки его выбору.

Итак, $\mathbf{A}^*$ содержит все неразложимые в B элементы. Покажем, что $\mathbf{A}^* = \mathbf{B}$. Предположим, вопреки доказываемому, что найдется $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}^*$. Покажем, что найдется $c \in \mathbf{C} - \alpha^*(\mathbf{A}^*)$ такой, что для любых атомарной **L**-формулы $\theta(v, u_1, \ldots, u_n)$ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}^*$

$$\mathbf{B} \models \theta(b, a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathbf{C} \models \theta(c, \alpha^*(a_1), \ldots, \alpha^*(a_n)).$$

Тогда α^* можно будет продолжить до мономорфизма α_*: $[\mathbf{A}^* \cup \{b\}] \to \mathbf{C}$ такого, что $\alpha_*(b) = c$, вопреки максимальности α^*. Это противоречие завершит доказательство.

Ввиду $|B|^+$-насыщенности **C** достаточно доказать, что множество формул $\{\theta(v, \alpha^*(a_1), \ldots, \alpha^*(a_n))$: θ бескванторна, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}^*$, $\mathbf{B} \models \theta(b, a_1, \ldots, a_n)\}$ конечно выполнимо в **C**. Для этого достаточно показать, что для любой экзистенциальной **L**-формулы $\rho(u_1, \ldots, u_n)$, если $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}^*$ и $\mathbf{B} \models \rho(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathbf{C} \models \rho(\alpha^*(a_1), \ldots, \alpha^*(a_n))$. В силу 2.3 можно считать, что ρ имеет вид $\exists v_1 \ldots v_k \mu(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_n)$, где μ бескванторна и все ее атомарные подформулы имеют один из видов $v = u$, $\varphi(v_1, \ldots, v_m) = u$, $\pi_i^{\varphi}(v) = v$, где $\varphi \in L$, $1 \leqslant i \leqslant m = \operatorname{ar} \varphi$.

Так как $\mathbf{B} \models \rho(a_1, \ldots, a_n)$, то существуют $b_1, \ldots, b_k \in \mathbf{B}$ такие, что $\mathbf{B} \models \mu(b_1, \ldots, b_k, a_1, \ldots, a_n)$. Нам надо найти $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{C}$ такие, что $\mathbf{C} \models \mu(c_1, \ldots, c_k, \alpha^*(a_1), \ldots, \alpha^*(a_n))$.

Очевидно, можно считать, что $b_1, \ldots, b_k \notin \mathbf{A}^*$. Выберем минимальное подмножество множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$, порождающее в B подалгебру $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, пусть это — $a_1, \ldots, a_m$, где $m \leqslant n$. Согласно 3.2 $a_1, \ldots, a_m$ свободны в B. Выберем теперь минимальное подмножество множества $\{b_1, \ldots, b_k\}$, порождающее в B вместе с $\{a_1, \ldots, a_m\}$ подалгебру $D = \langle b_1, \ldots, b_k, a_1, \ldots, a_m \rangle$, скажем, $b_1, \ldots, b_s$, где $s \leqslant k$. Учитывая $b_1, \ldots, b_k \notin \mathbf{A}^*$, получаем из 3.1, что $b_1, \ldots, b_s, a_1, \ldots, a_m$ свободны в B.

Все элементы из $\mathbf{B} - \mathbf{A}^*$ разложимы, поэтому, в частности, и $b_1, \ldots, b_s$ разложимы в B. Пусть b_j является φ_j-разложимым, $\varphi_j \in L$. Поскольку $b_j \notin \mathbf{A}^*$, то $\operatorname{ar} \varphi_j > 0$.

Так как **C** не является конечно порожденной в силу ее $\aleph_0$-насыщенности, то по 3.4 существуют $c_1, \ldots, c_s \in \mathbf{C}$ такие, что $c_1, \ldots, c_s, \alpha^*(a_1), \ldots, \alpha^*(a_m)$ свободны в C и c_j является φ_j-разложимым в C для $1 \leqslant j \leqslant s$. Очевидно, существует мономорфизм δ: $D \to C$ такой, что $\delta(b_j) = c_j$, $\delta(a_i) = \alpha^*(a_i)$ для $1 \leqslant j \leqslant s$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Так как $a_1, \ldots, a_m$ порождают $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, то ограничения δ и α^* на $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ совпадают, в частности, $\delta(a_i)=\alpha^*(a_i)$ для $1\leqslant i\leqslant n$. Положим $c_j=\delta(b_j)$ для $s<j\leqslant k$; утверждаем, что $c_1, \ldots, c_k$ годятся для наших целей.

Заметим, что для любых $b\in D$ и $\varphi\in L$ элемент b является φ-разложимым в B, если и только если $\delta(b)$ является φ-разложимым в C. Пусть $b=r(b_1, \ldots, b_s, a_1, \ldots, a_m)$, где r — L-терм. Пусть сначала длина r равна 1, т. е. b есть a_i или b_j, где $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant s$. Если $b=b_j$, то $\delta(b_j)=c_j$. Тогда по выбору c_j и ввиду 2° элементы b, $\delta(b)$ φ-разложимы при $\varphi=\varphi_j$ и φ-неразложимы в противном случае. Пусть $b=a_i$, тогда $\delta(b)=\alpha^*(a_i)$. Если $\operatorname{ar}\varphi=0$, то φ-разложимость b в A означает $\mathbf{A}\vDash a_i=\varphi$, что равносильно $\mathbf{C}\vDash\alpha^*(a)=\varphi$, т. е. φ-разложимости в $\mathbf{C}$ элемента $\delta(b)$. Если же $\operatorname{ar}\varphi>0$, то φ-разложимость b в A означает $\mathbf{A}\vDash\pi_1^\varphi(a_i)\neq a_i$, что равносильно $\mathbf{C}\vDash\pi_1^\varphi(\alpha^*(a_i))\neq\alpha^*(a_i)$, т. е. φ-разложимости в C элемента $\delta(b)$. Пусть теперь длина r больше единицы, тогда r начинается с некоторого $\psi\in L$. Если $\varphi=\psi$, то b и $\delta(b)$ φ-разложимы; в противном случае в силу 2° b и $\delta(b)$ φ-неразложимы в соответствующих алгебрах.

Из сделанного замечания следует, что истинность $\pi_i^\varphi(b)=b$ в $\mathbf{B}$ равносильна истинности $\pi_i^\varphi(\delta(b))=\delta(b)$ в $\mathbf{C}$ для любых $b\in D$, $\varphi\in L$, $1\leqslant i\leqslant\operatorname{ar}\varphi$. Поскольку δ является мономорфизмом D в C, то δ инъективен и сохраняет истинностное значение формул вида $\varphi(v_1, \ldots, v_n)=v$. Отсюда

$$\begin{gathered}\mathbf{B}\vDash\mu(b_1, \ldots, b_k, a_1, \ldots, a_n)\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\mathbf{C}\vDash\mu(\delta(b_1), \ldots, \delta(b_k), \delta(a_1), \ldots, \delta(a_n))\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\mathbf{C}\vDash\mu(c_1, \ldots, c_k, \alpha^*(a_1), \ldots, \alpha^*(a_n)),\end{gathered}$$

что и требовалось доказать.

§ 5. ЭЛИМИНАЦИЯ КВАНТОРОВ ДЛЯ LFA

Пусть L конечна. Легко выписать L-формулу $\iota(v)$, утверждающую неразложимость v, и, используя ее, L-предложения ι_n и ι^n, утверждающие для $n<\omega$ наличие не менее n и в точности n неразложимых элементов соответственно.

Заметим, что, как следует из теоремы компактности, для бесконечной L такой формулы $\iota(v)$ не существует.

Теорема 5.1. (1) *Если L конечна, то любая* **L**-*формула* **LFA**-*эквивалентна булевой комбинации формул видов $t(v)=\psi$, $t(v)=s(u)$, где t, s — $\mathscr{L}$-термы, $\psi\in L$, $\operatorname{ar}\psi=0$, и предложений вида ι_n. В частности, любое пополнение теории* **LFA** *допускает элиминацию кванторов.*

(2) *Если L бесконечна, то любая* **L**-*формула* **LFA**-*эквивалентна булевой комбинации формул видов $t(v)=\psi$, $t(v)=s(u)$, где t, s — $\mathscr{L}$-термы, $\psi\in L$, $\operatorname{ar}\psi=0$. В частности,* **LFA** *допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. (1) Расширим сигнатуру **L**, добавив 0-арные предикатные символы I_n, $1\leqslant n<\omega$; полученную сигнатуру обозначим через **L***. Рассмотрим **L***-теорию **LFA***, являющуюся расширением **LFA** посредством определений $\iota_n\leftrightarrow I_n$, $1\leqslant n<\omega$.

Покажем, что теория **LFA*** допускает элиминацию кванторов. Для этого достаточно проверить выполнение для **LFA*** следующего условия, равносильного подмодельной полноте [7]: для любых модели $\mathbf{B}^*$, ее подструктуры $\mathbf{A}^*$ и $|\mathbf{B}|^+$-насыщенной модели $\mathbf{C}^*$ каждый мономорфизм $\alpha\colon\mathbf{A}^*\to\mathbf{C}^*$ продолжим до мономорфизма $\beta\colon\mathbf{B}^*\to\mathbf{C}^*$.

Пусть **A**, **B**, **C**—**L**-редукты, **A***, **B***, **C*** соответственно. Тогда **B**, **C** — модели **LFA**. Поскольку **LFA** — универсальная теория, то и **A** — модель **LFA**. Поскольку **A*** — подструктура **B***, то $\mathbf{A}^*\vDash I_n$ равносильно $\mathbf{B}^*\vDash I_n$; так как $\alpha\colon\mathbf{A}^*\to\mathbf{C}^*$ — мономорфизм, то $\mathbf{A}^*\vDash I_n$ равносильно $\mathbf{C}^*\vDash I_n$. Таким образом, $\mathbf{B}^*\vDash I_n$ равносильно $\mathbf{C}^*\vDash I_n$, и (ввиду аксиом **LFA***) $\mathbf{B}\vDash\iota_n$ равносильно $\mathbf{C}\vDash\iota_n$. Отсюда следует, что в B и C число неразложимых элементов бесконечно или конечно и одинаково. Тогда в силу 4.1 α можно продолжить до мономорфизма β: $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$. Как отмечалось выше, $\mathbf{B}^* \vDash I_n$ равносильно $\mathbf{C}^* \vDash I_n$, поэтому β является мономорфизмом $\mathbf{B}^*$ в $\mathbf{C}^*$.

Таким образом, каждая $\mathbf{L}^*$-формула $\mathbf{LFA}^*$-эквивалентна булевой комбинации атомарных $\mathbf{L}$-формул и формул вида I_n. Учитывая 2.2 и $\mathbf{LFA}^*$-аксиомы $\iota_n \leftrightarrow I_n$, имеем заключение первого пункта теоремы.

(2) Пусть θ — произвольная $\mathbf{L}$-формула. Тогда существует конечная сигнатура $L_0 \subseteq L$ такая, что θ — $\mathbf{L}_0$-формула. Пусть $\mathbf{LFA}_0$ — теория алгебр, сопутствующих локально свободным алгебрам сигнатуры L_0; ясно, что $\mathbf{LFA}_0 \subseteq \mathbf{LFA}$. В силу (1) θ будет $\mathbf{LFA}$-эквивалентна булевой комбинации формул видов $t(v) = s(u)$, $t(v) = \psi$ (где t, s — $\mathscr{L}_0$-термы, $\psi \in L_0$, ar $\psi = 0$) и предложений ι_n для сигнатуры L_0. Теперь для доказательства (2) достаточно заметить, что ι_n — теорема $\mathbf{LFA}$ для любого n. Так как L_0 конечна, а L бесконечна, то $L - L_0$ бесконечна. Но для любых модели $\mathbf{A}$ теории $\mathbf{LFA}$ и $a \in \mathbf{A}$ элементы $\varphi(a, \ldots, a)$ неразложимы в $A \restriction L_0$ в силу 2° и различны для различных $\varphi \in L - L_0$. Теорема доказана.

Следствие 5.2. *Пусть* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — *модели* $\mathbf{LFA}$, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. *Тогда, если* L *бесконечна, то* $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$. *Если же* L *конечна, то* $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$ *тогда и только тогда, когда* A, B *имеют бесконечное или одинаковое конечное число неразложимых элементов.*

Предложение 5.3. *Если* L *бесконечна, то* $\mathbf{LFA}$ — *полная* $\mathbf{L}$-*теория, а* LFA — *полная* L-*теория.*

Доказательство. Очевидно, второе следует из первого. Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — модели $\mathbf{LFA}$. Если C — свободное произведение A и B в классе всех L-алгебр, то, легко видеть, C — модель LFA, и $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ естественно вложены в $\mathbf{C}$. Тогда по 5.2 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \preccurlyeq \mathbf{C}$; значит, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, что и требовалось доказать.

Пусть в дальнейшем L конечна. Обозначим для $n < \omega$

$$LFA(n) = LFA \cup \{\iota^n\}, \quad \mathbf{LFA}(n) = \mathbf{LFA} \cup \{\iota^n\},$$

$$LFA(\infty) = LFA \cup \{\iota_n\colon n < \omega\}, \quad \mathbf{LFA}(\infty) = \mathbf{LFA} \cup \{\iota_n\colon n < \omega\}.$$

Очевидно, в свободной L-алгебре с базой X неразложимыми являются элементы базы и только они; поэтому F_n — модель $LFA(n)$ для $1 \leqslant n < \omega$ и F_λ — модель $LFA(\infty)$ для любой бесконечной мощности λ.

Предложение 5.4. *Если* L *конечна, то пополнения* $\mathbf{LFA}$ — *это в точности* $\mathbf{LFA}(n)$, *а пополнения* LFA — *в точности* $LFA(n)$, $n \in \omega \cup \{\infty\}$.

Доказательство. Очевидно, второе следует из первого. Так как любое пополнение $\mathbf{LFA}$ содержит одну из $\mathbf{LFA}(n)$, $n \in \omega \cup \{\infty\}$, то достаточно доказать полноту каждой $\mathbf{LFA}(n)$.

Если $1 \leqslant n < \omega$, то ввиду 3.5 $\mathbf{F}_n$ вложима в любую модель $\mathbf{LFA}(n)$, а $\mathbf{F}_\omega$ вложима в любую модель $\mathbf{LFA}(\infty)$. Поэтому в силу 5.2 для $1 \leqslant n < \omega$ любая модель $\mathbf{LFA}(n)$ элементарно эквивалентна алгебре $\mathbf{F}_n$, а любая модель $\mathbf{LFA}(\infty)$ — алгебре $\mathbf{F}_\omega$.

Остается доказать полноту $\mathbf{LFA}(0)$. Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — модели $\mathbf{LFA}(0)$. Если $C = A * B$, то легко видеть, что $\mathbf{C}$ — модель $\mathbf{LFA}(0)$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$. По 5.2 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \preccurlyeq \mathbf{C}$, и, значит, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Предложение доказано.

Замечание. Вторая часть 5.4 другим методом доказана в [1].

§ 6. ТИПЫ

Пусть $\mathbf{A}$ — модель $\mathbf{LFA}$ (когда L не содержит символов констант, удобно считать пустое множество также моделью $\mathbf{LFA}$). Для произвольного пополнения T теории $\mathbf{LFA}$ обозначим через $T_{\mathbf{A}}$ теорию $T \cup \mathrm{Diagram}(\mathbf{A})$. Эта теория полна, поскольку в силу 5.1 T допускает элиминацию кванторов. Множество всех типов $p(v)$ теории $T_{\mathbf{A}}$ обозначается через $S(\mathbf{A})$. Мы опишем все такие типы, тогда будут описаны и типы над произвольными подмножествами моделей T, поскольку если $\mathbf{B}$ — модель T, X — подмножество $\mathbf{B}$, p — тип над X, то $[X]$ модель **LFA**, и p имеет единственное расширение в $S([X])$.

Обозначим через $\mathrm{term}(\mathscr{L}, v)$ множество всех $\mathscr{L}$-термов от v. Если $t, s \in \mathrm{term}(\mathscr{L}, v)$, $\tau \in \mathscr{L}$, то обозначаем через ts терм $t(s(v))$, а через τt — терм $\tau(t(v))$. На множестве $\mathrm{term}(\mathscr{L}, v)$ определим отношение $\leqslant$, полагая $t \leqslant s$, если $s = rt$ для некоторого $r \in \mathrm{term}(\mathscr{L}, v)$. Очевидно, $(\mathrm{term}(\mathscr{L}, v), \leqslant)$ — дерево, имеющее наименьший элемент v.

До конца параграфа $p \in S(\mathbf{A})$ считаем фиксированным. Обозначим через $\mathrm{tree}(p)$ множество всех $t \in \mathrm{term}(\mathscr{L}, v)$ таких, что, во-первых, если $\tau s \leqslant t$, то $\tau s \neq s \in p$, и, во-вторых, если $s < t$, то $s \neq a \in p$ для любого $a \in \mathbf{A}$.

Лемма 6.1. (1) $t \in \mathrm{tree}(p)$, $s \leqslant t$ *влечет* $s \in \mathrm{tree}(p)$;

(2) $t \in \mathrm{tree}(p)$ *максимален в* $\mathrm{tree}(p)$, *если и только если* p *утверждает неразложимость* t *либо* $t = a \in p$ *для некоторого* $a \in \mathbf{A}$;

(3) *если* $\varphi \in L$, $1 \leqslant i \leqslant n = \mathrm{ar}\,\varphi$, *то* $\pi_i^\varphi t \in \mathrm{tree}(p) \Leftrightarrow \exists v_1 \ldots v_n (t = \varphi(v_1, \ldots, v_n)) \in p$;

(4) *если* $\varphi, \psi \in L$, $\varphi \neq \psi$, $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{ar}\,\varphi$, $1 \leqslant j \leqslant \mathrm{ar}\,\psi$, *то* $\pi_i^\varphi t \in \mathrm{tree}(p)$ *влечет* $\pi_j^\psi t \notin \mathrm{tree}(p)$;

(5) *если* $L_2 = \varnothing$, *то* $\mathrm{tree}(p) = \{t_m\colon -1 \leqslant m < n(p)\}$, *где* $n(p) \leqslant \omega$, *в* t_m *имеется* $m+1$ *вхождение* $\mathscr{L}$-*символов, и* $t_m < t_{m+1}$;

(6) $\mathrm{tree}(p)$ *конечно или счетно*;

(7) *если* t, s — *различные сравнимые элементы* $\mathrm{tree}(p)$, *то* $t \neq s \in p$.

Доказательство. (1), (2) очевидны; (3) следует из 5°, 7° леммы 1.3, а (4) — из (3) и 2°.

Докажем (5). Для $\mathscr{L}$-терма t обозначим через $\mu(t)$ число вхождений $\mathscr{L}$-символов в t. Пусть $n(p) = \sup\{\mu(t)\colon t \in \mathrm{tree}(p)\}$; ясно, что $n(p) \leqslant \omega$. Покажем, что для любого натурального $m \leqslant n(p)$ существует единственный $t \in \mathrm{tree}(p)$ такой, что $\mu(t) = m$. Существование следует из (1); единственность докажем индукцией по m. Если $\mu(t) = 0$, то t есть v. Если $t, s \in \mathrm{tree}(p)$, $\mu(t) = \mu(s) = m > 0$, то $t = \pi_1^\varphi t'$, $s = \pi_1^\psi s'$, где $t', s' \in \mathrm{tree}(p)$, ввиду (1). По индуктивному предположению $t' = s'$. Тогда по (4) $\varphi = \psi$ и $t = s$. Обозначим для $-1 \leqslant m < n(p)$ через t_m такой терм из $\mathrm{tree}(p)$, что $\mu(t_m) = m + 1$; ясно, что $\mathrm{tree}(p) = \{t_m\colon -1 \leqslant m < n(p)\}$, $t_m < t_{m+1}$.

Докажем (6). В силу (4) для любого $t \in \mathrm{tree}(p)$ длины n число термов s длины $n + 1$ таких, что $t < s$, $s \in \mathrm{tree}(p)$, является конечным. Поэтому по индукции число термов в $\mathrm{tree}(p)$ фиксированной длины конечно, значит, $\mathrm{tree}(p)$ не более чем счетно.

Утверждение 7 следует из 1.5. Лемма доказана.

Можно смотреть на элементы множества $\mathbf{A}$ как на праэлементы, которые используются при «сборке» элементов вне $\mathbf{A}$. Говорим, что *терм* $t \in \mathrm{tree}(p)$ *представляет в* p *праэлемент* $a \in \mathbf{A}$, если $t = a \in p$ (очевидно, такой a единствен, обозначим его через a_t). Обозначим через $\mathrm{ur}(p)$ множество всех $t \in \mathrm{tree}(p)$, представляющих в p праэлементы. Ясно, что $\mathrm{ur}(p) = \varnothing$ при $\mathbf{A} = \varnothing$.

Будем говорить, что *терм* $t \in \mathrm{tree}(p) - \mathrm{ur}(p)$ *представляет в* p *неразложимый элемент*, если $\tau t = t$ для любого $\tau \in \mathscr{L}$. Обозначим через $\mathrm{ind}(p)$ множество всех таких t, а через $\mathrm{Ind}(p)$ — множество всех формул вида $\tau t = t$, где $t \in \mathrm{ind}(p)$, $\tau \in \mathscr{L}$. Ясно, что $\mathrm{Ind}(p) \subseteq p$.

Очевидно, $\mathrm{ur}(p) \cap \mathrm{ind}(p) = \varnothing$ и $\mathrm{ur}(p) \cup \mathrm{ind}(p)$ — множество всех максимальных элементов $\mathrm{tree}(p)$.

Будем называть *скелетом типа* p множество $\mathrm{Sk}(p)$ всех формул из p видов $t = s$, $t \neq s$, $t = a$, $t \neq a$, где $t, s \in \mathrm{tree}(p)$, $a \in \mathbf{A}$. Назовем *описанием типа* p его подмножество $\mathrm{Descr}(p) = T_{\mathbf{A}} \cup \mathrm{Sk}(p) \cup \mathrm{Ind}(p)$. Если p реализуется элементом $a \in \mathbf{A}$, то $\mathrm{tree}(p) = \mathrm{ur}(p) = \{v\}$, $\mathrm{ind}(p) = \mathrm{Ind}(p) = \varnothing$, $\mathrm{Sk}(p) = \{v = v, v = a, v \neq b\colon b \in \mathbf{A}\}$ и, значит, $\mathrm{Descr}(p) = T_{\mathbf{A}} \cup \{v = a\}$.

Лемма 6.2. *Для любого* $t \in \mathrm{term}(\mathscr{L}, v)$ *либо найдется* $s \in \mathrm{tree}(p)$ *такой, что* $\mathrm{Descr}(p) \vdash t = s$, *либо найдется* $a \in \mathbf{A}$ *такой, что* $\mathrm{Descr}(p) \vdash t = a$.

Доказательство индукцией по длине t. Если длина t равна единице, то t есть v, и в качестве s годится v. Предположим, утверждение доказано для термов длины меньшей, чем у t. Пусть $t = \tau r$. По индуктивному предположению найдется либо $s \in \mathrm{tree}(p)$ такой, что $\mathrm{Descr}(p) \vdash r = s$, либо $a \in \mathbf{A}$ такой, что $\mathrm{Descr}(p) \vdash r = a$.

Предположим сначала первое. Из $s \in \mathrm{ur}(p)$ имеем $s = a_s \in \mathrm{Sk}(p) \subseteq \mathrm{Descr}(p)$ и $\mathrm{Descr}(p) \vdash t = \tau(a_s)$, $\tau(a_s) \in \mathbf{A}$. Пусть $s \notin \mathrm{ur}(p)$. Если $\mathrm{Descr}(p) \vdash \tau s = s$, то $\mathrm{Descr}(p) \vdash t = s$. Если же $\tau s \neq s$ совместно с $\mathrm{Descr}(p)$, то $\tau s = s \notin \mathrm{Ind}(p)$ ввиду $\mathrm{Ind}(p) \subseteq \mathrm{Descr}(p)$, значит, $s \notin \mathrm{ind}(p)$. Тогда $\tau' s \neq s \in p$ для некоторого $\tau' \in \mathscr{L}$, откуда $\tau' s \in \mathrm{tree}(p)$ и $\tau' s \neq s \in \mathrm{Sk}(p) \subseteq \mathrm{Descr}(p)$. Поэтому $\{\tau' s \neq s, \tau s \neq s\}$ совместно с **LFA**. Следовательно, $\tau = \pi_i^\varphi$, $\tau' = \pi_j^\varphi$ для некоторого $\varphi \in L$. В силу 6.1(3) $\tau' s \in \mathrm{tree}(p)$ влечет $\tau s \in \mathrm{tree}(p)$. Поскольку $\mathrm{Descr}(p) \vdash t = \tau s$, терм τs — искомый.

Предположим теперь, что $\mathrm{Descr}(p) \vdash r = a$ для некоторого $a \in \mathbf{A}$. Имеем $\mathrm{Descr}(p) \vdash r = a$, $\tau(a) \in \mathbf{A}$. Лемма доказана.

Предложение 6.3. *Тип* p *эквивалентен* $\mathrm{Descr}(p)$.

Доказательство. Ввиду 5.1 p эквивалентен $T_{\mathbf{A}}$ вместе с множеством всех формул из p видов $t_0 = t_1$, $t_0 \neq t_1$, $t_0 = a$, $t_0 \neq a$, где $t_0, t_1 \in \mathrm{term}(\mathscr{L}, v)$, $a \in \mathbf{A}$. Поэтому достаточно показать, что каждая такая формула следует из $\mathrm{Descr}(p)$.

Из 6.2 получаем, что относительно $\mathrm{Descr}(p)$ формула $t_0 = t_1$ эквивалентна формуле одного из видов $s_0 = s_1$, $s_0 = a_1$, $a_0 = a_1$, а формула $t_0 = a$ — формуле одного из видов $s_0 = a$, $a_0 = a$, где $a_0, a_1 \in \mathbf{A}$, $s_0, s_1 \in \mathrm{tree}(p)$. Формулы видов $a_0 = a_1$ и $a_0 \neq a_1$ принадлежат диаграмме $\mathbf{A}$ и, следовательно, $\mathrm{Descr}(p)$. Формулы видов $s_0 = s_1$, $s_0 \neq s_1$, $s_0 = a$, $s_0 \neq a$ входят в $\mathrm{Sk}(p)$ и, следовательно, в $\mathrm{Descr}(p)$. Отсюда вытекает доказываемое утверждение.

До конца параграфа примем $L_2 = \varnothing$. Для $p \in S(\mathbf{A})$ пусть $(t_m\colon -1 \leqslant m < n(p))$ — последовательность термов из 6.1(5). Для $0 \leqslant m < n(p)$ обозначим через τ_m первый $\mathscr{L}$-символ терма t_m, тогда $t_m = \tau_m \tau_{m-1} \ldots \tau_0(v)$. Положим $\tau_p = (\tau_m\colon 0 \leqslant m < n(p))$.

Лемма 6.4. *Для любых* $t \in \mathrm{term}(\mathscr{L}, v)$ *и* $a \in \mathbf{A}$

$$\mathbf{LFA} \cup \mathrm{Diagram}(\mathbf{A}) \cup \{v \neq b\colon\ b \in \mathbf{A}\} \vdash t \neq a.$$

В частности, если p *не реализуется элементом из* $\mathbf{A}$, *то* $\mathrm{ur}(p) = \varnothing$.

Доказательство следует из того, что $\pi_1^\varphi(v) = u \leftrightarrow v = \varphi(u)$ есть теорема **LFA** для унарных $\varphi \in L$.

Лемма 6.5. *Пусть* L *конечна,* $T = \mathbf{LFA}(k)$, $k < \omega$. *Если* $\mathbf{A}$ — *модель* T *или* $k = 0$, *и* p *не реализуется элементом из* $\mathbf{A}$, *то* $\mathrm{ind}(p) = \varnothing$ *и* $n(p) = \omega$.

Доказательство. Предположим, вопреки доказываемому, что $\tau t_m = t_m \in p$ для всех $\tau \in \mathscr{L}$. Так как в силу 6.4 $t_m \neq a \in p$ для любого $a \in \mathbf{A}$, то любой элемент, реализующий p в некоторой модели $\mathbf{B}$ теории T, $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$, неразложим в $\mathbf{B}$ и не принадлежит $\mathbf{A}$. Тогда $k \neq 0$ и, значит, $\mathbf{A}$ — модель T; противоречие с тем, что в $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ одинаковое конечное число неразложимых элементов.

Лемма 6.6. *Если* p *не реализуется элементом из* $\mathbf{A}$, *то* $\mathrm{Sk}(p)$ *эквивалентно относительно* $T_{\mathbf{A}}$ *своему подмножеству* $\{v \neq a\colon a \in \mathbf{A}\} \cup \{t_{m+1} \neq t_m\colon -1 \leqslant m < n(p)\}$.

Доказательство. Из 1.5 следует, что для $-1 \leqslant i < k < n(p)$

$$\mathbf{LFA} \cup \{t_m \neq t_{m+1}\colon\ -1 \leqslant m < n(p)\} \vdash t_i \neq t_k.$$

Это вместе с 6.4 дает нужный результат.

Лемма 6.7. *Пусть существует модель* $\mathbf{B}$ *теории* T, *строго содержащая* $\mathbf{A}$. *Тогда для любой последовательности* $\mathscr{L}$-*символов* $(\tau_m\colon m < \omega)$

множество

$$T_{\mathbf{A}} \cup \{v \neq a\colon\ a \in \mathbf{A}\} \cup \{t_m \neq t_{m+1}\colon\ -1 \leqslant m < \omega\}$$

совместно, где $t_{-1} = v$, $t_m = \tau_m \ldots \tau_0(v)$ *для* $0 \leqslant m < \omega$.

Доказательство. Пусть $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Если $\tau_m = \pi_1^{\varphi_m}$, то, учитывая 6.4, получаем, что элемент $\varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_k(b)$ реализует в $\mathbf{B}$ множество $T_{\mathbf{A}} \cup \{v \neq a : a \in \mathbf{A}\} \cup \{t_m \neq t_{m+1}\colon\ -1 \leqslant m < k\}$. Поэтому результат следует из теоремы компактности.

Замечание. Условие леммы может нарушаться, только если L конечна, $L_1 = \varnothing$.

Лемма 6.8. *Если L бесконечна, или L конечна и $T = \mathbf{LFA}(\infty)$, или L конечна, $T \neq \mathbf{LFA}(0)$ и $\mathbf{A}$ не является моделью T, то для любых $n < \omega$ и последовательности $\mathscr{L}$-символов $(\tau_m\colon\ m < n)$ множество $T_{\mathbf{A}} \cup \{v \neq a\colon a \in \mathbf{A}\} \cup \{t_m \neq t_{m+1}\colon\ -1 < m < n\} \cup \{\tau t_{n-1} = t_{n-1}\colon\ \tau \in \mathscr{L}\}$ совместно, где $t_{-1} = v$, $t_m = \tau_m \ldots \tau_0(v)$ для $0 \leqslant m < n$.*

Доказательство. Условия леммы гарантируют, что существует модель $\mathbf{B}$ теории T такая, что $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ и в B имеется неразложимый элемент b вне A. Если $\tau_m = \pi_1^{\varphi_m}$, то элемент $\varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}(b)$ реализует в $\mathbf{B}$ рассматриваемое множество формул.

Предложение 6.9. *Пусть ρ — отображение множества всех $p \in S(\mathbf{A})$, не реализующихся в $\mathbf{A}$, в $\mathscr{L}^{\leqslant\omega}$, $\rho(p) = \bar{\tau}_p$. Тогда (1) ρ инъективно; (2) если L конечна, $T = \mathbf{LFA}(k)$, $k < \omega$, и $\mathbf{A}$ — модель T или $k = 0$, то $\operatorname{Im}\rho = \mathscr{L}^{\omega}$; (3) в остальных случаях ρ — биекция.*

Доказательство. (1) Предположим, $\rho(q) = \rho(p)$. Тогда из 6.4 и 6.6 видно, что $\operatorname{Descr}(p)$ эквивалентно $\operatorname{Descr}(q)$ и, значит, $p = q$ ввиду 6.3. Утверждение (2) следует из 6.5, 6.7 и 6.1(5), а (3) — из 6.8 и 6.1(5).

§ 7. СТАБИЛЬНОСТЬ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫХ АЛГЕБР

Будем использовать те же обозначения, что и в § 6.

Лемма 7.1. $|S(\mathbf{A})| \leqslant (|\mathbf{A}| + |L| + 2)^{\aleph_0}$.

Доказательство. В силу 6.3 любой тип $p \in S(\mathbf{A})$ полностью определяется множествами $\operatorname{Sk}(p)$ и $\operatorname{Ind}(p)$. Обозначим через $\operatorname{Sk}_0(p)$ множество всех формул из p вида $t = s$, $t \neq s$, где $t, s \in \operatorname{tree}(p)$. Тогда отображение

$$p \mapsto (\operatorname{tree}(p), \operatorname{ur}(p), \operatorname{ind}(p), \{a_t\colon\ t \in \operatorname{ur}(p)\}, \operatorname{Sk}_0(p))$$

взаимно-однозначно. Поскольку $|\operatorname{tree}(p)| \leqslant \aleph_0$ (в силу 6.1(6)) и $\operatorname{ur}(p)$, $\operatorname{ind}(p) \subseteq \operatorname{tree}(p)$, то имеется не менее $(|L| + \aleph_0)^{\aleph_0}$ вариантов для $\operatorname{tree}(p)$, $\operatorname{ur}(p)$, $\operatorname{ind}(p)$, при фиксированном $\operatorname{tree}(p)$ — не более $2^{\aleph_0}$ вариантов для $\operatorname{Sk}_0(p)$, а при фиксированном $\operatorname{ur}(p)$ — не более $(|\mathbf{A}| + 1)^{\aleph_0}$ вариантов для $\{a_t\colon t \in \operatorname{ur}(p)\}$. Поэтому существует не более $(|\mathbf{A}| + |L| + 2)^{\aleph_0}$ вариантов для p. Предложение доказано.

Лемма 7.2. $|S(\mathbf{A})| \geqslant |L_1|^{\aleph_0}$.

Доказательство. Пусть $\Phi = (\varphi_i\colon\ i < \omega)$ — произвольная последовательность в L_1. Для $n \leqslant \omega$ положим $\Delta_n(\Phi) = \{v_i = \varphi_i(v_{i+1}, \ldots, v_{i+1})\colon i < n\}$. Тогда $\Delta_\omega(\Phi)$ совместно с $T_{\mathbf{A}}$ по теореме компактности, поскольку для любого $n < \omega$ множество $\Delta_n(\Phi)$ реализуется кортежем $(b_0, \ldots, b_n)$, где b_n — произвольный элемент любой модели $T_{\mathbf{A}}$, $b_i = \varphi(b_{i+1}, \ldots, b_{i+1})$ для $i < n$. Легко показать, используя 2°, что если Φ, Φ' различны, $(a_i\colon\ i < \omega)$ реализует $\Delta_\omega(\Phi)$, $(a_i'\colon\ i < \omega)$ реализует $\Delta_\omega(\Phi')$, то a_0 и a_0'

реализуют различные типы. Поэтому $|S(\mathbf{A})| \geqslant |L_1|^{\aleph_0}$, что и требовалось доказать.

Лемма 7.3. *Если* $L_2 \neq \varnothing$, *то* $|S(\mathbf{A})| \geqslant (|\mathbf{A}| + 2)^{\aleph_0}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in L_2$. С произвольной последовательностью $\Psi = (a_i\colon i < \omega)$ в $\mathbf{A}$ и $n \leqslant \omega$ свяжем множество формул $\Delta_n(\Psi) = \{\pi_1^\varphi(\pi_2^\varphi)^i(v) = a_i\colon i < n\}$. Тогда $\Delta_\omega(\Psi)$ совместно с $T_{\mathbf{A}}$ по теореме компактности, поскольку для любого $n < \omega$, положив $b_n = a_{n-1}$, $b_i = \varphi(a_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+1})$ для $i < n$, имеем, что b_0 реализует $\Delta_n(\Psi)$. Очевидно, если Ψ, Ψ' различны, и a, a' реализуют $\Delta_\omega(\Psi)$ и $\Delta_\omega(\Psi')$ соответственно, то $\mathrm{tp}(a, \mathbf{A}) \neq \mathrm{tp}(a', \mathbf{A})$. Поэтому $|S(\mathbf{A})| \geqslant |\mathbf{A}|^{\aleph_0}$.

Остается показать, что $|S(\mathbf{A})| \geqslant 2^{\aleph_0}$, даже в случае пустого $\mathbf{A}$. Положим $r_0 = \varphi(v, \ldots, v)$, $r_1 = \varphi(r_0, v, \ldots, v)$ и для $\sigma \in 2^\omega$

$$\Delta_\omega(\sigma) = \{v_i = r_{\sigma i}(v_{i+1})\colon i < \omega\}.$$

Как и в 7.2, показывается, что $\Delta_\omega(\sigma)$ совместно с $T_{\mathbf{A}}$. Если σ, σ' различны, $(a_i\colon i < \omega)$ реализует $\Delta_\omega(\sigma)$, $(a_i'\colon i < \omega)$ реализует $\Delta_\omega(\sigma')$, то, как легко следует из 1° и 3°, $\mathrm{tp}(a_0, \varnothing) = \mathrm{tp}(a_0', \varnothing)$. Поэтому $|S(\varnothing)| \geqslant 2^{\aleph_0}$. Лемма доказана.

Предложение 7.4. *Если* $L_2 \neq \varnothing$, *то* $|S(\mathbf{A})| = (|\mathbf{A}| + |L| + 2)^{\aleph_0}$

Доказательство. Неравенство $|S(\mathbf{A})| \leqslant (|\mathbf{A}| + |L| + 2)^{\aleph_0}$ содержится в 7.1. Для конечных L обратное неравенство вытекает из 7.3. Пусть L бесконечно. Если $|L| = |L_1|$, то в силу 7.2 $|S(\mathbf{A})| \geqslant |L|^{\aleph_0}$; если же $|L| > |L_1|$, то L содержит $|L|$ символов констант; поэтому $|\mathbf{A}| \geqslant |L|$, и опять имеем $|S(\mathbf{A})| \geqslant (|\mathbf{A}| + |L| + 2)^{\aleph_0}$ по 7.3.

Предложение 7.5. *Пусть* $L_2 = \varnothing$. *Тогда*

(1) *если* $|L_1| \geqslant 2$, *то* $|S(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}| + |L_1|^{\aleph_0}$;

(2) *если* $|L_1| = 1$, *то когда* L *конечна,* $T = \mathbf{LFA}(k)$, $k < \omega$, $\mathbf{A}$ — *модель* T *или* $k = 0$, *имеем* $|S(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}| + 1$; *в остальных случаях* $|S(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}| + \aleph_0$;

(3) *если* $L_1 = \varnothing$, *то когда* L *конечна и все модели* T *имеют конечную мощность, равную мощности* $\mathbf{A}$, *имеем* $|S(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}|$; *в остальных случаях* $|S(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}| + 1$.

Доказательство следует из 6.9.

Теорема 7.6. (1) *Пусть* $L_2 \neq \varnothing$. *Тогда для* $\lambda \geqslant |L| + \aleph_0$ *произвольное пополнение теории* **LFA** *или* LFA λ-*стабильно, если и только если* $\lambda^{\aleph_0} = \lambda$; *в частности, оно стабильно, но не суперстабильно.*

(2) *Пусть* $L_2 = \varnothing$. *Тогда для* $\lambda \geqslant |L| + \aleph_0$ *произвольное пополнение теории* **LFA** *или* LFA λ-*стабильно, если и только если* $\lambda \geqslant |L_1|^{\aleph_0}$; *в частности, оно суперстабильно.*

Доказательство следует из 7.4 и 7.5.

Замечание. В § 8 будет показано, что произвольное пополнение **LFA** и LFA не является тотально трансцендентным, если $L_2 \neq \varnothing$ или $|L_1| \geqslant 2$. (Очевидно, при $L_2 = \varnothing$, $|L_1| \leqslant 2$ все пополнения тотально трансцендентны.)

§ 8. РАНГИ ТИПОВ

В этом параграфе мы найдем ранги Шелаха и Морли типов произвольного пополнения теории **LFA**. Пусть T — пополнение **LFA**, $\mathbf{A}$ — модель **LFA**. Зафиксируем модель $\mathbf{B}$ теории T, $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$, $p \in S(\mathbf{A})$ и b — реализацию типа p в $\mathbf{B}$. Через $I(B)$ обозначаем множество всех неразложимых в B элементов.

Лемма 8.1. *Для любого $X \subseteq \mathbf{B}$ множество $I(B)-[X]$ неразличимо над X в* **B**. *Множество $I(B)$ неразличимо в* **B**.

Доказательство. В силу 5.1 достаточно показать, что любые два кортежа $(b_1, \ldots, b_n)$ и $(b'_1, \ldots, b'_n)$ различных элементов из $I(B)-[X]$ удовлетворяют одним и тем же формулам видов $t(v_i)=s(v_j)$, $t(v_i)=\psi$, $t(v_i)=s(a)$, где t, s — $\mathscr{L}$-термы, ψ — константный L-символ, $a \in X$, $i, j = 1, \ldots, n$. Так как $t(b)=b$ для любых $b \in I(B)$ и $\mathscr{L}$-терма t, то все сводится к рассмотрению формул видов $v_i = v_j$, $v_i = \psi$, $v_i = a$. Формулам первого вида оба кортежа удовлетворяют при $i=j$ и не удовлетворяют при $i \neq j$; формулам второго и третьего видов они не удовлетворяют, поскольку b_i, $b'_i \in [X]$.

Для доказательства второго утверждения теперь достаточно заметить, что $I(B)=I(B)-[\varnothing]$. Если $b \in [\varnothing]$, то ввиду 2.1 $b \in \langle\varnothing\rangle$, и, значит, b разложим. Поэтому $I(B) \cap [\varnothing]=\varnothing$. Лемма доказана.

Лемма 8.2. *Если L конечно, то $I(B)$ 0-определимо; если вдобавок $I(B)$ бесконечно, то $I(B)$ — сильно минимальное неразличимое множество. Если L бесконечно, то $I(B)$ определимо, тогда и только тогда, когда $I(B)$ конечно; $I(B)$ 0-определимо, тогда и только тогда, когда $I(B)$ пусто.*

Доказательство. В случае конечного L, очевидно, $I(B)$ определяется формулой $\bigwedge_{\tau \in \mathscr{L}} \tau(v)=v$; остальная часть первого утверждения следует из 8.1.

Пусть L бесконечно. Если $I(B)$ конечно, то $I(B)$ определимо. Предположим, $I(B)$ определимо в **B**. В силу 5.1 определяющая формула может быть выбрана в виде $\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_n$, где каждая θ_i является конъюнкцией формул видов $t(v)=s(v)$, $t(v)\neq s(v)$, $t(v)=b$, $t(v)\neq b$, где t, s — $\mathscr{L}$-термы, $b \in \mathbf{B}$, и все $\theta_i(\mathbf{B}) \neq \varnothing$. Так как $\theta_i(\mathbf{B}) \subseteq I(\mathbf{B})$, то θ_i не может иметь конъюнктивных членов вида $t(v)\neq s(v)$. Покажем, что в каждой θ_i имеется конъюнктивный член вида $t(v)=b$. Действительно, предположим, что это не так. Пусть $b_1, \ldots, b_m$ — все элементы из **B**, встречающиеся в θ_i, а $\varphi \in L$ таков, что никакое π_j^{φ} не встречается в θ_i. Тогда, очевидно, произвольный φ-разложимый элемент, отличный от $b_1, \ldots, b_m$, удовлетворяет θ_i вопреки $\theta_i(\mathbf{B}) \subseteq I(B)$.

Выберем для каждого i элемент $c_i \in B$, такой, что в θ_i входит $t(v)=c_i$. Так как $\theta_i(\mathbf{B}) \subseteq I(B)$, то $\theta_i(\mathbf{B})=\{c_i\}$, отсюда $I(B)=\{c_1, \ldots, c_n\}$, т. е. $I(B)$ конечно.

Поскольку **LFA** полна в силу 5.3 и, как нетрудно видеть, имеет модели без неразложимых элементов, то тип $\{\tau(v)=v\colon \tau \in \mathscr{L}\}$ опускается в некоторой модели T, и, значит, является неглавным. Поэтому, если $I(B)\neq\varnothing$, то $I(B)$ не 0-определимо. Лемма доказана.

Замечание. Вообще говоря, множество решений неглавного типа может быть определимым, даже если оно бесконечно. (Пример такой ситуации дает неглавный тип над счетной моделью теории отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных классов.) Однако в насыщенной модели такое невозможно.

Лемма 8.3. *Пусть $S \subseteq \mathrm{term}(\mathscr{L}, v)$ такое, что*

(1) *S конечно;*

(2) *$t \in S$, $s \leqslant t$ влечет $s \in S$;*

(3) *$\pi_i^{\varphi} t \in S$ влечет $\pi_j^{\varphi} t \in S$ для $1 \leqslant i, j \leqslant \mathrm{ar}\,\varphi$;*

(4) *если $\varphi, \psi \in L$, $\varphi \neq \psi$, $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{ar}\,\varphi$, $1 \leqslant j \leqslant \mathrm{ar}\,\psi$, $\pi_i^{\varphi} t \in S$, то $\pi_j^{\psi} t \notin S$.*

Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — все различные максимальные элементы дерева S. Тогда существует единственное отображение $t \mapsto r_t$ множества S в множество $\mathrm{term}(L, y_1, \ldots, y_n)$ всех L-термов от переменных $y_1, \ldots, y_n$ такое, что

(a) *$r_{t_i}=y_i$ для $i=1, \ldots, n$;*

(б) *если $s_i=\pi_i^{\varphi} s$ для $1 \leqslant i \leqslant m=\mathrm{ar}\,\varphi$, и $s_i \in S$, то $r_s=\varphi(r_{s_1}, \ldots, r_{s_m})$.*

При этом $r_{ts}=tr_s$ — тождество **LFA**. *Если* **C** — *модель* **LFA**, *$c \in \mathbf{C}$ и $s(c)\neq\tau s(c)$ в* **C** *для всех $\tau s \in S$, то $r_s(t_1(c), \ldots, t_n(c))=s(c)$ в* **C**.

Доказательство. Существование и единственность отображения $t \mapsto r_t$ доказываются очевидной индукцией. В силу (б), если $\tau s \in S$, то $\tau r_s = r_{\tau s}$ — тождество **LFA**. Отсюда, если $ts \in S$, то $r_{ts} = tr_s$ — тождество **LFA**. Заключительное утверждение леммы доказываем индукцией по $|\{t \in S\colon s < t\}|$. Для максимальных элементов это верно ввиду (а). Пусть s немаксимален, тогда доказываемое равенство верно для всех s_i в обозначениях (б). Тогда $r_s(t_1(c), \ldots, t_n(c)) = \varphi(r_{s_1}(t_1(c), \ldots, t_n(c)), \ldots, r_{s_m} \times \times (t_1(c), \ldots, t_n(c))) = \varphi(s_1(c), \ldots, s_m(c)) = s(c)$. Лемма доказана.

Лемма 8.4. $\mathrm{tree}(p)$ *конечно, если и только если* $b \in \langle \mathbf{A} \cup I(B) \rangle$.

Доказательство. Пусть $S = \mathrm{tree}(p)$ конечно. В силу 6.1 S удовлетворяет условиям 8.3, и $s(b) \neq \tau s(b)$ в **B** для всех $\tau s \in S$. Тогда $b = r_v(t_1(b), \ldots, t_n(b))$. Если $t_i \in \mathrm{ur}(p)$, то $t_i(b) \in \mathbf{A}$; если же $t_i \in \mathrm{ind}(p)$, то $t_i(b) \in I(B)$. Поэтому $b \in \langle \mathbf{A} \cup I(B) \rangle$. Обратное утверждение легко доказывается индукцией по длине терма, выражающего b через элементы $\mathbf{A} \cup I(B)$.

Лемма 8.5. $b \in \mathbf{A}$, *если и только если* $\mathrm{tree}(p)$ *конечно и* $\mathrm{ind}(p) = \varnothing$.

Доказательство. Достаточность доказывается так же, как в 8.4, а необходимость очевидна.

Лемма 8.6. *Пусть* $\mathrm{tree}(p)$ *и* L *конечны. Если* $I(B)$ *конечно, то* $b \in \mathrm{acl}(\mathbf{A})$; *если* $\mathrm{ind}(p) = \varnothing$, *то* $b \in \mathbf{A}$; *в этих случаях* $RS(p) = RM(p) = 0$. *Если же* $I(B)$ *бесконечно и* $\mathrm{ind}(p) \neq \varnothing$, *то* $1 \leqslant RS(p) = RM(p) < \omega$.

Доказательство. Первая часть утверждения содержится в 8.4 и 8.5. Предположим, $I(B)$ бесконечно и $\mathrm{ind}(p) \neq \varnothing$. Обозначим через m число классов для отношения эквивалентности $t = s \in p$ на множестве $\mathrm{ind}(p)$. Пусть $s_1, \ldots, s_m$ — представители всех классов этого отношения эквивалентности, $\{t_1, \ldots, t_k\} = \mathrm{ur}(p)$. Тогда из 8.3 следует существование L-терма r такого, что $v = r(t_1, \ldots, t_k, s_1, \ldots, s_m) \in p$. Пусть $a_i = t_i(b)$, $b_j = s_j(b)$; тогда $b = r(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m)$, $a_i \in \mathbf{A}$, $b_j \in I(B)$, все b_j различны. Значит, в силу 8.1 $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ — независимая над **A** m-ка в сильно минимальном множестве $I(B)$, и, следовательно, $RS(\bar{b}, \mathbf{A}) = RM(\bar{b}, \mathbf{A}) = m$. Легко видеть, отображение $\bar{x} \mapsto r(a_1, \ldots, a_k, \bar{x})$ является **A**-определимой инъекцией из $\mathbf{B}^m$ в **B**. Поэтому $RS(b, \mathbf{A}) = RM(b, \mathbf{A}) = m$. Итак, $1 \leqslant m = RS(p) = RM(p) < \omega$, что и требовалось доказать.

Лемма 8.7. *Пусть* $\mathrm{tree}(p)$ *конечно,* L *бесконечно. Если* $\mathrm{ind}(p) = \varnothing$, *то* $b \in \mathbf{A}$, $RS(p) = RM(p) = 0$; *если же* $\mathrm{ind}(p) \neq \varnothing$, *то*

$$RS(p) = RM(p) = \infty \ \text{при}\ |L_1| \geqslant \aleph_0,\ L_2 \neq \varnothing,$$

$$RS(p) = 1,\ RM(p) = \infty \ \text{при}\ |L_1| \geqslant \aleph_0,\ L_2 = \varnothing,$$

$$1 \leqslant RS(p) = RM(p) < \omega \ \text{при}\ |L_1| < \aleph_0.$$

Доказательство. Первое утверждение содержится в 8.5. Предположим, $\mathrm{ind}(p) \neq \varnothing$. Точно так же, как в 8.6, определим $r, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m$. Как и в 8.6, $R(p) = R(b, \mathbf{A}) = R(\bar{b}, \mathbf{A})$, где R есть RS или RM.

Пусть сначала $|L_1| \geqslant \aleph_0$. Покажем, что $RM(b_1, \mathbf{A}) = \infty$. Положим $p_1 = \mathrm{tp}(b_1, \mathbf{A})$. Для $\mathscr{L}_0 \subseteq \mathscr{L}$ обозначим

$$\mathrm{Descr}(p_1, \mathscr{L}_0) = \{v \neq a\colon a \in \mathbf{A}\} \cup \{\tau(v) = v\colon \tau \in \mathscr{L}_0\}.$$

Тогда $\mathrm{Descr}(p_1) = \mathrm{Descr}(p_1, \mathscr{L})$. В силу 6.3 достаточно показать, что $RM(\mathrm{Descr}(p_1, \mathscr{L}_0)) = \infty$ для любого конечного $\mathscr{L}_0 \subseteq \mathscr{L}$. Так как L бесконечно, а $\mathscr{L}_0$ конечно, то найдутся $\pi_i^{\varphi_0}, \pi_j^{\varphi_1} \in \mathscr{L} - \mathscr{L}_0$ такие, что $\varphi_0 \neq \varphi_1$. Положим $\tau_0 = \pi_i^{\varphi_0}$, $\tau_1 = \pi_j^{\varphi_1}$. Для $i < \omega$ и $\sigma \in 2^{i+1}$ обозначим через $\theta_\sigma(v)$ формулу $\tau_{\sigma(i)} \ldots \tau_{\sigma(0)}(v) \neq \tau_{\sigma(i-1)} \ldots \tau_{\sigma(0)}(v)$. Очевидно, $\{\theta_{\sigma 0}, \theta_{\sigma 1}\}$ несовместно с **LFA** для любого $\sigma \in 2^i$. Поэтому, как известно, для доказательства того, что $RM(\mathrm{Descr}(p_1, \mathscr{L}_0)) = \infty$, достаточно показать, что

$$\Delta_\omega(\sigma) = \mathrm{Descr}(p_1, \mathscr{L}_0) \cup \{\theta_{\sigma|i}\colon 1 \leqslant i < \omega\}$$

совместно для любого $\sigma \in 2^\omega$, т. е. (по теореме компактности)

$$\Delta_n(\sigma) = \mathrm{Descr}(p_1, \mathscr{L}_0) \cup \{\theta_{\sigma|i}\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

совместно для всех $1 \leqslant n < \omega$, $\sigma \in 2^n$. Пусть $c_0 \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$, $c_i = \varphi_{\sigma(n-i)}(c_{i-1}, \ldots, c_{i-1})$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, тогда c_n реализует $\Delta_n(\sigma)$. Итак, если $|L_1| \geqslant \aleph_0$, то $RM(b_1, \mathbf{A}) = \infty$. Но ввиду $RM(p) = RM(\bar{b}, \mathbf{A}) \geqslant RM(b_1 \mathbf{A})$ имеем $RM(p) = \infty$.

Пусть теперь $|L_1| \geqslant \aleph_0$ и $L_2 \neq \varnothing$. Покажем, что $RS(b_1, \mathbf{A}) = \infty$. Достаточно показать, что $RS(\mathrm{Descr}(p_1, \mathscr{L}_0)) = \infty$ для любого конечного $\mathscr{L}_0 \subset \mathscr{L}$. Пусть $\tau \in \mathscr{L} - \mathscr{L}_0$, $\varphi \in L_2$. Для $i < \omega$ и $\sigma \in \omega^{i+1}$ обозначим через $\theta_i(v, u_\sigma)$ формулу $\pi_1^\varphi (\pi_2^\varphi)^i \tau(v) = u_\sigma$. Очевидно, $\{\theta_i(v, b), \theta_i(v, b')\}$ невыполнимо в $\mathbf{B}$ при различных $b, b' \in \mathbf{B}$. Так как $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ непусто и, следовательно, бесконечно, то существует инъекция $\sigma \mapsto b_\sigma$ из $\omega^{<\omega}$ в $\mathbf{B} - \mathbf{A}$. Для $\sigma \in \omega^\omega$ и $n \leqslant \omega$ обозначим

$$\Delta_n(\sigma) = \mathrm{Descr}(p_1, \mathscr{L}_0) \cup \{\theta_i(v, b_{\sigma|i+1})\colon i < n\}.$$

Как известно, для доказательства равенства $RS(\mathrm{Descr}(p_1, \mathscr{L}_0)) = \infty$ достаточно показать, что $\Delta_\omega(\sigma)$ совместно для любого $\sigma \in \omega^\omega$, т. е. (по теореме компактности) $\Delta_n(\sigma)$ совместно для любого $n < \omega$, $\sigma \in \omega^\omega$. Пусть $\tau = \pi_j^\psi$. Положим $c_0 = b_{\sigma|n}$, $c_i = \varphi(b_{\sigma|n-i+1}, c_{i-1}, \ldots, c_{i-1})$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда элемент $\psi(c_n, \ldots, c_n)$ реализует $\Delta_n(\sigma)$ в $\mathbf{B}$. Итак, в рассматриваемом случае $RS(b_1, \mathbf{A}) = \infty$ и ввиду $RS(p) = RS(\bar{b}, \mathbf{A}) \geqslant RS(b_1, \mathbf{A})$ имеем $RS(p) = \infty$.

Пусть теперь L_1 конечно. Тогда множество I_1 всех L_1-неразложимых элементов в $\mathbf{B}$ 0-определимо. Точно так же, как в 8.1, показывается, что $I_1 - [X]$ неразличимо над X в $\mathbf{B}$ для любого $X \subseteq \mathbf{B}$. Так как $L - L_1$ бесконечно, то I_1 бесконечно; поэтому I_1 сильно минимально. Точно так же, как в 8.6, можно показать, что $1 \leqslant RS(p) = RM(p) < \omega$.

Для завершения доказательства леммы 8.7 достаточно установить следующее утверждение.

Лемма 8.8. *Если $L_2 = \varnothing$, то $RS(p) \leqslant 1$.*

Доказательство. Ввиду 6.9 существует кардинал $\varkappa$ такой, что для любой модели $\mathbf{C}$ теории $\mathbf{LFA}$ множество типов теории $T_\mathbf{C}$, не реализующихся в $\mathbf{C}$, имеет мощность не больше, чем $\varkappa$. Легко видеть, что это свойство влечет $RS(p) \leqslant 1$ для любого p.

Лемма 8.9. *Пусть* $\mathrm{tree}(p)$ *бесконечно. Тогда* $L_1 \neq \varnothing$ *и*

$$RS(p) = RM(p) = \infty \text{ при } L_2 \neq \varnothing,$$

$$RS(p) = 1,\ RM(p) = \infty \text{ при } L_2 = \varnothing,\ |L_1| \geqslant 2,$$

$$RS(p) = 1,\ 1 \leqslant RM(p) \leqslant 2 \text{ при } L_2 = \varnothing,\ |L_1| = 1.$$

Доказательство. Если L состоит только из константных символов, то $|\mathrm{tree}(p)| = 1$, поэтому в нашем случае $L_1 \neq \varnothing$.

Пусть сначала $L_2 \neq \varnothing$, $\varphi \in L_2$. Докажем, что $RS(p) = \infty$ (тогда тем более $RM(p) = \infty$). Для $1 \leqslant m < \omega$ обозначим через $\mathrm{tree}(p, m)$ множество всех термов из $\mathrm{tree}(p)$ длины не больше, чем m. Очевидно, $\mathrm{tree}(p, m)$ удовлетворяет условиям 8.3. Положим $\mathrm{ind}(p, m) = \mathrm{ind}(p) \cap \mathrm{tree}(p, m)$. Обозначим через $\mathrm{Sk}(p, m)$ множество всех формул из p видов $t = s$, $t \neq s$, $t = a$, $t \neq a$, где $t, s \in \mathrm{tree}(p, m)$; через $\mathrm{Ind}(p, m)$ — множество всех формул из p вида $\tau t = t$, где $\tau \in \mathscr{L}$, $t \in \mathrm{ind}(p, m)$. Пусть

$$\mathrm{Descr}(p, m) = T_\mathbf{A} \cup \mathrm{Sk}(p, m) \cup \mathrm{Ind}(p, m).$$

Ввиду 6.3 достаточно показать, что $RS(\mathrm{Descr}(p, m)) = \infty$ для любого m.

Можно считать, что $\mathbf{B}$ достаточно насыщена. Покажем, что найдется максимальный в $\mathrm{tree}(p, m)$ терм t такой, что для любого $d \in \mathbf{B} - [\mathbf{A} \cup I(B)]$ множество $\{t = d\} \cup \mathrm{Descr}(p, m)$ реализуется в $\mathbf{B}$.

Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — все максимальные элементы дерева $\mathrm{tree}(p, m)$. Очевидно, дерево $\mathrm{tree}(p, m)$ удовлетворяет всем условиям 8.3, причем

$s(b) \neq \tau s(b)$ для $\tau s \in \operatorname{tree}(p, m)$. Обозначим $t_i(b)$ через b_i, тогда по 8.3 $b = r_v(b_1, \ldots, b_n)$. Найдется i такое, что $b_i \notin \langle \mathbf{A} \cup I(B) \rangle$, иначе $b \in \langle \mathbf{A} \cup I(B) \rangle$ и $\operatorname{tree}(p)$ конечно в силу 8.4. Выберем минимальное подмножество множества $\{b_1, \ldots, b_n\}$, порождающее $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$; оно свободно по 3.2. Пусть это $\{b_1, \ldots, b_m\}$, где $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, имеем $b_i \notin \mathbf{A} \cup I(B)$; скажем, $b_1, \ldots, b_k \in \mathbf{A} \cup I(B)$, $b_{k+1}, \ldots, b_m \notin \mathbf{A} \cup I(B)$, где $k < m$. Очевидно, существуют единственные L-термы $q_i(z_1, \ldots, z_m)$ такие, что $b_i = q_i(b_1, \ldots, b_m)$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, причем $q_i = z$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. Имеем $b = r_v(q_1(b_1, \ldots, b_m), \ldots, q_n(b_1, \ldots, b_m))$.

Утверждаем, что в качестве t можно взять t_{k+1}. Пусть $d \in \mathbf{B} - [\mathbf{A} \cup I(B)]$. Ввиду 3.3 $b_1, \ldots, b_k, d$ свободны в B. Положим $b'_i = b_i$ для $1 \leqslant i \leqslant k$, $b'_{k+1} = d$. Используя насыщенность $\mathbf{B}$ и 3.3, легко построить $b'_{k+2}, \ldots, b'_m \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$ так, что $b'_1, \ldots, b'_m$ свободны в B. Очевидно, существует мономорфизм $\alpha\colon \langle b_1, \ldots, b_m \rangle \to B$ такой, что $\alpha(b_i) = b'_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. Положим $b'_i = q_i(b'_1, \ldots, b'_m)$ для $m < i \leqslant n$, $b' = r_v(b'_1, \ldots, b'_n)$ Ясно, $\alpha(b_i) = b'_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, $\alpha(b) = b'$. В силу 8.3 $tr_v = r_t$ — тождество **LFA** для $t \in \operatorname{tree}(p, m)$, поэтому $t(b) = tr_v(b_1, \ldots, b_n) = r_t(b_1, \ldots, b_n)$, $t(b') = tr_v(b'_1, \ldots, b'_n) = r_t(b'_1, \ldots, b'_n)$. Отсюда $\alpha(t(b)) = t(b')$. Поскольку по 8.3 $r_{t_i} = y_i$, то $t_i r_v = y_i$ является тождеством **LFA** для $1 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому $t_i(b) = b_i$, $t_i(b') = b'_i$.

Покажем теперь, что b' реализует $\operatorname{Descr}(p, m) \cup \{t_{k+1} = d\}$ в $\mathbf{B}$. Прежде всего, $t_{k+1}(b') = b'_{k+1} = d$. Если $s_1, s_2 \in \operatorname{tree}(p, m)$, $s_1 = s_2 \in \operatorname{Descr}(p, m)$, то $s_1(b) = s_2(b)$, значит, $\alpha(s_1(b)) = \alpha(s_2(b))$, т. е. $s_1(b') = s_2(b')$. Если $s_1 \neq s_2 \in \operatorname{Descr}(p, m)$, то $s_1(b) \neq s_2(b)$, значит, $\alpha(s_1(b)) \neq \alpha(s_2(b))$, т. е. $s_1(b') \neq s_2(b')$.

Предположим, $s = a \in \operatorname{Descr}(p, m)$, тогда $s \in \operatorname{ur}(p)$ и s максимален в $\operatorname{tree}(p, m)$. Пусть s есть t_i, тогда $b_i \in \mathbf{A}$. Отсюда, если z_j явно входит в q_i, то $b_j \in \mathbf{A}$. Значит, q_i есть $q_i(z_1, \ldots, z_k)$, поэтому $b_i = b'_i$, поскольку $b_j = b'_j$ для $1 \leqslant j \leqslant k$. Следовательно, $s(b') = t_i(b') = b'_i = b_i = a$.

Предположим теперь, что $s \in \operatorname{tree}(p, m)$, $s(b') = a$; покажем, что $s(b) = s(b')$. Если y_j явно входит в r_s, то ввиду $a = s(b') = s(r_v(b'_1, \ldots, b'_n)) = r_s(b'_1, \ldots, b'_n)$ имеем $b'_j \in \mathbf{A}$, откуда $1 \leqslant j \leqslant k$ из-за выбора $b'_{k+1}, \ldots, b'_m$ вне $\mathbf{A}$. Значит, r_s есть $r_s(y_1, \ldots, y_k)$, и $s(b) = r_s(b_1, \ldots, b_k) = r_s(b'_1, \ldots, b'_k) = s(b')$. Итак, если $s \neq a \in \operatorname{Descr}(p, m)$, то $s(b') \neq a$.

Остается заметить, что b' реализует все формулы из $\operatorname{Ind}(p, m)$. Рассмотрим произвольный терм из $\operatorname{ind}(p, m)$, это один из t_i. Так как $t_i(b) \in I(B)$, то $i \leqslant k$ в силу $b_{k+1}, \ldots, b_n \notin I(B)$. Значит, $t_i(b') = b'_i = b_i = t_i(b) \in I(B)$. Поэтому $\tau t_i(b') = t_i(b')$ для всех $\tau \in \mathscr{L}$, что и требовалось доказать. Отметим, что в рассуждениях выше не использовались ограничения на L.

Зафиксируем терм t с указанным выше свойством и $\varphi \in L_2$. Для $i < \omega$ и $\sigma \in \omega^{i+1}$ обозначим через $\theta_i(v, u_\sigma)$ формулу $\pi_1^\varphi(\pi_2^\varphi)^i(v) = u_\sigma$. Очевидно, $\{\theta_i(v, b), \theta_i(v, b')\}$ не выполнимо в $\mathbf{B}$ при различных b, $b' \in \mathbf{B}$. В силу насыщенности $\mathbf{B}$ множество $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ бесконечно; зафиксируем инъекцию $\sigma \mapsto b_\sigma$ из $\omega^{<\omega}$ в $\mathbf{B} - \mathbf{A}$. Для любого $\sigma \in \omega^\omega$ множество $\{\theta_i(v, b_{\sigma|i+1})\colon i < \omega\}$ конечно выполнимо в $\mathbf{B}$ (это показывается так же, как в 8.7), поэтому реализуется в $\mathbf{B}$ элементом вне $[\mathbf{A} \cup I(B)]$. Тогда ввиду выбора терма t множество $\operatorname{Descr}(p, m) \cup \{\theta_i(t, b_{\sigma|i+1})\colon i < \omega\}$ реализуется в $\mathbf{B}$ для любого $\sigma \in \omega^\omega$. Отсюда $RS(\operatorname{Descr}(p, m)) = \infty$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $L_2 = \varnothing$, $|L_1| \geqslant 2$. Докажем, что $RM(p) = \infty$. Как и выше, достаточно показать $RM(\operatorname{Descr}(p, m)) = \infty$ для любого m. Рассмотрим тот же терм t и различные $\varphi_0, \varphi_1 \in L_1$. Положим $\tau_i = \pi_1^{\varphi_i}$, $i = 0, 1$. Для $i < \omega$ и $\sigma \in 2^{i+1}$ обозначим через $\theta_\sigma(v)$ формулу

$\tau_{\sigma(i)} \ldots \tau_{\sigma(0)}(v) \neq \tau_{\sigma(i-1)} \ldots \tau_{\sigma(0)}(v)$. Очевидно, $\{\theta_{\sigma 0}, \theta_{\sigma 1}\}$ несовместно с $\mathbf{LFA}$ для любого $\sigma \in 2^i$. Как и в 8.7, для любого $\sigma \in 2^\omega$ множество $\{\theta_{\sigma|i} : 1 \leqslant i < \omega\}$ конечно выполнимо в $\mathbf{B}$, поэтому реализуется в $\mathbf{B}$. Тогда в силу выбора терма t множество $\mathrm{Descr}(p, m) \cup \{\theta_{\sigma|i}(t) : 1 \leqslant i < \omega\}$ реализуется в B для любого $\sigma \in 2^\omega$. Отсюда $RM(\mathrm{Descr}(p, m)) = \infty$.

Поскольку $RM(p) = \infty$, то $RS(p) > 0$. Учитывая 8.8, получаем $RS(p) = 1$.

Пусть, наконец, $L_2 = \varnothing$, $|L_1| = 1$. В этом случае, как нетрудно показать, $RS(p) = 1$ и

$$RM(p) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если} } L \text{ \textit{конечно}, } T = \mathbf{LFA}(n),\ n < \omega, \\ 2 & \text{\textit{в остальных случаях.}} \end{cases}$$

Лемма доказана.

Подведем итоги доказанных выше лемм. В оставшихся предложениях этого параграфа пусть $X \subseteq \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = [X]$.

Предложение 8.10. *Если L и $I(B)$ конечны, то* $\mathrm{acl}(X) = [X \cup I(B)]$; *в остальных случаях* $\mathrm{acl}(X) = [X]$.

Доказательство. Очевидно, в любом случае $[X] \subseteq \mathrm{acl}(X)$ и $[X \cup I(B)] \subseteq \mathrm{acl}(X)$ при конечных L и $I(B)$. Докажем обратные включения. Пусть $b \in \mathrm{acl}(X)$. Ясно, p алгебраичен. Тогда в силу 8.9 $\mathrm{tree}(p)$ конечно и $b \in \langle X \cup I(B) \rangle$ по 8.4. Поэтому в случае конечных L и $I(B)$ все доказано. Если L или $I(B)$ бесконечно, то ввиду 8.6 и 8.7 $\mathrm{ind}(p) = \varnothing$. Следовательно, $b \in [X]$ по 8.5. Предложение доказано.

Предложение 8.11. *Если L и $I(B)$ конечны, $|I(B) - \mathbf{A}| = 1$, то* $\mathrm{dcl}(X) = [X \cup I(B)]$; *в остальных случаях* $\mathrm{dcl}(X) = [X]$.

Доказательство. Заметим сначала, что если $|I(B) - \mathbf{A}| \geqslant 2$, $b \in \langle \mathbf{A} \cup I(B) \rangle - \mathbf{A}$, то b не определим над $\mathbf{A}$. Действительно, пусть $b = r(\bar{a}, \bar{c})$, где r — L-терм, $\bar{a}$ — кортеж в $\mathbf{A}$, $\bar{c}$ — кортеж в $I(B) - \mathbf{A}$ с различными компонентами. Так как $|I(B) - \mathbf{A}| \geqslant 2$, то в $I(B) - \mathbf{A}$ найдется отличный от $\bar{c}$ кортеж $\bar{c}'$ с различными компонентами. В силу 8.1 $I(B) - \mathbf{A}$ неразличимо над $\mathbf{A}$ и $\mathrm{tp}(\bar{c}, \mathbf{A}) = \mathrm{tp}(\bar{c}', \mathbf{A})$. Положим $b' = r(\bar{a}, \bar{c}')$, тогда $\mathrm{tp}(b, \mathbf{A}) = \mathrm{tp}(b', \mathbf{A})$. Поскольку $\bar{c} = \bar{c}'$, то, $b \neq b'$. Следовательно, b не определим над $\mathbf{A}$.

Очевидно, всегда $[X] \subseteq \mathrm{dcl}(X) \subseteq \mathrm{acl}(X)$, поэтому, если L или I бесконечно, то ввиду 8.10 $[X] = \mathrm{dcl}(X) = \mathrm{acl}(X)$. Пусть L и I конечны. Тогда по 8.10 $\mathrm{dcl}(X) \subseteq \mathrm{acl}(X) \subseteq [X \cup I(B)]$. Если $|I(B) - \mathbf{A}| \geqslant 2$, то учитывая доказанное выше, имеем $\mathrm{dcl}(X) \subseteq [X]$, и, значит, $\mathrm{dcl}(X) = [X]$. Если $|I(B) - \mathbf{A}| = 1$, то единственный элемент из $I(B) - \mathbf{A}$ определим над X, откуда $[X \cup I(B)] \subseteq \mathrm{dcl}(X)$; таким образом, в этом случае $[X \cup I(B)] = \mathrm{dcl}(X) = \mathrm{acl}(X)$. Если же $I(B) \subseteq \mathbf{A}$, то в силу 5.2 $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$ и $\mathrm{dcl}(X) = [X]$. Предложение доказано.

Предложение 8.12. *Пусть $L_2 \neq \varnothing$. Тогда, если L и $I(B)$ конечны, то*

$$R(b, X) = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } b \in [X \cup I(B)], \\ \infty & \text{\textit{в противном случае.}} \end{cases}$$

Если же L или $I(B)$ бесконечно, то

$$R(b, X) = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } b \in [X], \\ n,\ 0 < n < \omega, & \text{\textit{если} } b \in [X \cup I(B)] - [X], \quad L_1 \text{ \textit{конечно}}, \\ \infty & \text{\textit{в остальных случаях.}} \end{cases}$$

(Здесь R — любой из рангов RM, RS.)

Доказательство следует из 8.4—8.7 и 8.9.

Предложение 8.13. *Пусть $L_2 = \varnothing$. Тогда, если L и $I(B)$ конечны, то*

$$RS(b, x) = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } b \in [X \cup I(B)], \\ 1 & \text{\textit{в противном случае.}} \end{cases}$$

Если же L или $I(B)$ бесконечно, то

$$RS(b, X) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \in [X]; \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство следует из 8.8 и 8.10.

Предложение 8.14. *Пусть $L_2 = \varnothing$. Тогда*

$$RM(b, X) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \in [X \cup I(B)]\ (L \text{ и } I(B) \text{ конечны}) \text{ или } b \in [X], \\ 1, & \text{если } b \in [X \cup I(B)] - [X]\ (L \text{ конечно, } I(B) \text{ бесконечно}), \\ & \text{или } b \in [X \cup I(B)] - [X]\ (L \text{ бесконечно, } L_1 \text{ конечно}), \\ & \text{или } b \notin [X \cup I(B)]\ (L \text{ и } I(B) \text{ конечны, } |L_1| = 1), \\ 2, & \text{если } b \notin [X \cup I(B)]\ (L \text{ или } I(B) \text{ бесконечно, } |L_1| = 1), \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство следует из 8.4—8.7 и 8.9.

§ 9. СИЛЬНО МИНИМАЛЬНЫЕ ТИПЫ

Обобщением понятия сильно минимального множества является понятие сильно минимального типа: неалгебраический тип p над некоторым множеством называется *сильно минимальным*, если не существует формулы $\theta(v, \bar{a})$ с параметрами из большой модели такой, что $p \cup \{\theta(v, \bar{a})\}$ и $p \cup \{\neg\theta(v, \bar{a})\}$ — неалгебраические типы. Легко видеть, что если $\theta(v, \bar{u})$ стабильна для p, то найдется $q \supseteq p$ такой, что не существует $\bar{a}$ такого, что $q \cup \{\theta(v, \bar{a})\}$, $q \cup \{\neg\theta(v, \bar{a})\}$ — неалгебраические типы. Отсюда следует, что для любого стабильного типа p существует сильно минимальный тип $q \supseteq p$. Очевидно, любой сильно минимальный тип над X имеет единственное сильно минимальное расширение в $S(X)$. Мы выясним, какие полные типы пополнений **LFA** являются сильно минимальными.

Предложение 9.1. *Пусть T — пополнение* **LFA**, *X — подмножество модели T, $p \in S(X)$. Тогда равносильны условия*

(1) *p сильно минимален;*

(2) *p неалгебраичен, и если b — реализация p, то для любого $\mathscr{L}$-терма t либо $t(b) \in \mathrm{dcl}(X)$, либо $b \in \mathrm{acl}(X \cup \{t(b)\})$.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2) Будем считать, что $X \subseteq \mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ — достаточно насыщенная модель T. Предположим, вопреки доказываемому, что p сильно минимален, но для некоторой реализации $b \in \mathbf{B}$ типа p и некоторого $\mathscr{L}$-терма t имеем $t(b) \notin \mathrm{dcl}(X)$ и $b \notin \mathrm{acl}(X \cup \{t(b)\})$. Положим $c = t(b)$. Поскольку $c \notin \mathrm{dcl}(X)$, то найдется $c' \in \mathbf{B}$ такой, что $c' \neq c$, $\mathrm{tp}(c', X) = \mathrm{tp}(c, X)$. Пусть $\mathrm{tp}((b', c'), X) = \mathrm{tp}((b, c), X)$, тогда $t(b') = c'$, $b' \notin \mathrm{acl}(X \cup \{c'\})$. Очевидно, $p \cup \{t = c\}$, $p \cup \{t = c'\}$ — неалгебраические типы. Поскольку они взаимно несовместны, то имеем противоречие с сильной минимальностью p.

(2)$\Rightarrow$(1) Предположим, вопреки доказываемому, что p не сильно минимален, $p \cup \{\theta(v, \bar{a})\}$, $p \cup \{\neg\theta(v, \bar{a})\}$ — неалгебраические типы, $\bar{a}$ — кортеж в $\mathbf{B}$. В силу 5.1 $\theta(v, \bar{a})$ может быть выбрана вида $t(v) = a$, где t — $\mathscr{L}$-терм, $a \in \mathbf{B}$. Так как $t = a$ совместно с p, но не следует из p, то $a \notin \mathrm{dcl}(X)$. Ввиду неалгебраичности типа $p \cup \{t = a\}$ найдется его реализация b такая, что $b \notin \mathrm{acl}(X \cup \{a\})$. Итак, $t(b) \notin \mathrm{dcl}(X)$, $b \notin \mathrm{acl}(X \cup \{t(b)\}$ вопреки (2). Предложение доказано.

Замечание. Условие (2) в 9.1 можно переформулировать в чисто алгебраических терминах, используя 8.10 и 8.11.

Следствие 9.2. *Пусть T — пополнение* **LFA**, **A**, **B** — *модели T, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $b \in \mathbf{B}$. Тогда равносильны условия*

(1) $\mathrm{tp}(b, \mathbf{A})$ *сильно минимален;*

(2) $b \notin \mathbf{A}$, *и для любого $\mathscr{L}$-терма t либо $t(b) \in \mathbf{A}$, либо $b \in [\mathbf{A} \cup \{t(b)\}]$;*

(3) $[\mathbf{A} \cup \{b\}]$ — *минимальное расширение* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Так как по 5.1 $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$, то $\mathrm{dcl}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$. Если L конечно, $T = \mathbf{LFA}(n)$, $n < \omega$, то $I(B) \subseteq \mathbf{A}$, и ввиду 8.10 $\mathrm{acl}(\mathbf{A} \cup \{t(b)\}) = [\mathbf{A} \cup \{t(b)\}]$. В остальных случаях это равенство также верно по 8.10. Поэтому $(1) \Leftrightarrow (2)$ — переформулировка 9.1.

$(2) \Rightarrow (3)$ Очевидно, $\mathbf{A} \preccurlyeq [\mathbf{A} \cup \{b\}]$. Пусть $\mathbf{A} \prec \mathbf{C} \preccurlyeq [\mathbf{A} \cup \{b\}]$. Выберем $c \in \mathbf{C} - \mathbf{A}$; по 2.1 он имеет вид $r(\bar{a}, t_1(b), \ldots, t_k(b))$, где r — L-терм, t_i — $\mathscr{L}$-термы, $\bar{a}$ — кортеж в $\mathbf{A}$. Поскольку $c \notin \mathbf{A}$, то $t_i(b) \notin \mathbf{A}$ для некоторого i; очевидно, $t_i(b) \in \mathbf{C}$. В силу (2) $b \in \mathbf{C}$ и $\mathbf{C} = [\mathbf{A} \cup \{b\}]$.

$(3) \Rightarrow (2)$ Так как $[\mathbf{A} \cup \{b\}] \neq \mathbf{A}$, то $b \notin \mathbf{A}$. Пусть $t(b) \in \mathbf{A}$, тогда $\mathbf{A} \prec [\mathbf{A} \cup \{t(b)\}] \preccurlyeq [\mathbf{A} \cup \{b\}]$. Ввиду минимальности $[\mathbf{A} \cup \{t(b)\}] = [\mathbf{A} \cup \{b\}]$, и $b \in [\mathbf{A} \cup \{t(b)\}]$. Следствие доказано.

Следствие 9.3. *Пусть* $L_2 = \varnothing$, T — *пополнение* $\mathbf{LFA}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — *модели* T, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$. *Тогда* $\mathrm{tp}(b, \mathbf{A})$ *сильно минимален.*

Доказательство. Ввиду $L_2 = \varnothing$ имеем $b \in \langle t(b) \rangle$ для любого $\mathscr{L}$-терма t, поэтому для b выполнено условие (2) в 9.2.

Предложение 9.4. *Пусть* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — *модели* $\mathbf{LFA}$, $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$. *Если* $\mathbf{B}$ — *минимальное расширение* $\mathbf{A}$, *то любой элемент из* $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ *реализует сильно минимальный тип над* $\mathbf{A}$. *Если* $L_2 \neq \varnothing$, *то верно и обратное.*

Доказательство. Если $\mathbf{B}$ — минимальное расширение $\mathbf{A}$, $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$, то $\mathbf{B} = [\mathbf{A} \cup \{b\}]$, поэтому первое утверждение — это импликация $(3) \Rightarrow (1)$ в 9.2.

Пусть $L_2 \neq \varnothing$, $\varphi \in L_2$. Предположим, что любой элемент из $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ реализует сильно минимальный тип над $\mathbf{A}$. Рассмотрим $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$ и покажем, что $\mathbf{B} = [\mathbf{A} \cup \{b\}]$. Тогда ввиду импликации $(1) \Rightarrow (3)$ в 9.2 $\mathbf{B}$ будет минимальным расширением $\mathbf{A}$. Пусть $c \in \mathbf{B}$, положим $d = \varphi(b, c, \ldots, c)$. По условию $\mathrm{tp}(d, \mathbf{A})$ сильно минимален. Поэтому, учитывая $\pi_1^\varphi(d) \notin \mathbf{A}$, имеем в силу 9.2(2) $d \in [\mathbf{A} \cup \{\pi_1^\varphi(d)\}]$, откуда $c = [\mathbf{A} \cup \{b\}]$, что и требовалось доказать.

Замечание. Ввиду 9.3 условие $L_2 \neq \varnothing$ существенно.

Для любых T и X существуют сильно минимальные типы над X. (Исключение составляет лишь случай конечной константной сигнатуры.) Они могут быть весьма разнообразными. Приведем три типичных примера.

(а) Пусть $\varphi \in L$, $n = \mathrm{ar}\,\varphi \geqslant 1$, $\tau_i = \pi_i^\varphi$. Множество $\{\tau_i t \neq t,\ \tau_i t = \tau_j t\colon 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ t - \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$-терм от $v\}$ задает совместный полный тип теории T над $\mathbf{A}$, который удовлетворяет 9.2(2), и, значит, сильно минимален.

(б) Пусть $\varphi \in L$, $n = \mathrm{ar}\,\varphi \geqslant 2$, $\mathbf{A}$ — модель $\mathbf{LFA}$, $a_m \in \mathbf{A}$, $m < \omega$, $\tau_i = \pi_i^\varphi$. Множество $\{\tau_i \tau_n^m(v) = a_m,\ \tau_n^{m+1}(v) \neq \tau_n^m(v),\ \tau_n^m(v) \neq a\colon 1 \leqslant i \leqslant n,\ m < \omega,\ a \in \mathbf{A}\}$ задает совместный полный тип над $\mathbf{A}$ теории $\mathbf{T}$, который удовлетворяет 9.2(2) и, значит, сильно минимален.

(с) Если L бесконечно или L конечно, $T = \mathbf{LFA}(\infty)$, то тип неразложимого элемента является сильно минимальным. Это видно как из 9.1, так и из 8.1.

Лемма 9.4. *Пусть* T — *пополнение* $\mathbf{LFA}$, $\mathbf{B}$ — *модель* T, $X \subseteq \mathbf{B}$, $p \in S(X)$, p *сильно минимален. Предположим,* $b_1, \ldots, b_n, b_1', \ldots, b_n' \in p(\mathbf{B})$, *причем* $b_i \notin \mathrm{acl}(X \cup \{b_j\})$, $b_i' \notin \mathrm{acl}(X \cup \{b_j'\})$ *для различных* i, j. *Тогда* $\mathrm{tp}((b_1, \ldots, b_n), X) = \mathrm{tp}((b_1', \ldots, b_n'), X)$.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $X = \mathrm{dcl}(X)$. В силу 5.1 достаточно доказать, что для любых $\mathscr{L}$-термов t, s и различных i, j формулы $t(b_i) = s(b_j)$ и $t(b_i') = s(b_j')$ истинны или ложны в $\mathbf{B}$ одновременно. Пусть, скажем, $t(b_i) = s(b_j) = a$. При $a \in X$ имеем $t(b_i') = s(b_j') = a$. Случай $a \notin X$ невозможен, поскольку, учитывая $X = \mathrm{dcl}(X)$ и 9.1, мы имели бы тогда $b_i \in \mathrm{acl}(X \cup \{t(b_i)\}) = \mathrm{acl}(X \cup \{s(b_j)\}) \subseteq \mathrm{acl}(X \cup \{b_j\})$ вопреки условию. Предложение доказано.

Предложение 9.5. *Пусть T, $\mathbf{B}$, X и p такие, как в* 9.4. *Тогда для любого* $Y \subseteq p(\mathbf{B})$

$$p(\mathbf{B}) \cap \mathrm{acl}(X \cup Y) = \cup_{b \in Y}(p(\mathbf{B})) \cap \mathrm{acl}(X \cup \{b\}).$$

Другими словами, предгеометрия любого сильно минимального типа является распадающейся.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $\mathbf{B}$ достаточно насыщена, Y конечно и $\mathrm{acl}(X \cup Y) \neq \mathrm{acl}(X \cup Y')$ для любого $Y' \subset Y$. Пусть $Y = \{b_1, \ldots, b_n\}$, тогда $b_i \notin \mathrm{acl}(X \cup \{b_j\})$ для различных i, j. Если $b \in p(\mathbf{B})$ и $b \notin \mathrm{acl}(X \cup \{b_j\})$ для всех i, то по принципу замены $b_i \notin \mathrm{acl}(X \cup \{b\})$. Поэтому в силу 9.4 $\mathrm{tp}((b_1, \ldots, b_n, b), X)$ не зависит от выбора такого b. Если, вопреки доказываемому, нашелся бы $b \in p(\mathbf{B})$ такой, что $b \in \mathrm{acl}(X \cup Y)$, $b \in \mathrm{acl}(X \cup \{b_i\})$ для всех i, то мы имели бы $p(\mathbf{B}) \subseteq \mathrm{acl}(X \cup Y)$, что противоречит насыщенности $\mathbf{B}$. Предложение доказано.

§ 10. НОРМАЛЬНОСТЬ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫХ АЛГЕБР

Пусть T — полная теория языка L. Формула $\varphi(\bar{v}, \bar{u})$ языка L называется *нормальной для переменных* $\bar{v}$ (относительно T), если для любых модели M теории T и кортежей $\bar{a}$, $\bar{c}$ из M той же длины, что и $\bar{u}$, $\varphi(M, \bar{a}) \cap \varphi(M, \bar{c}) \neq \varnothing$ влечет $\varphi(M, \bar{a}) = \varphi(M, \bar{c})$. Формула называется *нормальной*, если она нормальна относительно любых своих переменных. Говорят, что T *нормальна*, если любая L-формула T-эквивалентна булевой комбинации нормальных формул.

Понятие нормальной формулы независимо ввели А. Пиллэй [3] и в неявной форме Е. А. Палютин [4]. При этом А. Пиллэй отталкивался от нормальности теории произвольного модуля, а Е. А. Палютин — от нормальности произвольной стабильной хорновой теории. Оказалось, что нормальные теории стабильны.

Предложение 10.1. *Любое пополнение* **LFA** (а значит, и *LFA*) *является нормальной теорией.*

Доказательство. Ввиду 5.1 достаточно заметить, что формулы $\theta(v, u)$ вида $t(v) = s(u)$, где t, s — $\mathscr{L}$-термы, нормальны. Пусть $\mathbf{B}$ — модель **LFA**, a, $b \in \mathbf{B}$. Если $\theta(\mathbf{B}, a) \cap \theta(\mathbf{B}, b) \neq \varnothing$, то $s(a) = s(b)$, и поэтому $\theta(\mathbf{B}, a) = \theta(\mathbf{B}, b)$. Предложение доказано.

Замечание. Пополнение теории *LFA* или **LFA** может быть как хорновой, так и нехорновой теорией. Нетрудно заметить, что в следующих случаях пополнение T теории *LFA* нехорново: L конечно, $T = LFA(n)$, $1 \leqslant n < \omega$; $2 \leqslant |L| < \aleph_0$, $T = LFA(0)$. В остальных случаях T хорнова. Пополнение T теории **LFA** хорново лишь когда $|L| = 1$, $T = \mathbf{LFA}(0)$ или L бесконечно, $L_1 = \varnothing$.

В последние годы выяснилась важная роль для теории стабильности понятия псевдоплоскости, введенного А. Лахланом [9]. *Псевдоплоскость* — это структура $\langle P, L, I \rangle$, где P можно мыслить как множество «точек», L — множество «линий», а $I \subseteq P \times L$ — отношение инцидентности такое, что любая точка (линия) инцидентна бесконечному множеству линий (точек) и любые две различные точки (линии) инцидентны лишь конечному числу линий (точек). Говорят, что *полная теория T содержит типово интерпретируемую псевдоплоскость*, если в T^{eq} существуют полные типы $p(x)$, $q(y)$, $r(x, y)$ такие, что $\langle p(M), q(M), r(M) \rangle$ — псевдоплоскость для насыщенной модели M. Если в этом определении тип r заменим на одну формулу, то придем к понятию типово определимой псевдоплоскости, а если на формулы заменим p, r, q — к понятию определимой псевдоплоскости.

А. Пиллэй [5] доказал, что любая стабильная теория либо слабо нормальна, либо содержит типово определимую псевдоплоскость. (Слабая нормальность — некоторое свойство теорий, расположенное между нормальностью и стабильностью.) Им было высказано предположение о том, что эти возможности исключают друг друга. Б. И. Зильбер предложил способ построения псевдоплоскостей в локально свободных группоидах, что вместе с 10.1 дало возможность опровергнуть это предположение. Доказательство следующего предложения было получено автором и Б. И. Зильбером в совместном обсуждении.

Предложение 10.2. *Пусть A — локально свободный группоид. Тогда A содержит определимую псевдоплоскость и типово определимую псевдоплоскость.*

Доказательство. Рассмотрим систему инцидентности $\langle P, L, I\rangle$, где $P=A$, $L=A^2$, $aI(b, c)\Leftrightarrow a=b\vee\exists x(a=(bx)c)$. Очевидно, она определима в A. Покажем, что эта система — псевдоплоскость.

Каждой точке a инцидентны все линии (a, c), где $c\in A$, поэтому a инцидентна бесконечному числу линий. Каждой линии (b, c) инцидентны все точки вида $(bd)c$, где $d\in A$. Поскольку ввиду 1° $(bd)c\neq(bd')c$ при $d\neq d'$, то (b, c) инцидентна бесконечному числу точек.

Докажем, что двум различным точкам (линиям) инцидентно не более одной линии (точки). Для этого достаточно показать, что если точки a, a' инцидентны линиям l, l', то $l=l'$ либо $a=a'$.

Если точка a инцидентна линии (b, c), то называем a *крайней точкой* этой линии в случае $a=b$ и *внутренней точкой* в случае $\vDash\exists x(a=(bx)c)$. Указанные случаи являются взаимоисключающими в силу 3°.

Предположим $l\neq l'$. Из 1° следует, что l, l' не имеют общих внутренних точек. Поэтому, если a, a' инцидентны l, l', то либо обе точки a, a' крайние для хотя бы одной из l, l', либо одна из a, a' — крайняя в l и внутренняя в l', а другая — внутренняя в l и крайняя в l'. Очевидно, в первом случае $a=a'$. Второй случай в действительности невозможен. Пусть, скажем, a — крайняя в l и внутренняя в l', a' — внутренняя в l и крайняя в l'. Тогда $a'=(ab)c$, $a=(a'd)e$ для некоторых b, c, d, $e\in A$ и $a=(((ab)c)d)e$ вопреки 3°. Итак, если $l\neq l'$, то $a=a'$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь второе утверждение. Рассмотрим группоид G, заданный образующими $\{g_\sigma\colon \sigma\in 2^{<\omega}\}$ и определяющими соотношениями $\{g_\sigma=g_{\sigma0}\cdot g_{\sigma1}\colon \sigma\in 2^{<\omega}\}$. Легко видеть, что G локально свободен. Пусть $g=g_{\langle\rangle}$, тогда $t(g)\neq s(g)$ в G для различных $\mathscr{L}$-термов t, s.

Ввиду 5.2 $A\prec A*G\prec A*G*G$. Пусть G достаточно насыщена, $A*G*G\prec C$. Обозначим через c_0, c_1 образы элемента g в первой и второй копиях G соответственно. Из 5.1 следует, что $\mathrm{tp}(c_0, \varnothing)=\mathrm{tp}(c_1, \varnothing)$, обозначим этот тип через $p(x)$. Через $q(x, y)$ обозначим $\mathrm{tp}((c_0, c_1), \varnothing)$, а через $\theta(x, y, z)$ — формулу $x=y\vee\exists v(x=(yv)z)$. Покажем, что $\langle p(C), q(C), \theta(C)\rangle$ — псевдоплоскость.

То, что любые две различные точки (линии) инцидентны не более чем одной линии (точке), доказывается точно так же, как в доказательстве первой части предложения.

Докажем, что любая точка инцидентна бесконечному числу линий. В силу однородности достаточно показать это для c_0. Из 5.1 видно, что пара $(c_0, t(c_1))$ реализует тип q для любого $\mathscr{L}$-терма t. Линии $(c_0, t(c_1))$ различны для различных t и инцидентны c_0.

Докажем, что любая линия инцидентна бесконечному числу точек. В силу однородности достаточно доказать это для какой-нибудь одной линии. Пусть π_1, π_2 — $\mathscr{L}$-символы, соответствующие бинарной операции группоида. Из 5.1 видно, что пара $\left(\pi_1^2(c_0), \pi_2(c_0)\right)$ реализует q и для любого $\mathscr{L}$-терма t элемент $a_t=\left(\pi_1^2(c_0)\cdot t\pi_2\pi_1(c_0)\right)\cdot\pi_2(c_0)$ реализует тип p. Точки a_t инцидентны линии $\left(\pi_1^2(c_0), \pi_2(c_0)\right)$ и различны для различных t. Предложение доказано.

З а м е ч а н и е. Хотя упоминавшееся предположение А. Пиллэя неверно, имеются связанные с ним положительные результаты. Недавно А. Пиллэй и У. Хрушовский [10] показали, что слабая нормальность стабильной теории T равносильна тому, что T не содержит типово интерпретируемую псевдоплоскость. Б. И. Зильбер показал, что если T несчетно категорична, то равносильны условия слабой нормальности, отсутствия в T определимой псевдоплоскости и отсутствия в T типово определимой псевдоплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мальцев А. И.** Аксиоматизируемые классы локально свободных алгебр некоторых типов // Сиб. мат. журн.— 1962.— Т. 3, № 5.— С. 729—743.

2. **Полыгалов С. А.** Теоретико-модельные свойства локально свободных алгебр // XVII Всесоюз. алгебр. конф., Минск, 1983 г.: Тез. докл. Т. 2.— Минск, 1983.— С. 187.

Pillay A. Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— Vol. 89, № 4.— P. 666—672.

4. **Палютин Е. А.** Категоричные хорновы классы. I // Алгебра и логика.— 1980.— Т. 19, № 5.— С. 582—614.

5. **Pillay A.** Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models.— 1984.— (Preprint).

6. **Shelah S.** Classification theory and the number of non-isomorphic models.— Amsterdam a. o.: North-Holland, 1978.— 544 p.

7. **Сакс Дж.** Теория насыщенных моделей.— М.: Мир, 1976.

8. **Hirschfeld J., Wheeler W. H.** Forcing, arithmetic, division rings.— Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1975.— (Lecture notes in mathematics, 454).

9. **Lachlan A. H.** Two conjecture regarding the stability of ω-categorical theories // Fund. math.— 1974.— V. 81, № 2.— P. 133—145.

10. **Hruschovski U., Pillay A.** Weakly normal groups.— 1985.— (Preprint).

ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ, ОСНОВАННАЯ НА КОНСТРУКТИВНОМ ПОНИМАНИИ ИСТИННОСТИ

А. А. ВОРОНКОВ

В настоящей статье мы рассматриваем некоторые свойства теории моделей, основанной на конструктивном понимании истинности. Формула считается конструктивно истинной на модели, если обоснование ее истинности можно записать в конструктивных терминах. У конструктивного определения истинности имеется много интересных свойств, связанных как с фактами, известными в конструктивной логике, так и с основными понятиями конструктивных моделей.

В современной математической логике имеются два независимо развивавшихся конструктивных подхода. Первый связан с исследованием свойств конструктивных исчислений и конструктивных семантик формул и своими корнями уходит в философию интуиционизма. У нас в стране наиболее известными в этом направлении являются работы А. Н. Колмогорова, А. А. Маркова, Н. А. Шанина. Представители второго подхода, возникшего в связи с исследованиями проблем разрешимости, занимаются исследованием конструктивных свойств алгебраических систем. Сюда относятся работы А. И. Мальцева, Ю. Л. Ершова, С. С. Гончарова. Мы укажем на тесную связь между двумя указанными подходами, аналогичную связи теории моделей с теорией доказательств.

Основными понятиями нашей работы являются понятие конструктивной истинности формулы на модели и опирающееся на него понятие конструктивного исчисления. Доказывается конструктивность некоторых известных интуиционистских теорий. Приведены критерии конструктив-