З а м е ч а н и е. Хотя упоминавшееся предположение А. Пиллэя неверно, имеются связанные с ним положительные результаты. Недавно А. Пиллэй и У. Хрушовский [10] показали, что слабая нормальность стабильной теории T равносильна тому, что T не содержит типово интерпретируемую псевдоплоскость. Б. И. Зильбер показал, что если T несчетно категорична, то равносильны условия слабой нормальности, отсутствия в T определимой псевдоплоскости и отсутствия в T типово определимой псевдоплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мальцев А. И.** Аксиоматизируемые классы локально свободных алгебр некоторых типов // Сиб. мат. журн.— 1962.— Т. 3, № 5.— С. 729—743.
2. **Полыгалов С. А.** Теоретико-модельные свойства локально свободных алгебр // XVII Всесоюз. алгебр. конф., Минск, 1983 г.: Тез. докл. Т. 2.— Минск, 1983.— С. 187.
Pillay A. Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— Vol. 89, № 4.— P. 666—672.
4. **Палютин Е. А.** Категоричные хорновы классы. I // Алгебра и логика.— 1980.— Т. 19, № 5.— С. 582—614.
5. **Pillay A.** Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models.— 1984.— (Preprint).
6. **Shelah S.** Classification theory and the number of non-isomorphic models.— Amsterdam a. o.: North-Holland, 1978.— 544 p.
7. **Сакс Дж.** Теория насыщенных моделей.— М.: Мир, 1976.
8. **Hirschfeld J., Wheeler W. H.** Forcing, arithmetic, division rings.— Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1975.— (Lecture notes in mathematics, 454).
9. **Lachlan A. H.** Two conjecture regarding the stability of ω-categorical theories // Fund. math.— 1974.— V. 81, № 2.— P. 133—145.
10. **Hruschovski U., Pillay A.** Weakly normal groups.— 1985.— (Preprint).

ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ, ОСНОВАННАЯ НА КОНСТРУКТИВНОМ ПОНИМАНИИ ИСТИННОСТИ

А. А. ВОРОНКОВ

В настоящей статье мы рассматриваем некоторые свойства теории моделей, основанной на конструктивном понимании истинности. Формула считается конструктивно истинной на модели, если обоснование ее истинности можно записать в конструктивных терминах. У конструктивного определения истинности имеется много интересных свойств, связанных как с фактами, известными в конструктивной логике, так и с основными понятиями конструктивных моделей.

В современной математической логике имеются два независимо развивавшихся конструктивных подхода. Первый связан с исследованием свойств конструктивных исчислений и конструктивных семантик формул и своими корнями уходит в философию интуиционизма. У нас в стране наиболее известными в этом направлении являются работы А. Н. Колмогорова, А. А. Маркова, Н. А. Шанина. Представители второго подхода, возникшего в связи с исследованиями проблем разрешимости, занимаются исследованием конструктивных свойств алгебраических систем. Сюда относятся работы А. И. Мальцева, Ю. Л. Ершова, С. С. Гончарова. Мы укажем на тесную связь между двумя указанными подходами, аналогичную связи теории моделей с теорией доказательств.

Основными понятиями нашей работы являются понятие конструктивной истинности формулы на модели и опирающееся на него понятие конструктивного исчисления. Доказывается конструктивность некоторых известных интуиционистских теорий. Приведены критерии конструктивности и сильной конструктивности модели. Доказано, что при конструктивном понимании истинности интуиционистская арифметика оказывается категоричной.

Некоторые исторические и методологические предпосылки возникновения рассматриваемых понятий имеются в [1, 2].

Автор благодарен С. С. Гончарову, Л. Л. Максимовой, К. Ф. Самохвалову за полезные консультации по интуиционистской логике и теории конструктивных моделей.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Этот параграф является вспомогательным и содержит основные определения теории конструктивных моделей [3] и теории информационных систем Скотта [4].

Определение 1. *Пусть S — множество. Нумерацией S называется любое отображение ν множества натуральных чисел N на S. Нумерованное множество — это пара (S, ν), состоящая из множества S и его нумерации ν.*

Определение 2. *Пусть (S, ν) — нумерованное множество и $S_0 \subseteq S$; S_0 называется ν-вполне перечислимым (ν-вполне рекурсивным), если $\nu^{-1}(S_0)$ — рекурсивно перечислимое (соответственно рекурсивное) множество.*

В дальнейшем, если из контекста будет ясно, о какой нумерации ν идет речь, мы будем вместо терминов «ν-вполне перечислимо» и «ν-вполне рекурсивно» употреблять термины «перечислимо» и «разрешимо».

Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, P_0, P_1, \ldots, f_0, f_1, \ldots\rangle$ — модель сигнатуры σ.

Определение 3. *Нумерацией модели $\mathfrak{M}$ называется любая нумерация ν: $N \to M$ основного множества модели $\mathfrak{M}$ такая, что существует двуместная общерекурсивная функция F такая, что для любых n, $y_1, \ldots, y_{m_n} \in N$*

$$f_n(\nu y_1, \ldots, \nu y_{m_n}) = \nu F(n, \langle y_1, \ldots, y_{m_n}\rangle),$$

где $\langle y_1, \ldots, y_{m_n}\rangle$ — геделевский номер кортежа $\langle y_1, \ldots, y_{m_n}\rangle$. Пара $(\mathfrak{M}, \nu)$, где $\mathfrak{M}$ — модель сигнатуры σ, ν — ее нумерация, называется нумерованной моделью сигнатуры σ.

Пусть $(\mathfrak{M}, \nu)$ — нумерованная модель сигнатуры σ и сигнатура Σ получена из σ добавлением констант $\nu 0$, $\nu 1$, ..., интерпретирующихся в $\mathfrak{M}$ элементами $\nu 0$, $\nu 1$, ... По нумерации ν стандартным образом строится некоторая геделевская нумерация μ формул сигнатуры Σ.

Определение 4. *Нумерованная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ называется конструктивной, если множество бескванторных предложений сигнатуры Σ, истинных в $\mathfrak{M}$, разрешимо, и сильно конструктивной, если множество всех предложений сигнатуры Σ, истинных в $\mathfrak{M}$, разрешимо.*

Перейдем к определениям, связанным с информационными системами.

Определение 5. *Информационная система — это четверка $\langle D, \Delta, \mathrm{Con}, \vdash\rangle$, где D — множество, $\Delta \in D$, Con — семейство конечных подмножеств D, $\vdash$ — бинарное отношение между членами Con и членами D. При этом требуется, чтобы выполнялись следующие условия* (здесь u, v — произвольные конечные подмножества D):

1) $v \subseteq u,\ u \in \mathrm{Con} \Rightarrow v \in \mathrm{Con}$;
2) $X \in D \Rightarrow \{X\} \in \mathrm{Con}$;
3) $\varnothing \vdash \Delta$;
4) $u \in \mathrm{Con},\ u \vdash X \Rightarrow u \cup \{X\} \in \mathrm{Con}$;
5) $X \in u \Rightarrow u \vdash X$;

6) *если* $u \vdash X$ *и для любого* $Y \in u$ *имеет место* $v \vdash Y$, *то* $v \vdash X$.

Определение 6. *Назовем подмножество* $a \subseteq D$ *элементом информационной системы* $\langle D, \Delta, \mathrm{Con}, \vdash \rangle$, *если выполняются следующие условия*:

1) *если* b — *конечное множество и* $b \subseteq a$, *то* $b \in \mathrm{Con}$;

2) $b \subseteq a,\ b \vdash X \Rightarrow X \in a$.

В любой информационной системе имеется наименьший по включению элемент $\perp \rightleftharpoons \{X | \varnothing \vdash X\}$.

Определение 7. *Элемент информационной системы называется тотальным, если он не содержится ни в каком большем элементе.*

Совокупность всех элементов информационной системы **A** будем обозначать через $|\mathbf{A}|$.

Пусть $\mathbf{A} = \langle D_A, \Delta_A, \mathrm{Con}_A, \vdash_A \rangle$ и $\mathbf{B} = \langle D_B, \Delta_B, \mathrm{Con}_B, \vdash_B \rangle$ — информационные системы. Для $u \subseteq D_{A+B}$ положим $\mathrm{lft}(u) \rightleftharpoons \{X | (X, \varnothing) \in u\}$; $\mathrm{rht}(u) \rightleftharpoons \{X | (X, \{\varnothing\}) \in u\}$.

Определение 8. *Суммой информационных систем* **A** *и* **B** *называется информационная система* $\mathbf{A} + \mathbf{B} \rightleftharpoons \langle D_{A+B}, \Delta_{A+B}, \mathrm{Con}_{A+B}, \vdash_{A+B} \rangle$ *такая, что*

1) $D_{A+B} \rightleftharpoons \{(X, \varnothing) | X \in D_A\} \cup \{(X, \{\varnothing\}) | X \in D_B\} \cup \{\varnothing\}$;

2) $\Delta_{A+B} \rightleftharpoons \varnothing$;

3) $u \in \mathrm{Con}_{A+B} \rightleftharpoons \mathrm{lft}(u) \in \mathrm{Con}_A \,\&\, \mathrm{rht}(u) = \varnothing$ *или* $\mathrm{rht}(u) \in \mathrm{Con}_B \& \mathrm{lft}(u) = \varnothing$;

4) $u \vdash_{A+B} (X, \varnothing) \rightleftharpoons \mathrm{lft}(u) \neq \varnothing \,\&\, \mathrm{lft}(u) \vdash_A X$, $\quad u \vdash_{A+B} (X, \{\varnothing\}) \rightleftharpoons \mathrm{rht}(u) \neq \varnothing \,\&\, \mathrm{rht}(u) \vdash_B X$. Для $u \subseteq D_{A \times B}$ положим $\mathrm{fst}(u) \rightleftharpoons \{X | (X, \Delta_B) \in u\}$; $\mathrm{snd}(u) \rightleftharpoons \{X | (\Delta_A, X) \in u\}$.

Определение 9. *Произведением информационных систем* **A** *и* **B** *называется информационная система* $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \rightleftharpoons \langle D_{A \times B}, \Delta_{A \times B}, \mathrm{Con}_{A \times B}, \vdash_{A \times B} \rangle$ *такая, что*

1) $D_{A \times B} \rightleftharpoons \{(\Delta_A, X) | X \in D_B\} \cup \{(X, \Delta_B) | X \in D_A\}$;

2) $\Delta_{A \times B} \rightleftharpoons (\Delta_A, \Delta_B)$;

3) $u \in \mathrm{Con}_{A \times B} \rightleftharpoons \mathrm{fst}(u) \in \mathrm{Con}_A \,\&\, \mathrm{snd}(u) \in \mathrm{Con}_B$;

4) $u \vdash_{A \times B} (\Delta_A, X) \rightleftharpoons \mathrm{snd}(u) \vdash_B X$, $u \vdash_{A \times B} (X, \Delta_B) \rightleftharpoons \mathrm{fst}(u) \vdash_A X$.

Пусть $u \vdash v \rightleftharpoons (\forall X \in v) u \vdash X$ и $w = \{(u_0, X_0), \ldots, (u_n, X_n)\}$.

Определение 10. *Стрелкой информационных систем* **A** *и* **B** *называется информационная система* $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \rightleftharpoons \langle D_{A \to B}, \Delta_{A \to B}, \mathrm{Con}_{A \to B}, \vdash_{A \to B} \rangle$ *такая, что*

1) $D_{A \to B} \rightleftharpoons \{(u, X) | u \in \mathrm{Con}_A, X \in D_B\}$;

2) $\Delta_{A \to B} \rightleftharpoons (\varnothing, \Delta_B)$;

3) $w \in \mathrm{Con}_{A \to B} \rightleftharpoons$ *для любого* $I \subseteq \{0, \ldots, n\}$ *имеет место* $\left(\bigcup_{i \in I} u_i \in \mathrm{Con}_A\right) \Rightarrow \{X_i | u \vdash_A X_i\} \vdash_B X$;

4) $w \vdash_{A \to B} (u, X) \rightleftharpoons \{X_i | u \vdash_A u_i\} \vdash_B X$.

Пусть **A** и **B** — информационные системы, $a \subseteq D_A$, $b \subseteq D_B$ и $f \subseteq D_{A \to B}$. Положим $\mathrm{inl}(a) \rightleftharpoons \{(X, \varnothing) | X \in a\}$; $\mathrm{inr}(b) \rightleftharpoons \{(X, \{\varnothing\}) | X \in b\}$; $\langle a, b \rangle \rightleftharpoons \{(X, \Delta_B) | X \in a\} \cup \{(\Delta_A, X) | X \in b\}$; $f(a) \rightleftharpoons \{X | (\exists u \subseteq a)(u, X) \in f\}$.

Лемма 1. *Если* $a \in |\mathbf{A}|$, $b \in |\mathbf{B}|$, $f \in |\mathbf{A} \to \mathbf{B}|$ *и* $c \in |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$, *то*

(а) $\mathrm{inl}(a), \mathrm{inr}(b) \in |\mathbf{A} + \mathbf{B}|$,

(б) $\langle a, b \rangle \in |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$,

(в) $f(a) \in |\mathbf{B}|$,

(г) $\mathrm{fst}(c) \in |\mathbf{A}|$, $\mathrm{snd}(c) \in |\mathbf{B}|$.

Доказательство аналогично приведенному в [4].

Определение 11. *Пусть* M — *множество. Множество* $\mathrm{HF}(M)$ *наследственно конечных множеств над* M — *это множество* $\bigcup_{i \in N} S_i$, *где* $S_0 \rightleftharpoons M$; S_{i+1} — *множество всех конечных множеств с элементами из* $S_i \cup M$.

Пусть η — некоторая фиксированная геделевская нумерация множества $\mathrm{HF}(N)$ наследственно конечных множеств над множеством натуральных чисел N.

Лемма 2. *Пусть* **A**, **B** — *информационные системы такие, что* $D_{\mathbf{A}} \subseteq \subseteq \mathrm{HF}(N)$ *и* $D_{\mathbf{B}} \subseteq \mathrm{HF}(N)$. *Тогда множества* $D_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$, $D_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}$ *и* $D_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}$ *также содержатся в множестве* $\mathrm{HF}(N)$.

Доказательство очевидно из определений. □

Определение 12. *Пусть* $\mathbf{A} = \langle D, \Delta, \mathrm{Con}, \vdash\rangle$ — *информационная система, причем* $D \subseteq \mathrm{HF}(N)$; **A** *называется эффективно заданным пространством, если отношения* Con, $\vdash$, *а также множество номеров элемента* Δ *разрешимы в нумерации* η.

Лемма 3. *Пусть* **A**, **B** — *эффективно заданные пространства. Тогда* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ — *тоже эффективно заданные пространства.*

Доказательство прямо следует из финитности определения Con, $\vdash$ и Δ в информационных системах $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$. □

Определение 13. *Пусть* **A** — *информационная система,* $a \in |\mathbf{A}|$ *и* $D_{\mathbf{A}} \subseteq \mathrm{HF}(N)$. *Элемент* a *называется вычислимым, если он* η-*вполне перечислим.*

Легко видеть, что в эффективно заданных пространствах минимальный элемент $\perp$ вычислим.

Элементы информационных систем, построенных при помощи операций $+$, $\times$, $\to$, часто называют *функционалами высших типов*. Таким образом, мы можем говорить о вычислимых функционалах. При записи функционалов высших типов мы будем иногда использовать общепринятые λ-обозначения, например: $\lambda f \lambda a[f(a)]$ или $\lambda p \lambda q[\langle \mathrm{lft}(p), q\rangle]$ и т. д.

§ 2. КОНСТРУКТИВНАЯ ИСТИННОСТЬ

В этом параграфе мы определим понятие конструктивной истинности формулы на нумерованной модели и докажем некоторые свойства этого понятия, связанные как со свойствами классического определения истинности, так и с некоторыми фактами, известными в конструктивной логике. Для того чтобы избежать большого числа оговорок в тексте статьи, мы перенесем классическое определение истинности формулы на модели на незамкнутые формулы. Формула φ со свободными переменными $x_0, \ldots, x_n$ считается *истинной*, если таковой является формула $\forall x_0 \ldots x_n \varphi$.

Определим информационную систему $\mathbf{A}_0$ следующим образом: $D_0 \rightleftharpoons N \cup \{\varnothing\}$, $\Delta_0 \rightleftharpoons \varnothing$, $u \in \mathrm{Con}_0 \rightleftharpoons u \cap N$ — не более чем одноэлементное множество, $u \vdash X \rightleftharpoons X = \varnothing$ или $X \in u$.

Тотальные элементы информационной системы $\mathbf{A}_0$ находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с натуральными числами. В дальнейшем, чтобы избавиться от лишних скобок, для обозначения тотального элемента $\{n, \varnothing\}$ системы $\mathbf{A}_0$ мы будем использовать запись n. Через $\mathbf{1} \rightleftharpoons \langle D_1, \Delta_1, \mathrm{Con}_1, \vdash_1\rangle$ мы обозначим информационную систему такую, что $D_1 \rightleftharpoons \{\varnothing\}$. Очевидно, что $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{1}$ — эффективно заданные пространства.

Пусть $(\mathfrak{M}, \nu)$ — нумерованная модель сигнатуры σ. Сопоставим каждой формуле расширенной сигнатуры Σ информационную систему $\mathbf{A}_\varphi$ и отношение $a\,\mathbf{cl}\,\varphi$, где $a \in |\mathbf{A}_\varphi|$. Пусть φ — формула, все свободные переменные которой (в порядке их вхождения в φ) — это $x_0, \ldots, x_n$. Тогда через $\forall\varphi$ обозначим формулу $\forall x_0 \ldots x_n \varphi$. Если же в φ нет свободных переменных, то $\forall\varphi \rightleftharpoons \varphi$.

Определение 14 (отношение **cl**). (Пункты (1)—(6) относятся к замкнутым формулам φ.) *Определяем*:

1) *если* φ — *атомарная* *), *то* $\mathbf{A}_\varphi \rightleftharpoons \mathbf{1}$ *и* $a\,\mathbf{cl}\,\varphi \rightleftharpoons a = \{\varnothing\}$ *и* $\mathfrak{M} \models \varphi$;

2) $\mathbf{A}_{\varphi \& \psi} \rightleftharpoons \mathbf{A}_\varphi \times \mathbf{A}_\psi$ *и* $\langle a, b\rangle\,\mathbf{cl}\,\varphi \& \psi \rightleftharpoons a\,\mathbf{cl}\,\varphi$ *и* $b\,\mathbf{cl}\,\psi$;

*) Формулу $\neg\varphi$ мы понимаем как сокращение для $\varphi \supset \Lambda$, где Λ — тождественно ложная атомарная формула.

3) $\mathbf{A}_{\varphi\vee\psi} \rightleftharpoons \mathbf{A}_\varphi + \mathbf{A}_\psi$ *и для* $a \in |\mathbf{A}_\varphi|$, $b \in |\mathbf{A}_\psi|$

$$\mathrm{inl}(a)\,\mathbf{cl}\,\varphi \vee \psi \rightleftharpoons a\,\mathbf{cl}\,\varphi, \quad \mathrm{inr}(b)\,\mathbf{cl}\,\varphi \vee \psi \rightleftharpoons b\,\mathbf{cl}\,\psi;$$

4) $\mathbf{A}_{\varphi\supset\psi} \rightleftharpoons \mathbf{A}_\varphi \to \mathbf{A}_\psi$ *и* $f\,\mathbf{cl}\,\varphi \supset \psi \rightleftharpoons$ *для любого* $a \in |\mathbf{A}_\varphi|$, *если* $a\,\mathbf{cl}\,\varphi$, *то* $f\,(a)\,\mathbf{cl}\,\psi$;

5) $A_{\exists x\varphi(x)} \rightleftharpoons \mathbf{A}_0 \times \mathbf{A}_{\varphi(\nu 0)}$ *и* $\langle n, b\rangle\,\mathbf{cl}\,\exists x\varphi(x) \rightleftharpoons b\,\mathbf{cl}\,\varphi(\nu n)$;

6) $\mathbf{A}_{\forall x\varphi(x)} \rightleftharpoons \mathbf{A}_0 \to \mathbf{A}_{\varphi(\nu 0)}$ *и* $f\,\mathrm{cl}\,\forall x\varphi(x) \rightleftharpoons$ *для любого* $n \in N$ *выполняется* $f(n)\,\mathbf{cl}\,\varphi(\nu n)$;

7) *пусть* φ — *формула, возможно, со свободными переменными. Положим* $\mathbf{A}_\varphi \rightleftharpoons \mathbf{A}_{\forall\varphi}$ *и* $a\,\mathbf{cl}\,\varphi \rightleftharpoons a\,\mathbf{cl}\,\forall\varphi$.

Определение 15. *Элемент* $a \in |\mathbf{A}_\varphi|$ *классически реализует формулу* φ, *если* $a\,\mathbf{cl}\,\varphi$. *Формула* φ *классически реализуема, если существует* a *такой, что* $a\,\mathbf{cl}\,\varphi$.

Отметим сразу, что определение классической реализуемости строится по модели $(\mathfrak{M}, \nu)$ и зависит от ее устройства. Поэтому в дальнейшем, если не оговорено обратное, мы будем считать, что модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ фиксирована и все определения заданы относительно этой модели.

Следующая теорема подтверждает название «классическая реализуемость».

Теорема 1. *Формула* φ *классически реализуема тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Доказательство ведется индукцией по длине формулы φ. Пусть φ замкнутая.

1. Для атомарных формул очевидно по определению.

2. Пусть $\mathfrak{M} \models \chi \mathbin{\&} \psi$. Тогда $\mathfrak{M} \models \chi$ и $\mathfrak{M} \models \psi$. По индукционному предположению существуют $a \in |\mathbf{A}_\chi|$, $b \in |\mathbf{A}_\psi|$ такие, что $a\,\mathbf{cl}\,\chi$ и $b\,\mathbf{cl}\,\psi$. Тогда по определению $\langle a, b\rangle\,\mathbf{cl}\,\chi \mathbin{\&} \psi$. Обратно, пусть $\chi \mathbin{\&} \psi$ реализуема. Тогда существует пара $\langle a, b\rangle$, которая классически реализует $\chi \mathbin{\&} \psi$. По определению $a\,\mathbf{cl}\,\chi$ и $b\,\mathbf{cl}\,\psi$. Следовательно, χ и ψ истинны в $\mathfrak{M}$.

3. Пусть $\mathfrak{M} \models \chi \vee \psi$. Тогда $\mathfrak{M} \models \chi$ или $\mathfrak{M} \models \psi$. Если, скажем, $\mathfrak{M} \models \chi$ (второй случай рассматривается аналогично), то существует a такой, что $a\,\mathbf{cl}\,\chi$. Следовательно, $\mathrm{inl}(a)\,\mathbf{cl}\,\chi \vee \psi$. Пусть, обратно, $\chi \vee \psi$ реализуема. Тогда или для $a \in |\mathbf{A}_\chi|$ выполняется $\mathrm{inl}(a)\,\mathbf{cl}\,\chi \vee \psi$, или для $b \in |\mathbf{A}_\psi|$ имеет место $\mathrm{inr}(b)\,\mathbf{cl}\,\chi \vee \psi$. Поэтому или $a\,\mathbf{cl}\,\chi$, или $b\,\mathbf{cl}\,\psi$. Следовательно, $\mathfrak{M} \models \chi \vee \psi$.

4. Пусть $\mathfrak{M} \models \chi \supset \psi$. Тогда или $\mathfrak{M} \models \psi$, или $\neg(\mathfrak{M} \models \chi)$. Пусть $\mathfrak{M} \models \psi$. Возьмем b такой, что $b\,\mathbf{cl}\,\psi$. Легко видеть, что существует $f \in |\mathbf{A}_\chi \to \mathbf{A}_\psi|$ такой, что для любого $a \in |\mathbf{A}_\chi|$ имеет место $f(a) = b$. Тогда, очевидно, $f\,\mathrm{cl}\,\chi \supset \psi$. Если $\neg(\mathfrak{M} \models \chi)$, то любой элемент из $|\mathbf{A}_{\chi\supset\psi}|$ классически реализует $\chi \supset \psi$, так как χ нереализуема. Обратно, пусть $f\,\mathbf{cl}\,\chi \supset \psi$. Нам нужно доказать, что если $\mathfrak{M} \models \chi$ то $\mathfrak{M} \models \psi$. Пусть $\mathfrak{M} \models \chi$. Тогда существует a, такой, что $a\,\mathbf{cl}\,\chi$. По определению реализуемости, $f(a)\,\mathbf{cl}\,\psi$, т. е. $\mathfrak{M} \models \psi$, что и требовалось доказать.

5. Пусть $\mathfrak{M} \models (\exists x)\varphi(x)$. Тогда для некоторого $n \in N$ выполняется $\mathfrak{M} \models \varphi(\nu n)$. Пусть $b\,\mathbf{cl}\,\varphi(\nu n)$. По определению $\langle n, b\rangle\mathbf{cl}\,(\exists x)\varphi(x)$. Обратно, пусть $\langle n, b\rangle\mathbf{cl}\,(\exists x)\varphi(x)$. Тогда $b\,\mathbf{cl}\,\varphi(\nu n)$, т. е. $\mathfrak{M} \models \varphi(\nu n)$ и $\mathfrak{M} \models (\exists x)\varphi(x)$.

6. Пусть $\mathfrak{M} \models (\forall x)\varphi(x)$. Тогда для всех $n \in N$ имеет место $\mathfrak{M} \models \varphi(\nu n)$. Пусть для каждого $n \in N$ $b_n\,\mathbf{cl}\,\varphi(\nu n)$. Рассмотрим множество $f \rightleftharpoons \{(n, X) \mid n \in N, X \in b_n\}$. Нетрудно видеть, что $f \in |\mathbf{A}_0 \to \mathbf{A}_\varphi| = |\mathbf{A}_{(\forall x)\varphi(x)}|$ и для любого $n \in N$ имеет место $f(n) = b_n$. По определению отношения $\mathbf{cl}$ получаем $f\,\mathbf{cl}\,(\forall x)\varphi(x)$. Обратно, пусть $f\,\mathbf{cl}\,(\forall x)\varphi(x)$. Тогда для любого $n \in N$ выполняется $f(n)\,\mathbf{cl}\,\varphi(\nu n)$, т. е. $\mathfrak{M} \models \varphi(\nu n)$. Следовательно, $\mathfrak{M} \models (\forall x)\varphi(x)$.

Для формул φ, в которых имеются свободные переменные, доказательство прямо следует из того, что φ классически реализуема тогда и только тогда, когда таковой является формула $\forall\varphi$. □

Неформально отношения $a \,\mathbf{cl}\, \varphi$ можно понимать следующим образом: множество a несет в себе информацию, достаточную для обоснования истинности φ на модели. Элементы, составляющие a,— это как бы те кусочки информации, из которых это обоснование складывается. Такую интерпретацию подтверждает предложение 1 (см. ниже), которое неформально можно трактовать так: если информацию, обосновывающую истинность φ, усилить непротиворечивым образом, то полученная информация тем более обосновывает истинность φ.

Предложение 1. *Пусть φ — формула, a, $b \in |\mathbf{A}_\varphi|$, $a \,\mathbf{cl}\, \varphi$ и $a \subseteq b$. Тогда $b \,\mathbf{cl}\, \varphi$.*

Доказательство ведется индукцией по длине формулы φ. Как и в теореме 1, достаточно провести доказательство только для замкнутых формул.

1. Пусть φ атомарная. Тогда в $|\mathbf{A}_\varphi|$ имеется единственный элемент и доказательство очевидно.

2. Пусть $\langle a, b\rangle \,\mathbf{cl}\, \varphi \,\&\, \psi$ и $\langle a, b\rangle \subseteq c \in |\mathbf{A}_{\varphi\&\psi}|$. Из определений пары $\langle, \rangle$ и функций fst, snd легко вытекают следующие утверждения:

(а) $\langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c)\rangle = c$,

(б) $a \subseteq \mathrm{fst}(c)$,

(в) $b \subseteq \mathrm{snd}(c)$.

Применяя индукционное предположение, из (б) и (в) получаем $\mathrm{fst}(c) \,\mathbf{cl}\, \varphi$ и $\mathrm{snd}(c) \,\mathbf{cl}\, \psi$. Следовательно, $\langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c)\rangle \,\mathbf{cl}\, \varphi \,\&\, \psi$. Но согласно (а) $\langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c)\rangle = c$. Следовательно, $c \,\mathbf{cl}\, \varphi \,\&\, \psi$.

3. Пусть $c \,\mathbf{cl}\, \varphi \vee \psi$ и $c \subseteq d$. Рассмотрим только случай, когда $c = \mathrm{inl}(a)$ для $a \in |\mathbf{A}_\varphi|$ (второй случай проверяется аналогично). Из определений легко вытекают следующие соотношения:

(а′) $\mathrm{lft}(d) \in |\mathbf{A}_\varphi|$,

(б′) $\mathrm{inl}(\mathrm{lft}(d)) = d$,

(в′) $a \subseteq \mathrm{lft}(d)$.

Применяя индукционное предположение, из (в′) получаем $\mathrm{lft}(d) \,\mathbf{cl}\, \varphi$. Отсюда $\mathrm{inl}(\mathrm{lft}(d)) \,\mathbf{cl}\, \varphi \vee \psi$. Но по (б′) $\mathrm{inl}(\mathrm{lft}(d)) = d$. Следовательно, $d \,\mathbf{cl}\, \varphi \vee \psi$.

4. Пусть $f \,\mathbf{cl}\, \varphi \supset \psi$ и $f \subseteq g$. Тогда для любого элемента $a \in |\mathbf{A}_\varphi|$ имеет место $f(a) \subseteq g(a)$. Пусть a — такой, что $a \,\mathbf{cl}\, \varphi$. Тогда $f(a) \,\mathbf{cl}\, \psi$. Так как $f(a) \subseteq g(a)$, то и $g(a) \,\mathbf{cl}\, \psi$. Следовательно, $g \,\mathbf{cl}\, \varphi \supset \psi$.

5. Пусть $\langle n, b\rangle \,\mathbf{cl}\, (\exists x)\varphi(x)$ и $\langle n, b\rangle \subseteq c$. Как и в случае 2, можно найти $\langle n_0, b_0\rangle \in |\mathbf{A}_{(\exists x)\varphi(x)}|$ такой, что $n \subseteq n_0$, $b \subseteq b_0$ и $\langle n_0, b_0\rangle = c$. Так как n — тотальный элемент, то $n_0 = n$, поэтому $\langle n, b_0\rangle = c$. Из того, что $b \,\mathbf{cl}\, \varphi(\nu n)$ и $b \subseteq b_0$, получаем $b_0 \,\mathbf{cl}\, \varphi(\nu n)$. Следовательно, $\langle n, b_0\rangle \mathbf{cl}\, (\exists x)\varphi(x)$, т. е. $c \,\mathbf{cl}\, (\exists x)\varphi(x)$.

6. Пусть $f \,\mathbf{cl}\, (\forall x)\varphi(x)$ и $f \subseteq g$. Как и в случае 4, используя, что для всех $n \in N$ имеет место $f(n) \subseteq g(n)$, получаем $g \,\mathbf{cl}\, (\forall x)\varphi(x)$. □

Следствие 1. *Если $\mathfrak{M} \models \varphi$, то существует тотальный элемент, классически реализующий φ.*

Доказательство сразу следует из предложения 1 и того, что любой элемент содержится в тотальном. □

Теперь мы сделаем следующий естественный переход к определению конструктивной истинности формулы на модели: формула φ считается *конструктивно истинной*, если обоснование ее истинности можно записать в конструктивных терминах.

Определение 16 (отношение **con**). *Пусть $a \in |\mathbf{A}_\varphi|$. Определим: $a \,\mathbf{con}\, \varphi$, если $a \,\mathbf{cl}\, \varphi$ и a вычислим.*

Определение 17. *Элемент a конструктивно реализует формулу φ, если $a \,\mathbf{con}\, \varphi$. Формула φ конструктивно истинна в нумерованной модели* $(\mathfrak{M}, \nu)$ (обозначается $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathrm{con}} \varphi$), *если существует a такой, что $a \,\mathbf{con}\, \varphi$.*

Отношение конструктивной реализуемости выделяет в множестве истинных в $\mathfrak{M}$ формул подмножество конструктивно истинных формул.

Естественно, что понятие конструктивной истинности зависит от нумерации ν модели $\mathfrak{M}$. Докажем, что для эквивалентных нумераций классы конструктивно истинных формул совпадают.

Предложение 2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, \nu_0) \models_{\text{con}} \varphi$ *и* ν_0 *рекурсивно изоморфна* [5] ν_1. *Тогда* $(\mathfrak{M}, \nu_1) \models_{\text{con}} \varphi$.

Доказательство. Обозначим отношения **cl**, **con** на нумерованных моделях $(\mathfrak{M}, \nu_0)$ и $(\mathfrak{M}, \nu_1)$ соответственно через $\mathbf{cl}_0$, $\mathbf{cl}_1$, $\mathbf{con}_0$, $\mathbf{con}_1$. Пусть f — общерекурсивная перестановка натурального ряда такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$. Продолжим f до перестановки множества $\mathrm{HF}(N)$ следующим образом: $f(\varnothing) = \varnothing$, $f(\{x_0, \ldots, x_n\}) = \{f(x_0), \ldots, f(x_n)\}$. Для $a \subseteq \mathrm{HF}(N)$ положим $a_f \rightleftharpoons \{f(X) \mid X \in a\}$. Докажем индукцией по длине формулы φ, что для любых a, φ, $n_0, \ldots, n_k$ $a\,\mathbf{cl}_0\,\varphi(\nu_0 n_0, \ldots, \nu_0 n_k)$ тогда и только тогда, когда $a_f\,\mathbf{cl}_1\,\varphi(\nu_1 f(n_0), \ldots, \nu_1 f(n_k))$. Случаи, когда внешним знаком φ будет $\&$, $\vee$, $\supset$ или φ — атомарная, проверяются тривиально. Пусть внешним знаком φ является квантор. Для простоты будем считать, что в φ нет свободных переменных.

Пусть $a\,\mathbf{cl}_0 (\forall x)\psi(x)$. Тогда для любого $n \in N$ имеет место $a(n)\,\mathbf{cl}_0\,\psi(\nu_0 n)$. По индукционному предположению для любого $n \in N$ выполняется $(a(n))_f\,\mathbf{cl}_1\,\psi(\nu_1 f(n))$. По определению a_f имеем $(a(n))_f = a_f(f(n))$. Получаем, что $a_f(f(n))\,\mathbf{cl}_1\,\psi(\nu_1 f(n))$ для любого $n \in N$. Так как область значений f — все множество натуральных чисел, то для любого $n \in N$ выполняется $a_f(n)\,\mathbf{cl}_1\,\psi(\nu_1 n)$, т. е. $a_f\,\mathbf{cl}_1 (\forall x)\psi(x)$, что и требовалось доказать. Пусть теперь $a_f\,\mathbf{cl}_1 (\forall x)\psi(x)$ и g — функция, обратная к f. Тогда по уже доказанному, $(a_f)_g\,\mathbf{cl}_0 (\forall x)\psi(x)$. Но, как легко видеть, $(a_f)_g = a$. Доказательство в случае, когда φ имеет вид $(\exists x)\psi(x)$, в точности дублирует доказательство для случая $(\forall x)\psi(x)$.

Пусть теперь $a\,\mathbf{con}_0\,\varphi$. Тогда $a\,\mathbf{con}_0\,\forall\varphi$. Следовательно, $a\,\mathbf{cl}_0\,\forall\varphi$ и a вычислим. По доказанному $a_f\,\mathbf{cl}_1\,\forall\varphi$. Вычислимость a_f следует из вычислимости a и рекурсивности f. Поэтому $a_f\,\mathbf{con}_1\,\forall\varphi$ и $a_f\,\mathbf{con}_1\,\varphi$. □

Понятие подформулы формулы φ определяется стандартным образом. Так, мы считаем подформулами формул $(\forall x)\varphi(x)$, $(\exists x)\varphi(x)$ любые формулы вида $\varphi(t)$, где t — терм. Пусть $\varphi(\nu)$ — некоторая построенная по ν геделевская нумерация формул сигнатуры Σ. Следующее определение является вспомогательным.

Определение 18 (строго позитивная подформула):

1) φ — *строго позитивная подформула* φ;

2) φ — *строго позитивная подформула формул* $\varphi \& \psi$; $\psi \& \varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\psi \vee \varphi$, $\psi \supset \varphi$;

3) $\varphi(t)$ — *строго позитивная подформула формул* $(\forall x)\varphi(x)$ *и* $(\exists x)\varphi(x)$;

4) *если* φ — *строго позитивная подформула* χ, χ — *строго позитивная подформула* ψ, *то* φ — *строго позитивная подформула* ψ.

Лемма 4. *Пусть* φ — *замкнутая формула сигнатуры* Σ *такая, что множество ее истинных подформул сигнатуры* Σ *вполне перечислимо в нумерации* $\varphi(\nu)$. *Тогда* $\mathfrak{M} \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\text{con}} \varphi$.

Доказательство. В одну сторону очевидно. Обратно, пусть $\mathfrak{M} \models \varphi$ и T — множество всех истинных строго позитивных подформул φ. Из условий леммы вытекает, что T вполне перечислимо. Пусть $\psi_0, \psi_1, \ldots$ — эффективное перечисление без повторений формул из T. Построим по шагам последовательность $\{M_{i,j}\}$, $i, j \in N$, такую, что $M_{i,j} \subseteq D_{\psi_j}$.

Шаг 0. Полагаем $M_{i,0} \rightleftharpoons \{X \mid \varnothing \vdash_{\psi_i} X\}$.

Шаг $n+1$. Для всех $i \leqslant n+1$ проделаем следующую процедуру.

а) Если ψ_i — атомарная, то $M_{i,n+1} \rightleftharpoons M_{i,n}$.

б) Пусть ψ_i имеет вид $\chi_1 \& \chi_2$. Определим множества M_1, M_2 так: если существует $j \leqslant n$ такое, что $\chi_1 = \psi_j$, то $M_1 \rightleftharpoons \{(X, \Delta_{\chi_2}) \mid X \in M_{j,n}\}$, иначе $M_1 = \varnothing$. Аналогично, если существует $j \leqslant n$ такой, что $\chi_2 = \psi_j$, то $M_2 \rightleftharpoons \{(\Delta_{\chi_1}, X) \mid X \in M_{j,n}\}$, иначе $M_2 = \varnothing$. Полагаем $M_{i,n+1} \rightleftharpoons M_{i,n} \cup M_1 \cup M_2$.

в) Пусть ψ_i имеет вид $\chi_1 \vee \chi_2$. Если χ_1, χ_2 не содержатся в $\{\psi_0, \ldots, \psi_n\}$, то $M_{i,n+1} \rightleftharpoons M_{i,n}$. В противном случае выберем наименьший $j \leqslant n$ такой, что $\psi_j = \chi_1$ или $\psi_j = \chi_2$. Полагаем

$$M_{i,n+1} \rightleftharpoons \begin{cases} M_{i,n} \cup \{(X, \varnothing) \mid X \in M_{j,n}\}, & \text{если } \psi_j = \chi_1, \\ M_{i,n} \cup \{(X, \{\varnothing\}) \mid X \in M_{j,n}\}, & \text{если } \psi_j \neq \chi_1. \end{cases}$$

(г) Пусть ψ_i имеет вид $\chi_1 \supset \chi_2$. Если для некоторого $j \in \{0, \ldots, n\}$ выполняется $\psi_j = \chi_2$, то $M_{i,n+1} \rightleftharpoons M_{i,n} \cup \{(u, X) \mid u \in \mathrm{Con}_{\chi_1}, X \in M_{j,n}\}$, иначе $M_{i,n+1} \rightleftharpoons M_{i,n}$.

(д) Пусть ψ_i имеет вид $(\exists x)\chi(x)$. Ищем наименьший $j \in \{0, \ldots, n\}$ такой, что $\psi_j = \chi(\nu m)$ для некоторого $m \in N$. Если такого j нет, то $M_{i,n+1} \rightleftharpoons M_{i,n}$, иначе $M_{i,n+1} \rightleftharpoons M_{i,n} \cup \{(m, \Delta_\chi)\} \cup \{(\varnothing, X) \mid X \in M_{j,n}\}$.

(е) Пусть ψ_j имеет вид $(\forall x)\chi(x)$. Для всех $j \in \{0, \ldots, n\}$

$$M_j \rightleftharpoons \begin{cases} \{(m, X) \mid X \in M_{i,n}\}, & \text{если } \psi_j \text{ имеет вид } \chi(\nu m) \\ & \text{для некоторого } m \in N, \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Полагаем $M_{i,n+1} \rightleftharpoons M_{i,n} \cup M_0 \cup \ldots \cup M_n$.

На этом описание построения множеств $M_{i,j}$ заканчивается. Для каждого $i \in N$ полагаем $M_i \rightleftharpoons \bigcup_{n=0}^{\infty} M_{i,n}$. По построению видно, что M_i — η-вполне перечислимые множества. Докажем теперь, что $M_i \,\mathbf{cl}\, \psi_i$ и, следовательно, $M_i \,\mathbf{con}\, \psi_i$. Доказательство ведется индукцией по длине формулы ψ_i.

(а) Пусть ψ_i — атомарная. Тогда по построению $M_{i,0} \rightleftharpoons \perp_{\psi_i}$ и $M_i = \perp_{\psi_i}$.

(б) Пусть ψ_i имеет вид $\psi_j \,\&\, \psi_k$. В этом случае, как легко видеть из построения, $M_i = \langle M_j, M_k \rangle$. Так как $M_j \,\mathbf{cl}\, \psi_j$ и $M_k \,\mathbf{cl}\, \psi_k$, то и $M_i \,\mathbf{cl}\, \psi_i$.

(в) Пусть ψ_i имеет вид $\psi_j \vee \psi_k$. Тогда, если $j \leqslant k$, то $M_i = \mathrm{inl}(M_j)$. Если же $j > k$, то $M_i = \mathrm{inr}(M_k)$. В обоих случаях $M_i \,\mathbf{cl}\, \psi_i$. Если ψ_i имеет вид $\psi_j \vee \chi$ или $\chi \vee \psi_j$, где $\neg(\mathfrak{M} \models \chi)$, то доказательство аналогично.

(г) Если ψ_i имеет вид $\chi_1 \supset \chi_2$, где $\neg(\mathfrak{M} \models \chi_2)$, то $\neg(\mathfrak{M} \models \chi_1)$ и любой элемент классически реализует ψ_i. Если же ψ_i имеет вид $\chi \supset \psi_j$, то $M_i = \{(u, X) \mid X \in M_j, u \in \mathrm{Con}_\chi\} = \lambda x[M_j] \,\mathbf{cl}\, \psi_i$.

(д) Пусть ψ_i имеет вид $(\exists x)\chi(x)$ и j — наименьшее число такое, что ψ_j имеет вид $\chi(\nu m)$ для некоторого $m \in N$. Тогда $M_i = \langle m, M_j \rangle$. Следовательно, $M_i \,\mathbf{cl}\, \psi_i$.

(е) Если ψ_i имеет вид $(\forall x)\chi(x)$, то для любого $m \in N$ имеем $M_i(m) = M_j$, где ψ_j имеет вид $\chi(\nu m)$. Следовательно, $M_i \,\mathbf{cl}\, \psi_i$.

Пусть теперь $j \in N$ такое, что $\psi_i = \varphi$. По доказанному, $M_j \,\mathbf{con}\, \varphi$. Следовательно, $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathrm{con}} \varphi$, что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Пусть $(\mathfrak{M}, \nu)$ — сильно конструктивная модель, φ — формула сигнатуры Σ. Тогда $\mathfrak{M} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathrm{con}} \varphi$.*

Доказательство прямо следует из леммы 4. □

Итак, для сильно конструктивных моделей оба понятия истинности — классическое и конструктивное — совпадают. Встает естественный вопрос об обращении теоремы 2. Контрпример к обратному утверждению строится легко, если сигнатура σ бесконечная. Оказывается, что и в случае конечной сигнатуры обращение теоремы 2 не имеет места:

Предложение 3. *Существует нумерованная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ конечной сигнатуры σ такая, что для любой формулы φ сигнатуры Σ $\mathfrak{M} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathrm{con}} \varphi$, но $(\mathfrak{M}, \nu)$ не является сильно конструктивной.*

Доказательство. Как и ранее, достаточно рассмотреть только замкнутые формулы. В [6] приведен пример нумерованной булевой алгебры $(\mathfrak{B}, \nu)$, в которой для любого натурального числа n множество

$\mathrm{Th}_n(\mathfrak{B})$ истинных в $\mathfrak{B}$ предложений сигнатуры Σ с не более, чем n кванторами разрешимо, но $(\mathfrak{B}, \nu)$ не является сильно конструктивной. Пусть φ — формула сигнатуры Σ и $\mathfrak{B} \models \varphi$. Если n — число кванторов в φ, то число кванторов в любой ее подформуле не меньше, чем n. Поэтому множество истинных в $\mathfrak{B}$ подформул формулы φ разрешимо. По лемме 4 $(\mathfrak{B}, \nu) \models_{\mathrm{con}} \varphi$, что и требовалось доказать. □

Теперь рассмотрим поведение конструктивной истинности на конструктивных моделях.

Предложение 4. *Пусть* $(\mathfrak{M}, \nu)$ — *конструктивная модель,* φ — *замкнутая* $\exists\forall\exists$*-формула сигнатуры* σ. *Тогда* $\mathfrak{M} \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathrm{con}} \varphi$.

Доказательство. В одну сторону очевидно. Обратно, пусть φ имеет вид $(\exists x)(\forall y)(\exists z)\psi(x, y, z)$ и $\mathfrak{M} \models \varphi$. Тогда существует $n \in N$ такой, что $\mathfrak{M} \models (\forall y)(\exists z)\psi(\nu n, y, z)$. Так как $(\mathfrak{M}, \nu)$ — конструктивная модель, то множество замкнутых $\exists$-формул, истинных в $\mathfrak{M}$, перечислимо. Любая замкнутая подформула формулы $(\forall y)(\exists z)\psi(\nu n, y, z)$, отличная от нее самой, является $\exists$-формулой. Поэтому по лемме 4 $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathrm{con}} (\forall y)(\exists z)\psi(\nu n, y, z)$. Пусть $b\,\mathbf{con}(\forall y)(\exists z)\psi(\nu n, y, z)$. Тогда по определению 14 $\langle n, b\rangle\,\mathbf{cl}(\exists x)(\forall y)(\exists z)\psi(x, y, z)$. Так как b вычислим, то пара $\langle n, b\rangle$ тоже вычислима. Следовательно, $\langle n, b\rangle\,\mathbf{con}(\exists x)(\forall y)(\exists z)\psi(x, y, z)$ и $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathrm{con}} (\exists x)(\forall y)(\exists z)\psi(x, y, z)$, что и требовалось доказать. □

Предложение 5. *Существует конструктивная модель* $(\mathfrak{M}, \nu)$ *и замкнутая* $\forall\exists\forall$*-формула* φ *такая, что* $\mathfrak{M} \models \varphi$, но φ *не является конструктивно истинной в* $(\mathfrak{M}, \nu)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \langle N, P, \leqslant\rangle$, где N — множество натуральных чисел, $\leqslant$ — стандартный порядок на натуральных числах, P — двуместный предикатный символ, который интерпретируется на $\mathfrak{M}$ следующим образом: $\mathfrak{M} \models P(x, y)$ тогда и только тогда, когда машина Тьюринга с номером x, получив на вход число x, остановилась на шаге с номером не меньше, чем y. В качестве нумерации ν берем тождественное отображение из N в N. Очевидно, что $(\mathfrak{M}, \nu)$ — конструктивная модель. Возьмем в качестве φ формулу $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(y \leqslant z \supset \supset (P(x, y) \equiv P(x, z)))$, которая содержательно означает, что для любого x существует y, начиная с которого значение $P(x, y)$ не меняется. Очевидно, что $\mathfrak{M} \models \varphi$. Кроме того, хорошо известно, что не существует алгоритма, который бы давал по любому x такой y. В то же время существование такого алгоритма сразу вытекает из предположения о конструктивной истинности φ. Следовательно, φ не является конструктивно истинной. □

Укажем теперь на один класс формул, для которого понятия истинности и конструктивной истинности совпадают независимо от устройства модели $(\mathfrak{M}, \nu)$.

Определение 19 (формула Харропа):

1) *любая атомарная формула — формула Харропа;*

2) *если* φ, ψ — *формулы Харропа,* χ — *произвольная формула, то* $\varphi \,\&\, \psi$, $(\forall x)\varphi$, $\chi \supset \varphi$ — *формулы Харропа* *).

Заметим, что о некоторых конструктивных свойствах формул Харропа было известно давно [7].

Лемма 5. *Пусть* φ — *формула Харропа. Тогда множество* $|\mathbf{A}_\varphi|$ *состоит из единственного элемента* $\perp_\varphi$, *который к тому же вычислим.*

Доказательство прямо следует из определений информационной системы $\mathbf{A}_\varphi$. □

Теорема 3. *Пусть* φ — *формула Харропа,* $\mathfrak{M}$ — *модель. Тогда для любой нумерации* ν *модели* $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{M} \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathrm{con}} \varphi$.

*) Напомним, что $\neg\varphi$ есть сокращение для $\varphi \supset \Lambda$, где Λ — атомарная. Таким образом, $\neg\varphi$ всегда является формулой Харропа.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} \models \varphi$. Тогда из теоремы 1 и леммы 5 следует, что $\perp_\varphi \mathbf{cl}\, \varphi$. Кроме того, по лемме 5 $\perp_\varphi$ вычислим, следовательно, $\perp_\varphi \mathbf{con}\, \varphi$. □

Укажем еще один класс формул, для которого понятия истинности и конструктивной истинности совпадают (назовем его классом C). Формулы Харропа — это формулы, в которых любое вхождение дизъюнкции и квантора существования находится в левой части области действия некоторой импликации. Здесь мы покажем, что если в формуле φ любое вхождение квантора всеобщности находится в левой части области действия некоторой импликации, то для φ понятия истинности и конструктивной истинности совпадают. Правда, на этот раз доказательство, в отличие от доказательства теоремы 3, будет неконструктивным, так как априори нельзя указать элемент, конструктивно реализующий формулу из этого класса.

Определение 20 (класс формул C):

1) *любая атомарная формула принадлежит C;*

2) *если φ, ψ принадлежат C, χ — произвольная формула, то $\varphi \& \psi$, $\varphi \vee \psi$, $(\exists x)\varphi$, $\chi \supset \varphi$ также принадлежат C.*

Предложение 6. *Пусть φ — замкнутая формула класса C. Тогда для любой нумерации ν $\mathfrak{M} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathbf{con}} \varphi$.*

Доказательство ведется индукцией по длине формулы φ сигнатуры Σ.

1. Если φ атомарная, то утверждение очевидно по определению.

2. Пусть $\mathfrak{M} \models \varphi \& \psi$ и $\varphi \& \psi \in C$. Тогда $\varphi \in C$ и $\psi \in C$. По индукционному предположению существуют a, b такие, что $a\, \mathbf{con}\, \varphi$ и $b\, \mathbf{con}\, \psi$. Тогда $\langle a, b\rangle\, \mathbf{con}\, \varphi \& \psi$.

3. Пусть $\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi$ и $\varphi \vee \psi \in C$. Тогда $\varphi \in C$ и $\psi \in C$. Пусть, скажем, $\mathfrak{M} \models \varphi$. По индукционному предположению существует a такой, что $a\, \mathbf{con}\, \varphi$. Поэтому $\mathrm{inl}(a)\, \mathbf{con}\, \varphi \vee \psi$. Случай $\mathfrak{M} \models \psi$ рассматривается аналогично.

4. Пусть $\mathfrak{M} \models (\exists x)\varphi(x)$ и $(\exists x)\varphi(x) \in C$. Тогда для некоторого $n \in N$ имеет место $\mathfrak{M} \models \varphi(\nu n)$. Так как $\varphi(\nu n) \in C$, то существует a такой, что $a\, \mathbf{con}\, \varphi(\nu n)$. Тогда $\langle n, a\rangle\, \mathbf{con}\, (\exists x)\varphi(x)$.

5. Пусть $\mathfrak{M} \models \varphi \supset \psi$ и $\varphi \supset \psi \in C$. Тогда или $\neg(\mathfrak{M} \models \varphi)$, или $\mathfrak{M} \models \varphi$. Если $\neg(\mathfrak{M} \models \varphi)$, то $\perp_{\varphi \supset \psi}\, \mathbf{con}\, \varphi \supset \psi$. Пусть $\mathfrak{M} \models \psi$. Так как $\psi \in C$, то существует a такой, что $a\, \mathbf{con}\, \psi$. Тогда $\lambda x[a]\, \mathbf{con}\, \varphi \supset \psi$. □

§ 3. КОНСТРУКТИВНЫЕ ТЕОРИИ

В этом параграфе мы дадим определение конструктивной теории (конструктивной логики, конструктивного исчисления), основанное на определении (см. § 2) конструктивной истинности формулы на модели. Теоремы § 3 можно условно разбить на две группы. Теоремы первой группы относятся к обоснованию некоторых известных факторов интуиционистской логики с точки зрения введенных определений. Будет показано, что большинство известных интуционистских теорий удовлетворяет приведенному критерию конструктивности. Более того, мы покажем конструктивность следующего смешанного классически-конструктивного правила вывода, известного под названием принципа Маркова, или принципа конструктивного подбора [8]

$$\frac{\vdash_{\mathbf{con}} \varphi \vee \neg \varphi \vdash_{\mathbf{cl}} (\exists x)\varphi}{\vdash_{\mathbf{con}} (\exists x)\varphi},$$

где $\vdash_{\mathbf{con}}$ и $\vdash_{\mathbf{cl}}$ означают соответственно конструктивную и классическую выводимости.

Теоремы второй группы связаны с некоторыми результатами классической теории моделей. Доказано, что для конструктивного определения истинности не имеет места теорема полноты интуиционистского исчисления предикатов. Интересно также, что при конструктивном понимании истинности интуиционистская арифметика оказывается категоричной.

Кроме этого, мы докажем несколько результатов, связывающих понятия конструктивного исчисления с теорией конструктивных моделей, например критерии конструктивности и сильной конструктивности модели.

Более подробное изложение мотивов введения понятий конструктивной истинности формулы на модели, а также некоторые прикладные аспекты полученных результатов, связанные с логическим синтезом программ, см. в [1, 2].

Пусть $(\mathfrak{M}, \nu)$ — нумерованная модель сигнатуры σ. По нумерации ν стандартным образом строится геделевская нумерация θ конечных последовательностей формул сигнатуры σ.

Определение 21. *Правилом вывода сигнатуры σ называется непустая конечная последовательность $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ формул сигнатуры σ. При $n=0$ правило вывода будем называть аксиомой.*

Правило вывода $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ будем обычно записывать в виде $\varphi_1, \ldots, \varphi_n/\varphi$.

Определение 22. *Исчислением сигнатуры σ назовем любую θ-вполне перечислимую совокупность правил вывода этой сигнатуры.*

Определение 23 (выводимость в исчислении):

1) *если аксиома φ принадлежит $\mathscr{L}$, то* $\vdash_{\mathscr{L}} \varphi$;

2) *если* $\vdash_{\mathscr{L}}\varphi_1, \ldots, \vdash_{\mathscr{L}}\varphi_n$ *и* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n/\varphi$ — *правило вывода* $\mathscr{L}$, *то* $\vdash_{\mathscr{L}} \varphi$.

Перед тем, как дать основное определение этого параграфа — определение конструктивного исчисления — поясним его неформально. Исчисление $\mathscr{L}$ считается конструктивно истинным, если существует алгоритм, который по каждому правилу вывода $\mathscr{L}$ вида $\varphi_1, \ldots, \varphi_n/\varphi$ и любым $a_1, \ldots, a_n$ таким, что $a_1 \mathbf{cl}\, \varphi_1, \ldots, a_n \mathbf{cl}\, \varphi_n$, дает a, такой, что $a\, \mathbf{cl}\, \varphi$.

Пусть $\mathbf{\Pi}$ — нумерованное множество рекурсивно перечислимых множеств с нумерацией Поста [5], $\mathfrak{S}$ — нумерованное множество конечных последовательностей формул сигнатуры σ с нумерацией θ.

Определение 24. *Пусть $\mathscr{L}$ — исчисление сигнатуры σ, $(\mathfrak{M}, \nu)$ — нумерованная модель сигнатуры σ; $\mathscr{L}$ называется конструктивным для $(\mathfrak{M}, \nu)$, если существует морфизм μ из $\mathfrak{S}$ в $\mathbf{\Pi}$ такой, что для любого правила вывода R исчисления $\mathscr{L}$*

$$\{\eta n | n \in \mu(R)\} \,\mathbf{cl}\, \forall\varphi_1 \,\&\ldots\&\, \forall\varphi_n \supset \forall\varphi,$$

если R имеет вид $\varphi_1, \ldots, \varphi_n/\varphi$ и $\{\eta n | n \in \mu(R)\} \,\mathbf{cl}\, \forall\varphi$, если R имеет вид $/\varphi$.

Сразу заметим, что в определении 24 $\mathbf{cl}$ можно заменить на $\mathbf{con}$, так как множество $\{\eta n | n \in \mu(R)\}$ η-вполне перечислимо.

Определение 25. *Правило вывода R называется конструктивным для нумерованной модели $(\mathfrak{M}, \nu)$, если исчисление, состоящее из одного этого правила, конструктивно для $(\mathfrak{M}, \nu)$.*

Лемма 6. *Правило вывода $\varphi_1, \ldots, \varphi_n/\varphi$ (соответственно $/\varphi$) конструктивно для $(\mathfrak{M}, \nu)$ тогда и только тогда, когда* $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathbf{con}} \forall\varphi_1 \,\&\ldots \ldots \forall\varphi_n \supset \forall\varphi$ (соответственно $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathbf{con}} \forall\varphi$).

Доказательство следует прямо из определений. □

Приведем критерии конструктивности и сильной конструктивности модели.

Предложение 7. *Пусть $(\mathfrak{M}, \nu)$ — нумерованная модель, $\mathscr{L} \rightleftharpoons \{\varphi \vee \neg\varphi | \varphi$ — бескванторная формула сигнатуры $\sigma\}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *исчисление* $\mathscr{L}$ *конструктивно для* $(\mathfrak{M}, \nu)$;

(2) $(\mathfrak{M}, \nu)$ — *конструктивная модель.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}$ конструктивно для $(\mathfrak{M}, \nu)$, $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ — бескванторная формула сигнатуры σ. По определению конструктивного исчисления можно эффективно по φ построить такой a, что $a \operatorname{\mathbf{con}} \varphi(x_0, \ldots, x_n) \vee \neg \varphi(x_0, \ldots, x_n)$. Следовательно, для любых $m_0, \ldots, m_n \in N$

$$a(m_0, \ldots, m_n) \operatorname{\mathbf{con}} \varphi(\nu m_0, \ldots, \nu m_n) \vee \neg \varphi(\nu m_0, \ldots, \nu m_n).$$

По теореме 1 получаем утверждения:

(а) если $\operatorname{lft}(a(m_0, \ldots, m_n)) \neq \varnothing$, то $\mathfrak{M} \models \varphi(\nu m_0, \ldots, \nu m_n)$;

(б) если $\operatorname{rht}(a(m_0, \ldots, m_n)) \neq \varnothing$, то $\mathfrak{M} \models \neg \varphi(\nu m_0, \ldots, \nu m_n)$.

Таким образом, мы привели алгоритм, проверяющий истинность в $\mathfrak{M}$ бескванторных формул сигнатуры Σ. Следовательно, $(\mathfrak{M}, \nu)$ — конструктивная модель. В обратную сторону доказательство ведется аналогично. □

Следствие 2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, \nu)$ — *нумерованная модель сигнатуры* σ, *причем в* σ *конечное число предикатных символов. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *для любого предикатного символа* P *сигнатуры* σ *формула* $P(x_0, \ldots, x_n) \vee \neg P(x_0, \ldots, x_n)$ *конструктивно истинна в* $(\mathfrak{M}, \nu)$;

(2) $(\mathfrak{M}, \nu)$ — *конструктивная модель.*

Доказательство прямо следует из предложения 7. □

Предложение 8. *Пусть* $(\mathfrak{M}, \nu)$ — *нумерованная модель сигнатуры* σ, $\mathscr{L} \rightleftharpoons \{\varphi \vee \neg\varphi \mid \varphi$ — *формула сигнатуры* $\sigma\}$. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathscr{L}$ *конструктивно для* $(\mathfrak{M}, \nu)$;

(2) $(\mathfrak{M}, \nu)$ — *сильно конструктивная модель.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 7. □

Следующая теорема демонстрирует корректность понятия конструктивного исчисления относительно конструктивной истинности.

Теорема 4. *Пусть* $\mathscr{L}$ — *конструктивное исчисление для* $(\mathfrak{M}, \nu)$ *и* $\vdash_{\mathscr{L}} \varphi$, *Тогда* $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathrm{con}} \varphi$. *Более того, элемент* a, *конструктивно реализующий* φ, *находится по доказательству формулы* φ *эффективно.*

Доказательство ведется индукцией по высоте вывода Π формулы φ в $\mathscr{L}$.

1. Пусть φ — аксиома. Тогда по определению 24 можно эффективно построить элемент a, который конструктивно реализует $\forall\varphi$ или, что то же самое, конструктивно реализует φ.

2. Пусть φ получается из $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ с помощью применения правила вывода R. Тогда по R можно эффективно построить a такой, что $a \operatorname{\mathbf{con}} \forall\varphi_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \forall\varphi_n \supset \forall\varphi$. По индукционному предположению существуют $a_1, \ldots, a_n$ такие что $a_1 \operatorname{\mathbf{con}} \forall\varphi_1, \ldots, a_n \operatorname{\mathbf{con}} \forall\varphi_n$. Тогда $a(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle) \operatorname{\mathbf{con}} \forall\varphi$. □

Определение 26. *Пусть* Π — *доказательство формулы* φ; Π *называется конструктивным для* $(\mathfrak{M}, \nu)$, *если каждое правило вывода, которое применяется в* Π, *конструктивно для* $(\mathfrak{M}, \nu)$.

Предложение 9. *Доказательство* Π *конструктивно для* $(\mathfrak{M}, \nu)$ *тогда и только тогда, когда любая формула, входящая в* Π, *конструктивно истинна в* $(\mathfrak{M}, \nu)$.

Доказательство в одну сторону следует из теоремы 4. Обратно, пусть любая формула, входящая в Π, конструктивно истинна в $(\mathfrak{M}, \nu)$. Пусть $R \rightleftharpoons \varphi_1, \ldots, \varphi_n/\varphi$ — правило вывода, применяющееся в Π. По условию φ, а следовательно и $\forall\varphi$, конструктивно истинна в $(\mathfrak{M}, \nu)$. Из этого вытекает, что $(\mathfrak{M}, \nu) \models_{\mathrm{con}} \forall\varphi_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \forall\varphi_n \supset \forall\varphi$. По лемме 6 правило R конструктивно для $(\mathfrak{M}, \nu)$. □

Предложение 10. *Существуют нумерованная модель* $(\mathfrak{M}, \nu)$ *и исчисление* $\mathscr{L}$ *такие, что любое доказательство* Π *в* $\mathscr{L}$ *конструктивно для*

$(\mathfrak{M}, \nu)$, *но само исчисление $\mathscr{L}$ не является конструктивным для* $(\mathfrak{M}, \nu)$.

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{M}, \nu)=(\langle N, P, 0, s\rangle, \mathrm{id}_N)$, где N — множество натуральных чисел, P — неразрешимый одноместный предикат на N, 0 — константа и s — операция прибавления единицы, id_N — тождественная нумерация N. В качестве исчисления $\mathscr{L}$ берем множество формул вида $P(s^n(0))\vee\neg P(s^n(0))$, $n\in N$. Любая такая формула конструктивно истинна в $(\mathfrak{M}, \nu)$. Поэтому по предложению 9 любое доказательство в $\mathscr{L}$ конструктивно для $(\mathfrak{M}, \nu)$. Однако конструктивность всего исчисления $\mathscr{L}$ равносильна разрешимости предиката P. □

Практически все известные исчисления в языке первого порядка обладают дизъюнктивным свойством и свойством эффективности теорем существования. Докажем, что конструктивные в смысле определения 24 исчисления обладают семантическими аналогами этих свойств.

Определение 27. *Исчисление $\mathscr{L}$ удовлетворяет D-свойству, если из выводимости в $\mathscr{L}$ замкнутой формулы вида $\varphi\vee\psi$ вытекает, что одна из формул φ, ψ выводима в $\mathscr{L}$.*

Определение 28. *Исчисление $\mathscr{L}$ удовлетворяет E-свойству, если из выводимости в $\mathscr{L}$ замкнутой формулы вида $(\exists x)\varphi(x)$ вытекает, что для некоторого терма t в $\mathscr{L}$ выводима формула $\varphi(t)$.*

Теорема 5 (семантический аналог D- и E-свойств). *Пусть $\mathscr{L}$ — конструктивное для $(\mathfrak{M}, \nu)$ исчисление. Тогда*

(1) *по любому доказательству замкнутой формулы $\varphi\vee\psi$ можно эффективно определить, какая из формул φ, ψ истинна в $\mathfrak{M}$;*

(2) *по любому доказательству Π замкнутой формулы вида $(\exists x)\varphi(x)$ можно эффективно найти $n\in N$, такой, что $\mathfrak{M}\models\varphi(\nu n)$.*

Доказательство. (1) Пусть Π — вывод в $\mathscr{L}$ формулы $\varphi\vee\psi$. По теореме 4 можно эффективно построить a, такой, что $a\,\mathbf{con}\,\varphi\vee\psi$. Тогда, если $\mathrm{lft}(a)\neq\varnothing$, то $\mathfrak{M}\models\varphi$, а если $\mathrm{rht}(a)\neq\varnothing$, то $\mathfrak{M}\models\varphi$.

(2) По теореме 4 можно эффективно построить a такой, что $a\,\mathbf{con}(\exists x)\varphi(x)$. Тогда, если $\mathrm{fst}(a)=n$, то $\mathfrak{M}\models\varphi(\nu n)$. □

Теоремы 4 и 5 показывают, что произвольные конструктивные исчисления обладают свойствами, которые требуются от интуитивного понятия конструктивной логики: возможность построения объекта, существование которого доказывается, а также дизъюнктивное свойство. Докажем теперь, что класс конструктивных исчислений достаточно широк: фактически все известные конструктивные исчисления в языке первого порядка являются конструктивными в смысле определения 24.

Теорема 6. *Интуиционистское исчисление предикатов сигнатуры σ — конструктивное исчисление для любой нумерованной модели $(\mathfrak{M}, \nu)$ сигнатуры σ.*

Доказательство этой теоремы фактически копирует доказательство реализуемости по Клини [9] интуиционистски выводимых формул и многие другие аналогичные доказательства. В качестве реализаций выступают те же функционалы, что и в [9]. □

Хорошо известно, что если к интуиционистскому исчислению предикатов добавить в качестве аксиом набор формул Харропа, то полученное исчисление будет удовлетворять D- и E-свойствам. Следующая теорема дает семантическое объяснение этого факта.

Теорема 7. *Пусть $\mathscr{L}$ — исчисление, конструктивное для $(\mathfrak{M}, \nu)$, H — перечислимое семейство аксиом, являющихся формулами Харропа, истинными в $\mathfrak{M}$. Тогда $\mathscr{L}\cup H$ конструктивно для $(\mathfrak{M}, \nu)$.*

Доказательство прямо следует из леммы 5 и теоремы 3. □

Следствие 3. *Пусть $\mathscr{L}$ — исчисление сигнатуры σ, полученное добавлением к интуиционистскому исчислению предикатов перечислимого семейства формул Харропа H в качестве аксиом. Тогда $\mathscr{L}$ конструктивна для любой модели, в которой истинны все формулы из H.*

Доказательство прямо следует из теорем 6 и 7. □

Теорема 8. *Интуиционистская арифметика — конструктивное исчисление для стандартной модели арифметики.*

Доказательство аналогично предложению 6. □

По теореме 6 интуиционистское исчисление предикатов сигнатуры σ является конструктивным исчислением для любой нумерованной модели $(\mathfrak{M}, \nu)$ сигнатуры σ. Встает естественный вопрос: является ли интуицинистское исчисление предикатов наибольшим исчислением с этим свойством (аналог теоремы полноты для классической теории моделей)? Оказывается, что это не так. Например, невыводимая в интуиционистском исчислении предикатов формула $P \vee \neg P$, где P — замкнутая атомарная формула, конструктивно истинна в любой нумерованной модели. Поэтому мы поставим вопрос об устройстве наибольшей конструктивной логики несколько иначе.

Определение 29. *Формула φ называется конструктивно общезначимой, если каждая формула ψ, полученная из φ заменой предикатных символов, входящих в φ, на произвольные формулы некоторой сигнатуры σ, конструктивно истинна в любой нумерованной модели сигнатуры σ.*

Предложение 11. *Существуют конструктивно общезначимые формулы, которые недоказуемы в интуиционистском исчислении предикатов.*

Доказательство. Рассмотрим формулу $\varphi \rightleftharpoons \neg\neg(\forall x)(Px) \vee \vee \neg P(x))$. В [9] показано, что φ невыводима в интуиционистском исчислении предикатов. В то же время φ классически общезначима и при любой подстановке формул вместо P является формулой Харропа. По теореме 3 φ конструктивно общезначима. □

Вопрос об описании класса конструктивно общезначимых формул остается открытым. Перейдем к принципу Маркова.

Предложение 12 (семантический аналог принципа Маркова). *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель сигнатуры σ и $\mathfrak{M} \models (\exists x)\varphi(x)$. Тогда, независимо от нумерации ν модели $\mathfrak{M}$, правило вывода $\varphi(x) \vee \neg\varphi(x) / (\exists x)\varphi(x)$ конструктивно для $(\mathfrak{M}, \nu)$.*

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай, когда x — единственная свободная переменная формулы φ. По лемме 6 нам достаточно показать, что формула $(\forall x)(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \supset (\exists x)\varphi(x)$ конструктивно истинна. Докажем, что функционал f, имеющий вид

$$\{(u, (n, \Delta_\varphi)) \mid R(u, n)\} \subset \{(u, (\Delta_0, X)) \mid R(u, n) \,\&\, X \in \mathrm{lft}(u(n))\},$$

конструктивно реализует эту формулу (здесь $R(u, n) \rightleftharpoons \mathrm{lft}(u(n)) \neq \neq \varnothing \,\&\, (\forall m \in \{0, \ldots, n-1\})\, \mathrm{rht}(u(m)) \neq \varnothing\}$. Перечислимость f следует из разрешимости предикатов $R(u, n)$ и $X \in \mathrm{lft}(u(n))$. Осталось показать $f\,\mathbf{cl}((\forall x)(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \supset (\exists x)\varphi(x)$. Для этого предположим, что $a\,\mathbf{cl}(\forall x)(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$. Тогда для любого $k \in N$ имеет место $a(k)\,\mathbf{cl}\,\varphi(\nu k) \vee \neg\varphi(\nu k)$. По условию теоремы $\mathfrak{M} \models (\exists x)\varphi(x)$. Пусть n_0 — наименьшее число такое, что $\mathfrak{M} \models \varphi(\nu, n_0)$. Тогда $m \models \neg\varphi(\nu m)$ для любого $m \in \{0, \ldots, n_0 - 1\}$. Следовательно, $\mathrm{lft}(a(n_0))\,\mathbf{cl}\,\varphi(\nu n_0)$ и для любого $m \in \{0, \ldots, n_0 - 1\}$ выполняется $\mathrm{rht}(a(m))\,\mathbf{cl}\,\neg\varphi(\nu m)$. Поэтому $\mathrm{lft}(a(n_0)) \neq \varnothing$ и для $\mathrm{rht}(a(m)) \neq \varnothing$ любого $m \in \{0, \ldots, n_0 - 1\}$. Из этого вытекает, что существует конечный $u \subseteq a$, такой, что выполняется $R(u, n_0)$. Более того, как нетрудно заметить, условие $R(u, k)$ может выполняться только для $k = n_0$. Следовательно, $f = \{(u, (n_0, \Delta_\varphi)) \mid R(u, n_0)\} \cup \{(u, (\Delta_0, X)) \mid R(u, n_0) \,\&\, X \in \mathrm{lft}(u(n_0))\}$. Из этого равенства получаем $\mathrm{fst}(f(a)) = n_0$ и $\mathrm{snd}(f(a)) = \mathrm{lft}(a(n_0))$. По уже доказанному имеет место $\mathrm{lft}(a(n_0))\,\mathbf{cl}\,\varphi(\nu n_0)$. Следовательно, $\mathrm{snd}(f(a))\,\mathbf{cl}\,\varphi(\nu n_0)$ и $\langle \mathrm{fst}(f(a)), \mathrm{snd}(f(a)) \rangle\,\mathbf{cl}(\exists x)\varphi(x)$. Но так как для любого элемента b имеет место равенство $\langle \mathrm{fst}(b), \mathrm{snd}(b) \rangle = b$, то $f(a)\,\mathbf{cl}(\exists x)\varphi(x)$, что и требовалось доказать. □

Отметим одну интересную особенность приведенного алгоритма построения реализации по доказательству в случае применения принципа

Маркова. Если реализация формулы $(\exists x)\varphi(x)$, построенная по доказательству в интуиционистском исчислении предикатов, дает один и тот же элемент $a \in |\mathfrak{M}|$ такой, что $\mathfrak{M} \models \varphi(a)$, независимо от нумерации ν модели $\mathfrak{M}$, то реализация заключения принципа Маркова дает элемент a с наименьшим ν-номером среди элементов, обладающих свойством $\mathfrak{M} \models \varphi(a)$. Таким образом, элемент a существенно зависит от нумерации.

Можно определить понятие конструктивной логики так, что принцип Маркова в его следующей формулировке

$$\frac{\vdash_{\mathrm{con}} \varphi \vee \neg\varphi \vdash_{\mathrm{cl}} (\exists x)\,\varphi}{\vdash_{\mathrm{con}} (\exists x)\,\varphi}$$

окажется конструктивным.

Приведем еще один критерий сильной конструктивности модели.

Теорема 9. *Пусть $(\mathfrak{M}, \nu)$ — нумерованная модель сигнатуры σ, причем любой элемент $\mathfrak{M}$ является значением подходящего терма сигнатуры σ и множество $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$ разрешимо. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует конструктивное для $(\mathfrak{M}, \nu)$ исчисление $\mathscr{L}$, в котором выводимы все формулы, конструктивно истинные в $(\mathfrak{M}, \nu)$;*

(2) *$(\mathfrak{M}, \nu)$ — сильно конструктивная модель.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}$ — исчисление, удовлетворяющее условиям теоремы, φ — произвольная замкнутая формула сигнатуры σ. Одна из формул Харропа $\neg\varphi$, $\neg\neg\varphi$ истинна в $\mathfrak{M}$. По теореме 3 одна из них конструктивно истинна в $(\mathfrak{M}, \nu)$. Из условия теоремы вытекает, что либо $\vdash_{\mathscr{L}} \neg\varphi$, либо $\vdash_{\mathscr{L}} \neg\neg\varphi$. Таким образом, используя $\mathscr{L}$, мы можем эффективно определять, какая из формул $\neg\varphi$, $\neg\neg\varphi$ истинна в $\mathfrak{M}$. Следовательно, теория модели $\mathfrak{M}$ $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ разрешима. Так как любой элемент $\mathfrak{M}$ является значением подходящего терма сигнатуры σ и равенство в $(\mathfrak{M}, \nu)$ разрешимо, то $(\mathfrak{M}, \nu)$ — сильно конструктивная модель.

Обратно, пусть $(\mathfrak{M}, \nu)$ — сильно конструктивная модель. По теореме 2 множество конструктивных истинных в $(\mathfrak{M}, \nu)$ формул сигнатуры σ совпадает с $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$. Но теория сильно конструктивной модели разрешима. Следовательно, в качестве $\mathscr{L}$ можно взять $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$. Конструктивность $\mathscr{L}$ доказывается тривиально и следует из эффективности понятия истинности на сильно конструктивных моделях.

Теперь рассмотрим вопрос о соотношении синтаксических критериев конструктивности логики с введенным семантическим критерием.

Определение 30. *Назовем исчисление $\mathscr{L}$ синтаксически конструктивным, если $\mathscr{L}$ удовлетворяет D- и E-свойствам.*

Определение 31. *Назовем исчисление $\mathscr{L}$ семантически конструктивным, если существует нумерованная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ такая, что $\mathscr{L}$ конструктивна для $(\mathfrak{M}, \nu)$.*

Понятие семантически конструктивного исчисления является конструктивным аналогом понятия непротиворечивой теории в классической логике. Оказывается, что синтаксический и семантический критерии конструктивности расходятся.

Предложение 13. *Классическое исчисление предикатов сигнатуры σ семантически конструктивно, но не является синтаксически конструктивным.*

Доказательство. Классическое исчисление предикатов является конструктивным исчислением для любой сильно конструктивной модели сигнатуры σ. В то же время хорошо известно, что оно не является синтаксически конструктивным. □

Определение 32. *Назовем нумерованную модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ c-моделью для исчисления $\mathscr{L}$, если $\mathscr{L}$ конструктивно для $(\mathfrak{M}, \nu)$.*

Предложение 14. *Существует непротиворечивое синтаксически конструктивное исчисление $\mathscr{L}$, которое не является семантически конструктивным. Другими словами, $\mathscr{L}$ имеет модели, но не имеет c-моделей.*

Исчисление $\mathscr{L}$, удовлетворяющее условиям предложения 14, будет построено ниже, после того, как мы приведем одну вспомогательную лемму. Построенное нами исчисление $\mathscr{L}$ будет даже конечно аксиоматизируемым в том смысле, что оно получается из интуиционистского исчисления предикатов добавлением конечного числа аксиом.

Лемма 7. *Пусть в сигнатуре σ имеется хотя бы одна константа и исчисление $\mathscr{L}$ сигнатуры σ получается добавлением к интуиционистскому исчислению предикатов в качестве аксиом множества формул $H \cup N$, где H — набор формул Харропа, а каждая формула φ из N обладает следующими свойствами:*

(1) *φ имеет вид $(\forall x_0)\ldots(\forall x_n)\psi(x_0, \ldots, x_n)$;*

(2) *φ не содержит вхождений импликации (но может содержать вхождения отрицания);*

(3) *для любого набора $t_0, \ldots, t_n$ замкнутых термов сигнатуры σ формула $\psi(t_0, \ldots, t_n)$ выводима в интуиционистском исчислении предикатов из H.*

Тогда $\mathscr{L}$ синтаксически конструктивно.

Доказательство очень длинное, поэтому опускается. □

Доказательство предложения 14. Рассмотрим множество T1 — T12 формул (эта конструкция заимствована из [2]). Формулы T1 — T9 образуют слабую подтеорию теории стандартной модели арифметики, которая позволяет развить полную теорию рекурсивных функций:

T1 $sx \neq 0$;

T2 $sx = sy \supset x = y$;

T3 $x + 0 = x$;

T4 $x + sy = s(x + y)$;

T5 $x \cdot 0 = 0$;

T6 $x \cdot sy = x \cdot y + x$;

T7 $\neg(x < 0)$;

T8 $x < sy \equiv (x < y \vee x = y)$;

T9 $x < y \vee x = y \vee y < x$.

Пусть B, C — два непересекающихся рекурсивно неотделимых рекурсивно перечислимых множества и α, β — такие бескванторные формулы, что

$$x \in B \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models (\exists y_0)\ldots(\exists y_m)(\alpha(y_0, \ldots, y_m, x));$$

$$x \in C \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models (\exists y_0)\ldots(\exists y_m)(\beta(y_0, \ldots, y_m, x));$$

$$T10\ (\exists y_0)\ldots(\exists y_m)\Big(\mathop{\&}_{i \leqslant m}(y_i < x)\ \&\ \alpha(y_0, \ldots, y_m, z)\Big) \supset R(x, z);$$

$$T11\ (\exists y_0)\ldots(\exists y_m)\Big(\mathop{\&}_{i \leqslant m}(y_i < x)\ \&\ \beta(y_0, \ldots, y_m, z)\Big) \supset \neg R(x, z);$$

$$T12\ (\exists x)(\forall y)(0 < x\ \&\ (y < x \supset sy < x)).$$

В [2] показано, что множество формул T1 — T12 не имеет конструктивных моделей. Пусть сигнатура σ состоит из предикатных символов $=, <, S, P, M, R$ и константы 0. Построим по формулам T1 — T12 их аналоги C1 — C12 в сигнатуре σ с помощью следующих преобразований:

$$\varphi(s(t)) \longmapsto (\exists x)(S(t, x)\ \&\ \varphi(x));$$

$$\varphi(t_1 + t_2) \longmapsto (\exists x)(P(t_1, t_2, x)\ \&\ \varphi(x));$$

$$\varphi(t_1 \cdot t_2) \longmapsto (\exists x)(M(t_1, t_2, x)\ \&\ \varphi(x)).$$

Добавим к формулам C1 — C12 аксиомы функциональности S, P и M

$C13\ S(x, y)\ \&\ S(x, z) \supset y = z$;

$C14\ P(x_0, x_1, y)\ \&\ P(x_0, x_1, z) \supset y = z$;

$C15\ M(x_0, x_1, y)\ \&\ M(x_0, x_1, z) \supset y = z$;

аксиомы равенства

C16 $x = x$;

C17 $x = y \supset y = x$;

C18 $x = y \supset (x = z \supset y = z)$

и аксиомы C19 — C23, имеющие вид

$$x_0 = y_0 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n = y_n \,\&\, Q(x_0, \ldots, x_n) \supset Q(y_0, \ldots, y_n),$$

для $Q \in \{<, S, P, M, R\}$.

Пусть ψ — конъюнкция формул C1 — C23. В качестве $\mathscr{L}$ выбирается исчисление, полученное из интуиционистского исчисления предикатов добавлением следующих аксиом:

P1 $\neg\neg\psi$;	P8 $0 = 0$;
P2 $(\forall x)(\forall y)(x = y \vee \neg x = y)$;	P9 $\neg S(0, 0)$;
P3 $(\forall x)(\forall y)(S(x, y) \vee \neg S(x, y))$;	P10 $\neg 0 < 0$;
P4 $(\forall x)(\forall y)(x < y \vee \neg x < y)$;	P11 $P(0, 0, 0)$;
P5 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y, z) \vee \neg P(x, y, z))$;	P12 $M(0, 0, 0)$;
P6 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(M(x, y, z) \vee \neg M(x, y, z))$;	P13 $R(0, 0)$.
P7 $(\forall x)(\forall y)(R(x, y) \vee \neg R(x, y))$;	

Так как T1 — T12 имеют модель, то и P1 — P13 имеют модель. Более того, любая конструктивная модель P1 — P13 легко преобразуется в конструктивную модель T1 — T12. Следовательно, $\mathscr{L}$ не имеет конструктивных моделей. Так как P2 — P7 — аксиомы $\mathscr{L}$, то по следствию 2 любая c-модель $\mathscr{L}$ является конструктивной. Следовательно, $\mathscr{L}$ не имеет c-моделей.

Осталось показать, что $\mathscr{L}$ синтаксически конструктивно. Для этого докажем, что $\mathscr{L}$ удовлетворяет условиям леммы 7. Все нехарроповы аксиомы $\mathscr{L}$ — это P2 — P7. Единственный терм сигнатуры σ — это 0. Формулы $0 = 0 \vee \neg 0 = 0$, $S(0, 0) \vee \neg S(0, 0)$, $0 < 0 \vee \neg 0 < 0$ ...выводимы из формул Харропа P8 — P13. Таким образом, все условия леммы 7 выполняются. Следовательно, $\mathscr{L}$ синтаксически конструктивно. □

Понятие c-модели дает возможность выделять в аксиоматизируемом классе моделей в точности конструктивные (сильно конструктивные) модели.

Предложение 15. *Пусть $\mathscr{L}$ — исчисление сигнатуры σ. Тогда по $\mathscr{L}$ можно эффективно построить исчисления $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{L}_1$ со следующими свойствами:*

(1) *$(\mathfrak{M}, \nu)$ есть c-модель для $\mathscr{L}_0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ — модель для $\mathscr{L}$ и $(\mathfrak{M}, \nu)$ — конструктивная модель;*

(2) *$(\mathfrak{M}, \nu)$ есть c-модель для $\mathscr{L}_1$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ — модель для $\mathscr{L}$ и $(\mathfrak{M}, \nu)$ — сильно конструктивная модель.*

Доказательство. Положим

$$\mathscr{L}_2 \rightleftharpoons \{\neg\neg\varphi \mid \vdash_{\mathscr{L}} \varphi\},$$

$$\mathscr{L}_0 \rightleftharpoons \mathscr{L}_2 \cup \{\varphi \vee \neg\varphi \mid \varphi \text{ — бескванторная}\},$$

$$\mathscr{L}_1 \rightleftharpoons \mathscr{L} \cup \{\varphi \vee \neg\varphi \mid \varphi \text{ — произвольная}\}.$$

Очевидно, что классы моделей для $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ совпадают. По следствию 3 любая нумерованная модель для $\mathscr{L}$ является c-моделью для $\mathscr{L}_2$. По предложению 7 c-модели для $\{\varphi \vee \neg\varphi \mid \varphi$ — бескванторная$\}$ — это в точности конструктивные модели. Отсюда сразу вытекает утверждение (1). Точно так же, используя предложение 8, получаем (2). □

В классической теории моделей большинство достаточно богатых теорий имеют (счетные) нестандартные модели. Оказывается, что если истинность понимать конструктивно, то уже интуиционистская арифметика оказывается категоричной.

Теорема 10. *Любые две c-модели интуиционистской арифметики рекурсивно изоморфны. Другими словами, интуиционистская арифметика не имеет нестандартных c-моделей.*

Доказательство. Так как в интуиционистской арифметике HA выводима формула $x = y \vee \neg x = y$, то по следствию 4 любая c-модель HA является конструктивной. В [10] доказано, что любая конструктивная модель HA рекурсивно изоморфна стандартной модели арифметики. Следовательно, HA не имеет нестандартных c-моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воронков А. А.** Логические программы и их синтез.— Новосибирск, 1986.— 32 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 23).
2. **Воронков А. А.** Синтез логических программ.— Новосибирск, 1986.— 42 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 24).
3. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели.— М.: Наука, 1980.
4. **Scott D. S.** Domains for denotational semantics // Lecture Notes in Computer Science.— Berlin, 1982.— V. 140.— P. 577—612.
5. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций.— М.: Наука, 1977.
6. **Гончаров С. С.** Ограниченные теории конструктивных булевых алгебр // Сиб. мат. журн.— 1976.— Т. 17, № 4.— С. 797—812.
7. **Harrop R.** Concerning formulas of the types $A \rightarrow B \vee C$, $A \rightarrow (Ex)B(x)$ in intuitionistic formal system // J. of Symb. Logic.— 1960.— V. 25, N 1.— P. 27—32.
8. **Марков А. А., Нагорный Н. М.** Теория алгорифмов.— М.: Наука, 1984.
9. **Клини С. К.** Введение в математику.— М.: ИЛ, 1957.
10. **Tannenbaum C.** Non-archimedian models for arithmetic // Notices Amer. Math. Soc.— 1959.— V. 6, N 3.— P. 270.

СЕМЕЙСТВО С ЕДИНСТВЕННОЙ ОДНОЗНАЧНОЙ, НО НЕ НАИМЕНЬШЕЙ НУМЕРАЦИЕЙ

С. С. ГОНЧАРОВ

Алгебраическая характеризация полурешеток вычислимых нумераций семейств рекурсивно-перечислимых множеств (РПМ) — одна из основных проблем теории нумераций. В связи с этим вопрос о существовании и числе минимальных нумераций семейств РПМ привлекал внимание многих авторов (см. [1—6]). В содержательном обзоре И. А. Лаврова [7] о вычислимых нумерациях отмечается тесная связь этих проблем с изучением однозначных и позитивных нумераций и обсуждаются полученные в этом направлении результаты.

В работе [8] показано, что семейство с однозначной, но не наименьшей нумерацией имеет счетное число позитивных неэквивалентных вычислимых нумераций. В [9] построены семейства с любым заданным числом $n \leqslant \omega$ неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций. В настоящей работе продолжаются эти исследования, решается вопрос: не будет ли единственная однозначная нумерация наименьшей? На этот вопрос получен отрицательный ответ.

В обозначениях и определениях будем следовать монографиям [10, 11]. Напомним некоторые из основных, используемых в дальнейшем, понятий и обозначений.

Через $\mathbf{N}$ будем обозначать множество всех натуральных чисел с нулем, c, l, r — канторовские функции, нумерующие пары натуральных чисел, т. е. c: $\mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$, $c(l(x), r(x)) = x$, $l(c(x, y)) = x$ и $r(c(x, y)) = y$.

Обозначим через $K(x, y)$ частично-рекурсивную функцию (ЧРФ), универсальную для класса одноместных ЧРФ. Через $K^t(x, y)$ будем обозначать значение $K(x, y)$, если оно вычисляется не более чем за t шагов; в противном случае $K^t(x, y)$ не определено.

Вычисляемая нумерация ν называется *наименьшей*, если ν сводится к любой вычислимой нумерации данного семейства.

Сформулируем теперь основной результат.