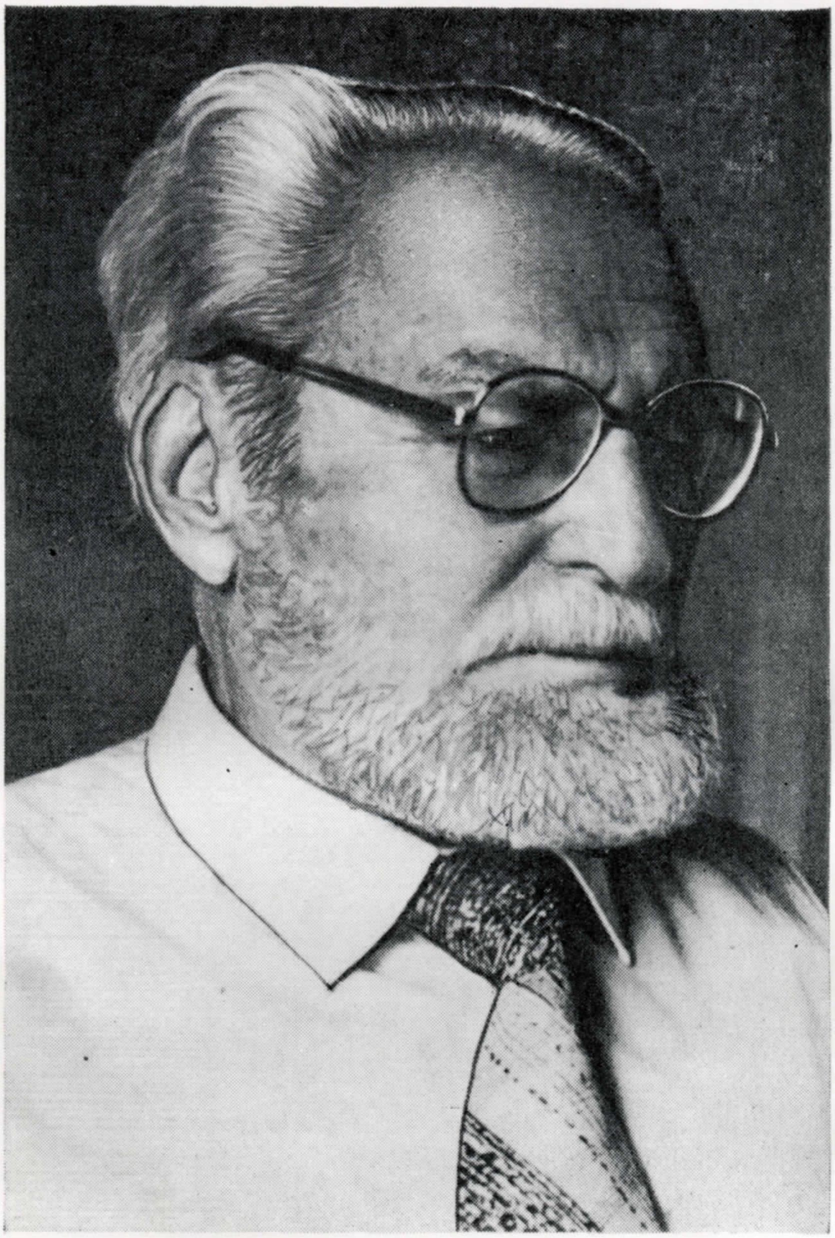

# К 75-ЛЕТИЮ АКАДЕМИКА А. Д. АЛЕКСАНДРОВА

4 августа 1987 г. исполняется семьдесят пять лет со дня рождения выдающегося математика Александра Даниловича Александрова. Александр Данилович родился в деревне Волыни бывшей Рязанской губернии. Его родители были учителями средней школы. В 1929 г. он поступил на физический факультет Ленинградского университета, который окончил в 1933 г. В 1935 г. Александр Данилович защитил кандидатскую, а в 1937 г.— докторскую диссертацию. В 1946 г. избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 1964 г.— академиком. С 1952 по 1964 г. А. Д. Александров — ректор Ленинградского университета. В 1964 г. Александр Данилович переезжает в Новосибирск работать в Сибирском отделении АН СССР, где возглавляет один из отделов Института математики СО АН. Одновременно он — профессор Новосибирского университета. С апреля 1986 г.— руководит лабораторией геометрии и топологии в Ленинградском отделении Математического института им. В. А. Стеклова.

Учителями Александра Даниловича были член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне, выдающийся геометр и алгебраист, и академик В. А. Фок — один из крупнейших физиков нашего времени. Первые научные работы А. Д. Александрова (опубликованные в 1933 г.) посвящены некоторым вопросам теоретической физики и геометрии. В дальнейшем основной его специальностью становится математика, и к ней относятся его основные достижения.

А. Д. Александров — автор более 200 научных работ (в том числе четырех монографий; две из них написаны в соавторстве). Основным направлением научной деятельности Александра Даниловича является геометрия. В этой области им создана большая научная школа. Среди учеников А. Д. Александрова более 30 кандидатов и 11 докторов наук, один академик и один член-корреспондент АН СССР.

Научные результаты Александра Даниловича охватывают обширный круг вопросов, включая геометрию выпуклых тел, теорию меры, теорию дифференциальных уравнений в частных производных и математические основания теории относительности.

В работах А. Д. Александрова получила развитие теория смешанных объемов выпуклых тел. Им доказан ряд фундаментальных теорем о выпуклых многогранниках, стоящих в одном ряду с теоремами Эйлера и Коши. В частности, в связи с решением проблемы Вейля А. Д. Александров разработал новый метод доказательства теорем существования.

Одно из основных достижений А. Д. Александрова в геометрии — создание теории многообразий ограниченной кривизны или, что то же самое, внутренней геометрии нерегулярных поверхностей. В связи с этой теорией им разработан удивительный по силе и наглядности метод разрезывания и склеивания, который оказался весьма эффективным, в частности в теории изгибания выпуклых поверхностей. Используя этот метод, А. Д. Александров получил решение целого ряда экстремальных задач для многообразий ограниченной кривизны.

Александр Данилович построил теорию метрических пространств с односторонними ограничениями на кривизну. Этот класс пространств представляет собой в настоящее время единственный известный класс метрических пространств, которые можно рассматривать как обобщенные римановы пространства в том смысле, что в них появляется центральное для римановой геометрии понятие кривизны.

Исследования по теории выпуклых тел привели Александра Даниловича к изучению общей теории аддитивных функций множеств. В частности, им проведено глубокое исследование понятия слабой сходимости для функций множеств. Его результаты в этой области включаются в руководства по функциональному анализу и находят применение как в геометрии, так и в функциональном анализе.

Работы А. Д. Александрова по дифференциальным уравнениям имеют своим истоком его исследования по теоремам существования и единственности в теории выпуклых тел. По существу, в этих работах возникает понятие обобщенного решения уравнения в частных производных и притом для случая трудных нелинейных задач. А. Д. Александров заложил основы геометрической теории уравнений типа Монжа — Ампера. Он развил геометрический подход к принципу максимума в теории уравнений. Его исследования по этим вопросам на много лет опередили аналогичные исследования специалистов по дифференциальным уравнениям.

А. Д. Александров решил вопрос о линейности отображений, сохраняющих конусы в пространстве специальной теории относительности. Эта работа переоткрывалась физиками разных стран с опозданием на десятилетия. Она дала начало исследованиям по хроногеометрии.

Вопросы методологии и истории науки, ее преподавания занимают важное место среди интересов Александра Даниловича. Ему принадлежит обширная неизменно актуальная и острая научная публицистика. Статьи А. Д. Александрова о содержании и роли математики используются в преподавании философии и истории науки. Он — автор цикла новых учебников по геометрии.

В задачу геометрии входит изучение геометрических образов: кривых, поверхностей, римановых и других многообразий, наделенных той или иной геометрической структурой. В дифференциальной геометрии был разработан мощный аналитический аппарат, приспособленный для изучения и описания главным образом локальных свойств геометрических образов. К началу XX в., в частности в теории поверхностей, возникло большое число задач, касающихся соотношений между разного рода величинами, характеризующими строение геометрических образов «в целом», таких как площадь поверхности, ограниченный ею объем, интегральная кривизна и др. Классические методы дифференциальной геометрии не давали подходов к этим задачам. Усилиями таких выдающихся математиков, как Штейнер, Гильберт, Минковский, Вейль, Кон-Фоссен, Либман, были получены только отдельные результаты геометрии «в целом». В работах этих геометров содержались постановки многих нерешенных проблем, определивших развитие геометрии «в целом» на многие десятилетия. Сейчас основные из этих проблем решены. Большая заслуга в этом принадлежит А. Д. Александрову и созданной им научной школе. В его работах геометрия «в целом» обогатилась многими плодотворными идеями и методами. Созданная А. Д. Александровым научная школа заняла ведущее положение в мире в области геометрии «в целом». Во всей современной дифференциальной геометрии в соответствии с прогнозом, сделанным Александром Даниловичем еще в 1948 г. в ходе дискуссии об учебниках по дифференциальной геометрии, на передний план вышли задачи, касающиеся именно строения дифференциально-геометрических объектов в целом.

А. Д. Александрову принадлежат фундаментальные результаты в теории выпуклых тел. Развивая классические исследования Минковского, Александр Данилович установил новые неравенства для смешанных объемов выпуклых тел. Попутно им были найдены аналогичные алгебраические неравенства, которые недавно получили совершенно неожиданное применение к решению известной поставленной еще в 1926 г. проблемы Ван дер Вардена об оценке перманента. Неравенства Александрова для смешанных объемов в настоящее время нашли интересные обобщения и приложения также в алгебраической геометрии и теории нелинейных эллиптических уравнений, а понятие о смешанных объемах проникло даже в теорию случайных процессов.

Одновременно А. Д. Александров ввел в теорию выпуклых тел функции множества — «функции кривизны» и доказал теоремы единственности выпуклого тела с данной функцией кривизны, охватившие как крайние частные случаи известные ранее теоремы Кристоффеля и Минковского. При этом Александром Даниловичем введены обобщенные дифференциальные уравнения в функциях множества с отвечающими им обобщенными решениями.

Достижения Александра Даниловича в теории выпуклых многогранников, полученные более 40 лет назад, и сегодня производят большое впечатление силой и законченностью результатов и красотой применяемых методов. Им предложены общие методы доказательства теорем существования и единственности выпуклых многогранников и поверхностей, удовлетворяющих тем или иным условиям. В качестве их приложения А. Д. Александров получил большое число конкретных результатов. Наиболее замечательным из них является принадлежащее ему решение проблемы Г. Вейля, поставленной последним еще в 1918 г. Решение, найденное Александром Даниловичем, давало ответ на вопрос в значительно более общей ситуации, чем та, которая рассматривалась автором проблемы. Способ решения проблемы, указанный Вейлем (не доведенный им до конца), основан на сведении к некоторой задаче для дифференциальных уравнений. В противоположность этому примененные А. Д. Александровым методы — чисто геометрические. Проблема Вейля состоит в том, чтобы доказать, что всякое двумерное риманово многообразие положительной кривизны, гомеоморфное сфере, изометрично замкнутой выпуклой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. А. Д. Александровым был рассмотрен сначала аналог этой проблемы для многогранников. В этом случае мы получаем задачу о существовании выпуклого многогранника с заранее заданной разверткой, удовлетворяющей некоторым простым необходимым условиям (условия эти состоят в том, что, во-первых, при склеивании многоугольников развертки должно получаться многообразие, гомеоморфное сфере, и, во-вторых, сумма углов при каждой вершине развертки должна быть не больше $2\pi$). На поверхности выпуклого многогранника естественным образом вводится метрика, в которой за расстояние между двумя точками принимается точная нижняя граница длин кривых, соединяющих эти точки. Таким же образом вводится метрика и на произвольной абстрактно заданной развертке. Разрезая произвольным образом поверхность выпуклого многогранника на многоугольники, мы будем получать из него различные развертки, которые все изометричны друг другу. Для многогранников проблема Вейля превращается в конечномерную задачу. Имеется два множества — множество $M_n$ выпуклых многогранников с $n$ вершинами и множество $Q_n$ разверток, имеющих $n$ вершин и удовлетворяющих указанным выше условиям. Две изометричные развертки при этом рассматриваются как одна и та же развертка. На каждом из этих множеств вводится естественным образом топология, в силу которой $M_n$ и $Q_n$ становятся многообразиями размерности $3n-6$. Более того, $M_n$ и $Q_n$ можно считать даже дифференцируемыми многообразиями. Сопоставляя каждому выпуклому многограннику $P$ его развертку $S$, получим отображение $\varphi\colon M_n \to Q_n$. Задача состоит в том, чтобы доказать, что $\varphi(M_n) = Q_n$. Для этого достаточно показать, что справедливы следующие утверждения: (А) $\varphi(M_n)$ есть открытое подмножество в $Q_n$; (Б) каждая связная компонента пространства $Q_n$ содержит элемент множества $\varphi(M_n)$; (В) $\varphi(M_n)$ замкнуто в $Q_n$. Из (А), (Б), (В), очевидно, следует, что $\varphi(M_n)=Q_n$.

Утверждение (В) доказывается сравнительно просто. Оно означает, что если развертка $S_0 \in Q_n$ есть предел разверток $S_m$, $m=1, 2, \ldots$, каждая из которых реализуется как поверхность некоторого выпуклого многогранника, то и развертка $S_0$ является в этом же смысле реализуемой. Основная трудность заключается в утверждении (А). Александр Данилович указал два различных его доказательства. Одно основывается на теореме Брауэра об инвариантности области. Предварительно устанавливается, что отображение $\varphi$ непрерывно и взаимно однозначно. Непрерывность $\varphi$ очевидна. Взаимная однозначность $\varphi$ следует из того, что если поверхности двух выпуклых многогранников изометричны, то они могут быть совмещены движением. (Последнее утверждение, доказанное также А. Д. Александровым, представляет собой усиление классической теоремы Коши, согласно которой два выпуклых многогранника, равносоставленных из соответственно равных граней, конгруэнтны.) Непрерывность и взаимная однозначность $\varphi$ обеспечивают его топологичность. Теорема Брауэра теперь позволяет заключить, что $\varphi(M_n)$ — открытое подмножество в $Q_n$.

Другой способ доказательства предложения (А), также указанный А. Д. Александровым, основан на том, что отображение $\varphi$ дифференцируемо и якобиан его всюду отличен от нуля. Последнее свойство отображения $\varphi$ геометрически есть не что иное, как некоторая теорема о жесткости выпуклых многогранников.

Доказательство утверждения (Б), так же как и того факта, что множество $Q_n$ есть $(3n-6)$-мерное многообразие, составляет емкую в техническом отношении отдельную часть доказательства.

Решение проблемы Вейля для общего случая получается из теоремы А. Д. Александрова для многогранников путем приближения римановых метрик многогранниками и последующим предельным переходом.

План доказательства самого Г. Вейля был доведен до конца Г. Леви в 1938 г. средствами теории аналитических функций, при этом Вейль и Леви рассматривали только задачу о реализации аналитической римановой метрики. Александр Данилович сделал несравненно больше: он отказался не только от аналитичности, но даже от гладкости метрики. На принятом теперь в теории дифференциальных уравнений языке, он ввел и разработал в этой сугубо нелинейной задаче теорию ее обобщенных решений — и это в то время, когда такой подход в самой теории дифференциальных уравнений с частными производными обретал права гражданства еще только в задачах вариационного исчисления.

А. Д. Александровым получены обобщения его результатов, относящихся к проблеме Вейля, на случаи пространств Лобачевского и сферического. Позднее ряд важных результатов, относящихся к этой теме, получил А. В. Погорелов, который установил теоремы о связи между степенью гладкости выпуклой поверхности и ее внутренней метрики, а также получил обобщение теоремы А. Д. Александрова, касающееся погружения римановой метрики в риманово пространство ограниченной сверху кривизны.

Работы А. Д. Александрова по проблеме Г. Вейля положили начало многочисленным исследованиям по теории изгибаний выпуклых поверхностей, в числе которых следует назвать прежде всего работы самого А. Д. Александрова, а также С. П. Оловянишникова, А. В. Погорелова, и стимулировали другие подходы к теории изгибаний в работах Н. В. Ефимова, И. Н. Векуа и его учеников. Созданный Александром Даниловичем на основе его теорем существования метод разрезываний и склеиваний поразительно изменил всю теорию изгибаний.

Работы Александра Даниловича по проблеме Вейля послужили источником нового направления современной геометрии, которое можно характеризовать как теорию нерегулярных римановых пространств. Создателем этого направления и автором наиболее значительных из относящихся к нему результатов является А. Д. Александров. Решение проблемы Вейля, полученное им, основывается на приближении римановой метрики положительной кривизны многогранными метриками положительной кривизны. Естественно возникает вопрос, какие вообще метрики допускают подобного рода приближения. Александр Данилович дал полный ответ на этот вопрос. Им введено понятие двумерного многообразия с метрикой положительной кривизны и детально исследованы свойства таких многообразий. Многочисленные результаты А. Д. Александрова, посвященные этому предмету, собраны в его книге «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей», вышедшей в 1948 г. Для двумерных многообразий с метрикой положительной кривизны определены такие понятия, как кратчайшая, угол между кривыми, площадь множества. Кроме того, для них определена еще некоторая неотрицательная вполне аддитивная функция множества, называемая кривизной. В частном случае, когда данное многообразие риманово (класса $C^2$), эта функция множества совпадает с интегралом от гауссовой кривизны по площади. В общем случае кривизна может не быть абсолютно непрерывной относительно площади функцией и даже быть сосредоточенной в изолированных точках и на линиях. Например, для поверхности прямого кругового конуса кривизна сосредоточена на множестве, состоящем из его вершины и окружности основания конуса.

Среди прочих результатов, относящихся к геометрии многообразий положительной кривизны, отметим следующую замечательную теорему А. Д. Александрова. Пусть дан треугольник на выпуклой поверхности, образованный кратчайшими, соединяющими три точки $X$, $Y$, $Z$. Построим плоский треугольник $X'Y'Z'$ с теми же длинами сторон. Оказывается, что углы при вершинах этого плоского треугольника порознь не превосходят соответствующих углов исходного треугольника на выпуклой поверхности. Этот факт ранее не был известен даже для случая двумерных римановых пространств положительной кривизны. Обобщение данной теоремы (в литературе именуемой обычно теоремой сравнения А. Д. Александрова) на случай римановых пространств положительной кривизны произвольной размерности, полученное В. А. Топоноговым, сыграло важную роль и способствовало тому прогрессу, который достигнут в последние годы при изучении строения таких пространств в целом.

Эти результаты послужили образцом и одним из толчков для целого ряда теорем сравнения, полученных в современной римановой геометрии в целом.

После того как была построена теория двумерных многообразий положительной кривизны, естественно возникла задача рассмотреть многообразия, у которых кривизна есть вполне аддитивная функция множества произвольного знака. Теория таких многообразий, которые получили наименование двумерных многообразий ограниченной кривизны, была в основном построена А. Д. Александровым еще в начале 50-х годов. Ее полное изложение дано в 1962 г. в монографии «Двумерные многообразия ограниченной кривизны» (написанной совместно с В. А. Залгаллером).

Александр Данилович предложил два различных определения двумерных многообразий ограниченной кривизны. Одно определение — аксиоматическое, другое основано на приближении многообразий ограниченной кривизны многогранниками. А. Д. Александровым установлена эквивалентность этих определений. Мы приведем здесь второе определение.

Пусть $M$ — двумерное многообразие, наделенное метрикой $\rho$. Предположим, что метрика $\rho$ внутренняя, т. е. для любых двух точек $X$, $Y \in M$ величина $\rho(X, Y)$ равна точной нижней границе длин кривых, соединяющих эти точки. Для всякой области $G \subset M$ естественно определяется метрика $\rho_G$, где $\rho_G(X, Y)$ есть точная нижняя граница длин кривых, лежащих в области $G$ и соединяющих точки $X$ и $Y$. Говорят, что $\rho_G$ есть индуцированная метрика области $G$. Кривая в $M$ называется кратчайшей, если ее длина равна расстоянию между ее концами. Для любых двух достаточно близких точек существует соединяющая их кратчайшая. Многообразие $M$, наделенное внутренней метрикой $\rho$, называется локально плоским, если каждая его точка $X$ имеет окрестность $U$, которая (в метрике $\rho$) изометрична кругу $x^2+y^2<\delta^2$ на обычной евклидовой плоскости. Многообразие $M$ называется многогранником, если можно указать такое конечное его подмножество $H=\{A_1, \ldots, A_k\}$, что множество $M \backslash H$ является локально плоским. Точки $A_1, \ldots, A_k$ называются вершинами многогранника. Метрика $\rho$, заданная на двумерном многообразии $M$, называется многогранной, если эта метрика внутренняя и многообразие $M$, наделенное метрикой $\rho$, является многогранником. Каждой вершине $A \in M$ может быть сопоставлено некоторое число $\theta(A)$, называемое полным углом при вершине. Оно определяется следующим образом. Некоторая окрестность точки $A$ кратчайшими, исходящими из точки $A$, может быть разделена на конечное число областей, каждая из которых (в индуцированной метрике) изометрична плоскому треугольнику. Тогда $\theta(A)$ равно сумме углов этих плоских треугольников в точке $A$. (Легко устанавливается, что эта сумма не зависит от выбора окрестности и ее разбиения.) Всегда $\theta(A)>0$. Величина $\omega(A)=2\pi-\theta(A)$ называется кривизной в вершине $A$. Обозначим через $\omega(E)$ сумму кривизн всех тех вершин многогранника $M$, которые принадлежат множеству $E \subset M$, а через $|\omega|(E)$ — сумму абсолютных величин кривизн этих вершин. Величина $\omega(E)$ называется кривизной, а $|\omega|(E)$ — абсолютной кривизной множества $E$.

Двумерное многообразие $M$ с внутренней метрикой $\rho$ называется двумерным многообразием ограниченной кривизны, если для всякой его точки $A$ можно указать окрестность $U$ и последовательность многогранных метрик $\rho_n$, $n=1, 2, \ldots$, определенных в $U$, сходящуюся равномерно к метрике $\rho$ и такую, что последовательность $|\omega_n|(U)$, $n=1, 2, \ldots$, ограничена ($\omega_n$ — кривизна в метрике $\rho_n$).

Двумерное риманово многообразие, метрика которого определяется линейным элементом $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$, где функции $E$, $F$ и $G$ удовлетворяют требованиям гладкости, необходимым для того, чтобы можно было определить гауссову кривизну в точке (достаточно, чтобы $E$, $F$, $G \in C^2$), является частным случаем двумерного многообразия ограниченной кривизны. Другой частный случай — многообразия с многогранной метрикой.

Основные понятия двумерной римановой геометрии, такие как длина кривой, кривизна кривой, геодезическая, площадь множества, кривизна многообразия, имеют аналог в общем случае двумерных многообразий ограниченной кривизны. (При этом вместо кривизны кривой в ее точках рассматривается интеграл от кривизны по длине дуги — поворот кривой, а вместо кривизны самого многообразия в точке рассматривается функция множества — аналог интеграла от кривизны по множеству.)

А. Д. Александрову принадлежит большое число конкретных результатов теории двумерных многообразий ограниченной кривизны, многие из которых являются новыми и для двумерных римановых многообразий. Им развит аппарат, позволяющий свободно ориентироваться в этой теории. Это — функции множеств (кривизны множеств и односторонние повороты участков кривых) и теоремы сравнения. Другим столь же эффективным аппаратом оказался обобщенный изотермический линейный элемент, введенный для таких пространств учеником А. Д. Александрова Ю. Г. Решетняком. Таким образом, класс двумерных римановых многообразий получил допускающую исследование компактификацию при сохранении структуры многообразия и ограниченности интегральной кривизны. Это позволило А. Д. Александрову и его ученикам дать исчерпывающее решение большого числа экстремальных задач в теории поверхностей. В регулярном случае многие из этих задач просто не имели решений, так как экстремум реализовался на объектах, выходящих из регулярного класса. Примером может служить решенная А. Д. Александровым задача — среди гомеоморфных кругу поверхностей с данным периметром, у которых положительная часть кривизны $\omega^+(S)$ (т. е. верхняя вариация функции множества $\omega$) не превосходит данного числа $\eta > 0$, найти поверхность наибольшей площади. В случае $\eta \geqslant 2\pi$ задача не имеет решения, а в случае $\eta < 2\pi$ ее решением является боковая поверхность прямого кругового конуса, у которого полный угол при вершине конуса равен $2\pi - \eta$. (Если разрезать ее по образующей конуса, то полученная поверхность развертывается в плоскость так, что в результате получается круговой сектор с углом, равным $2\pi - \eta$.) Доказательство этой теоремы в общих чертах таково. Достаточно рассмотреть случай, когда многообразие есть многогранник. Многогранник $S$ с данным периметром и $\omega^+(S) \leqslant \eta < 2\pi$ последовательно преобразуется так, что площадь его возрастает, а кривизна в конечном итоге оказывается сосредоточенной в одной точке. Каждый отдельный шаг преобразования состоит в разрезывании и вклеивании в разрез некоторого многогранника. Аналогичного рода приемы оказываются полезными и в других вопросах геометрии многообразий ограниченной кривизны. В совокупности они и составляют метод разрезывания и склеивания А. Д. Александрова.

Исследованию двумерных многообразий ограниченной кривизны посвящено большое число работ других авторов, в основном учеников А. Д. Александрова. (В частности, вопросы теории многообразий ограниченной кривизны рассматривались Ю. Ф. Борисовым, Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллером, Ю. Г. Решетняком, В. В. Стрельцовым и др.)

Одна из задач, возникших в теории многообразий ограниченной кривизны,— указание классов двумерных поверхностей, определенных естественными условиями, которые по своей внутренней геометрии были бы многообразиями такого рода. В этом плане некоторые важные результаты получены Александром Даниловичем, который доказал, что если поверхность определяется уравнением $z = f(x, y)$, где функция $f$ есть разность двух выпуклых функций, то она есть двумерное многообразие ограниченной кривизны. (Другие классы поверхностей, обладающих тем же свойством, указаны А. В. Погореловым, Ю. Д. Бураго и другими авторами.) Следует сказать, что в изучении внешней геометрии нерегулярных поверхностей с метрикой ограниченной кривизны по А. Д. Александрову имеется много нерешенных вопросов, и в целом эта область исследования далека от завершения. (Этот круг вопросов породил интересное новое направление в теории погруженных многообразий, развитое С. З. Шефелем.)

Теория многообразий ограниченной кривизны, построенная А. Д. Александровым, является двумерной. Задача построения ее многомерного аналога, по-видимому, достаточно трудна. В направлении ее решения наиболее существенное продвижение принадлежит Александру Даниловичу. Частным случаем двумерных многообразий ограниченной кривизны являются многообразия кривизны, ограниченной снизу или сверху некоторым числом $K_0$. (В регулярном случае это римановы многообразия, у которых гауссова кривизна $K(X)$ либо не превосходит $K_0$ в каждой точке $X$, либо для всех $X$ не меньше $K_0$.) Александр Данилович показал, что такие многообразия могут быть описаны системой аксиом, в которой двумерность многообразия не используется. Это позволяет ввести общее понятие метрического пространства односторонне ограниченной кривизны, топология которого удовлетворяет достаточно слабым (с точки зрения дифференциальных геометров) условиям. Такое пространство может даже вообще не быть многообразием. Александром Даниловичем детально исследованы пространства кривизны, не превосходящей $K_0$, где $K_0 < \infty$. Эти работы уже в недавнее время продолжены и развиты молодыми сибирскими геометрами. В частности, ими решена задача об аксиоматическом построении классической римановой геометрии, а именно, показано (И. Г. Николаев и В. Н. Берестовский), что метрическое пространство с внутренней метрикой, являющееся $n$-мерным многообразием, и такое, что в смысле Александрова его кривизна лежит между некоторыми постоянными $K_1$ и $K_2$, представляет собой риманово пространство, метрика которого может быть задана линейным элементом, удовлетворяющим требованиям гладкости, достаточным для того, чтобы могла быть построена вся классическая теория кривизны.

В дифференциальной геометрии и теории выпуклых тел хорошо известны теоремы единственности, устанавливающие равенство (в том или ином смысле) геометрических объектов, удовлетворяющих некоторым условиям. Такого рода результаты были получены в свое время О. Коши, Ж. Лиувиллем и другими выдающимися математиками. Теоремы единственности, как и теоремы существования, занимают большое место в научном творчестве А. Д. Александрова. В частности, этой теме посвящен цикл его работ, выполненных в 1956—1966 гг. Основным инструментом исследования в этих работах Александра Даниловича служили теоремы о решениях дифференциальных уравнений эллиптического типа в сочетании с разного рода соображениями геометрического характера. Чтобы дать представление о данном цикле работ Александра Даниловича, приведем следующую его теорему.

**Теорема А.** *Пусть $S$ и $S_0$ — аналитические замкнутые выпуклые поверхности и $k_1 \geqslant k_2$, $k_{01} \geqslant k_{02}$ — их главные кривизны в точках $x \in S$, $x_0 \in S_0$ с параллельными нормалями. Пусть $f(\xi, \eta, \bar{n})$ — такая функция численных параметров $\xi$, $\eta$ и единичного вектора $\bar{n}$, что при $\xi > \xi'$ и $\eta > \eta'$ $f(\xi, \eta, \bar{n}) > f(\xi', \eta', \bar{n})$. Тогда, если для всякой $x \in S$ $f(k_1, k_2, \bar{n}) = f(k_{01}, k_{02}, \bar{n})$, где $\bar{n}$ — нормаль в точке $x$, то поверхности $S$ и $S_0$ совмещаются параллельным переносом.*

Теорема А в этой формулировке доказана Александром Даниловичем в 1938 г. Естественно было предположить, что требование аналитичности в ней может быть заменено каким-либо более слабым. А. Д. Александровым получен также некоторый аналог теоремы А для выпуклых многогранников — доказательство его основывается на идее, близкой к той, на которой основано доказательство теоремы Коши о равенстве многогранников. Другой естественный вопрос: существует ли какой-либо аналог теоремы А для поверхностей в $n$-мерном пространстве в случае $n > 3$? Этим вопросам посвящены исследования, выполненные Александром Даниловичем в 1956—1966 гг. Конкретно, в отношении теоремы А сначала А. В. Погореловым было доказано, что требование аналитичности поверхностей может быть снижено до четырехкратной дифференцируемости. (Относительно функции $f$ предполагается, что она принадлежит классу $C^1$, причем $\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial \eta} > 0$ всюду в области определения.) В 1956 г. Александр Данилович показал, что (при таких же предположениях относительно $f$) требование аналитичности может быть заменено двукратной дифференцируемостью. Далее, им было показано, что в предположении, что $S$ и $S_0$ — аналитические поверхности, гомеоморфные сфере, от условия выпуклости $S$ можно вообще отказаться. (Это установлено в работе 1966 г.). Александром Даниловичем найдено также большое число теорем для выпуклых поверхностей в $n$-мерном евклидовом пространстве при произвольном $n \geqslant 3$ для поверхностей в общих римановых пространствах и пространствах постоянной кривизны, по своей формулировке аналогичных теореме А. Содержание этих теорем состоит в следующем. Между точками двух поверхностей тем или иным способом устанавливается соответствие. Тогда, если главные кривизны поверхностей в соответствующих точках связаны определенным соотношением, то поверхности равны. (Буквальный перенос теоремы А на многомерный случай, по-видимому, невозможен, хотя некоторое частичное ее обобщение было получено А. Д. Александровым.) В качестве приложения теорем единственности Александр Данилович получает общие теоремы о характеристическом свойстве $(n-1)$-мерной сферы. Именно, если на поверхности $S$, служащей границей тела в $E^n$, $\Phi(k_1, \ldots, k_{n-1}) = \text{const}$, где $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_{n-1}$ — главные кривизны в точке поверхности, а функция $\Phi$ такова, что производные $\frac{\partial \Phi}{\partial k_i}$ непрерывны и имеют один знак для любых $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$, то $S$ является сферой. В частности, замкнутая поверхность постоянной средней кривизны в трехмерном пространстве, не имеющая самопересечений, есть сфера. (На языке физики это означает, что не существует мыльного пузыря, который не имел бы форму шара.)

К вопросам единственности примыкают проблемы оценок изменения объекта при малом изменении однозначно определяющих его характеристик. И здесь А. Д. Александрову принадлежат новые методы и результаты. (Трудная проблема Кон-Фоссена об оценке изменения формы замкнутой выпуклой поверхности при малом изменении ее внутренней метрики была решена учеником Александра Даниловича Ю. А. Волковым.)

А. Д. Александров является создателем нового направления в теории дифференциальных уравнений эллиптического типа — геометрической теории уравнений эллиптического типа.

Приведем очень краткий обзор результатов исследований А. Д. Александрова по дифференциальным уравнениям, выполненных в период с 1956 по 1965 г. Это прежде всего теоремы о существовании обобщенных решений первой краевой задачи для уравнений типа Монжа — Ампера, а именно уравнений вида

$$f(\nabla z, z, x) \operatorname{Det} \left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right\| = h(x), \tag{1}$$

где $f$ и $h$ — неотрицательные функции. Решение ищется в классе выпуклых функций. Это естественно, ибо только на таких функциях уравнение (1) эллиптично.

Уравнение (1) позволяет по каждой выпуклой функции $z$ построить две функции множеств, обозначаемые через $\omega_f(M, z)$ и $\nu(M)$. При этом

$$\nu(M) = \int_M h(x)\, dx,$$

так что $\nu$ определяется функцией $h$. В регулярном случае (а именно, в случае $z \in C^2$)

$$\omega_f(M, z) = \int_M f(\nabla z(x), z(x), x) \operatorname{Det} \left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right\| dx.$$

В общем случае функция $\omega_f(M, z)$ определяется с помощью понятия нормального отображения, которое вводится так. Предположим, что $z = z(x)$ — выпуклая функция, определенная в замкнутой выпуклой области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Вектор $\zeta(x) = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ называется обобщенным градиентом функции $z$ в точке $x_0$, если гиперплоскость $z = \langle \zeta, x - x_0 \rangle + z(x_0)$ является опорной для гиперповерхности $S = \{(x, z) \mid z = z(x)\}$. Если функция $z$ дифференцируема в точке $x_0$, то ее обобщенный градиент в этой точке, разумеется, совпадает с обычным. Сопоставляя каждой точке $x \in \Omega$ все векторы, являющиеся обобщенными градиентами функции $z$ в этой точке, получим некоторое, вообще говоря, многозначное отображение $\varphi$ области $\Omega$ в $\mathbf{R}^n$, которое и называется нормальным отображением. Пусть $E = \varphi(\Omega)$. Для каждой точки $\zeta \in E$ существует точка $(x, z) \in S$ такая, что $\zeta$ есть обобщенный градиент в точке $x$. Полагаем $x = x(\zeta)$, $z = z(\zeta)$. Функция $\omega_f(M, z)$ определяется равенством

$$\omega_f(M, z) = \int\limits_{\varphi(M)} f(\zeta, z(\zeta), x(\zeta))\, d\zeta.$$

Александр Данилович рассматривает задачу: найти выпуклую функцию $z$, принимающую заданные значения на границе $\partial\Omega$, и такую, что функция множеств $\omega_f(M, z)$ совпадает с заранее заданной функцией множеств $\nu(M)$. Если эта функция окажется принадлежащей классу $C^2$, то она, очевидно, будет решением уравнения (1). Александром Даниловичем установлено существование обобщенного решения сформулированной задачи при условии, что $f$ и заданные граничные значения искомого решения удовлетворяют некоторым естественным ограничениям. Мы опускаем здесь детали, отсылая читателя к его работе, опубликованной в Вестнике ЛГУ, 1958 г., № 1. (В дальнейшем А. В. Погорелов доказал, что обобщенные решения А. Д. Александрова являются гладкими, если $f=1$, $z|_{\partial\Omega}=0$ и $h$ — достаточно гладкая положительная функция.)

В 50-х годах Александр Данилович разработал метод оценок сверху и снизу для функций, удовлетворяющих эллиптическим уравнениям или неравенствам 2-го порядка, но не обладающих классической гладкостью (не имеющих производных 2-го порядка в каждой точке, а принадлежащих лишь пространству $W_n^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$). Приведем лишь одну из них, далеко не самую общую, но позволившую далеко продвинуться в изучении квазилинейных и даже некоторого класса сугубо нелинейных задач эллиптического типа. Она имеет вид

$$\max_{x\in\Omega} z(x) \leqslant \max_{x\in\partial\Omega} z(x) + C_1 \operatorname{diam} \Omega e^{C_2|b|_{n,\Omega}} |Lz(x)_-|_{n,\Omega}. \tag{2}$$

Здесь $Lz(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) z_{x_i x_j}(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x) z_{x_i}(x)$; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant 0$ при любом $\xi \in \mathbf{R}^n$; $C_1$ и $C_2$ — постоянные, зависящие только от $n$; $\Omega$ — произвольная ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, а $z \in W_n^2(\Omega)$. Полунорма $|\cdot|_{n,\Omega}$ вычисляется по правилу

$$|v|_{n,\Omega} = \left(\int\limits_{\Omega} |v(x)|^n (\operatorname{Det} a_{ij}(x))^{-1} dx\right)^{1/n},$$

а $v_-(x) = \max\{0, -v(x)\}$. Неравенство (2) замечательно во многих отношениях (в том числе — характером зависимости от $\Omega$), и его чисто аналитическое доказательство представляется маловероятным.

Поясним на простейшем примере основную идею метода А. Д. Александрова доказательства неравенства (2). Пусть $z(x)$ есть решение уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x) = f(x) \tag{3}$$

в области $G$ пространства $\mathbf{R}^n$, где функции $a_{ij}(x)$ таковы, что собственные числа квадратичной формы $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$ лежат в некотором интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \infty$, для всех $x$. Предположим, что область $G$ выпукла, $z(x)=0$ на границе и требуется оценить $\min z(x)$. Пусть $\Gamma_z$ — множество всех точек $(x, y) \in \mathbf{R}^{n+1}$ таких, что $x \in G$, а $y \geqslant z(x)$ (надграфик функции $z$), $V_z$ — выпуклая оболочка $\Gamma_z$. Множество $V_z$ ограничено снизу поверхностью $y = \tilde{z}(x)$. При этом $z(x) \geqslant \tilde{z}(x)$ для всех $x \in G$ и функция $\tilde{z}(x)$ выпукла. Предположим, что функция $z(x)$ достигает минимума в точке $x_0 \in G$. Построим еще выпуклый конус $K$ в $\mathbf{R}^{n+1}$, образованный отрезками, соединяющими точку $(x_0, z(x_0))$ с граничными точками $G$. Если $z(x_0)$ велика по абсолютной величине, то конус $K$ оказывается сильно вытянутым и его опорное сферическое изображение будет велико. С другой стороны, ясно, что опорное изображение $K$ содержится в опорном изображении поверхности $z=\tilde{z}(x)$. Последнее, однако, не может быть слишком большим по следующей причине. При вычислении опорного изображения поверхности $z=\tilde{z}(x)$ достаточно принимать во внимание только те точки, где $\tilde{z}(x)=z(x)$. Эти точки являются точками выпуклости функции $z(x)$, и, значит, в них квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} z_{ij}\xi_i\xi_j$, где $z_{ij}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, неотрицательна. В силу неотрицательности этой формы получаем, что в точках, где $\tilde{z}(x)=z(x)$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}z_{ij} \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} z_{ii} \geqslant n\lambda_1 (\operatorname{Det}\|z_{ij}\|)^{1/n}. \tag{4}$$

Из (4) вытекает, что опорное изображение поверхности $z=\tilde{z}(x)$ не превосходит

$$\frac{1}{(n\lambda_1)^n}\int\limits_G (f(x))^n\,dx. \tag{5}$$

Мы видим, таким образом, что конус $K$ не может быть сколь угодно длинным, ибо площадь его нормального изображения не превосходит величину (5). Нетрудно получить и явную оценку высоты конуса $K$. Это дает оценку для величины $|z(x_0)|=\left|\min\limits_{x\in G} z(x)\right|$. Аналогично оценивается и величина $\max\limits_{x\in G} z(x)$. Для того чтобы все сделанные заключения имели силу, достаточно, чтобы функция $z$ принадлежала классу $W_n^2(G)$, т. е. имела обобщенные вторые производные, суммируемые в степени $n$.

Здесь нет возможности описать все то новое и ценное, что было сделано Александром Даниловичем в работах указанного выше цикла. Многое из этого еще ожидает своего потребителя и, несомненно, несет богатые плоды. Примером тому может служить неравенство (2), способствовавшее прогрессу в исследовании нелинейных эллиптических уравнений (О. А. Ладыженская, Н. В. Крылов, М. В. Сафонов, Н. Н. Уральцева и др.). Его аналоги для параболических операторов, доказанные Н. В. Крыловым, Н. Н. Уральцевой и А. И. Назаровым, стали важным шагом на пути изучения квазилинейных параболических уравнений.

В 70-е годы научные интересы Александра Даниловича связаны главным образом с геометрическими вопросами оснований теории относительности. Начало этим исследованиям было положено в его работе, выполненной еще в 1953 г. (совместно с В. А. Овчинниковой). К теории относительности Александр Данилович регулярно обращается в разные периоды своей жизни. (Продолжению и развитию его идей в этой области посвящены работы учеников А. Д. Александрова — Ю. Ф. Борисова, А. К. Гуца, А. В. Кузьминых, А. В. Левичева, Р. И. Пименова и А. В. Шайденко).

Геометрически пространство-время, т. е. совокупность всех событий, происходящих в физическом мире, можно рассматривать как четырехмерное аффинное пространство, в котором введено отношение порядка $\prec$. Если $x$ и $y$ — две точки этого пространства, то запись $x\prec y$ означает, что событие $x$ предшествует событию $y$ или, иначе, событие $x$ может воздействовать на $y$. Для каждой точки $x$ определено множество $K_x$ — совокупность всех событий, следующих за $x$. В ньютоновской механике $K_x$ — полупространство. В механике теории относительности $K_x$ — прямой круговой конус с вершиной $x$, и конусы $K_x$, соответствующие разным точкам $x$, получаются один из другого параллельными переносами. А. Д. Александровым введено общее понятие кинематики. Кинематика в смысле А. Д. Александрова есть топологическое пространство, в котором введено отношение порядка, должным образом согласованное с его топологией. Задача состоит в описании минимальных условий (аксиом), при которых данная кинематика является кинематикой специальной теории относительности.

А. Д. Александрову принадлежит большой вклад и в теорию функций действительной переменной. Это естественным образом связано с его установкой на исследование нерегулярных геометрических образов, распространение на такие образы некоторых основных концепций дифференциальной геометрии. Один из результатов Александра Даниловича, относящихся к теории функций действительной переменной,— классическая теорема о двукратной дифференцируемости почти всюду выпуклой функции $n$ переменных. Но наиболее значительным его достижением в этой области являются работы по абстрактной теории функций множеств. Исследование вполне аддитивных функций множеств, естественным образом возникающих в теории выпуклых тел, явилось для него стимулом для изучения общих вопросов теории меры в самой абстрактной форме. Основные результаты Александра Даниловича в этой области — во-первых, теорема об общем виде линейного функционала в пространстве $C(X)$ ограниченных непрерывных функций в нормальном топологическом пространстве $X$. (А. Д. Александров рассматривает пространства более общие, чем топологические в классическом смысле.) Согласно теореме Рисса всякий непрерывный линейный функционал в $C([a, b])$ представляется интегралом Стилтьеса. А. А. Марков доказал, что если $X$ — компактное топологическое пространство, то всякий линейный функционал в $C(X)$ представляется интегралом относительно вполне аддитивной функции множеств. Если, однако, пространство $X$ некомпактно, теорема А. А. Маркова неверна. Александр Данилович показал, что если требование полной аддитивности заменить требованием регулярности (эквивалентным ему для случая компактных пространств), то теорема о представимости линейного функционала в $X$ виде интеграла аддитивной функции множеств остается верной и в общем случае. Второе важное достижение А. Д. Александрова в теории функций множеств — построенная им теория слабой сходимости для последовательностей таких функций. Результаты данного цикла работ Александра Даниловича составили содержание его докторской диссертации. Они широко используются в теории вероятностей и функциональном анализе.

Математические работы А. Д. Александрова при всей их глубине, оригинальности и значительности, не исчерпывают его творчества. Философские вопросы математики и теоретической физики постоянно находятся в поле его интересов. Более чем двадцатилетний опыт его размышлений о сущности математики был подытожен в его статье «Математика и диалектика» (Сибирский математический журнал, 1970, № 2). Не случайно преподаватели общественных дисциплин на факультетах точных наук часто рекомендуют студентам читать статьи А. Д. Александрова, а зарубежные специалисты используют их в пропаганде марксистско-ленинской философии.

А. Д. Александрову принадлежат также статьи по философским проблемам теории относительности и квантовой механики. Философские труды и устные выступления Александра Даниловича охватывают чрезвычайно широкий круг вопросов жизни.

Много сил и энергии отдается им воспитанию новых кадров. Общеизвестна научная щедрость Александра Даниловича не только как научного лидера, но и как непосредственного руководителя аспирантов и молодых ученых. Он увлекает их, побуждает к творчеству. Идеи, высказываемые им на лекциях и семинарах, записанные в его рабочих тетрадях, высказанные в личных разговорах, легли в основу многих работ его учеников.

Александр Данилович со свойственной ему отзывчивостью не мог отстраниться от одной из важнейших проблем — создания учебников по геометрии для средних школ. Он привлек к участию в этой работе

А. Л. Вернера и опытного учителя В. А. Рыжика. Вместе с ними им были написаны два пробных учебника по стереометрии, а затем, в 1983 г.— учебник по геометрии для 9—10 классов, принятый для школ и классов с углубленным изучением математики.

С 1981 г. Александр Данилович начал разрабатывать новую структуру учебного курса планиметрии. Этот курс был опубликован им в серии препринтов. В 1984—1986 гг. вышли написанные по этому курсу совместно с А. Л. Вернером и В. А. Рыжиком пробные учебники для 6—8 классов. Эксперимент по всему циклу этих учебников ведется с 1981 г. в Калининском районе (и еще ряде школ) Ленинграда и горячо одобряется передовыми учителями за связь с жизнью, наглядность и ориентацию на активное восприятие.

Хочется сказать, хотя бы коротко, о деятельности Александра Даниловича на посту ректора Ленинградского университета. Начинал он в трудные послевоенные годы. Сумел мобилизовать оставшиеся в университете силы, привлек хороших ученых из других мест, всячески способствовал росту молодых кадров. В результате его двенадцатилетней деятельности ректора университета появились новые научные направления и научные школы, расширилась сеть научных семинаров. Научные кадры, выросшие в тот период, и сегодня являются ведущими наряду с новой научной сменой. К сожалению, А. Д. Александрову не удалось осуществить свою идею сконцентрировать все факультеты университета на Васильевском Острове в примыкающем к главному зданию университета квартале. Он много сделал для этого, но не смог довести до желаемого конца. Александр Данилович имел огромный авторитет и у маститых ученых, и у молодежи. «Он руководил университетом не силой приказа, а моральным авторитетом»,— отметил академик В. И. Смирнов в адресе, написанном по случаю ухода Александра Даниловича с поста ректора. «Александр Данилович — совесть факультета»,— сказал тогда же член-корреспондент АН СССР Д. К. Фаддеев.

И в Новосибирске под влиянием Александра Даниловича выросли новые доктора наук и целая плеяда молодых кандидатов-геометров. Они творчески работают во многих городах Сибири.

А. Д. Александров — член КПСС с 1951 г. Он избирался членом Ленинградского обкома КПСС, депутатом Верховного Совета РСФСР, Ленинградского Совета депутатов трудящихся, вице-президентом общества «Италия — СССР» (он член одной из итальянских академий), членом Научного совета по комплексной проблеме «Философские проблемы современного естествознания», с 1986 г. он — председатель секции математики Ученого методического совета Министерства просвещения РСФСР.

Заслуги А. Д. Александрова перед отечественной наукой неоднократно отмечались правительственными наградами. За исследования по проблеме Вейля он был удостоен в 1942 г. Государственной премии. В 1951 г. его работы отмечены международной премией имени Н. И. Лобачевского. В 1963 г. ему присвоено почетное звание заслуженного деятеля науки и техники РСФСР.

Александру Даниловичу свойственно неукротимое стремление добиваться высших результатов в любом деле, за которое он берется,— как в математике, так и в спорте (он мастер спорта СССР по альпинизму), как в философии, так и в вопросах истории науки (в Ленинградском и Новосибирском университетах он читал курс лекций по истории математики) и во многом другом. Его близкие и друзья, его ученики и товарищи по работе хорошо знают страстный темперамент Александра Даниловича, его постоянную готовность ринуться на борьбу за истину, его преданность истине, готовность поддерживать и защищать ее до конца.

*В. А. Залгаллер, О. А. Ладыженская, Ю. Г. Решетняк*