§ 5. Следствия из основных теорем

Назовем *прямой линией в* M^n геодезическую, любой отрезок которой есть кратчайшая.

Теорема 5. *Если в многообразии* $M^n \in M^n(r_0, 0)$ *существует хотя бы одна прямая линия, то* M^n *изометрично* $M^{n-1} \times R$, *где* $M^{n-1} \in M^{n-1}(r_0, k)$.

Теорема 6. *Если* $M^n \in M^n(r_0, k)$, $k > 0$, *и* $r_0 < \pi/\sqrt{k}$, *то диаметр* M^n *не превосходит* $\pi/\sqrt{k}$ *и равен* $\pi/\sqrt{k}$ *тогда и только тогда, когда* M^n *изометрично* n*-мерной сфере радиуса* $1/\sqrt{k}$.

Теорема 7. *Если* $M^n \in M^n(r_0 k)$, $k > 0$, $r_0 < \pi/\sqrt{k}$, *и существует допустимый треугольник периметра* $2\pi/\sqrt{k}$, *то* M^n *изометрично* n*-мерной сфере радиуса* $1/\sqrt{k}$.

Теорема 8. *Если открытое многообразие* M^n *принадлежит* $M^n(r_0, 0)$, *то любая орисфера есть выпуклая поверхность.*

Теорема 9. *Если открытое многообразие* M^n *принадлежит* $M^n(r_0, 0^+)$, *то оно гомеоморфно* n*-мерному евклидову пространству.*

Доказательство теорем 5—9 проводится аналогично доказательству соответствующих теорем для многообразий, секционная кривизна которых ограничена снизу либо нулем, либо числом k, $k > 0$ (см., например, [6—8]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров А. Д.** Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
2. **Топоногов В. А.** Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу // Успехи мат. наук.— 1959.— Т. 14, № 1.— С. 87—130.
3. **Постников М. М.** Вариационная теория геодезических.— М.: Наука, 1965.
4. **Степанов В. В.** Курс дифференциальных уравнений.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
5. **Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.** Курс вариационного исчисления.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
6. **Топоногов В. А.** Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу положительными числами // Докл. АН СССР.— 1958.— Т. 120, № 3.— С. 719—721.
7. **Топоногов В. А.** Римановы пространства, содержащие прямые линии // Докл. АН СССР.— 1959.— Т. 127, № 5.— С. 977—979.
8. **Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.** Риманова геометрия «в целом»: Пер. с нем.— М.: Мир, 1971.

О ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ — ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМАХ ДЛИНЫ ДУГИ

Ю. А. АМИНОВ

В теории кривых имеется большой пробел, связанный с отсутствием эффективных условий замкнутости кривой, выраженных через кривизну и кручение. Обычно условие замкнутости кривых и подмногообразий в формулировках теорем выступает как изначальное. Но так как кривая в E^3 определяется своими кривизной $\mathbf{k}$ и кручением $\varkappa$ однозначно с точностью до движения, то естествен вопрос о необходимых и достаточных условиях на кривизну и кручение, при которых соответствующая кривая будет замкнута. Этот вопрос ставился Н. В. Ефимовым, В. Фенхелем [1], С. С. Черном и другими геометрами. Можно дать на него неэффективный ответ, записав решение линейной системы уравнений Френе по общей теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в виде суммы ряда n-кратных интегралов от функций, определяемых $\mathbf{k}$ и $\varkappa$, кратность которых неограниченно растет с номером элемента ряда (см. [2, 3]). Для конкретно взятых функций $\mathbf{k}(s)$ и $\varkappa(s)$ ответить на вопрос — будет ли кривая замкнута — фактически невозможно.

Нам кажется, что решение задачи находится на путях выделения отдельных, достаточно богатых классов кривых, для которых условия замкнутости будут указаны в явном эффективном виде. В работе [4] мы рассмотрели условия замкнутости для ломаных и установили алгоритм их получения. В этой работе мы рассмотрим класс кривых в E^3, у которых каждая компонента радиус-вектора $r(s)$ является тригонометрическим полиномом от длины дуги. Такие кривые будем называть *тригонометрическими полиномами длины дуги.* Радиус-вектор запишем в виде

$$r(s) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k} c_k e^{iks}, \quad k \neq 0, \tag{1}$$

где c_k — постоянные комплексные векторы, причем, $c_{-k} = -\bar{c}_k$. Эти кривые заведомо замкнуты, поэтому общий вопрос об условиях замкнутости в этом случае может быть переформулирован как вопрос о том, какими функциями должны быть кривизна и кручение кривой (1). Вместо кривизны $\mathbf{k}$ и кручения $\varkappa$ удобно рассматривать функции $\mathbf{k}^2(s)$ и $\varkappa\mathbf{k}^2(s)$. Нетрудно установить, что если $r(s)$ — тригонометрический полином степени n, то функция $\mathbf{k}^2$ — тригонометрический полином степени $2(n-1)$, а $\varkappa\mathbf{k}^2$ — полином степени $3(n-1)$.

Запишем разложения

$$\mathbf{k}^2 = \sum_{p=-2(n-1)}^{2(n-1)} \alpha_p e^{ips}, \quad \varkappa\mathbf{k}^2 = \sum_{p=-3(n-1)}^{3(n-1)} \beta_p e^{ips}.$$

Коэффициенты этих разложений зависимы. Действительно, имеет место

Теорема 1. *Если $r(s)$ — тригонометрический полином длины дуги s степени n, то между коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2(n-1)}$ имеется три алгебраических соотношения*

$$F_j(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2(n-1)}) = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

и $2(n-1)$ алгебраических соотношений, содержащих и сопряженные величины $\bar{\alpha}_p$:

$$\psi_j(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2(n-1)}, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{2(n-1)}) = 0, \quad j = 1, \ldots, 2(n-1).$$

Каждая величина β_p связана алгебраическим соотношением с коэффициентами α_p:

$$\theta_p(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2(n-1)}, \beta_p) = 0, \quad p = 0, \ldots, 3(n-1).$$

Два последних коэффициента β_p можно выразить явно через α_p:

$$\beta_{3(n-1)} = i\sqrt{\alpha_{2(n-1)}}\,\alpha_{2(n-1)}, \quad \beta_{3n-4} = \frac{3}{2} i \sqrt{\alpha_{2(n-1)}}\,\alpha_{2n-3}.$$

В этой теореме F_j, ψ_j и θ_p — некоторые полиномы с целыми коэффициентами; чертой сверху здесь и далее обозначаются комплексно сопряженные величины.

Легко установить, что единственной плоской кривой, являющейся тригонометрическим полиномом длины дуги, будет окружность. С увеличением размерности пространства множество таких кривых увеличивается, причем каждая такая кривая задается точкой алгебраического многообразия. Степени полиномов $\mathbf{k}^2$ и $\varkappa\mathbf{k}^2$, соответствующих некоторым кривым в E^3 (тригонометрическим полиномам длины дуги), не произвольны.

Теорема 2. *Степень полинома $\mathbf{k}^2$ четна, степень полинома $\varkappa\mathbf{k}^2$ кратна трем, причем если степень $\varkappa\mathbf{k}^2$ равна $3l$, то степень $\mathbf{k}^2$ равна $2l$.*

Естественно рассмотреть кривые — тригонометрические полиномы n-й степени от длины дуги, у которых полиномы $\mathbf{k}^2$ или $\varkappa\mathbf{k}^2$ имеют меньшую, чем обычно, степень. Оказывается, что если $2k$ последних коэффициентов $\mathbf{k}^2$ равны нулю, то $2k$ последних векторов c_p имеют определенный вид. Будем говорить, что два комплексных вектора c и d *параллель-*

ны, если найдется комплексное число λ такое, что $c=\lambda d$. Каждый комплексный вектор $c=a+ib$, действительная a и мнимая b части которого отличны от нуля, определяет плоскость в E^3, проходящую через векторы a и b. Будем говорить, что это — *плоскость вектора c*.

Мы устанавливаем: *если* $\alpha_{2(n-1)}=0, \ldots, \alpha_{2(n-k)}=0$, *то векторы* $c_n, \ldots, c_{n-k}, c_j-(c_je)e$, $j=n-k-1, \ldots, n-2k$ параллельны (здесь e — единичный вектор, ортогональный к плоскости вектора c_n).

Теорема 3. *Пусть $\gamma\subset E^3$ — тригонометрический полином длины дуги — имеет постоянную кривизну k^2. Тогда γ — дуга окружности.*

Теорема 4. *Если кривая $\gamma\subset E^3$ — тригонометрический полином длины дуги — имеет постоянное кручение, то γ — дуга окружности.*

Условие $\gamma\subset E^3$ существенно, так как в четномерных пространствах существуют замкнутые кривые с постоянными кривизнами, которые записываются в виде тригонометрических полиномов от длины дуги.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Так как s — длина дуги, то векторы c_k не произвольны: они должны удовлетворять системе алгебраических уравнений, которые получаются из условия $|r_s'|^2=1$. Имеем

$$r_s'=i\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{iks},$$

$$|r_s'|^2=-\sum_{p=-2n}^{2n}e^{ips}\sum_{k+l=p}(c_kc_l).$$

Коэффициенты при e^{ips} для $p=1, \ldots, 2n$ должны равняться нулю, а свободный коэффициент — единице. Следовательно, векторы c_k должны удовлетворять системе уравнений

$$\sum_{k=p-n}^{n}(c_kc_{p-k})=0,\ p=1,\ \ldots,\ 2n,$$

$$2\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2=1.$$

Однородные уравнения этой системы запишем в развернутом виде

$$\begin{aligned}&c_n^2=0,\\&(c_nc_{n-1})=0,\\&2(c_nc_{n-2})+c_{n-1}^2=0,\\&(c_nc_{n-3})+(c_{n-1}c_{n-2})=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\tag{2}$$

Найдем выражения k^2 и $\varkappa\mathrm{k}^2$. Имеем

$$r_{ss}''=-\sum_{k=-n}^{n}c_kke^{iks}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{k}^2=\sum_{p=-n}^{2n}e^{ips}\sum_{k+l=p}(c_kc_l)\,kl=\sum_{p=-2n}^{2n}\alpha_pe^{ips}.$$

В силу системы (2) $\alpha_{2n}=c_n^2n^2=0$, $\alpha_{2n-1}=2(c_nc_{n-1})=0$. Поэтому k^2 — тригонометрический полином степени $2(n-1)$. Далее, имеем

$$\varkappa\mathrm{k}^2=(r_s'r_{ss}''r_{sss}''')=\sum_{k,l,m=-n}^{n}(c_kc_lc_m)\,lm^2e^{i(k+l+m)s}=\sum_{p=-3n}^{3n}\beta_pe^{ips},$$

где $(c_kc_lc_m)$ — смешанное произведение векторов c_k, c_l, c_m (т. е. определитель, строчки которого составлены из координат этих векторов). Так как при равных значениях двух индексов определитель $(c_k c_l c_m)$ равен нулю, то $\beta_{3n} = \beta_{3n-1} = \beta_{3n-2} = 0$. Поэтому, если $r(s)$ — тригонометрический полином степени n, то $\varkappa \mathbf{k}^2$ — тригонометрический полином степени $3(n-1)$. Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в E^3. Разложим векторы c_k по этому базису: $c_k = f_k e_1 + \psi_k e_2 + \varphi_k e_3$, где f_k, ψ_k и φ_k — комплексные числа. Вектор c_n представим в виде $c_n = a + ib$, где a и b — действительные векторы. Так как $c_n^2 = 0$, то $a^2 = b^2$ и $(ab) = 0$. Обозначим $|a| = \rho$. Направим e_1 по вектору a, e_2 — по вектору b. Тогда $c_n = \rho(e_1 + ie_2)$. В дальнейшем будем предполагать, что $\rho \neq 0$. Используя уравнение $(c_n c_{n-1}) = 0$, получим представление для c_{n-1}:

$$c_{n-1} = f_{n-1} e_1 + i f_{n-1} e_2 + \varphi_{n-1} e_3.$$

При таком выборе векторов c_n и c_{n-1} первые два уравнения системы (2) выполнены. Оставшиеся уравнения запишем в виде системы

$$\begin{aligned} &\rho(f_{n-2} + i\psi_{n-2}) + \varphi_{n-1}^2 = 0, \\ &\rho(f_{n-3} + i\psi_{n-3}) + f_{n-1}(f_{n-2} + i\psi_{n-2}) + \varphi_{n-1}\varphi_{n-2} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &2\rho \bar{f}_{n-1} + f_{n-1}(\bar{f}_{n-2} + i\bar{\psi}_{n-2}) + \varphi_{n-1}\bar{\varphi}_{n-2} + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Эта система состоит из $2(n-1)$ уравнений. В качестве неизвестных в нее входят комплексные числа ρ, f_{n-1}, φ_{n-1}, f_{n-2}, ψ_{n-2}, ..., f_1, ψ_1, φ_1 и комплексно-сопряженные к ним. Примем набор чисел ρ, f_{n-1}, ..., $\bar{f}_{n-1}$, ..., $\bar{\varphi}_1$ за координаты x_i в комплексном пространстве $\mathbf{C}^N$, где $N = 6n - 7$. Присоединим к (3) систему, полученную операцией сопряжения от левых частей. Получим систему, состоящую из $m = 4n - 6$ однородных билинейных относительно x_i уравнений. Эти уравнения определяют в $\mathbf{C}^N$ алгебраическое многообразие размерности $r = 2n - 3$. Присоединим теперь еще одно неоднородное уравнение

$$2 \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = 1.$$

Тогда в пересечении получим алгебраическое многообразие размерности $2n - 4$. Обозначим его через $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим теперь коэффициенты α_p разложения $\mathbf{k}^2$ и β_p разложения $\varkappa\mathbf{k}^2$. Величины α_p являются полиномами второй степени по x_i, а β_p — полиномами третьей степени. Аналогичное утверждение имеет место и относительно сопряженных к ним величин $\bar{\alpha}_p$ и $\bar{\beta}_p$.

В алгебраической геометрии известна теорема: *если алгебраическое многообразие $\mathfrak{M}$ имеет размерность r, то любые $r+1$ рациональных функций на многообразии будут алгебраически зависимы.* Это означает, что для любых рациональных функций $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r+1}$ существует алгебраическое соотношение вида $F(\gamma_1, \ldots, \gamma_{r+1}) = 0$, где F — некоторый многочлен от $n+1$ переменных с коэффициентами из некоторого конечного расширения множества, которому принадлежат коэффициенты всех уравнений, определяющих алгебраическое многообразие $\mathfrak{M}$. В нашем случае эти коэффициенты — целые числа, $r = 2n - 4$. Следовательно, $r+1$ функций $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-5}, \alpha_k$, где k равно одному из чисел $2n-4$, $2n-3$, $2n-2$, связаны алгебраической зависимостью. Таким образом,

$$F_i(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2(n-1)}) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Кроме того, каждая сопряженная величина $\bar{\alpha}_p$, $p > 1$, связана алгебраической зависимостью с функциями $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2(n-1)}$, а именно:

$$\psi_p(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2(n-1)}, \bar{\alpha}_p) = 0, \quad p = 1, \ldots, 2(n-1).$$

Аналогично получаем, что каждая функция β_p связана алгебраической зависимостью с α_p:

$$\theta_p(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2(n-1)}, \beta_p) = 0, \quad p = 0, \ldots, 3(n-1).$$

Найдем теперь выражение последних двух коэффициентов $\beta_{3(n-1)}$ и β_{3n-4} через α_p. По определению,

$$\beta_p = \sum_{k+l+m=p} (c_k c_l c_m)\, lm^2,$$

где целые числа k, l, m берутся из интервала $[-n, n] \setminus \{0\}$. Числу p могут соответствовать много разложений в виде суммы $k+l+m$. Пусть k, l и m выбраны. В сумму войдут однотипные слагаемые, соответствующие различным перестановкам чисел k, l и m. Определитель $(c_k c_l c_m)$ у них будет общий с точностью до знака. Сумму всех коэффициентов при этом определителе обозначим через T_{klm}. Имеем $T_{klm} = lm^2 + mk^2 + kl^2 - ml^2 - km^2 - lk^2 = (k-l)(l-m)(m-k)$. В дальнейшем мы всегда можем предполагать, что в разложении $p = k+l+m$ выполняются неравенства $k > l > m \geqslant -n$. Числа $3n-3$ и $3n-4$ имеют единственное разложение

$$3n-3 = n + (n-1) + (n-2),$$
$$3n-4 = n + (n-1) + (n-3).$$

Введем обозначение для определителя $(c_k c_l c_m) = \Delta(k, l, m)$. Имеем

$$\Delta(n, n-1, n-2) = \begin{vmatrix} \rho & i\rho & 0 \\ f_{n-1} & if_{n-1} & \varphi_{n-1} \\ f_{n-2} & \psi_{n-2} & \varphi_{n-2} \end{vmatrix} = i\rho\varphi_{n-1}(f_{n-2} + i\psi_{n-2}).$$

Коэффициент при этом определителе $T_{n,\, n-1,\, n-2}$ равен -2. Следовательно, $\beta_{3(n-1)} = -2i\rho\varphi_{n-1}(f_{n-2} + i\psi_{n-2})$. Уравнение из системы (2), полученное приравниванием к нулю коэффициента при e^{ips} в $|r_s'|^2$ обозначим через $L_p = 0$. Запишем уравнение $L_{2(n-1)} = 0$ и коэффициент $\alpha_{2(n-1)}$:

$$2(c_n c_{n-2}) + c_{n-1}^2 = 0,$$
$$2n(n-2)(c_n c_{n-2}) + (n-1)^2 c_{n-1}^2 = \alpha_{2(n-1)}.$$

С помощью первого уравнения получаем два выражения для коэффициента $\alpha_{2(n-1)}$:

$$\alpha_{2(n-1)} = \varphi_{n-1}^2, \quad \alpha_{2(n-1)} = -2\rho(f_{n-2} + i\psi_{n-2}).$$

Следовательно, $\beta_{3(n-1)} = i(\alpha_{2(n-1)})^{3/2}$. Далее,

$$\Delta(n, n-1, n-3) = \begin{vmatrix} \rho & i\rho & 0 \\ f_{n-1} & if_{n-1} & \varphi_{n-1} \\ f_{n-3} & \psi_{n-3} & \varphi_{n-3} \end{vmatrix} = i\rho\varphi_{n-1}(f_{n-3} + i\psi_{n-3}).$$

Кроме того, $T_{n,\, n-1,\, n-3} = -6$. Поэтому $\beta_{3n-4} = -6i\rho\varphi_{n-1}(f_{n-3} + i\psi_{n-3})$. Запишем уравнение $L_{2n-3} = 0$ и коэффициент α_{2n-3}:

$$(c_n c_{n-3}) + (c_{n-1} c_{n-2}) = 0,$$
$$2[n(n-3)(c_n c_{n-3}) + (n-1)(n-2)(c_{n-1} c_{n-2})] = \alpha_{2n-3}.$$

Поэтому $\alpha_{2n-3} = -4\rho(f_{n-3} + i\psi_{n-3})$. Используя это выражение и ранее полученное соотношение $\varphi_{n-1} = \sqrt{\alpha_{2(n-1)}}$, запишем $\beta_{3n-4} = i\,\frac{3}{2}\sqrt{\alpha_{2(n-1)}}\,\alpha_{2n-3}$. Оба полученных выражения для β_p однородны в следующем смысле. Припишем каждому коэффициенту β_p и α_p степень однородности p. Тогда соотношение для $\beta_{3(n-1)}$ имеет степень однородности $3(n-1)$, а для β_{3n-4} — $3n-4$.

§ 2. Доказательства теорем 2, 3

Доказательство теоремы 2 о степенях полиномов k^2 и $\varkappa\mathrm{k}^2$ вытекает, по существу, из доказательства теорем 3 и 4. Докажем теорему 3. Имеем

$$c_n = \rho(e_1 + ie_2),$$
$$c_{n-1} = f_{n-1}(e_1 + ie_2) + \varphi_{n-1} e_3.$$

Если $k^2 = \text{const}$, то $\alpha_i = 0$ при $i \geqslant 1$. Запишем уравнения $L_{2(n-1)} = 0$ и $\alpha_{2(n-1)} = 0$ в виде

$$2(c_n c_{n-2}) + c_{n-1}^2 = 0,$$
$$2(c_n c_{n-2})\, n(n-2) + c_{n-1}^2 (n-1)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $(c_n c_{n-2}) = 0$, $c_{n-1}^2 = 0$. Можем записать:

$$c_n = \rho(e_1 + ie_2),$$
$$c_{n-1} = f_{n-1}(e_1 + ie_2),$$
$$c_{n-2} = f_{n-2}(e_1 + ie_2) + \varphi_{n-2} e_3.$$

Далее рассмотрим уравнение $L_{2n-3} = 0$, т. е.

$$(c_n c_{n-3}) + (c_{n-1} c_{n-2}) = 0.$$

Так как $(c_{n-1} c_{n-2}) = 0$, то $(c_n c_{n-3}) = 0$. Уравнение $\alpha_{2n-3} = 0$ выполнено автоматически. Имеем

$$c_{n-2} = f_{n-2} e_1 + i f_{n-2} e_2 + \varphi_{n-2} e_3,$$
$$c_{n-3} = f_{n-3} e_1 + i f_{n-3} e_2 + \varphi_{n-3} e_3.$$

Доказательство проведем по индукции. Допустим, что при некотором k имеем следующее представление векторов c_p:

$$c_n = \rho(e_1 + ie_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{n-k} = f_{n-k}(e_1 + ie_2),$$
$$c_{n-k-1} = f_{n-k-1}(e_1 + ie_2) + \varphi_{n-k-1} e_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{n-2k} = f_{n-2k}(e_1 + ie_2) + \varphi_{n-2k} e_3.$$

Докажем, что такое же представление для векторов c_p будет справедливо и при $k+1$. Уравнение $L_{2(n-k)-1} = 0$ имеет вид

$$(c_n c_{n-2k-1}) + (c_{n-1} c_{n-2k}) + \ldots + (c_{n-k} c_{n-k-1}) = 0.$$

Так как $(c_{n-i} c_{n-2k+i-1}) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, то $(c_n c_{n-2k-1}) = 0$. Поэтому

$$c_{n-2k-1} = f_{n-2k-1} e_1 + i f_{n-2k-1} e_2 + \varphi_{n-2k-1} e_3.$$

Уравнение $\alpha_{2(n-k)-1} = 0$ выполнено автоматически. Теперь рассмотрим систему $L_{2(n-k-1)} = 0$, $\alpha_{2(n-k-1)} = 0$. Первое уравнение

$$2[(c_n c_{n-2k-2}) + (c_{n-1} c_{n-2k-1}) + \ldots + (c_{n-k} c_{n-k-2})] + c_{n-k-1}^2 = 0,$$

используя вид векторов c_j, можно переписать так: $2(c_n c_{n-2k-2}) + c_{n-k-1}^2 = 0$. Уравнение $\alpha_{2(n-k-1)} = 0$ имеет вид

$$2(c_n c_{n-2k-2})\, n(n-2k-2) + c_{n-k-1}^2 (n-k-1)^2 = 0.$$

Следовательно, $(c_n c_{n-2k-2}) = 0$, $c_{n-k-1}^2 = 0$. Итак,

$$c_{n-(k+1)} = f_{n-k-1}(e_1 + ie_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{n-2(k+1)} = f_{n-2(k+1)}(e_1 + ie_2) + \varphi_{n-2(k+1)} e_3.$$

Поэтому наше индуктивное предположение выполнено и для следующего шага.

Допустим, что $n = 2m + 1$ — нечетное число. Тогда при $k = m$ получим $n - 2k = 1$. Запишем выражения векторов c_p:

$$c_n = \rho(e_1 + ie_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{n-m} = f_{n-m}(e_1 + ie_2),$$
$$c_{n-m-1} = f_{n-m-1}(e_1 + ie_2) + \varphi_{n-m-1} e_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_1 = f_1(e_1 + ie_2) + \varphi_1 e_3.$$

Используем уравнения $L_{n-1}=0$ и $\alpha_{n-1}=0$. Первое из них

$$2\left[-(c_n\bar{c}_1)+(c_{n-2}c_1)+\ldots+(c_{n-m}c_{m-1})\right]+c_m^2=0$$

ввиду указанного выражения векторов c_k может быть переписано так: $-2(c_n\bar{c}_1)+c_m^2=0$. Из уравнения $\alpha_{n-1}=0$ получаем $2(c_n\bar{c}_1)n+c_m^2m^2=0$. Следовательно, $(c_n\bar{c}_1)=0$, $c_m^2=0$. Это означает, что $f_1=0$, $\varphi_{n-m-1}=0$. Уравнение $L_{n-2}=0$ имеет вид

$$-(c_n\bar{c}_2)-(c_{n-1}\bar{c}_1)+(c_{n-3}c_1)+\ldots+(c_mc_{m-1})=0.$$

Так как все входящие в левую часть скалярные произведения равны нулю, кроме $(c_n\bar{c}_2)$, то и $(c_n\bar{c}_2)=0$, поэтому $f_2=0$. Продолжая процесс, получим, что $f_i=0$ и $\varphi_j=0$. Теорема 3 при n нечетном доказана.

Пусть n — четное, $n=2m$; $k=m-1$, тогда $n-2k=2$, $n-k=m+1$. Запишем выражение векторов c_p:

$$\begin{aligned}
&c_n=\rho(e_1+ie_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{m+1}=f_{m+1}(e_1+ie_2),\\
&c_m=f_m(e_1+ie_2)+\varphi_me_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_2=f_2(e_1+ie_2)+\varphi_2e_3.
\end{aligned}$$

Используем уравнение $L_{n+1}=0$ в виде

$$(c_nc_1)+(c_{n-1}c_2)+\ldots+(c_{m+1}c_m)=0.$$

Отсюда следует, что $(c_nc_1)=0$, т. е. $c_1=f_1(e_1+ie_2)+\varphi_1e_3$. Далее рассмотрим уравнение $L_n=0$, т. е.

$$2\left[(c_{n-1}c_1)+\ldots+(c_{m+1}c_{m-1})\right]+c_m^2=0.$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю, поэтому $c_m^2=0$, т. е. $\varphi_m=0$. Далее процесс уничтожения f_j и φ_j проводится, как и при нечетном n. Теорема доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 4

Так как $\mathbf{k}^2$ — тригонометрический полином степени $2(n-1)$, то в разложении функции $\varkappa\mathbf{k}^2$ имеем $\beta_{3(n-1)}=\ldots=\beta_{2(n-1)+1}=0$. Поскольку имеем единственное разложение $3(n-1)=n+(n-1)+(n-2)$, коэффициент $\beta_{3(n-1)}$ с точностью до числового множителя равен определителю

$$\Delta(n,n-1,n-2)=\begin{vmatrix}\rho & i\rho & 0\\ f_{n-1} & if_{n-1} & \varphi_{n-1}\\ f_{n-2} & \psi_{n-2} & \varphi_{n-2}\end{vmatrix}=2i\rho\varphi_{n-1}(f_{n-2}+i\psi_{n-2}).$$

Из уравнения $L_{2(n-1)}=0$, т. е.

$$2(c_nc_{n-2})+c_{n-1}^2=0,$$

и условия $\beta_{3(n-1)}=0$ следует, что $(c_nc_{n-2})=0$, т. е. $\psi_{n-2}=if_{n-2}$, $\varphi_{n-1}=0$. Заметим, что $\alpha_{2(n-1)}=0$. Запишем вид векторов c_k:

$$\begin{aligned}
&c_n=\rho(e_1+ie_2),\\
&c_{n-1}=f_{n-1}(e_1+ie_2),\\
&c_{n-2}=f_{n-2}(e_1+ie_2)+\varphi_{n-2}e_3.
\end{aligned}$$

Далее используем уравнение $L_{2n-3}=0$, т. е.

$$(c_nc_{n-3})+(c_{n-1}c_{n-2})=0.$$

Так как $(c_{n-1}c_{n-2})=0$, то $(c_nc_{n-3})=0$. Поэтому

$$c_{n-3}=f_{n-3}(e_1+ie_2)+\varphi_{n-3}e_3.$$

Рассмотрим коэффициенты β_{3n-4} и β_{3n-5}. Оказывается, они равны нулю автоматически в силу полученного вида векторов c_k. Имеем $3n-4=n+(n-1)+(n-3)$. Определитель $\Delta(n,\ n-1,\ n-3)$ равен нулю, так как векторы c_n и c_{n-1} пропорциональны. Следовательно, $\beta_{3n-4}=0$. Далее, $3n-5=n+(n-1)+(n-4)=n+(n-2)+(n-3)$. Для соответствующих этим разложениям определителей имеем

$$\Delta(n,\ n-1,\ n-4)=0,$$

$$\Delta(n,\ n-2,\ n-3)=\begin{vmatrix} \rho & i\rho & 0 \\ f_{n-2} & if_{n-2} & \varphi_{n-2} \\ f_{n-3} & if_{n-3} & \varphi_{n-3}\end{vmatrix}=0.$$

Поэтому $\beta_{3n-5}=0$. Рассмотрим коэффициент $\beta_{3(n-2)}$. Запишем разложение $3n-6=n+(n-1)+(n-5)=n+(n-2)+(n-4)=(n-1)+(n-2)+(n-3)$. Очевидно, $\Delta(n,\ n-1,\ n-5)=\Delta(n-1,\ n-2,\ n-3)=0$. Запишем определитель для третьего разложения:

$$\Delta(n,\ n-2,\ n-4)=\begin{vmatrix} \rho & i\rho & 0 \\ f_{n-2} & if_{n-2} & \varphi_{n-2} \\ f_{n-4} & \psi_{n-4} & \varphi_{n-4}\end{vmatrix}=i\rho\varphi_{n-2}(f_{n-4}+i\psi_{n-4}).$$

Используем уравнение $L_{2(n-2)}=0$, т. е.

$$2[(c_nc_{n-4})+(c_{n-1}c_{n-3})]+c_{n-2}^2=0.$$

Заметим, что $(c_{n-1}c_{n-3})=0$. Из этого уравнения и условия $\beta_{3(n-2)}=0$ получаем, что $(c_nc_{n-4})=0$, $c_{n-2}=0$, т. е. $\psi_{n-4}=if_{n-4}$, $\varphi_{n-2}=0$. Одновременно получим $\alpha_{2(n-2)}=0$. Следовательно,

$$c_{n-4}=f_{n-4}(e_1+ie_2)+\varphi_{n-4}e_3.$$

Запишем уравнение $L_{2n-5}=0$, т. е.

$$(c_nc_{n-5})+(c_{n-1}c_{n-4})+(c_{n-2}c_{n-3})=0.$$

Так как $(c_{n-1}c_{n-4})=(c_{n-2}c_{n-3})=0$, то $(c_nc_{n-5})=0$. Значит,

$$c_{n-5}=f_{n-5}(e_1+ie_2)+\varphi_{n-5}e_3.$$

Коэффициенты β_{3n-7} и β_{3n-8} равны нулю автоматически ввиду выражений для векторов c_k. Дальнейшее доказательство проведем по индукции. Допустим, мы установили, что для некоторого k векторы c_p имеют вид

$$\begin{aligned} &c_n=\rho(e_1+ie_2),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &c_{n-k}=f_{n-k}(e_1+ie_2)+\varphi_{n-k}e_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &c_{n-2k+1}=f_{n-2k+1}(e_1+ie_2)+\varphi_{n-2k+1}e_3,\end{aligned}\tag{4}$$

причем все векторы $c_n,\ \ldots,\ c_{n-k+1}$ пропорциональны. Докажем, что такое же представление для векторов c_p будет справедливо и при $k+1$. Для этого надо показать, что $\psi_{n-2k}=if_{n-2k}$, $\psi_{n-2k-1}=if_{n-2k-1}$, $\varphi_{n-k}=0$. Рассмотрим коэффициент β_{3n-3k}. Каждое число p разложим в сумму ненулевых целых чисел $i,\ j,\ l$ таких, что $i>j>l\geqslant -n$. Разложения с одним и тем же числом i выпишем в одной строчке. В первой строчке выпишем разложения, у которых первое число есть n, во второй — $n-1$ и т. д. В строчке разложения упорядочим члены по убыванию j. Имеем $3(n-k)=n+(n-1)+(n-3k+1)=\ldots=\overline{n+(n-k)+(n-2k)}=$ $=(n-1)+(n-2)+(n-3k+3)=\ldots=(n-2)+(n-3)+(n-3k+5)=\ldots=(n-k+1)+(n-k)+(n-k-1)$. Заметим, что первое число разложения числа $3(n-k)$ не может быть меньше $n-k+1$. Действительно, иначе мы получили бы в силу предположения $i>j>l$, что разложение имеет вид $(n-k)+(n-k-1)+(n-k-2)$, а это число меньше $3(n-k)$. Поэтому последняя строчка в выписанной системе разложений действительно имеет указанный вид.

Хотя разложений числа $3(n-k)$ много, но, оказывается, только одно (стоящее в первой строчке) соответствует определителю, вообще говоря, отличному от нуля.

Лемма. *Если векторы c_p имеют вид (4), то для всех разложений числа $3(n-k)$ в сумму $i+j+l$, кроме разложения $n+(n-k)+(n-2k)$, стоящего в первой строке, имеем $\Delta(i, j, l)=0$.*

Действительно, определитель $\Delta(n, j, l)$, у которого индексы соответствуют разложению из первой строки, стоящему до подчеркнутого разложения, равен нулю, так как c_n и c_j — пропорциональные векторы. Далее, если это разложение стоит после подчеркнутого, то

$$\Delta(n, j, l)=\begin{vmatrix} \rho & i\rho & 0 \\ f_j & if_j & \varphi_j \\ f_l & if_l & \varphi_l \end{vmatrix}=0.$$

Для разложения во второй строчке имеем

$$\Delta(n-1, j, l)=\begin{vmatrix} f_{n-1} & if_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_j \\ 0 & 0 & \varphi_l \end{vmatrix}=0.$$

Аналогично устанавливается, что все остальные строчки дают $\Delta(i, j, l)=0$. Запишем определитель, соответствующий подчеркнутому разложению в первой строчке,

$$\Delta(n, n-k, n-2k)=\begin{vmatrix} \rho & i\rho & 0 \\ f_{n-k} & if_{n-k} & \varphi_{n-k} \\ f_{n-2k} & \psi_{n-2k} & \varphi_{n-2k} \end{vmatrix}=i\rho\varphi_{n-k}(f_{n-2k}+i\psi_{n-2k})$$

и уравнение $L_{2(n-k)}=0$, т. е.

$$2[(c_nc_{n-2k})+(c_{n-1}c_{n-2k+1})+\ldots+]+c_{n-k}^2=0.$$

Из вида векторов c_j следует, что $(c_{n-1}c_{n-2k+1})=0, \ldots$. Тогда уравнение $L_{2(n-k)}=0$ записывается так:

$$2(c_nc_{n-2k})+c_{n-k}^2=0.$$

Из этого уравнения и условия $\beta_{3(n-k)}=0$ следует, что $(c_nc_{n-2k})=0$, $c_{n-k}^2=0$, $\varphi_{n-k}=0$,

$$c_{n-2k}=f_{n-2k}(e_1+ie_2)+\varphi_{n-2k}e_3.$$

Запишем уравнение $L_{2(n-k)-1}=0$:

$$(c_nc_{n-2k-1})+(c_{n-1}c_{n-2k})+\ldots+(c_{n-k}c_{n-k-1})=0.$$

Так как $(c_{n-1}c_{n-2k})=0, \ldots, (c_{n-k}c_{n-k-1})=0$, то $(c_nc_{n-2k-1})=0$. Следовательно,

$$c_{n-2k-1}=f_{n-2k-1}(e_1+ie_2)+\varphi_{n-2k-1}e_3.$$

Таким образом, предположение, что векторы c_j имеют вид (4), выполнено и при следующем шаге индукции.

Коэффициенты $\beta_{3(n-k)-1}$, $\beta_{3(n-k)-2}$ будут автоматически равны нулю. Кроме того, равны нулю следующие коэффициенты разложения $\mathbf{k}^2$: $\alpha_{2(n-1)}, \ldots, \alpha_{2(n-k)-1}$. Допустим, n — нечетное число, $n=2m+1$. Тогда при нашем шаге индукции $k=m$, $n-2k=1$, $n-k=m+1$. Мы получаем выражение всех векторов от c_2 до c_n. Рассматривая уравнение $L_{2(n-m)}=0$ и $\beta_{3(n-m)}=0$, выводим $\psi_{n-2m}=if_{n-2m}$, $\varphi_{n-m}=0$, т. е. $\psi_1=if_1$, $\varphi_{m+1}=0$. Можем записать выражения всех векторов c_j:

$$\begin{aligned} c_n &= \rho(e_1+ie_2), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ c_{m+1} &= f_{m+1}(e_1+ie_2), \\ c_m &= f_m(e_1+ie_2)+\varphi_m e_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ c_1 &= f_1(e_1+ie_2)+\varphi_1 e_3. \end{aligned} \qquad (5)$$

Уравнение $L_{n-1}=0$, т. е.

$$2[-(c_n\bar{c}_1)+(c_{n-2}c_1)+\ldots+(c_{m+1}c_{m-1})]+c_m^2=0$$

ввиду равенств $(c_{n-2}c_1)=0,\ \ldots,\ (c_{m+1}c_{m-1})=0$, переписывается так: $-2(c_nc_1)+c_m^2=0$. Рассмотрим коэффициент $\beta_{3(n-m-1)}$. Среди разложений $3(n-m-1)=n+(n-1)+(n-3m+1)=\ldots=n+m-1=\ldots$ только одно разложение, $n+m-1$, будет соответствовать определителю, отличному от нуля:

$$\Delta(n,\ m,\ -1)=\begin{vmatrix} \rho & i\rho & 0 \\ f_m & if_m & \varphi_m \\ f_1 & -if_1 & \bar{\varphi}_1 \end{vmatrix}=2i\bar{\rho}f_1\varphi_m.$$

С помощью выписанного уравнения $L_{n-1}=0$ и условия $\beta_{3(n-m-1)}=0$ выводим $f_1=0$, $\varphi_m=0$. Продолжая этот процесс, получим, что все f_i и φ_j равны нулю, т. е. кривая является дугой окружности.

Пусть теперь n четное, $n=2m$. При $k=m$ имеем $n-2k+1=1$. Для векторов c_p справедливо (5). Имеется небольшое отличие от случая нечетного n. Из уравнения $L_n=0$, т. е.

$$2[(c_{n-1}c_1)+\ldots+(c_{m+1}c_{m-1})]+c_m^2=0,$$

следует, что $\varphi_m=0$, а коэффициент $\beta_{3(n-m)}=\beta_{3m}$ автоматически равен нулю. Далее, равенство $f_1=0$ вытекает из уравнения $L_{n-1}=0$, т. е.

$$-(c_n\bar{c}_1)+(c_{n-2}c_1)+\ldots+(c_mc_{m-1})=0.$$

Так как все скалярные произведения, кроме первого, равны нулю, то $(c_n\bar{c}_1)=0$, т. е. $f_1=0$. Аналогично показывается, что все f_i и φ_j равны нулю.

Одновременно из проведенного доказательства следует, что степень полинома $\varkappa\mathbf{k}^2$ всегда кратна трем. Действительно, из условия $\beta_{3(n-i)}=0$, $i=1,\ \ldots\ k$, всегда имеем $\beta_{3(n-k)-1}=0$, $\beta_{3(n-k)-2}=0$. Кроме того, из этого условия $\alpha_{2(n-i)}=0$, $i=1,\ \ldots,\ k$. Если взять заранее в качестве $\mathbf{k}^2$ и $\varkappa\mathbf{k}^2$ тригонометрические полиномы от s такие, что либо степень $\mathbf{k}^2$ не кратна двум, либо степень $\varkappa\mathbf{k}^2$ не кратна трем, то соответствующие им кривые не будут являться тригонометрическими полиномами длины дуги ни при каком n.

ЛИТЕРАТУРА

1. **W. Fenchel.** On the differential geometry of closed space curves // Bull. Amer. Math. Soc.— 1951.— V. 57, N 1.— P. 44—54.
2. **Schmeidler W.** Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass ine Raumkurve geschlossen ist // Arch. Math.— 1956.— V. 7, N 5.— P. 384—385.
3. **Hwang Cheng Chung.** A differential geometric criterion for a space curve to be closed // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— V. 83, N 2.— P. 357—361.
4. **Аминов Ю. А.** Об условиях замкнутости ломаных линий и многогранников в E^3 // Мат. заметки.— 1985.— Т. 38, № 1.— С. 132—141.

СЛЕДЫ ФУНКЦИЙ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ КООРДИНАТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ. II

М. З. БЕРКОЛАЙКО

Мы используем обозначения работы [1], продолжением которой является эта статья.

В [1] было доказано, что пространством следов на $_{\mathrm{v}}^{-1}$ пространства $L_{p\theta}(\mathbf{R}^n)$, где $p=(p_1,\ \ldots,\ p_n)$, $1<p_j<\infty$, $r=(r_1,\ \ldots,\ r_n)$, $r_j>0$, $\theta\in[1,\ \infty]$, является пространство $\mathfrak{B}^{\rho}_{p_w,p_v;p_z}(\mathbf{R}^{n-1}_{\mathrm{v}})$, где $\rho=(\rho_1,\ \ldots,\ \rho_{\mathrm{v}-1},$