Уравнение $L_{n-1}=0$, т. е.

$$2\left[-(c_n\bar{c}_1)+(c_{n-2}c_1)+\ldots+(c_{m+1}c_{m-1})\right]+c_m^2=0$$

ввиду равенств $(c_{n-2}c_1)=0,\ \ldots,\ (c_{m+1}c_{m-1})=0$, переписывается так: $-2(c_nc_1)+c_m^2=0$. Рассмотрим коэффициент $\beta_{3(n-m-1)}$. Среди разложений $3(n-m-1)=n+(n-1)+(n-3m+1)=\ldots=n+m-1=\ldots$ только одно разложение, $n+m-1$, будет соответствовать определителю, отличному от нуля:

$$\Delta(n,\ m,\ -1)=\begin{vmatrix}\rho & i\rho & 0\\ f_m & if_m & \varphi_m\\ f_1 & -if_1 & \bar{\varphi}_1\end{vmatrix}=2i\bar{\rho}f_1\varphi_m.$$

С помощью выписанного уравнения $L_{n-1}=0$ и условия $\beta_{3(n-m-1)}=0$ выводим $f_1=0$, $\varphi_m=0$. Продолжая этот процесс, получим, что все f_i и φ_j равны нулю, т. е. кривая является дугой окружности.

Пусть теперь n четное, $n=2m$. При $k=m$ имеем $n-2k+1=1$. Для векторов c_p справедливо (5). Имеется небольшое отличие от случая нечетного n. Из уравнения $L_n=0$, т. е.

$$2\left[(c_{n-1}c_1)+\ldots+(c_{m+1}c_{m-1})\right]+c_m^2=0,$$

следует, что $\varphi_m=0$, а коэффициент $\beta_{3(n-m)}=\beta_{3m}$ автоматически равен нулю. Далее, равенство $f_1=0$ вытекает из уравнения $L_{n-1}=0$, т. е.

$$-(c_n\bar{c}_1)+(c_{n-2}c_1)+\ldots+(c_mc_{m-1})=0.$$

Так как все скалярные произведения, кроме первого, равны нулю, то $(c_n\bar{c}_1)=0$, т. е. $f_1=0$. Аналогично показывается, что все f_i и φ_j равны нулю.

Одновременно из проведенного доказательства следует, что степень полинома $\varkappa\mathbf{k}^2$ всегда кратна трем. Действительно, из условия $\beta_{3(n-i)}=0$, $i=1,\ \ldots\ k$, всегда имеем $\beta_{3(n-k)-1}=0$, $\beta_{3(n-k)-2}=0$. Кроме того, из этого условия $\alpha_{2(n-i)}=0$, $i=1,\ \ldots,\ k$. Если взять заранее в качестве $\mathbf{k}^2$ и $\varkappa\mathbf{k}^2$ тригонометрические полиномы от s такие, что либо степень $\mathbf{k}^2$ не кратна двум, либо степень $\varkappa\mathbf{k}^2$ не кратна трем, то соответствующие им кривые не будут являться тригонометрическими полиномами длины дуги ни при каком n.

ЛИТЕРАТУРА

1. **W. Fenchel.** On the differential geometry of closed space curves // Bull. Amer. Math. Soc.— 1951.— V. 57, N 1.— P. 44—54.
2. **Schmeidler W.** Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass ine Raumkurve geschlossen ist // Arch. Math.— 1956.— V. 7, N 5.— P. 384—385.
3. **Hwang Cheng Chung.** A differential geometric criterion for a space curve to be closed // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— V. 83, N 2.— P. 357—361.
4. **Аминов Ю. А.** Об условиях замкнутости ломаных линий и многогранников в E^3 // Мат. заметки.— 1985.— Т. 38, № 1.— С. 132—141.

СЛЕДЫ ФУНКЦИЙ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ КООРДИНАТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ. II

М. З. БЕРКОЛАЙКО

Мы используем обозначения работы [1], продолжением которой является эта статья.

В [1] было доказано, что пространством следов на $_{\nu}^{-1}$ пространства $L_{p\theta}(\mathbf{R}^n)$, где $p=(p_1,\ \ldots,\ p_n)$, $1<p_j<\infty$, $r=(r_1,\ \ldots,\ r_n)$, $r_j>0$, $\theta\in[1,\ \infty]$, является пространство $\mathfrak{B}^{\rho}_{p_w,p_\nu;p_z}(\mathbf{R}^{n-1}_\nu)_r$ где $\rho=(\rho_1,\ \ldots,\ \rho_{\nu-1},$

$\rho_{\nu+1}, \ldots, \rho_n)$, $\rho_j = \varkappa r_j$, $\varkappa = 1 - (r_\nu p_\nu)^{-1} > 0$, $p_w = (p_1, \ldots, p_{\nu-1})$, $p_z = (p_{\nu+1}, \ldots, p_n)$, причем условие $\varkappa > 0$ является и необходимым для существования у каждой функции из $L^r_{p\theta}(\mathbf{R}^n)$ следа на $\mathbf{R}^{n-1}_\nu$ в смысле пространства L_{p_ν}, $p_\nu = (p_w, p_z)$. Кроме того,

$$\mathfrak{B}^\rho_{p_w, p_\nu; p_z} = L_{p_z}\left[B^{\rho_w}_{p_w, p_\nu}\right] \cap \mathscr{H}^{\rho_z}_{p_w, p_\nu; p_z},$$

где $\rho_w = (\rho_1, \ldots, \rho_{\nu-1})$, $\rho_z = (\rho_{\nu+1}, \ldots, \rho_n)$.

Для пространства $L_{p_z}\left[B^{\rho_w}_{p_w, p_\nu}\right]$ структурное описание получено в [1]; в этой работе дается структурное описание пространства $\mathscr{H}^{\rho_z}_{p_w, p_\nu; p_z}$ при дополнительном условии $r_{\nu+1} = \ldots = r_n = r_0$ (т. е. $\rho_z = (\rho, \ldots, \rho)$, $\rho = \varkappa r_0$) и, тем самым, полное структурное описание пространства следов, а также описание пространства следов пространства $L^r_{p\theta}(\mathbf{R}^n)$ на подпространстве $\mathbf{R}^{n-m}_{\nu_1 \ldots \nu_m}$, определяемом уравнениями $x_{\nu_1} = \ldots = x_{\nu_m} = 0$, $1 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_m \leqslant n$.

§ 1. Некоторые определения

Пользуясь изотропностью гладкости ρ_z, дадим определение пространства $\mathscr{H}^\rho_{p_w, p_\nu; p_z}$, несколько отличающееся от приведенного в [1], но, как нетрудно убедиться, эквивалентное ему.

Система функций $\{Z_k(z)\}_{k=0}^\infty = \{Z_k(x_{\nu+1}, \ldots, x_n)\}_{k=0}^\infty$ определяется следующим образом. Пусть $\tau(\zeta) \in C^\infty(\mathbf{R})$, причем $\tau(\zeta) = 1$ при $|\zeta| \leqslant 4/3$; $\tau(\zeta) = 0$ при $|\zeta| \geqslant 5/3$. Положим

$$\mu_k(\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_n) = \begin{cases} \prod\limits_{j=\nu+1}^{n} \tau(\xi_j), \ \xi_j \in \mathbf{R}, \ k = 0, 1; \\ \mu_0(2^{-k-1}\xi_{\nu+1}, \ldots, 2^{-k-1}\xi_n), \ k \geqslant 2; \end{cases}$$

$$\sigma_k(\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_n) = \begin{cases} \mu_0(\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_n), & k = 0; \\ (\mu_k - \mu_{k-1})(\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_n), & k \geqslant 1. \end{cases}$$

Пусть $Z_k(z) = \overline{\sigma_k}$.

Пространство $\mathscr{H}^\rho_{p_w, p_\nu; p_z}(\mathbf{R}^{n-1}_\nu)$, $\rho = \underbrace{(\rho, \ldots, \rho)}_{n-\nu}$ — это банахово пространство измеримых на $\mathbf{R}^{n-1}_\nu$ функций $f(w, z)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{p_\nu} + \left\| \left\| \{2^{k\rho} \| (Z_k * f)(\cdot, z) \|_{p_w}\}_{k=0}^\infty \right\|_{l_{p_\nu}} \right\|_{p_z}, \tag{1.1}$$

$$Z_k * f = \overline{\sigma_k \tilde{f}}.$$

Подобно [1] можно показать, что с точностью до эквивалентности норм пространство $\mathscr{H}^\rho_{p_w, p_\nu; p_z}$ не зависит от конкретного вида функции $\tau(\zeta)$.

Пространство $\mathfrak{B}^\rho_{p_w, p_\nu; p_z}(\mathbf{R}^{n-1}_\nu)$ — это банахово пространство измеримых на $\mathbf{R}^{n-1}_\nu$ функций $f(w, z)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{p_\nu} + \inf \left\| \left\| \{2^k \| Q_k(\cdot, z) \|_{p_w}\}_{k=0}^\infty \right\|_{l_\theta} \right\|_{p_z},$$

где инфимум берется по всем разложениям вида

$$f(w, z) \underset{S'(\mathbf{R}^{n-1}_\nu)}{=\!=} \sum_{k=0}^\infty Q_k(w, z),$$

Q_k — целая функция экспоненциального типа (ЦФЭТ) $2^{k/\rho} = \{2^{k/\rho_1}, \ldots, 2^{k/\rho_n}\}$, причем $Q_k \in L_{p_w}$ при почти всех z, В [1] было показано, что для $f \in \mathscr{H}^{\rho}_{p_w, p_v; p_z}$

$$f \underset{L_{p_v}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} Z_k * f.$$

§ 2. Формулировки основных результатов

Теорема 1. *Пусть* $\rho = \underbrace{(\rho, \ldots, \rho)}_{n-v}$, *тогда норма в* $\mathscr{H}^{\rho}_{p_w, p_v; p_z}$ *эквивалентна* величине

$$\|f\|_{p_v} + \left\| \left(\int_0^{\infty} \tau^{-\rho p_v} \left(\int_{|h|<1} \|\Delta^l_{\tau h, z} f(w, z)\|_{p_w} dh \right)^{p_v} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1/p_v} \right\|_{p_z}, \qquad (2.1)$$

где $\Delta^l_{\tau h, z} f(w, z)$ — *разность порядка* l *с шагом* τh, $h = (h_{v+1}, \ldots, h_n)$, *по переменной* z *от функции* f; $l > \rho$.

Если $v = 1$, то $\|\cdot\|_{p_w}$ в (2.1) превращается в $|\cdot|$, тогда второе слагаемое в (2.1) — это выражение для нормы пространства Лизоркина — Трибеля $L^{\rho}_{p\theta}$, полученное для скалярных р в [2, 3]. Этот факт, а также определение пространства $\mathscr{H}^{\rho}_{p_w, p_v; p_z}$ дает основание рассматривать его как векторнозначный аналог пространства Лизоркина — Трибеля и в наших обозначениях записать как $L^{\rho}_{p_z, p_v}[L_{p_w}]$. Таким образом, справедливо

Следствие 1. *При* $r_{v+1} = \ldots = r_n = r_0$

$$L^r_{p\theta}(\mathbf{R}^n) \rightleftarrows L_{p_z}\left[B^{\rho_w}_{p_w, p_v}\right] \cap L^{\rho}_{p_z, p_v}\left[L_{p_w}\right],$$

где $\rho_j = \varkappa r_j$, $j = 1, \ldots, v-1$; $\rho = \varkappa r_0$, $\varkappa = 1 - (p_v r_v)^{-1} > 0$, *причем условие* $\varkappa > 0$ *необходимо для существования следа на* $\mathbf{R}^{n-1}_v$ *у любой функции из* $L^r_{p\theta}$.

Норма в пространстве следов задается как сумма величины

$$\sum_{j=1}^{v-1} \left\| \left(\int_0^1 \sigma^{-\rho_j p_v} \left\| \Delta^{l_j}_{\sigma, x_j} f(w, z) \right\|^{p_v}_{p_w} \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{1/p_v} \right\|_{p_z},$$

$l_j > \rho_j$, и выражения (2.1). Здесь $\Delta^{l_j}_{\sigma, x_j} f(w, z)$ — разность порядка l_j с шагом σ по направлению x_j, $j = 1, \ldots, v-1$.

Замечание 1. В случае $v = 1$ второе слагаемое в (2.1) — это выражение, возникшее ранее в [2, 3].

Замечание 2. Интеграл $\int_0^{\infty}$ в (2.1) можно заменить интегралом $\int_0^1$ — это доказывается, по существу, аналогично следствию 2.5.11 из [3].

Для дальнейшего нам понадобятся обозначения $\mathrm{N} = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $1 \leqslant v_1 < v_2 < \ldots < v_m \leqslant n$; $\mathrm{M} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \mathrm{N}$; $s = v_m - m$, $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\} = \{1, 2, \ldots, v_m - 1\} \setminus \{v_1, \ldots, v_{m-1}\}$; $v = (x_{\eta_1}, \ldots, x_{\eta_s})$, $z = (x_{v_m+1}, \ldots, x_n)$, $\rho_v = (\rho_{\eta_1}, \ldots, \rho_{\eta_s})$, $p_v = (p_{\eta_1}, \ldots, p_{\eta_s})$.

Следующее утверждение, с учетом определения пространств $\mathfrak{B}_{p_w, p_v; p_z'}$, доказывается совершенно аналогично теоремам о следах для пространств Бесова [4, теоремы 6.7, 6.8], только вместо обычного неравенства разных измерений следует воспользоваться его аналогом для случая смешанных L_p-норм [5—7].

Теорема 2.

$$\mathfrak{B}^{\rho}_{p_w, p_{v_m}; p_z}\left(\mathbf{R}^{n-1}_{v_m}\right) \rightleftarrows \mathfrak{B}^{\eta}_{p_v, p_{v_m}; p_z}\left(\mathbf{R}^{n-m}_{v_1, \ldots, v_m}\right),$$

где $\eta_j = \varkappa\rho_j$, $j \in \mathrm{M}$, $\varkappa = 1 - \sum\limits_{j=1}^{m-1} (p_{\nu_j}\rho_{\nu_j})^{-1} > 0$, *причем условие* $\varkappa > 0$ *необходимо для того, чтобы каждая функция из* $\mathfrak{B}^{\rho}_{p_w, p_{\nu_m}, p_z}$ *имела бы след на* $\mathbf{R}^{n-m}_{\nu_1, \ldots, \nu_m}$.

Пользуясь этой теоремой, легко доказать

Следствие 2.

$$L^r_{p\theta}(\mathbf{R}^n) \rightleftarrows L_{p_z}\left[B^{\rho_v}_{p_v, p_{\nu_m}}\right] \cap \mathscr{H}^{\rho_z}_{p_v, p_{\nu_m}; p_z}. \tag{2.2}$$

Следствие 3. *Пусть* $r_{\nu_{m+1}} = \ldots = r_n = r_0$, *тогда норма пространства следов в* (2.2) *может быть задана как сумма величины*

$$\sum_{j \in \mathrm{M}} \left\| \left(\int\limits_0^1 \sigma^{-\rho_j p_{\nu_m}} \left\| \Delta^{l_j}_{\sigma, x_j} f(v, z) \right\|^{p_{\nu_m}}_{p_v} \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{1/p_{\nu_m}} \right\|_{p_z}, \quad l_j > \rho_j,$$

и правой части (2.1).

Замечание 3. Утверждение, аналогичное теореме 2, может быть доказано подобным образом и для пространств $\mathfrak{B}^{(\alpha, N^{(\nu)})}_{\mathscr{Y}, G^d; F}(\mathbf{R}^{n-1}_\nu)$. При этом следует воспользоваться неравенством разных измерений из [7]. Мы не станем приводить точной формулировки ввиду ее громоздкости.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Лемма. *Норма в пространстве* $\mathscr{H}^{\rho}_{p_w, p_\nu; p_z}$ *эквивалентна величине*

$$\|f\|_{p_\nu} + \inf \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^k \sum_{s=k}^{\infty} \|q_s(\cdot, z)\|_{p_w} \right)^{p_\nu} \right)^{1/p_\nu} \right\|_{p_z}, \tag{3.1}$$

где инфимум берется по всевозможным разложениям

$$f(w, z) \underset{S'(\mathbf{R}^{n-1}_\nu)}{=\!=} \sum_{k=0}^{\infty} q_k(w, z), \tag{3.2}$$

$g_k(w, z)$ *при каждом фиксированном* w *является* ЦФЭТ $2^{k/\rho_z}$.

Замечание. Для тех разложений вида (3.2), для которых конечна величина (3.1), ряды сходятся в L_{p_ν} — это доказывается как предложение 7 [1].

Доказательство леммы. Шаг 1. Обозначим второе слагаемое в выражении исходной нормы через $\mathfrak{R}_1$, а второе слагаемое в (3.1) — через $\mathfrak{R}_2$. Докажем, что $\mathfrak{R}_2 \ll \mathfrak{R}_1$. Обозначим $q_k = Z_k * f$, тогда аналогично [1] можно показать, что

$$\left\| \left\{ 2^k \sum_{s=k}^{\infty} \|q_k(\cdot, z)\|_{p_w} \right\}_{k=0}^{\infty} \right\|_{l_{p_\nu}} \ll \left\| \left\{ 2^k \|q_k(\cdot, \mathbf{z})\|_{p_w} \right\}_{k=0}^{\infty} \right\|_{l_{p_\nu}}$$

с константой, не зависящей от z, что и требуется.

Шаг 2. Покажем, что $\mathfrak{R}_1 \ll \mathfrak{R}_2$. Пусть $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k$ — требуемое разложение, для которого $\mathfrak{R}_2 < \infty$. Поскольку $\mathbf{Z}^k * f = \sum\limits_{s=k-1}^{\infty} \mathbf{Z}_k * q_s$, то $2^k \|\mathbf{Z}_k * f\|_{p_w} \leqslant$ $\leqslant |\mathbf{Z}_k| * 2^{k-1} \sum\limits_{s=k-1}^{\infty} \|q_s(\cdot, z)\|_{p_w}$, и так как $\{|\mathbf{Z}_k|\}_{k-0}^{\infty}$ — мультипликатор в $L_{p_z}[l_{p_\nu}]$ (см. [1]), то лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы 1. Шаг 1. Пусть A — это второе слагаемое в (2.1), а $\mathscr{Y}$ — внешний интеграл в A. Обозначим для краткости $p_\nu = \theta$. Имеем

$$\mathcal{I} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \tau^{-\rho\theta} \left(\int_{|h|\leqslant 1} \| \Delta^l_{\tau h, z} f(w, z) \|_{p_w} dh \right)^\theta \frac{d\tau}{\tau}.$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену $\tau h = 2^{-k} t$. Тогда

$$\int_{|h|\leqslant 1} \| \Delta^l_{\tau h, z} f(w, z) \|_{p_w} dh = (2^k \tau)^{n-\nu} \int_{|t|\leqslant 2^k\tau} \| \Delta^l_{2^{-k}t, z} f(w, z) \|_{p_w} dt = B,$$

и при $\tau \in [2^{-k-1}, 2^{-k})$

$$B \leqslant \int_{|h|\leqslant 1} \| \Delta^l_{2^{-k}h, z} f(w, z) \|_{p_w} dh.$$

Если же в B сделать замену $\tau h = 2^{-k-1} t$, то придем к оценке

$$B \gg \int_{|h|\leqslant 1} \| \Delta^l_{2^{-k-1}h, z} f(w, z) \|_{p_w} dh,$$

поэтому

$$A \asymp \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\theta\rho} \left(\int_{|h|\leqslant 1} \| \Delta^l_{2^{-k}h, z} f(w, z \|_{p_w} dh \right)^\theta \right)^{1/\theta} \right\|_{p_z}. \tag{3.3}$$

Выражение, стоящее под знаком внешней нормы, обозначим через $C(z)$.

Шаг 2. Подставим в $C(z)$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Z_k * f$ *), применим два раза неравенство треугольника и сделаем замену $k = s + i$. Тогда при каждом фиксированном z

$$C(z) \ll \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} 2^{s\theta\rho} \left(\int_{|h|\leqslant 1} \| \Delta^l_{2^{-s}h, z} (Z_{s+i} * f) \|_{p_w} dh \right)^\theta \right)^{1/\theta} =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{-1} (\ldots)^{1/\theta} + \sum_{i=0}^{\infty} (\ldots)^{1/\theta} = C_1(z) + C_2(z).$$

Для оценки функций $C_j(z)$, $j = 1, 2$, нам понадобятся некоторые предварительные рассмотрения.

Шаг 3. Рассмотрим, следуя [3], функции

$$(Z_k * f)_T (w, z) = \sup_{t \in \mathbf{R}^{n-\nu}} \frac{|(Z_k * f)(w, t))|}{1 + |2^k (z - t)|^a}, \tag{3.4}$$

где $a = n - \nu$. Ясно, что

$$(Z_{k+s} * f)_T (w, z) \gg \sup_{|t-z|\leqslant 2^{-s}} |(Z_{k+s} * f)(w, t)|. \tag{3.5}$$

Пусть α — мультииндекс, $|\alpha| \leqslant l$. Так же как в [3], можно показать, что

$$(D^\alpha (Z_k * f))_T (w, z) \ll 2^{kl} (Z_k * f)_T (w, z), \tag{3.6}$$

где $(D^\alpha u)(w, z)$ — дифференциальный оператор по переменной z.

Шаг 4. Займемся оценкой $C_1(z)$, для чего оценим функцию

$$R(w, z) = \left| \Delta^l_{2^{-s}h, z} (Z_{s+i} * f)(w, z) \right|,$$

полагая w фиксированным. Ясно, что

$$R(w, z) \leqslant 2^{-sl} \sup_{|z-t|\leqslant 2^{-s}} \sum_{|\alpha|\leqslant l} |(D^\alpha (Z_{+i} * f)(w, t)|,$$

откуда, используя (3.5), (3.6), получим, что

$$R(w, z) \ll 2^{-sl} 2^{(s+i)l} |(Z_{s+i} * f)_T (w, z)|,$$

*) Всюду ниже мы полагаем, что $Z_k = 0$ при $k = -1, -2, \ldots$.

а значит,

$$C_1(z) \ll \sum_{i=-\infty}^{-1} \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} 2^{s\theta\rho} \| (Z_{s+i} * f)_T (\cdot, z) \|_{p_w}^{\theta} \right)^{1/\theta} \cdot 2^{il}.$$

Сделаем замену $s+i=\mu$; учтем, что $Z_\mu = 0$ при $\mu = -1, -2, \ldots$ и $l > \rho$. Тогда

$$C_1(z) \ll \sum_{i=-\infty}^{-1} \left(\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left(2^{\mu\rho} \| (Z_\mu * f)_T (\cdot, z) \|_{p_w} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} 2^{i(l-\rho)} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \left(2^{\mu\rho} \| (Z_\mu * f) (\cdot, z) \|_{p_w} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} \tag{3.7}$$

при любом z с константой, не зависящей от z.

Шаг 5. Как показано в [1] равномерно по k $\|Z_k * f\|_{p_\nu} \ll \|f\|_{p_\nu}$. Кроме того, любая функция $f \in L_{p_\nu}$ при почти всех w локально суммируема по z. Это дает основание рассмотреть при почти всех w максимальную функцию Харди — Литтлвуда

$$(M_z f)(w, z) = \sup |Q(z)|^{-1} \int_{Q(z)} |f(w, t)| \, dt,$$

где супремум берется по всем кубам $Q(z)$. Из теоремы Кокилашвили [8] следует, что

$$\left\| \left\| \{ \|M_z f_k\|_{p_w} \}_{k=0}^{\infty} \right\|_{l_\theta} \right\|_{p_z} \ll \left\| \left\| \{ \|f_k\|_{p_w} \}_{k=0}^{\infty} \right\|_{l_\theta} \right\|_{p_z}. \tag{3.8}$$

Вернемся к функциям (3.4). Поскольку

$$1 + 2^{k\theta} |z-t|^a \gg \prod_{j=\nu+1}^{n} (1 + 2^k |z_j - t_j|),$$

то по неравенству Калябина [9], учитывая, что $Z_k * f$ — ЦФЭТ 2^k по z при каждом фиксированном w, получим

$$(Z_k * f)_T (w, z) \ll \sup_{t \in \mathbf{R}^{n-\nu}} \frac{|(Z_k * f)(w, t)|}{\prod_{j=\nu+1}^{n} (1 + 2^k |z_j - t_j|)} \ll (M_z (Z_k * f))(w, z).$$

Учитывая неравенства (3.7) и (3.8), получим

$$\|C_1(z)\|_{p_z} \ll \left\| \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \left(2^{\mu\rho} \| Z_k * f \|_{p_w} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} \right\|_{p_z}. \tag{3.9}$$

Шаг 6. Оценим $C_2(z)$. Обозначим внутренний интеграл в выражении для $C_2(z)$ через $\mathcal{I}$. Имеем

$$\mathcal{I} \leqslant \int_{\max_j |h_j| \leqslant 1} \left\| \Delta^l_{2^{-s}h, z} (Z_{s+i} * f)(w, z) \right\|_{p_w} dh \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\max_j |h_j| \leqslant 1} \sum_{\eta=0}^{l} \mathcal{F}_{s+i} (z + 2^{-s}\eta h) \, dh = I,$$

где $\mathcal{F}_{s+i} = \|(Z_{s+i} * f)(\cdot, z)\|_{p_w}$. Сделаем замену $z + 2^{-s}\eta h = t$. Тогда

$$I = \sum_{\eta=0}^{l} (2^{-s}\eta)^{\nu-n} \int_{Q(z, 2^{-s}\eta)} \mathcal{F}_{s+i}(t) \, dt \leqslant l (M_z \mathcal{F}_{s+i})(z).$$

Сделав замену $s+i=\mu$, мы придем к неравенству

$$C_2(z) \ll \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} 2^{\mu\theta\rho} (M_z \mathcal{F}_\mu)^{\theta} (z) \right)^{1/\theta} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i\rho}.$$

Вспоминая, что функция $\{2^{\mu\rho}\mathcal{J}_\mu\}_{\mu=0}^{\infty}$ принадлежит $L_{p_z}[l_\theta]$, и применяя цитированную выше теорему Кокилашвили, получим для $C_2(z)$ оценку, аналогичную (3.9).

Итак, мы показали, что новая норма оценивается сверху выражением (1.1), т. е. исходной нормой.

Шаг 7. Получим обратное неравенство. Согласно лемме норма в $\mathcal{H}^{\rho}_{p_w,\theta;p_z}$ эквивалентна величине

$$\|f\|_{p_\nu} + \inf \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{\rho k} \|f - Q_k\|_{p_w}\right)^{\theta} \right)^{1/\theta} \right\|_{p_z},$$

где инфимум берется по всевозможным последовательностям функций $\{Q_k\}_{k=0}^{\infty}$, являющихся при каждом фиксированном w ЦФЭТ 2^k по z, и таких, что $Q_k \in L_{p_\nu}$, $\|Q_k - f\|_{p_\nu} \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть $a > 0$ — некоторое число, $b = a + \rho$. Рассмотрим функцию $g(t) = c(t^{-1}\sin\lambda^{-1}t)^{\lambda}$, $t \in \mathbf{R}$, где λ — четное число, а c — положительная константа, выбранные так, чтобы выполнялись условия

i) $\int\limits_{\mathbf{R}} g(t)\, t^{l+(n-\nu)-1} dt < \infty$;

ii) $\max\limits_{t \in [2^s, 2^{s+1}]} g(t)\, 2^{s(n-\nu)} \leqslant 2^{-sb}$, $s = 0, 1, \ldots$;

iii) $\int\limits_{\mathbf{R}^{n-\nu}} g(|z|)\, dz = 1$.

Следуя [4, п. 5.2.1], рассмотрим для $f \in L_{p_\nu}$ функции

$$Q_k(w, z) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n-\nu}} \mathcal{R}_k(\sigma - z) f(w, \sigma)\, d\sigma,$$

где $\mathcal{R}_k(z) = \sum\limits_{j=1}^{l} d_j (k/j)^{n-\nu} g(2^k |z|/j)$, $\sum\limits_{j=1}^{l} d_j = 1$, $d_j > 0$. Ясно, что $Q_k \in L_{p_\nu}$, $Q_k \in \mathfrak{M}_{2^k,\infty}(\mathbf{R}^{n-\nu})$ при каждом фиксированном w, причем

$$f(w, z) - Q_k(w, z) = (-1)^l \int\limits_{\mathbf{R}^{n-\nu}} g(|\sigma|)\, \Delta^l_{2^{-k}\sigma, z} f(w, z)\, d\sigma =$$

$$= (-1)^l \int\limits_0^{\infty} g(t) \left(\int\limits_{\omega} \Delta^l_{2^{-k}th, z} f(w, z)\, dh \right) t^{n-\nu-1} dt,$$

где $\omega = \{h \in \mathbf{R}^{n-\nu}\colon |h| = 1\}$. Тогда $\|f - Q_k\|_{p_\nu} \to 0$ при $k \to \infty$ и

$$\|f - Q_k\|_{p_w} \leqslant \int\limits_0^1 g(t) \left(\int\limits_{\omega} \left\| \Delta^l_{2^{-k}th, z} f(w, z) \right\|_{p_w} dh \right) t^{n-\nu-1} dt +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty} \int\limits_{2^s}^{2^{s+1}} g(t) \left(\int\limits_{\omega} \left\| \Delta^l_{2^{-k}th, z} f(w, z) \right\|_{p_w} dh \right) t^{n-\nu-1} dt.$$

Сделаем во внутреннем интеграле первого слагаемого замену $th = \mu$; во внутреннем интеграле второго $th = 2^{s+1}\mu$. Тогда

$$\|f - Q_k\|_{p_w} \ll \int\limits_{Q(0,1)} \left\| \Delta^l_{2^{-k}\mu, z} f(w, z) \right\|_{p_w} d\mu +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-sb} \int\limits_{Q(0,1)} \left\| \Delta^l_{2^{-k+s}\mu, z} f(w, z) \right\|_{p_w} d\mu \ll$$

$$\ll \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-sb} \int\limits_{Q(0,1)} \left\| \Delta^l_{2^{-k+s}\mu, z} f(w, z) \right\|_{p_w} d\mu.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k\rho}\|f-Q_k\|_{p_w}\right)^{\theta}\Big)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-ak}\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{(k-s)\rho\theta}\left(\int\limits_{Q(0,1)}\left\|\Delta^{l}_{2^{-k+s}h,z} f(w,z)\right\|_{p_w} dh\right)^{\theta}\right)^{1/\theta} \ll A,$$

что и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Берколайко М. З.** Следы функций из обобщенных пространств Соболева со смешанной нормой на произвольном координатном подпространстве. I. // Исследования по геометрии и математическому анализу.— Новосибирск: Наука, 1987.— С. 30—44.
2. **Калябин Г. А.** Описание функций из классов типа Бесова — Лизоркина — Трибеля // Труды МИАН.— 1980.— Т. 156.— С. 82—101.
3. **Трибель Х.** Теория функциональных пространств.— М.: Мир, 1986.
4. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.
5. **Джафаров А. С., Ибрагимов И. И.** Некоторые неравенства для целых функций конечной степени в норме обобщенного класса Лебега // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. наук.— 1962.— № 5.— С. 17—28.
6. **Унинский А. П.** Теорема вложения для классов функций со смешанной нормой // Сиб. мат. журн.— 1969.— Т. 10, № 1.— С. 158—171.
7. **Динь-Зунг, Магарил-Ильяев Г. Г.** Задачи типа Бернштейна и Фавара // Докл. АН СССР.— 1979.— Т. 249, № 4.— С. 783—786.
8. **Кокилашвили В. М.** Максимальные функции в весовых пространствах // Труды Тбилис. мат. ин-та АН ГССР.— 1980.— Т. 65.— С. 110—121.
9. **Калябин Г. А.** Описание следов для анизотропных пространств типа Лизоркина — Трибеля // Труды МИАН.— 1979.— Т. 150.— С. 160—173.

О ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. В. ВЕРШИНИН, В. Г. ГОРБУНОВ

Построенная Дж. Ф. Адамсом [1] спектральная последовательность (СП) стала важным вычислительным средством современной алгебраической топологии. С. П. Новиковым была развита теория спектральной последовательности типа Адамса, основывающейся на обобщенной теории когомологий и, в частности, на теории унитарных кобордизмов [2]. Впоследствии Н. А. Босом [3] было доказано, что если спектр Y конечномерный, а спектр X таков, что $H_n(X, Z)$ конечно порождены и без кручения для всех n, то спектральная последовательность Новикова существует и сходится. Первой трудностью, которая возникает при использовании спектральной последовательности Новикова, является вычисление ее начального члена, изоморфного $\mathrm{Ext}_{A^U}(MU^*(X)$ $MU^*(Y))$, где $MU^*()$ — теория унитарных кобордизмов. Локальный вариант спектральной последовательности Новикова имеет начальный член, изоморфный $\mathrm{Ext}_A(BP^*(X), BP^*(Y))$, где $BP^*()$ — теория когомологий Брауна — Петерсона. Для вычисления этого объекта С. П. Новиковым была предложена алгебраическая спектральная последовательность, имеющая начальный член, изоморфный при $Y = S^0$:

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}_p/(Q_0)}(H^*(x, Z/p), \overline{Bp}^*), \tag{0.1}$$

где $\mathscr{A}_p$ — алгебра Стинрода, а $\overline{BP}^*$ — объект, присоединенный к $BP^* = BP^*(S^0) = Z_p[v_1, \ldots, v_i, \ldots]$ по фильтрации, порожденной максимальным идеалом m кольца BP^*. Большой интерес представляет гомологический вариант спектральной последовательности Адамса — Новикова [4],