Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k\rho}\|f-Q_k\|_{p_w}\right)^{\theta}\Bigg)^{1/\theta}\ll$$

$$\ll\sum_{k=0}^{\infty}2^{-ak}\left(\sum_{s=0}^{\infty}2^{(k-s)\rho\theta}\left(\int\limits_{Q(0,1)}\left\|\Delta^{l}_{2^{-k+s}h,z}f(w,\,z)\right\|_{p_w}dh\right)^{\theta}\right)^{1/\theta}\ll A,$$

что и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Берколайко М. З.** Следы функций из обобщенных пространств Соболева со смешанной нормой на произвольном координатном подпространстве. I. // Исследования по геометрии и математическому анализу.— Новосибирск: Наука, 1987.— С. 30—44.
2. **Калябин Г. А.** Описание функций из классов типа Бесова — Лизоркина — Трибеля // Труды МИАН.— 1980.— Т. 156.— С. 82—101.
3. **Трибель Х.** Теория функциональных пространств.— М.: Мир, 1986.
4. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.
5. **Джафаров А. С., Ибрагимов И. И.** Некоторые неравенства для целых функций конечной степени в норме обобщенного класса Лебега // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. наук.— 1962.— № 5.— С. 17—28.
6. **Унинский А. П.** Теорема вложения для классов функций со смешанной нормой // Сиб. мат. журн.— 1969.— Т. 10, № 1.— С. 158—171.
7. **Динь-Зунг, Магарил-Ильяев Г. Г.** Задачи типа Бернштейна и Фавара // Докл. АН СССР.— 1979.— Т. 249, № 4.— С. 783—786.
8. **Кокилашвили В. М.** Максимальные функции в весовых пространствах // Труды Тбилис. мат. ин-та АН ГССР.— 1980.— Т. 65.— С. 110—121.
9. **Калябин Г. А.** Описание следов для анизотропных пространств типа Лизоркина — Трибеля // Труды МИАН.— 1979.— Т. 150.— С. 160—173.

О ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. В. ВЕРШИНИН, В. Г. ГОРБУНОВ

Построенная Дж. Ф. Адамсом [1] спектральная последовательность (СП) стала важным вычислительным средством современной алгебраической топологии. С. П. Новиковым была развита теория спектральной последовательности типа Адамса, основывающейся на обобщенной теории когомологий и, в частности, на теории унитарных кобордизмов [2]. Впоследствии Н. А. Босом [3] было доказано, что если спектр Y конечномерный, а спектр X таков, что $H_n(X,\,Z)$ конечно порождены и без кручения для всех n, то спектральная последовательность Новикова существует и сходится. Первой трудностью, которая возникает при использовании спектральной последовательности Новикова, является вычисление ее начального члена, изоморфного $\mathrm{Ext}_{A^U}(MU^*(X)$ $MU^*(Y))$, где $MU^*()$ — теория унитарных кобордизмов. Локальный вариант спектральной последовательности Новикова имеет начальный член, изоморфный $\mathrm{Ext}_A(BP^*(X),\,BP^*(Y))$, где $BP^*()$ — теория когомологий Брауна — Петерсона. Для вычисления этого объекта С. П. Новиковым была предложена алгебраическая спектральная последовательность, имеющая начальный член, изоморфный при $Y=S^0$:

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}_p/(Q_0)}(H^*(x,\,Z/p),\,\overline{Bp}^*),\qquad(0.1)$$

где $\mathscr{A}_p$ — алгебра Стинрода, а $\overline{BP}^*$ — объект, присоединенный к $BP^*=$ $=BP^*(S^0)=Z_p[v_1,\,\ldots,\,v_i,\,\ldots]$ по фильтрации, порожденной максимальным идеалом m кольца BP^*. Большой интерес представляет гомологический вариант спектральной последовательности Адамса — Новикова [4], не требующий для существования никаких условий на спектр X. В связи с этим возникает потребность рассмотрения гомологического варианта алгебраической СП. С другой стороны, возникают и находят себе применение алгебраические спектральные последовательности, основывающиеся на фильтрации кольца BP^*, отличающейся от m-адической [5]. Спектральные последовательности Адамса, Новикова, алгебраическая СП и спектральная последовательность Картана — Эйленберга были включены в некоторый четырехугольник [2, § 12]. Именно: объект, изоморфный (0.1), является также начальным членом СП Картана — Эйленберга, сходящейся к начальному члену СП Адамса. Изучению СП, участвующих в этом четырехугольнике, и посвящена настоящая работа.

§ 1. Свойства спектральной последовательности Адамса — Новикова

Напомним построение гомологического варианта СП Адамса — Новикова [4]. Пусть $X_0 = X$, $_0 = h \wedge X_0$, где h — мультипликативный спектр, определяющий обобщенную теорию гомологий $h_*()$, в которой строится спектральная последовательность Адамса — Новикова. Пусть S — спектр сфер и $i\colon S \to h$ — морфизм, соответствующий единице кольца h_*. Рассмотрим морфизм

$$X_0 \cong S \wedge X_0 \xrightarrow{i \wedge 1} h \wedge X_0 = W_0,$$

дополним его до точного треугольника

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[dr, "i\wedge 1"'] & & X_1 \arrow[ll] \\ & W_0 \arrow[ur] & \end{tikzcd},$$

в котором морфизм $X_0 \leftarrow X_1$ имеет степень 0, а морфизм $W_0 \to X_1$ — степень -1. Проделаем для X_1 то же, что было сделано для X_0, и продолжим эту процедуру по индукции. Получим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[dr] & & X_1 \arrow[ll] & \ldots \arrow[l] & X_n \arrow[l] \arrow[dr] & & X_{n+1} \arrow[ll] & \ldots \arrow[l] \\ & W_0 \arrow[ur] & & & & W_n \arrow[ur] & & \end{tikzcd}. \tag{1.1}$$

Можно записать эту диаграмму и несколько иначе. Рассмотрим точный треугольник

$$\begin{tikzcd} h \arrow[dr] & & S \arrow[ll, "i"'] \\ & \bar{h} \arrow[ur] & \end{tikzcd},$$

в котором морфизм $\bar{h} \to S$ имеет степень 0. Можно взять $X_n = \bar{h}^n \wedge X$, $W_n = h \wedge \bar{h}^n \wedge X$ и очевидные морфизмы. Спектральная последовательность Адамса — Новикова возникает из точного треугольника

$$\begin{tikzcd} {[Y, X_*]^h} \arrow[dr] & & {[Y, X_{*+1}]^h} \arrow[ll] \\ & {[Y, W_*]} \arrow[ur] & \end{tikzcd},$$

в котором через $[Y, X_*]^h$ обозначаются морфизмы некоторой категории частных [4]. Одним из условий того, чтобы имел место изоморфизм

$$E_2^{k,*} = \operatorname{Ext}^{k,*}_{h_*(h)}(h^*(Y), h^*(X)),$$

является следующее: $h_*(h)$ — плоский правый модуль над h_*. Отсюда следует, что $h_*(W_n)$ есть расширенный комодуль над $h_*(h)$:

$$h_*(W_n) \cong h_*(h) \otimes_{h_*} h_*(\bar{h}^n \wedge X),$$

и мы построим резольвенту $h_*(h)$-комодуля $h_*(X)$, состоящую из расширенных комодулей

$$h_*(X) \to h_*(W_0) \to \ldots \to h_*(W_n) \to \ldots.$$

Аналогичная процедура построения резольвенты, состоящей из расширенных комодулей, имеется и в чисто алгебраической ситуации. Пусть C есть бимодуль над коммутативным кольцом K, являющийся коалгеброй с коумножением $\psi_C\colon C \to C \otimes_K C$ и коединицей $\varepsilon_C\colon C \to K$. Предположим, что M есть C-комодуль с кодействием $\psi_M\colon M \to C \otimes_K M$, которое является расщепляющимся мономорфизмом в категории K-модулей. Рассмотрим фактор-модуль Γ_1 модуля $C \otimes_K M$ по вложению ψ_M:

$$0 \to M \xrightarrow{\psi_M} C \otimes_K M \to \Gamma_1 \to 0.$$

Из свойств ψ_M следует, что кодействие на расширенном комодуле $C \otimes_K M$ определяет кодействие на Γ_1, благодаря которому Γ_1 становится комодулем: $\psi_{\Gamma_1}\colon \Gamma_1 \to C \otimes_K \Gamma_1$. Обозначим фактор-модуль $C \otimes_K \Gamma_1$ по вложению ψ_{Γ_1} через Γ_2. Продолжая этот процесс, получим C-комодуль Γ_i. Возьмем теперь композиции проекций и вложений

$$C \otimes \Gamma_i \to \Gamma_{i+1} \to C \otimes \Gamma_{i+1},$$

которые образуют резольвенту C-комодуля M, состоящую из расширенных комодулей

$$M \to C \otimes M \to C \otimes \Gamma_1 \to \ldots \to C \otimes \Gamma_i \to \ldots.$$

Мы будем называть эту резольвенту *стандартной резольвентой комодуля M.*

Пусть теперь задан свободный K-модуль конечного типа N, являющийся также C-комодулем, а комодуль M является также модулем над другим коммутативным кольцом R, над которым задан плоский модуль Q. Предположим, что ψ_M есть R-модульный гомоморфизм, структура R-модуля на $C \otimes_K M$ определяется из структуры R-модуля на M, которая задает также действие кольца R на $\mathrm{Ext}_C(N, M)$. Морфизм $\psi_M \otimes_R 1_Q$ является кодействием на $M \otimes_R Q$.

В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма 1. *В ситуации, описанной выше, имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{Ext}_C(N, M \otimes_R Q) \cong \mathrm{Ext}_C(N, M) \otimes_R Q.$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ есть резольвента C-комодуля M, состоящая из расширенных комодулей $\mathscr{B}_n = C \otimes_K G_n$, и на $\mathscr{B}$ существует действие кольца R, продолжающее действие его на M. В качестве такой резольвенты можно взять стандартную резольвенту. Действительно, Γ_1 будет R-модулем, а кодействие ψ_{Γ_1} — R-модульным гомоморфизмом и т. д. Имеем канонический гомоморфизм

$$\mathrm{Hom}_C(N, \mathscr{B}_n) \otimes_R Q \to \mathrm{Hom}_C(N, \mathscr{B}_n \otimes_R Q),$$

который является изоморфизмом вследствие того, что

$$\mathrm{Hom}_C(N, \mathscr{B}_n) \cong \mathrm{Hom}_K(N, Q_n),$$

а N есть свободный модуль конечного типа над K. Поскольку Q — плоский R-модуль, мы получаем изоморфизм из формулировки леммы. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если Q — коалгебра, а M — комодуль над Q, причем Q-кодействие на M есть C-комодульный гомоморфизм, то* $\mathrm{Ext}_C(N, M)$ *становится комодулем над коалгеброй Q с кодействием, определяемым по формуле*

$$\psi_{\mathrm{Ext}}\colon \mathrm{Ext}_C(N, M) \to \mathrm{Ext}_C(N, M \otimes Q) \cong \mathrm{Ext}_C(N, M) \otimes Q.$$

Предположим, что X — мультипликативный спектр. Тогда на членах точного треугольника, порождающего СП Адамса — Новикова, определено действие кольца $\pi_*(X)$, основанное на морфизмах

$$W_n \wedge X = h \wedge \bar{h}^n \wedge X \wedge X \xrightarrow{1 \wedge \mu_X} h \wedge \bar{h}^n \wedge X = W_n,$$

$$\bar{h}^n \wedge X \wedge X \xrightarrow{1 \wedge \mu_X} \bar{h}^n \wedge X,$$

где μ_X — умножение в X. Это действие согласовано с морфизмами треугольника, следовательно, оно определяет действие $\pi_*(X)$ во всех членах СП Адамса — Новикова. В члене E_∞ это действие присоединено к каноническому действию кольца $\pi_*(X)$ на $[Y, X]$. Рассмотрим указанное выше действие на уровне члена E_2 и отождествим его с каноническим действием для функтора $\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*(Y), h_*(X))$. Этот функтор можно вычислять с помощью проективной резольвенты $h_*(Y)$. Тогда действие кольца $\pi_*(X)$ на $\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*(Y), h_*(X))$ определяется через его действие на $h_*(X)$. Если вычислять $\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*(Y), h_*(X))$ с помощью резольвенты $\mathscr{R}$ комодуля $h_*(X)$, состоящей из расширенных объектов, на которой существует действие $\pi_*(X)$, продолжающее действие на $h_*(X)$, то получим $\pi_*(X)$-модульную структуру на $H_*(\mathrm{Hom}_{h_*(h)}(h_*(Y), \mathscr{R}))$. Из доказательства теоремы об изоморфизме

$$\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*(Y), h_*(X)) \cong H_*(\mathrm{Hom}_{h_*(h)}(h_*'(Y), \mathscr{R})),$$

[6, с. 535] следует, что оба действия на $\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*(Y), h_*(X))$ совпадают. Обозначим $h_*(h)$ через A и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
[Y, h\wedge\bar{h}^n\wedge X]\otimes\pi_*(X) & \longrightarrow & [Y, h\wedge\bar{h}^n\wedge X\wedge X] \\
\| & & \| \\
\mathrm{Hom}_A(h_*(Y), h_*(h\wedge\bar{h}^n\wedge X)\otimes X_* & & \| \\
\downarrow & & \| \\
\mathrm{Hom}_A(h_*(Y), h_*(h\wedge\bar{h}^n\wedge X)\otimes X_*) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(h_*(Y), h_*(h\wedge\bar{h}^n\wedge X\wedge X).
\end{array}$$

Из нее следует, что действие $\pi_*(X)$ на члене E_1 после его изоморфизма с $\mathrm{Hom}_A\big(h_*(Y), h_*\big(h\wedge\bar{h}^n\wedge X\big)\big)$ совпадает там с алгебраическим действием. В итоге получаем, что действие X_* на члене E_2 СП Адамса — Новикова является алгебраическим действием кольца X_* на $\mathrm{Ext}_A(h_*(Y), h_*(X))$.

Для определения кодействия коалгебры $X_*(X)$ на всех членах спектральной последовательности Адамса — Новикова нам потребуется следующая

Лемма 2. *Если $X_*(X)$ — плоский X_*-модуль, то для любых спектров Y и Z имеет место изоморфизм*

$$[Y, Z\wedge X\wedge X] \cong]Y, Z\wedge X]\otimes_{X_*}X_*(X).$$

Доказательство. Имеется каноническое естественное по Y и Z преобразование второго функтора в первый:

$$\nu(Y, Z)\colon [Y, Z\wedge X]\otimes_{X_*}X_*(X)\to[Y, Z\wedge X\wedge X].$$

Поскольку $X_*(X)$ есть плоский X_* модуль, то функтор $[Y, Z\wedge X]\otimes_{X_*}$ $\otimes_{X_*}X_*(X)$ при фиксированном Z является функтором когомологий, а преобразование ν — естественным преобразованием теорий когомологий. Чтобы доказать, что ν является эквивалентностью, достаточно проверить, что это есть эквивалентность на группах коэффициентов

$$\nu(S, Z)\colon [S, Z\wedge X]\otimes_{X_*}X_*(X)\to[S, Z\wedge X\wedge X].$$

Если рассматривать эти два функтора как гомологические функторы от Z, то мы получаем естественное преобразование одной теории гомологий в другую. Рассмотрим его на группах коэффициентов

$$\nu(S, S)\colon \pi_*(X)\otimes_{X_*}X_*(X)\to\pi_*(X\wedge X).$$

Это — изоморфизм. Следовательно, естественное преобразование теорий гомологий есть эквивалентность, а значит, и $\nu(Y, Z)$ — изоморфизм. Лемма доказана.

Предположим, что $X_*(X)$ — плоский X_*-модуль. Зададим кодействие коалгебры $X_*(X)$ на членах точного треугольника, порождающего спектральную последовательность Адамса — Новикова, по формулам

$$[Y, \bar{h}^n\wedge S\wedge X]\xrightarrow{1\wedge i\wedge 1}[Y, \bar{h}^n\wedge X\wedge X]\cong[Y, \bar{h}^n\wedge X]\otimes_{X_*}X_*(X),$$

$$[Y, h\wedge\bar{h}^n\wedge S\wedge X]\xrightarrow{1\wedge i\wedge 1}[Y, h\wedge\bar{h}^n\wedge X\wedge X]\cong[Y, h\wedge\bar{h}^n\wedge X]\otimes_{X_*}X_*(X).$$

Это кодействие согласовано с морфизмами точного треугольника и, следовательно, порождает кодействие во всех членах спектральной последовательности Адамса — Новикова. В члене E_∞ последнее кодействие присоединено к аналогичному кодействию на $[Y, X]$.

Если $h_*(Y)$ — свободный h_*-модуль конечного типа, то из леммы 1 следует, что $\mathrm{Ext}_A(h_*(Y), h_*(X))$ становится комодулем над $X_*(X)$. Кодействие в члене E_1 спектральной последовательности Адамса — Новикова порождено кодействием на резольвенте, состоящей из расширенных комодулей, которое продолжает кодействие на $h_*(X)$. Следовательно, в члене E_2 оно совпадает с алгебраическим кодействием. Таким образом, доказано

Предложение 1. *Если спектр X мультипликативен, то определено правое действие кольца $X_* = \pi_*(X)$ на всех членах спектральной последовательности Адамса — Новикова, которое на уровне члена E_2 является алгебраическим действием для функтора $\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*(Y), h_*(X))$, а на уровне члена E_∞ присоединено к каноническому действию в $X^*(Y)$. Если $h_*(Y)$ — свободный h_*-модуль конечного типа, а $X_*(X)$ — плоский X_*-модуль, то определено кодействие на всех членах спектральной последовательности Адамса — Новикова $E_r \to E_r \otimes_{X_*} X_*(X)$, которое на уровне члена E_2 является алгебраическим кодействием для функтора $\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*(Y), h_*(X))$, основанном на кодействии на $h_*(X)$, а на уровне члена E_∞ присоединено к каноническому кодействию на $X^*(Y)$.*

Естественно ожидать, что СП Адамса — Новикова возникает не только из диаграмм вида (1.1), в которых $W_n = h \wedge X_n$. Введем следующие определения.

Определение 1. Диаграмму типа (1.1) такую, что $h_*(j_n) = 0$ для всех n, где j_n — морфизм $X_{n+1} \to X_n$, будем называть *ацикличным комплексом для h_* ()*.

Определение 2. Диаграмму типа (1.1), в которой $W_n = h \wedge Z_n$ для всех n, где Z_n, вообще говоря, не совпадает с X_n, будем называть *относительно инъективным комплексом.*

Предложение 2. *Спектральная последовательность, возникающая из относительного инъективного ацикличного для h_* () комплекса, является спектральной последовательностью Адамса — Новикова в теории h_* ().*

Доказательство. У нас имеется две диаграммы: каноническая

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X & \bar h \wedge X \arrow[l] & \dots \arrow[l] & \bar h^n \wedge X \arrow[l] \arrow[dr] & & \bar h^{n+1} \wedge X \arrow[ll] & \arrow[l] \\
& h \wedge X \arrow[ul, leftarrow] \arrow[u, leftarrow, phantom] & & & h \wedge \bar h^n \wedge X \arrow[ur, leftarrow, phantom] &
\end{tikzcd}$$

и некоторая относительно инъективная ацикличная

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X & & \widetilde X_1 \arrow[ll, "\widetilde j_0"'] & \dots \arrow[l] & \widetilde X_n \arrow[l] & & \widetilde X_{n+1} \arrow[ll, "\widetilde j_n"'] & \arrow[l] \\
& \widetilde W_0 \arrow[ul, leftarrow, "\widetilde i_0"] \arrow[ur, "\delta_0"'] & & & & \widetilde W_n \arrow[ul, leftarrow, "\widetilde i_n"] \arrow[ur, "\delta_n"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Построим сравнение из первой во вторую. Определим морфизм g_0 как композицию

$$h \wedge X \xrightarrow{1 \wedge \widetilde i_0} h \wedge \widetilde W_0 = h \wedge h \wedge Z_0 \xrightarrow{\mu \wedge 1} h \wedge Z_0 = \widetilde W_0.$$

Морфизм f_1 определим как замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "1_X"'] & & X_1 \arrow[ll] \arrow[dd, "f_1"] \\
& W_0 \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dd, "g_0"] & \\
X \arrow[rr] \arrow[dr, "\widetilde i_0"'] & & \widetilde X_1 \\
& \widetilde W_0 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

до коммутативной. Морфизм g_1 определяем как композицию

$$W_1 = h\wedge X_1 \xrightarrow{1\wedge f_1} h\wedge \widetilde{X}_1 \xrightarrow{1\wedge \widetilde{i_1}} h\wedge \widetilde{W}_1 = h\wedge h\wedge Z_1 \xrightarrow{\mu\wedge 1} h\wedge Z_1 = \widetilde{W}_1.$$

Так же, как f_1, определяем f_2 и продолжаем процесс по индукции. Мы построим сравнение канонической резольвенты в рассматриваемую. Если применим функтор $h_*(\ )$, то получим сравнение относительно инъективных резольвент

$$\begin{array}{ccccc} h_*(X) \to h_*(h) \underset{h_*}{\otimes} h_*(X) \to \ldots \to h_*(h) \underset{h_*}{\otimes} h_*(\bar{h}^n \wedge X) \\ \| \qquad\qquad \downarrow (g_0)_* \qquad\qquad\qquad \downarrow (g_n)_* \\ h_*(X) \to h_*(h) \underset{h_*}{\otimes} h_*(Z_0) \to \ldots \to h_*(h) \underset{h_*}{\otimes} h_*(Z_n). \end{array}$$

Это сравнение порождает изоморфизм на уровне членов E_2, которые для обеих СП изоморфны $\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*(Y), h^*(X))$. Таким образом, спектральные последовательности совпадают, начиная с члена E_2, следовательно, они имеют изоморфные члены E_∞. Если эти СП сходятся, то фильтрации, определяемые в $[Y, X]^h$ двумя диаграммами типа (1.1), совпадают. Предложение доказано.

Определение 3. Диаграмму типа (1.1), являющуюся относительно инъективным ацикличным комплексом относительно $h^*(\ )$, будем называть *резольвентой Адамса* спектра X в теории $h_*()$. Если $X_n = \bar{h}_n \wedge \wedge X$, $W_n = h\wedge \bar{h}^n \wedge X$ и связаны они каноническими морфизмами, то такую резольвенту мы будем называть *канонической резольвентой Адамса.*

В работе [3] дано определение когомологической резольвенты Адамса

$$\begin{array}{c} X = X_0 \longleftarrow X_1 \leftarrow \ldots \leftarrow X_n \longleftarrow X_{n+1} \leftarrow \\ \beta_0 \searrow M_0 \nearrow \qquad\qquad \beta_n \searrow M_n \nearrow \end{array},$$

состоящей из точных треугольников, для которых $h^*(\beta_n)$ есть эпиморфизм, но не требуется, чтобы M_n имел вид $h\wedge W_n$. Однако для конкретных теорий когомологий, например $H^*(\ , Z/p)$ или $MU^*()$, резольвента Адамса строится так, что $M_n = h\wedge W_n$, где W_n — букет спектров сфер, вообще говоря, различных размерностей [3]. В этих случаях выполнено также следующее условие: гомоморфизм, индуцированный спариванием Кронекера

$$\gamma(X_n)\colon\ h_*(X_n) \to \mathrm{Hom}_{h^*}(h^*(X_n), h^*),$$

является мономорфизмом.

Предложение 3. *Если когомологическая резольвента Адамса такова, что $M_n = h\wedge W_n$ и $\gamma(X_n)$ — мономорфизм для всех n, то она является гомологической резольвентой Адамса.*

Доказательство. Нужно доказать только, что $h_*(\beta_n)$ — мономорфизм. Воспользуемся коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} h_*(X_n) & \xrightarrow{\gamma(X_n)} & \mathrm{Hom}_{h^*}(h^*(X_n), h^*) \\ \downarrow h_*(\beta_n) & & \downarrow \mathrm{Hom}_{h^*}(h^*(\beta_n), 1) \\ h_*(M_n) & \xrightarrow{\gamma(M_n)} & \mathrm{Hom}_{h^*}(h^*(M_n), h^*). \end{array}$$

Так как $h^*(\beta_n)$ — эпиморфизм, получаем, что $\mathrm{Hom}_{h^*}(h^*(\beta_n), 1)$ — мономорфизм. По условию $\gamma(X_n)$ — мономорфизм, следовательно, $h_*(\beta_n)$ — мономорфизм. Предложение доказано.

Предложение 4. *Если диаграмма* (1.1) *является резольвентой Адамса спектра X в теории $h_*()$, а спектр Z таков, что $h_*(Z)$ — плоский h_*-модуль, то следующая диаграмма*

$$\begin{array}{c} X_0\wedge Z \longleftarrow X_1\wedge Z \leftarrow \ldots \leftarrow X_n\wedge Z \leftarrow X_{n+1}\wedge Z \leftarrow \\ \searrow W_0\wedge Z \nearrow \qquad\qquad \searrow W_n\wedge Z \nearrow \end{array}$$

с очевидными морфизмами является резольвентой Адамса спектра $X \wedge Z$ в теории $h_*(\ )$.

Доказательство. Достаточно показать, что морфизм $j_s \wedge 1$ индуцирует нулевой морфизм в $h_*()$-гомологиях. Это вытекает из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} h_*(X_n) \underset{h_*}{\otimes} h_*(Z) \arrow[r, "(j_n)_*\otimes 1"] \arrow[d] & h_*(X_{n+1}) \underset{h_*}{\otimes} h_*(Z) \arrow[d] \\ h_*(X_n \wedge Z) \arrow[r, "(j_n\wedge 1)_*"] & h_*(X_{n+1} \wedge Z), \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки суть изоморфизмы. Предложение доказано.

§ 2. Конструкция четырехугольника спектральных последовательностей

Пусть имеются два мультипликативных спектра h и H, определяющие некоторые обобщенные теории гомологий $h_*()$ и $H_*()$ соответственно. Рассмотрим сначала каноническую резольвенту Адамса спектра X в теории $_*()$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] X & \bar{h}\wedge X \arrow[l] & \dots \arrow[l] & \bar{h}^n \wedge X \arrow[l] & \bar{h}^{n+1}\wedge X \arrow[l] & \arrow[l] \\ & h\wedge X \arrow[ul] \arrow[u] & & & h\wedge \bar{h}^n \wedge X \arrow[ul] \arrow[u] & \end{tikzcd}.$$

Теперь для каждого X_n возьмем свою каноническую резольвенту Адамса в теории $H_*()$ и соединим их члены очевидными морфизмами. Получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} \vdots & & & & & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{n,0} & \leftarrow & X_{n,1} & \leftarrow & \dots & \leftarrow & X_{n,m} & \leftarrow & X_{n,m+1} \leftarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{1,0} & \leftarrow & X_{1,1} & \leftarrow & \dots & \leftarrow & X_{1,m} & \leftarrow & X_{1,m+1} \leftarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \leftarrow & X_{0,1} & \leftarrow & \dots & \leftarrow & X_{0,m} & \leftarrow & X_{0,m+1} \leftarrow \dots, \end{array} \tag{2.1}$$

в которой $X_{m,n} = \bar{H}^n \wedge \bar{h}^m \wedge X$. Все участвующие в диаграмме (2.1) морфизмы можно считать вложениями. Поэтому можно взять своеобразный тотальный комплекс этой диаграммы

$$X \leftarrow \bar{h}\wedge X \cup \bar{H}\wedge X \leftarrow \dots \leftarrow \bigcup_{i=0}^{k} \bar{H}^i \wedge \bar{h}^{k-i} \wedge X \leftarrow. \tag{2.2}$$

Из построения видно, что

$$\bigcup_{i=0}^{k} \bar{H}^i \wedge \bar{h}^{k-i} \wedge X \cong (\overline{H\wedge h})^k \wedge X,$$

и фильтрация (2.2) является резольвентой Адамса в теории, порожденной спектром $h\wedge H$. Предположим теперь, что спектр H является модульным над спектром h, что в нашем случае равносильно существованию морфизма кольцевых спектров u: $h \to H$. Докажем, что диаграмма (2.2) является ацикличным комплексом в теории $H_*(\ )$. Эта диаграмма является ацикличным комплексом в теории $(H\wedge h)_*(\ )$, т. е. $(H\wedge h)_*(j_k) = 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} (H\wedge h)_*(\widetilde{X}_k) \arrow[d, shift right, "\varphi_*"'] & (H\wedge h)_*(\widetilde{X}_{k+1}) \arrow[l, "(\widetilde{j}_k)_*"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_*"'] \\ H_*(\widetilde{X}_k) \arrow[u, shift right, "(1\wedge i)_*"'] & H_*(\widetilde{X}_{k+1}), \arrow[l] \arrow[u, shift right, "(1\wedge i)_*"'] \end{tikzcd}$$

в которой $\widetilde{X}_k = \bigcup\limits_{i=0}^{k} \overline{H}^i \wedge \bar{h}^{k-i} \wedge X$; $\varphi\colon H \wedge h \to H$ — морфизм, определяющий модульную структуру спектра H; $i\colon S \to h$ — морфизм, соответствующий единице кольца h_*. Из равенства $\varphi(1 \wedge i) = 1_H$ следует, что $H_*(\widetilde{j}_k) = 0$. Поскольку относительная инъективность комплекса, определяемого диаграммой (2.2), очевидна, получаем, что (2.2) определяет спектральную последовательность Адамса — Новикова в теории $H_*()$.

Член E_1 СП Адамса — Новикова (в теории $H_*()$, определяемой тотальной фильтрацией, имеет вид $E_1^k = [Y, X_k^a]$, где

$$X_k^a = \bigcup_{i=0}^{k} \overline{H}^i \wedge \bar{h}^{k-i} \wedge X \Big/ \bigcup_{i=0}^{k+1} \overline{H}^i \wedge \bar{h}^{k+1-i} \wedge X = \bigvee_{i=0}^{k} H \wedge \overline{H}^i \wedge h \wedge \bar{h}^{k-i} \wedge X.$$

Вследствие диаграммы (2.1) в этом члене возникает фильтрация

$$F^q E_1^k = \left[Y, \bigvee_{i=0}^{k-q} H \wedge \overline{H}^i \wedge h \wedge \bar{h}^{k-i} \wedge X \right].$$

Член E_1^k с его дифференциалом можно рассматривать так же как тотальный комплекс бикомплекса $B^{s,q} = [Y, H \wedge \overline{H}^q \wedge h \wedge \bar{h}^s]$, в котором d_1 индуцирован композицией $h \wedge \bar{h} \to S \wedge \bar{h} \wedge \bar{h}^s \xrightarrow{i \wedge 1} h \wedge \bar{h}^{s+1}$, а d_2 — аналогичной композицией по H. Тогда фильтрация F^q будет фильтрацией по столбцам и возникающая СП будет первой СП бикомплекса. Ее член E_2 изоморфен $H_{\mathrm{I}} H_{\mathrm{II}}(B)$. Как обычно, это означает, что сначала нужно взять гомологии по столбцам, а затем — по строчкам.

Заметим, что если даны бикомплексы $B(Y_1, X_1)$ и $B(Y_2, X_2)$, то определено спаривание

$$B^{s,q}(Y_1, X_1) \otimes B^{s',q'}(Y_2, X_2) \to B^{s+s',q+q'}(Y_1 \wedge Y_2, X_1 \wedge X_2)$$

по формуле

$$\begin{aligned} B^{s,q}(Y_1, X_1) \otimes B^{s',q'}(Y_2, X_2) &= [Y_1, H \wedge \overline{H}^q \wedge h \wedge \bar{h}^s \wedge X] \otimes \\ &\otimes [Y_2, H \wedge \overline{H}^{q'} \wedge h \wedge \bar{h}^{s'} \wedge X_2] \to \\ &\to [Y_1 \wedge Y_2, H \wedge \overline{H}^q \wedge h \wedge \bar{h}^s \wedge X_1 \wedge H \wedge H^{q'} \wedge h \wedge \bar{h}^{s'} \wedge X_2] \to \\ &\to [Y_1 \wedge Y_2, H \wedge H \wedge \overline{H}^{q+q'} \wedge h \wedge h \wedge \bar{h}^{s+s'} \wedge X_1 \wedge X_2] \to \\ &\to [Y_1 \wedge Y_2, H \wedge \overline{H}^{q+q'} \wedge h \wedge \bar{h}^{s+s'} \wedge X_1 \wedge X_2], \end{aligned} \tag{2.3}$$

в которой второй морфизм индуцирован перестановкой, а третий — мультипликативной структурой спектров H и h. Для этого спаривания дифференциалы d_1 и d_2 будут дифференцированиями. Следовательно, порождаемая этим бикомплексом первая СП обладает мультипликативными свойствами.

Рассмотрим теперь член E_1 СП Адамса в теории $h_*()$. Он имеет вид $E_1^k = [Y, h \wedge \bar{h}^k \wedge X]$. Если профильтровать каждый объект $h \wedge \bar{h}^k \wedge X$ фильтрацией Адамса в теории $H_*()$, как показано на диаграмме (2.1), то в члене E_1 возникает фильтрация. Предположим теперь, что СП Адамса — Новикова в теории $H_*()$ для $[Y, h \wedge \bar{h}^k \wedge X]$, $k \geqslant 0$, начиная с члена E_2, тривиальна. Тогда объект, присоединенный к E_1 по рассматриваемой фильтрации, изоморфен $H_{\mathrm{II}}(B)$, где B есть введенный выше бикомплекс, а начальный член СП, сходящейся к члену E_2 СП Адамса — Новикова в теории $h_*()$, будет изоморфен $H_{\mathrm{I}} H_{\mathrm{II}}(B)$. Вспомним, что определяется спаривание СП Адамса — Новикова для $[Y_1, X_1]$ и $[Y_2, X_2]$ в СП Адамса — Новикова для $[Y_1 \wedge Y_2, X_1 \wedge X_2]$, которое на уровне члена E_1 дает спаривание

$$\begin{aligned} [Y_1, h \wedge \bar{h}^s \wedge X_1] \otimes [Y_2, h \wedge \bar{h}^{s'} \wedge X_2] &\to [Y_1 \wedge Y_2, h \wedge \bar{h}^s \wedge X_1 \wedge h \wedge \bar{h}^{s'} \wedge X_2] \to \\ &\to [Y_1 \wedge Y_2, h \wedge \bar{h}^{s+s'} \wedge X_1 \wedge X_2]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь последнее отображение индуцировано композицией перестановки и морфизма, порожденного мультипликативной структурой спектра h. Аналогично определено спаривание СП Адамса — Новикова в теории $H_*()$ для $[Y_1, h\wedge\overline{h}^s\wedge X_1]$ и $[Y_2, h\wedge\overline{h}^{s'}\wedge X_2]$ в СП Адамса — Новикова для $[Y_1\wedge Y_2, h\wedge h^{s+s'}\wedge X_1\wedge X_2]$, соответствующее морфизму (2.4). На уровне членов E_1 мы получим спаривание (2.3).

Таким образом, один и тот же начальный член, с учетом мультипликативной структуры, имеют две алгебраические СП, сходящиеся к начальным членам СП Адамса в теориях $H_*()$ и $h_*()$ соответственно, это и означает, что возникает четырехугольник спектральных последовательностей

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{II}}(B) & \Rightarrow & \mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*(Y), h_*(X)) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathrm{Ext}_{H_*(H)}(H_*(Y), H_*(X)) & \Rightarrow & [Y, X]. \end{array} \tag{2.5}$$

В этом четырехугольнике мы имеем две СП Адамса — Новикова в теориях $h_*()$ и $H_*()$ соответственно. Спектральную последовательность, обозначаемую верхней стрелкой, будем называть алгебраической спектральной последовательностью (АСП) Новикова, а СП, обозначаемую левой стрелкой — спектральной последовательностью Картана — Эйленберга.

Начальный член четырехугольника триградуирован. Обозначим эти градуировки через s, q и τ, где градуировка s соответствует фильтрации Адамса в теории $h_*()$, q — дополнительная, вертикальная градуировка и τ — топологическая градуировка. Фильтрации Адамса в теории $H_*()$ соответствует сумма градуировок $s+q$. Пусть дан элемент $x\in[Y, \overline{H}^q\wedge \wedge\overline{h}^s\wedge X]_\tau$ такой, что его проекция в начальный член четырехугольника $H_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{II}}(B)$ (т. е. образ при отображении $[Y, \overline{H}^q\wedge\overline{h}^s\wedge X]\to \to[Y, H\wedge\overline{H}^q\wedge h\wedge\overline{h}^s\wedge X]$) есть ненулевой элемент x_1. Тогда x_1 с помощью двух путей четырехугольника (2.5) определяет два множества элементов в $[Y, X]$. Оба этих множества содержат элемент, являющийся образом x в $[Y, X]$ при морфизме, возникающем из диаграммы (2.1). В этом смысле мы понимаем коммутативность диаграммы (2.5). Все дифференциалы участвующих в четырехугольнике СП уменьшают градуировку τ на 1. Дифференциал АСП действует следующим образом:

$$d_r\colon E_r^{q,s}\to E_r^{q+r,s+1},$$

а дифференциал d_r СП Картана — Эйленберга есть гомоморфизм

$$d_r\colon E_r^{q,s}\to E_r^{q-r,s+r+1}.$$

Мы считаем, что $H_{\mathrm{I}}(H_{\mathrm{II}}(B)) = E_1^{q,s}$.

§ 3. Алгебраические спектральные последовательности

Спектральные последовательности, связанные с $\mathrm{Ext}_{h_*(h)}(h_*(Y), h_*(X))$, могут возникать не обязательно из фильтрации Адамса. Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть C — бимодуль над некоторым коммутативным кольцом K, являющийся коалгеброй, а M и N — два C-комодуля. Предположим, что $\mathscr{R}$ — резольвента комодуля M, состоящая из расширенных C-комодулей. Предположим, что в $\mathscr{R}$ задана фильтрация

$$\mathscr{R}^s\supset\ldots\supset F^i\mathscr{R}^s\supset F^{i+1}\mathscr{R}^s\supset\ldots,$$

согласованная с дифференциалами. Эта фильтрация порождает некоторую фильтрацию в комплексе $\mathrm{Hom}_C(N, \mathscr{R})$, которая, в свою очередь, порождает спектральную последовательность, мы будем называть ее алгебраической спектральной последовательностью. Если фильтрация F есть фильтрация под-C-комодулями, то начальный член возникающей СП имеет вид

$$H\left(\sum_i \mathrm{Hom}_C(N, F^i\mathscr{R})/\mathrm{Hom}_C(N, F^{i+1}\mathscr{R})\right).$$

Задать фильтрацию можно следующим образом. Пусть в кольце K есть некоторая фильтрация $K \supset \ldots \supset F^iK \supset F^{i+1}K \supset \ldots$. Она порождает фильтрацию во всех K-модулях, которую сохраняют K-модульные гомоморфизмы. На бимодуле C возникают две фильтрации: левая и правая. Предположим, что они совпадают:

$$(F^iK)\cdot C = C\cdot F^iK. \tag{3.1}$$

Тогда в резольвенте $\mathscr{R}$, состоящей из расширенных комодулей, возникает фильтрация подкомодулями. Пусть C является плоским правым K-модулем и фильтрация F мультипликативна, $F^0K = K$, тогда F^1 есть идеал. Обозначим фактор-кольцо K/F^1 через L, а фактор-модуль C/F^1 — через C'. Структура коалгебры на C задает структуру коалгебры на C'. Действительно, имеем морфизмы

$$\begin{aligned} \psi/F_1\colon\ & C/F^1 \to C/F^1 \otimes_K C = C' \otimes_L C', \\ \varepsilon/F_1\colon\ & C/F^1 \to K/F^1 = C', \end{aligned} \tag{3.2}$$

удовлетворяющие необходимым условиям. Более того, из (3.1) следует, что для любого C-комодуля M с кодействием ψ_M имеется кодействие

$$\widetilde{\psi}_M\colon \widetilde{M} \to C \otimes_K \widetilde{M} = C' \otimes_L \widetilde{M}, \tag{3.3}$$

превращающее присоединенный модуль $\widetilde{M}$ в комодуль над коалгеброй C'. Из условия (3.1) следует также, что

$$\widetilde{C \otimes_K Q} \cong C \otimes_K \widetilde{Q}$$

для любого K-модуля Q. Вспомним теперь процесс построения стандартной резольвенты комодуля M. Имеем точную последовательность

$$0 \to M \xrightarrow{\psi_M} C \otimes_K M \xrightarrow{p} \Gamma_1 \to 0.$$

Возьмем последовательность, к ней присоединенную

$$\widetilde{M} \xrightarrow{\widetilde{\psi}_M} C' \otimes_L \widetilde{M} \xrightarrow{\widetilde{p}} \widetilde{\Gamma}_1$$

и докажем ее точность. Действительно, $\widetilde{\psi}_M$ есть мономорфизм, так как является кодействием, а $\widetilde{p}$, очевидно, эпиморфизмом. Проверим точность в среднем члене. Пусть $x \in F^i(C \otimes_K M)$ таков, что $p(x) \in F^{i+1}\Gamma_1$. Из определения фильтрации и модуля Γ_1 следует, что существует элемент $m \in \mathrm{Im}\,\psi_M$ такой, что $x - m = \sum_{j=1}^{n} f_j X_j$, где $f_j \in F^{i+1}K$, $x_j \in C \otimes_K M$, $j = 1, \ldots, n$. Следовательно, класс элемента x в $F^i(C \otimes_K M)/F^{i+1}$ есть образ класса элемента m' такого, что $\psi_M(m') = m$, $m' \in F^iM$ вследствие мономорфности $\widetilde{\psi}_M$. В силу точности рассматриваемой последовательности после перехода к присоединенным объектам стандартная резольвента $\mathscr{B}$ C-комодуля M превращается в стандартную резольвенту C'-комодуля $\widetilde{M}$. Для всех i имеются цепочки изоморфизмов

$$\begin{aligned} & F^i\mathrm{Hom}_C(N, \mathscr{B}_n) \cong \mathrm{Hom}_C(N, F^iC \otimes_K \Gamma_n) \cong \\ & \cong \mathrm{Hom}_C(N, C \otimes_K F^i\Gamma_n) \cong \mathrm{Hom}_K(N, F^i\Gamma_n), \end{aligned}$$

такие что i-тая цепочка согласована с $(i+1)$-той. Предположим, что N проективен как K-модуль. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_C(N, C \otimes_K F^i\Gamma_n)/\mathrm{Hom}_C(N, C \otimes_K F^{i+1}\Gamma_n) & \to & \mathrm{Hom}_C(N, C \otimes_K F^i\Gamma_n/F^{i+1}\Gamma_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_K(N, F^i\Gamma_n)/\mathrm{Hom}_K(N, F^{i+1}\Gamma_n) & \to & \mathrm{Hom}_K(N, F^i\Gamma_n/F^{i+1}\Gamma_n), \end{array}$$

в которой горизонтальные стрелки определяются из канонических проекций на фактор-модуль

$$C \otimes_K F^i\Gamma_n \to C \otimes_K F^i\Gamma_n/C \otimes_K F^{i+1}\Gamma_n \cong$$
$$\cong C \otimes_K (F^i\Gamma_n/F^{i+1}\Gamma_n),\ F^i\Gamma_n \to F^i\Gamma_n/F^{i+1}\Gamma_n),$$

а вертикальные суть изоморфизмы. Из проективности N следует, что нижняя стрелка есть изоморфизм, значит, верхняя — также изоморфизм. Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_C(N,\ C \otimes_K F^i\Gamma_n/F^{i+1}) & \to & \mathrm{Hom}_{C'}(N/F^1,\ F^i\mathscr{B}_n/F^{i+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_K(N,\ F^i\Gamma_n/F^{i+1}) & \to & \mathrm{Hom}_L(N/F^1,\ F^i\Gamma_n/F^{i+1}), \end{array}$$

в которой горизонтальные стрелки определяются из того, что гомоморфизм из N в объект вида F^i/F^{i+1} равен нулю на подмодуле F^1N. Вертикальные стрелки есть канонические изоморфизмы, нижняя также изоморфизм, следовательно, и верхняя является изоморфизмом. В итоге этих рассмотрений получаем изоморфизм

$$\widetilde{\mathrm{Hom}}_C(N,\ \mathscr{B}_n) \cong \mathrm{Hom}_{C'}(N/F^1,\ \widetilde{\mathscr{B}}_n),$$

согласованный с дифференциалами. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Начальный член алгебраической спектральной последовательности изоморфен* $\mathrm{Ext}_{C'}(N/F^1,\ \bar{M})$.

Перейдем к вопросу сходимости рассматриваемых СП. Для СП Картана — Эйленберга сходимость обеспечивается тем, что это — СП бикомплекса первой четверти. Для АСП, возникающих из фильтрации в кольце K, очевидно, что необходимым условием сходимости является следующее: $\bigcap\limits_i F^iK = 0$. В столь общем случае проблема сходимости рассматриваемой спектральной последовательности, на наш взгляд, необозрима, поэтому сделаем дополнительные предположения. Пусть K, C, M и N — модули конечного типа над локальным кольцом Z_p. Мы по-прежнему считаем фильтрацию F мультипликативной и $F^0K = K$. Предположим, что $p \cdot e \in F^1K$, где e — единица кольца K. Возьмем резольвенту $\mathscr{R}$ C-комодуля M, состоящую из расширенных C-комодулей и такую, что $\mathrm{Hom}_C(N,\ \mathscr{R})$ есть Z_p-модуль конечного типа. Поскольку C есть Z_p-модуль конечного типа, в качестве $\mathscr{R}$ можно взять стандартную резольвенту. Она состоит из расширенных комодулей, являющихся Z_p-модулями конечного типа. Введем следующие объекты:

$$R^k = \bigcap_{r \geqslant 0} \mathrm{Im}\left(H\left(F^{k+r}\,\mathrm{Hom}_C(N,\ \mathscr{R})\right) \to H\left(F^k\,\mathrm{Hom}_C(N,\ \mathscr{R})\right)\right),$$
$$k = 0,\ 1,\ \ldots.$$

Фильтрация в $\mathrm{Hom}_C(N,\ \mathscr{R})$ порождает там топологию, в которой дифференциалы являются непрерывными отображениями. Рассмотрим топологию в кольце K, порожденную фильтрацией F. По условию всякая однородная компонента K есть конечная прямая сумма Z_p и $Z/_{p^j}$ Каждая образующая a_i принадлежит некоторому F^{n_i} и не принадлежит F^{n_i+1}. Пусть $n = \max n_i$. Обозначим p-адическую фильтрацию в K через $\widetilde{F}$. Имеем

$$F^i \supset \widetilde{F}^i \supset F^{n+i\cdot\deg p}, \tag{3.4}$$

где $\deg p$ определяется из условий $p \in F^{\deg p}$, $p \notin F^{1+\deg p}$. Следовательно, топология в K, порожденная фильтрацией F, совпадает с p-адической топологией. Из (3.4) видно также, что топология в $\mathrm{Hom}_C(N,\ \mathscr{R})$, порожденная фильтрацией F, совпадает с p-адической топологией, в которой всякий Z_p-подмодуль модуля конечного типа замкнут.

Докажем, что $R^k = 0$ для всех k. Пусть $z \in F^k\,\mathrm{Hom}_C(N,\ \mathscr{R})$ есть представитель нетривиального класса гомологий в R^k. Поэтому для всякого r существует элемент b_r, принадлежащий группе границ $\mathrm{Hom}_C(N, \mathscr{R})$

такой, что $z+b_r\in F^{k+r}\operatorname{Hom}_C(N,\mathcal{R})$. Следовательно, $z=\lim(-b_r)$. Но поскольку подмодуль границ замкнут, то z ему принадлежит и, значит, представляет тривиальный класс гомологий. В результате $R^k=0$. Эти условия являются достаточными для сходимости спектральной последовательности [7, с. 384—386].

Теорема 2. *При указанных выше предположениях алгебраическая спектральная последовательность сходится к* $\operatorname{Ext}_C(N, M)$.

В § 2 были рассмотрены мультипликативные свойства СП с начальным членом $H_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{II}}(B)$. Изучим теперь мультипликативные свойства АСП, возникающей из произвольной мультипликативной фильтрации, порожденной фильтрацией в кольце коэффициентов h_*. Пусть $\mathcal{B}(Z)$ обозначает стандартную резольвенту комодуля $h_*(Z)$, состоящую из расширенных $h_*(h)$-комодулей, эта резольвента строится из резольвенты Адамса спектра Z. Определено спаривание спектральных последовательностей Адамса — Новикова в теории $h_*(\ )$ для $\pi_*(X_1)$ и $\pi_*(X_2)$ в спектральную последовательность для $\pi_*(X_1\wedge X_2)$. На уровне члена E_1 оно задается композицией

$$\operatorname{Hom}_A(h_*,\mathcal{B}(X_1))\otimes\operatorname{Hom}_A(h_*,\mathcal{B}(X_2))\to\operatorname{Hom}_A(h_*,\mathcal{B}(X_1)\otimes_{h_*}\mathcal{B}(X_2))\to$$
$$\to\operatorname{Hom}_A(h_*,\mathcal{B}(X_1\wedge X_2)). \tag{3.5}$$

Структура A-комодуля на $\mathcal{B}(X)\otimes_{h_*}\mathcal{B}(Y)$ задается следующим образом. Возьмем кодействие по каждому сомножителю, а затем перестановку:

$$\mathcal{B}_n(X_1)\otimes\mathcal{B}_m(X_2)\to(A\otimes_{h_*}\mathcal{B}_n(X_1))\otimes_{h_*}(A\otimes\mathcal{B}_m(X_2))\to$$
$$\to A\otimes_{h_*}A\otimes_{h_*}\mathcal{B}_n(X_1)\otimes_{h_*}\mathcal{B}_m(X_2).$$

Рассмотрим последний объект. Здесь первое тензорное произведение связывает две левые структуры на алгебре A, второе — правую структуру на первом экземпляре A и левую структуру на $\mathcal{B}_n(X_1)$, третье — правую структуру на втором экземпляре A и левую на $\mathcal{B}_m(X_2)$. Мультипликативная структура спектра h порождает морфизм $h_*(h)\otimes_{h_*}h_*(h)\to h_*(h)$. Здесь тензорное произведение связывает левые структуры на $h_*(h)$. Добавим к композиции (3.5) этот морфизм, получим кодействие

$$\psi_\otimes\colon\mathcal{B}_n(X_1)\otimes\mathcal{B}_m(X_2)\to A\otimes_{h_*}\mathcal{B}_n(X_1)\otimes_{h_*}\mathcal{B}_m(X_2),$$

удовлетворяющее необходимым условиям. Точно так же определяется морфизм из $\mathcal{B}(X_1)\otimes_{h_*}\mathcal{B}(X_2)$ в стандартную резольвенту комодуля $h_*(X_1)\otimes_{h_*}h_*(X_2)$ над A. Предположим, что для фильтрации и алгебры A выполнено условие (3.1): $F^ih_*\cdot A=A\cdot F^ih_*$. Спаривание $h_*(X_1)\otimes_Z h_*(X_2)\to h_*(X_1\wedge X_2)$, где тензорное произведение рассматривается над целыми числами, индуцирует спаривание присоединенных объектов

$$\tilde h_*(X_1)\otimes_L\tilde h_*(X_2)\to\tilde h_*(X_1\wedge X_2). \tag{3.6}$$

Перейдем к присоединенным объектам в композиции (3.5). Имеем естественные гомоморфизмы

$$\tilde{\mathcal{B}}_n(X_1)\otimes_L\tilde{\mathcal{B}}_m(X_2)=$$
$$=(A/F^1\otimes_L\tilde\Gamma_n(X_1))\otimes_L(A/F^1\otimes_L\tilde\Gamma_m(X_2))\to$$
$$\to\widetilde{\mathcal{B}_n(X_1)\otimes_{h_*}\mathcal{B}_m(X_2)},$$

с помощью которых получаем, что отображение, присоединенное к композиции (3.5), определяет спаривание

$$\operatorname{Ext}_{A/F^1}(L,\tilde h_*(X_1))\otimes\operatorname{Ext}_{A/F^1}(L,\tilde h_*(X_2))\to\operatorname{Ext}_{A/F^1}(L,\tilde h_*(X_1\wedge X_2)),$$

построенное с использованием гомоморфизма (3.6). Таким образом, доказана

Теорема 3. *Спаривание, имеющееся на уровне члена E_1 алгебраической спектральной последовательности, есть алгебраическое спаривание для функтора* $\mathrm{Ext}_{A/F^1}(L, -)$.

Интересная ситуация возникает, когда фильтрация F в объектах $h_*(X)$, возникшая из фильтрации в кольце h_*, связана с теорией гомологий $H_*(\ )$. Именно, мы будем предполагать, что морфизм $u\colon h \to H$ индуцирует эпиморфизм в гомотопиях, ядром которого является F^1h_*:

$$0 \to F^1h_* \to h_* \xrightarrow{u_*} H_* \to 0,$$

а в $H_*(\ )$-гомологиях индуцирует мономорфизм

$$\pi_*(1_H \wedge u)\colon \pi_*(H \wedge h) \to \pi_*(H \wedge H).$$

Это означает, что F^1h_* состоит из элементов первой фильтрации Адамса кольца h_* в теории $H_*(\ )$. Предположим также, что морфизм u индуцирует в $h_*(\ )$-гомологиях эпиморфизм, ядром которого, очевидно, является $F^1h_*(h)$:

$$0 \to F^1h_*(h) \to h_*(h) \xrightarrow{\pi_*(u \wedge 1)} H_*(h) \to 0.$$

Последнее означает, что $A/F^1 \cong H_*(h)$, причем существует правое действие кольца H_* на $H_*(h)$, определенное из правого действия h_* на $h_*(h)$:

$$H_*(h) \otimes_Z H_* = \pi_*(h \wedge h)/F^1 \otimes \pi_*(h)/F^1 \to \pi_*(h \wedge h)/F^1 = H_*(h).$$

Согласованность этого действия с правым действием H_* на $H_*(H)$ вытекает из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\pi_*(h \wedge h) \otimes \pi_*(h) \arrow[r, "(u\wedge 1)_*\otimes u_*"] \arrow[d] & \pi_*(H \wedge h) \otimes \pi_*(H) \arrow[r, "(1\wedge u)_*\otimes 1"] \arrow[d] & \pi_*(H \wedge H) \otimes \pi_*(H) \arrow[d] \\
\pi_*(h \wedge h) \arrow[r, "(u\wedge 1)_*"] & \pi_*(H \wedge h) \arrow[r, "(1\wedge u)_*"] & \pi_*(H \wedge H),
\end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки суть соответствующие действия. Определим тензорное произведение $\pi_*(H \wedge h) \otimes_{H_*} \pi_*(H \wedge h)$ с помощью построенного действия на левом сомножителе, а на правом сомножителе — это стандартное левое действие. Обозначим $H_*(H)$ через $\mathscr{A}$ $H_*(h)$ — через $\mathscr{A}'$. Из формул (3.2) следует, что на $\mathscr{A}'$ определена структура коалгебры над H_* с морфизмами $\psi_{\mathscr{A}'}\colon \mathscr{A}' \to \mathscr{A}' \otimes_{H_*} \mathscr{A}'$, $\varepsilon\mathscr{A}'\colon \mathscr{A}' \to H_*$. Согласованность этой структуры со структурой коалгебры на $\mathscr{A}$ вытекает из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\pi_*(h \wedge h) \arrow[rr, "\psi_{\mathscr{A}}"] \arrow[dr, "(u\wedge 1)_*"] \arrow[dd, "(u\wedge u)_*"'] & & \pi_*(h\wedge h)\otimes_{h_*}\pi_*(h\wedge h) \arrow[dr, "(u\wedge 1)_*\otimes(u\wedge 1)_*"] \arrow[dd, "(u\wedge u)_*\otimes(u\wedge u)_*"'] & \\
& \pi_*(H\wedge h) \arrow[rr, "\psi_{\mathscr{A}'}"] \arrow[dl, "(1\wedge u)_*"] & & \pi_*(H\wedge h)\otimes_{H_*}\pi_*(H\wedge h) \arrow[dl, "(1\wedge u)_*\otimes(1\wedge u)_*"] \\
\pi_*(H\wedge H) \arrow[rr, "\psi_{\mathscr{A}}"] & & \pi_*(H\wedge H)\otimes_{H_*}\pi_*(H\wedge H) &
\end{tikzcd} \qquad (3.7)$$

в которой изначально коммутативны треугольники и верхний параллелограмм. Предположим теперь, что спектр X таков, что морфизм

$\pi_*(u \wedge 1)\colon \pi_*(h \wedge X) \to \pi_*(\sigma_*(H \wedge X)$ является эпиморфизмом. Ядром его, очевидным образом, будет $F^1 h_*(X)$. Из формулы (3.3) следует, что определено кодействие $\psi_{\widetilde{h}_*(X)}\colon \widetilde{h}_*(X) \to \mathscr{A}' \otimes_{H_*} \widetilde{h}_*(X)$ и, в частности, кодействие $\psi/F^1\colon H_*(X) \to \mathscr{A}' \otimes_{H_*} H_*(X)$. Из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\pi_*(h \wedge X) \arrow[rr, "\psi_{h_*(X)}"] \arrow[dd, "(u \wedge 1)_*"'] \arrow[dr, "(u \wedge 1)_*"] & & \pi_*(h \wedge h) \otimes_{h_*} \pi_*(h \wedge X) \arrow[dd, "(u \wedge u)_* \otimes (u \wedge 1)_*"'] \arrow[dr, "(u \wedge 1)_* \otimes (u \wedge 1)_*"] & \\
& \pi_*(H \wedge X) \arrow[rr, "\psi/F^1"] \arrow[dl, "1"] & & \pi_*(H \wedge h) \otimes_{H_*} \pi_*(H \wedge X) \arrow[dl, "(1 \wedge u)_* \otimes 1"] \\
\pi_*(H \wedge X) \arrow[rr, "\psi_{H_*(X)}"] & & \pi_*(H \wedge H) \otimes_{H_*} \pi_*(H \wedge X) &
\end{tikzcd}$$

так же, как из диаграммы (3.7), получаем согласованность кодействия ψ/F^1 с кодействием коалгебры $H_*(H)$ на $H_*(X)$.

Предположим, что спектр X таков, что имеем изоморфизм $\widetilde{h}_*$-модулей:

$$\widetilde{h}_*(X) \cong \widetilde{h}_* \otimes_L H_*(X).$$

Это условие будет выполнено, если $h_*(X)$ есть плоский h_*-модуль; в частности, имеем изоморфизмы

$$\widetilde{h}_*(h) \cong \widetilde{h}_* \otimes_L H_*(h), \quad \widetilde{h}_*(h) \cong H_*(h) \otimes_L \widetilde{h}_*$$

соответственно левых и правых $\widetilde{h}_*$-модулей. Вспомним формулу для кодействия коалгебры A на $h_* \otimes_{h_*} h_*(X)$. Пусть для $\varkappa \in h_*$, $x \in h_*(X)$ имеем следующие выражения для кодействия A:

$$\psi_{h_*}(\varkappa) = \sum_i a_i' \otimes \varkappa_i, \quad \psi_{h_*(X)}(x) = \sum_j a_j'' \otimes x_j,$$

тогда

$$\psi_{h_* \otimes h_*(X)}(\varkappa \otimes x) = \sum_{i,j} (-1)^{(\deg \varkappa_i) \cdot \deg(a_j'')} a_i' a_j'' \otimes \varkappa_i \otimes x_j.$$

Перейдя к присоединенным объектам, получим, что кодействие коалгебры $\mathscr{A}'$ на $\widetilde{h}_*(X) \cong \widetilde{h}_* \otimes_L H_*(X)$, соответствующее кодействию A на $h_*(X)$, получается аналогичным образом из кодействия $\mathscr{A}'$ на $\widetilde{h}_*$ и на $H_*(X)$. Последнее же кодействие, как было замечено, является ограничением на $\mathscr{A}'$ канонического кодействия коалгебры $H_*(H)$ на $H_*(X)$. Для того чтобы воспользоваться теоремой 1 для описания начального члена АСП в рассматриваемом случае, нужно, чтобы спектр Y был таким, что $h_*(Y)$ есть проективный h_*-модуль. Заметим, что это требование возникает при построении СП Адамса — Новикова в теории $h_*(\ )$. Пусть морфизм $\pi_*(u \wedge 1)\colon \pi_*(h \wedge Y) \to \pi_*(H \wedge Y)$ будет эпиморфизмом.

Теорема 4. *При перечисленных выше условиях начальный член алгебраической спектральной последовательности изоморфен* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}'}(H_*(Y), \widetilde{h}_* \otimes H_*(X))$, *где кодействие $\mathscr{A}'$ на $H_*(Y)$ и $H_*(X)$ возникает из канонического кодействия $\mathscr{A}$. Спаривание, имеющееся на уровне члена E_1* АСП, *возникает из алгебраического спаривания для функтора* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}'}(-, -)$, *умножения в кольце $\widetilde{h}_*$ и мультипликативности спектра H.*

Рассмотрим, наконец, случай, когда фильтрация в h_*-модулях $h_*(X)$ является фильтрацией Адамса в теории $H_*(\ )$. Именно с помощью этой фильтрации строилась АСП из четырехугольника. Мы докажем, что, если $h_*(X)$ — плоский h_*-модуль, то фильтрация Адамса в $h_*(X)$ задается фильтрацией в кольце h_* (следовательно, применимы рассмотрения этого параграфа). Вспомним о мультипликативных свойствах СП Адамса — Новикова. Поскольку $h_*(X)$ является модулем над h_*, определено левое действие СП Адамса — Новикова для h_* в теории $H_*(\ )$ на СП Адамса — Новикова для $h_*(X)$ и $(F^i h_*)\cdot h_*(X)\subset F^i h_*(X)$, где F обозначает фильтрацию Адамса.

Предложение 5. *Если h_*-модуль $h_*(X)$ является плоским, то* $(F^i h_*)\cdot h_*(X)=F^i h_*(X)$.

Доказательство. Поскольку $h_*(X)$ — плоский h_*-модуль, имеем изоморфизм

$$\pi_*(\overline{H}^s\wedge h)\otimes_{h_*}\pi_*(h\wedge X)\to\pi_*(\overline{H}^s\wedge h\wedge X),$$

основанный на мультипликативной структуре спектра h. Следовательно, имеем эпиморфизм

$$\pi_*(\overline{H}^s\wedge h)\otimes_Z\pi_*(h\wedge X)\to\pi_*(\overline{H}^s\wedge h\wedge X),$$

где тензорное произведение рассматривается над целыми числами. Утверждение предложения 5 следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}\pi_*(\overline{H}^s\wedge h)\underset{Z}{\otimes}\pi_*(h\wedge X) & \to & \pi_*(\overline{H}^s\wedge h\wedge X)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \pi_*(h)\otimes_Z\pi_*(h\wedge X) & \to & \pi_*(h\wedge X),\end{array}$$

в которой вертикальные стрелки связаны с фильтрацией Адамса, а горизонтальные возникают из мультипликативной структуры.

Алгебра $h_*(h)$ является бимодулем над h_*, следовательно, все члены спектральной последовательности Адамса — Новикова для $h_*(h)$ являются бимодулями над соответствующими членами спектральной последовательности Адамса — Новикова для h_*, а также $F^i h_*(h)\supset h_*(h)\times\times F^i h_*$.

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$F^i h_*(h)=h_*(h)\cdot F^i h_*.$$

Доказательство. Имеем цепочку равенств $F^i(h_*(h))= = F^i h_*\cdot h_*(h)=c^2(F^i h_*\cdot h_*(h))=c(h_*(h)\cdot F^i h_*)\subset c(F^i h_*\cdot h_*(h))=h_*(h)\times\times\cdot F^i h_*$, где инволюция c индуцирована перестановкой $T\colon h\wedge h\to h\wedge h$. Лемма доказана.

Таким образом, фильтрация Адамса на алгебре A удовлетворяет условию (3.1). Мы будем предполагать, что h_*-модуль $h_*(X)$ плоский; поскольку $h_*(h)$ также плоский, то и $h_*(\overline{h})$ плоский. Следовательно, стандартная резольвента комодуля $h_*(X)$ состоит из плоских модулей, а, значит, фильтрация Адамса в ней определяется фильтрацией Адамса в кольце h_*. Заметим, что морфизм

$$\pi_*(u\wedge 1)\colon\pi_*(h\wedge h)\to\pi_*(H\wedge h)$$

есть эпиморфизм. Для дальнейшего нам потребуется следующая

Лемма 4. *Пусть даны два спектра X_1 и X_2 такие, что морфизмы $\pi_*(u\wedge 1_{X_i})\colon\pi_*(h\wedge X_i)\to\pi_*(H\wedge X_i)$, $i=1, 2$, суть эпиморфизмы, $h_*(X_1)$ и $H_*(X_1)$ — плоские h_*- и H_*-модули соответственно. Тогда морфизм $\pi_*(u\wedge 1_{X_1\wedge X_2})\colon\pi_*(h\wedge X_1\wedge X_2)\to\pi_*(H\wedge X_1\wedge X_2)$ есть эпиморфизм.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} h_*(X_1)\otimes_{h_*}h_*(X_2) & \to & H_*(X_1)\otimes_{H_*}H_*(X_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_*(X_1\wedge X_2) & \to & H_*(X_1\wedge X_2), \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки суть изоморфизмы, что следует из условий леммы.

Модули $h_*(\bar h)$ и $H_*(\bar h)$ являются плоскими h_*- и H_*-модулями соответственно, поскольку являются прямыми слагаемыми плоских модулей $h_*(h)$ и $H_*(h)$. Ввиду леммы 4 имеем эпиморфизмы $\pi_*(u\wedge 1)$: $\pi_*(h\wedge \bar h^s\wedge X)\to\pi_*(H\wedge\bar h^s\wedge X)$ для всех $s\geqslant 0$. Из предложения 4 следует, что морфизмы $u\wedge 1_h$: $h\wedge h\to H\wedge h$, $u\wedge 1$: $h\wedge\bar h^s\wedge X\to H\wedge$ $\wedge\,\bar h^s\wedge X$ могут быть включены в качестве первых морфизмов в резольвенты Адамса спектров $h\wedge h$ и $h\wedge\bar h^s\wedge X$ в теории $H_*(\ )$. Из эпиморфности индуцируемых ими морфизмов в гомотопиях получаем, что нулевые строки всех членов СП Адамса — Новикова для $h_*(h)$ и $h_*(\bar h^s\wedge X)$ в теории $H_*(\ )$ суть $H_*(h)$ и $H_*(\bar h^s\wedge X)$ соответственно. Представим теперь $H_*(h\wedge h)$ и $H_*(h\wedge\bar h^s\wedge X)$ как расширенные $H_*(h)$-комодули

$$H_*(h\wedge h)\cong H_*(h)\otimes_{H_*}H_*(h),$$

$$H_*(h\wedge\bar h^s\wedge X)\cong H_*(h)\otimes_{H_*}H_*(\bar h^s\wedge X)$$

и воспользуемся леммой 1. Получим изоморфизмы

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr A}(H_*,\ H_*(h\wedge h))\cong \mathrm{Ext}_{\mathscr A}(H_*,\ H_*(h))\underset{H_*}{\otimes}H_*(h),$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr A}(H_*,\ H_*(h\wedge\bar h^s\wedge X))\cong \mathrm{Ext}_{\mathscr A}(H_*,\ H_*(h))\otimes_{H_*}H_*(\bar h^s\wedge X),$$

согласованные с левым действием $\mathrm{Ext}_{\mathscr A}(H_*,\ H_*(h))$ на рассматриваемых объектах. Поскольку из нулевых строк все дифференциалы тривиальны, получаем, что рассматриваемые СП Адамса — Новикова определяются СП для $\pi_*(h)$. Вспомним, что при $Y=S$ тривиальность СП Адамса — Новикова для $\pi_*(h\wedge\bar h^s\wedge X)$ является условием построения четырехугольника СП. Из наших рассмотрений следует, что это эквивалентно тривиальности СП Адамса — Новикова для $\pi_*(h)$. Предполагая тривиальность этой СП, получаем изоморфизмы модулей над кольцом $\tilde h_*=\mathrm{Ext}_{\mathscr A}(H_*,\ H_*(h))$:

$$\widetilde{h_*(h)}\cong\tilde h_*\otimes_{H_*}H_*(h)\cong \mathrm{Ext}_{\mathscr A}(H_*,H_*(h))\otimes_{H_*}H_*(h),$$

$$\widetilde{h_*(\bar h^s\wedge X)}\cong\tilde h_*\otimes_{H_*}H_*(\bar h^s\wedge X)\cong$$

$$\cong \mathrm{Ext}_{\mathscr A}(H_*,H_*(h))\otimes_{H_*}H_*(\bar h^s\wedge X),$$

где $\widetilde{h_*(h)}$ и $\widetilde{h_*(\bar h^s\wedge X)}$

— объекты, присоединенные к $h_*(h)$ и $h_*(\bar h^s\wedge X)$ по фильтрации Адамса. Поскольку $\widetilde{h_*(h)}$ является $\tilde h_*$-бимодулем, то имеем также изоморфизм правых $\tilde h_*$-модулей:

$$\tilde h_*(h)\cong H_*(h)\otimes_{H_*}\tilde h_*\cong H_*(h)\otimes_{H^*}\mathrm{Ext}_{\mathscr A}(H_*,\ H_*(h)).$$

Из предложения 1 и следствия 1 получаем, что кодействие $H_*(h)$ на $\tilde h_*=\mathrm{Ext}_{\mathscr A}(H_*,\ H_*(h))$ есть стандартное кодействие, определяемое через $\psi_{\mathscr{A}'}$:

$$\operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}(H_*, H_*(h)) \to \operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}(H_*, H_*(h) \otimes_{H_*} H_*(h)) \cong$$
$$\cong \operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}(H_*, H_*(h)) \otimes_{H_*} H_*(h).$$

В итоге получаем описание начального члена четырехугольника СП в рассматриваемой ситуации.

Теорема 5. *При всех перечисленных выше условиях начальный член четырехугольника спектральных последовательностей* $H_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{II}}(B)$ *изоморфен*

$$\operatorname{Ext}_{H_*(h)}(H_*, \operatorname{Ext}_{H_*(H)}(H_*, H_*(h)) \otimes_{H_*} H_*(X)),$$

где кодействие коалгебры $H_*(h)$ *на* $\operatorname{Ext}_{H_*(H)}(H_*, H_*(h))$ *является каноническим кодействием, а кодействие на* $H_*(X)$ *возникает из кодействия* $H_*(H)$.

§ 4. Примеры

Классической ситуацией, которая рассматривалась в [2], является следующая: $h = BP$, $H = HZ/p$, где p — простое число, X есть спектр, такой что $H_*(X, Z_p)$ не имеют кручения. Двойственная к алгебре Квиллена A канонически эпиморфно отображается на коалгебру $\mathscr{A}'_*$, двойственную к фактор-алгебре алгебры Стинрода $\mathscr{A}_p/(Q_0)$,

$$H_*(BP, Z/p) \cong \mathscr{A}'_*:$$
$$A_* \to \mathscr{A}'_* \to \mathscr{A}_*,$$

где $\mathscr{A}_*$ — коалгебра, двойственная к алгебре Стинрода $\mathscr{A}_p$. Спектральная последовательность Адамса для спектра BP тривиальна, и все условия, необходимые для построения четырехугольника СП, будут выполнены. Фильтрация Адамса в кольце BP_* есть фильтрация степенями максимального идеала m этого кольца. Начальный член четырехугольника в этом случае изоморфен

$$\operatorname{Ext}_{\mathscr{A}'_*}(Z/p, \operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}(Z/p, \mathscr{A}') \otimes H_*(X, Z/p)),$$

что аналогично когомологическому варианту этой формулы (0.1). Второй СП четырехугольника с этим начальным членом будет СП Картана — Эйленберга [7, с. 419], возникающая в ситуации, когда рассматривается алгебра Стинрода $\mathscr{A}_p$ и ее нормальная подалгебра Q, порожденная операциями Q_i, $i \geqslant 0$.

Полезной оказалась СП, порожденная фильтрацией в BP_*, не являющейся фильтрацией Адамса [5]. Именно, положим $F^1BP_* = m$ и $p \in F^iBP_*, i > 1$. Начальный член АСП в этом случае вычисляем с помощью теоремы 4; он изоморфен

$$\operatorname{Ext}_{\mathscr{A}'_*}(Z/p, \widetilde{BP}_* \otimes H_*(X, Z/p)). \tag{4.1}$$

Более общо, любая целочисленная функция f на кольце BP_*, такая что $f(x) \geqslant 0$, $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, $f(v_i) \geqslant 1$, $i \geqslant 0$, $f(v_i) \geqslant f(v_j)$, если $i \geqslant j$, определяет фильтрацию, удовлетворяющую необходимым условиям. Начальный член АСП в этом случае также описывается формулой (4.1).

Первый пример имеет интересное обобщение. Пусть $P(n)_*(\ )$ есть локализация теории унитарных бордизмов с особенностями, такая, что она получается из $BP_*(\ )$ дополнительным введением особенностей, соответствующих элементам $v_0, \ldots, v_{n-1}$; $P(0)_*(\ ) = BP_*(\ )$, $P(\infty)_*(\ ) = H_*(\ , Z/p)$. Если $p > 2$, то $P(n)_*(\ )$ для любого $n \geqslant 0$ удовлетворяет необходимым мультипликативным свойствам; если $p = 2$, то это будет при $n = 0$ и при $n \geqslant 2$. Именно эти теории будем рассматривать в дальнейшем. Легко получить следующие изоморфизмы для гомологий спектров $P(n)$, представляющих эти теории [8]:

$$H_*(P(n), Z/2) \cong Z/2[\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}^2, \ldots],$$
$$H_*(P(n), Z/p) \cong Z/p[\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots] \otimes \Lambda(\tau_1, \ldots, \tau_n),$$

где справа стоят подалгебры алгебры, двойственной к алгебре Стинрода $\mathscr{A}_p$. Для дальнейшего нам потребуется следующая

Лемма 5. *Спектральная последовательность Атьи-Хирцебруха для $P(m)_*(P(n))$ при $m > n$ вырождается, при этом $P(m)_*(P(n))$ является свободным левым $P(m)_*$-модулем.*

Доказательство. Член E_2 рассматриваемой СП для $P(m)_*(P(n))$, $m > 0$, имеет вид

$$E_2 = H_*(P(n), P(m)_*) \cong H_*(P(n), Z/p) \otimes P(m)_*.$$

Последовательность для $P(\infty)_*(P(0))$ тривиальна по построению. Следовательно, тривиальна последовательность $\tilde{E}_r$ для $P(m)_*(P(0))$, поскольку морфизм

$$H_*(P(0), P(m)_*) \to H_*(P(0), P(\infty)_*)$$

является изоморфизмом на нулевых строках. Имеем морфизм последовательностей $\tilde{E}_r \to E_r$. Для члена E_2 его образом является алгебра $Z/2[\xi_1^2, \ldots, \xi_k^2, \ldots] \otimes P(m)_*$, если $p=2$, и алгебра $Z/p[\xi_1, \ldots \ldots, \xi_k, \ldots] \otimes P(m)_*$, если $p > 2$. Тривиальность дифференциалов рассматриваемой СП для $P(m)_* P(n))$ на элементах $\xi_1, \ldots, \xi_n$ при $p=2$ и $\tau_1, \ldots, \tau_n$ при $p > 2$ следует из размерностных соображений. Применяя мультипликативные свойства СП Атьи-Хирцебруха, получаем тривиальность СП для $P(m)_*(P(n))$ при $m > 0$. Следовательно, это свободный левый $P(m)_*$-модуль. Для $m=0$ утверждение леммы есть хорошо известный факт. Доказательство закончено.

Из леммы следует, в частности, что $P(m)_*(P(n))$ есть плоский $P(m)_*$-модуль и $P(n)_*(P(n))$ — коалгебра над $P_*(n)$. Другим следствием является то, что естественное преобразование теорий

$$u_m^n\colon P(n)_*(\ ) \to P(m)_*(\ )$$

индуцирует эпиморфизм

$$u_m^n\colon P(n)_*(P(n)) \to P(m)_*(P(n)).$$

Докажем теперь, что морфизм спектров $u_m^n\colon P(n) \to P(m)$ индуцирует мономорфизм

$$(u_m^n)_*\colon P(m)_*(P(n)) \to P(m)_*(P(m)).$$

Действительно, имеем мономорфизм

$$H_*(u_m^n, Z/p)\colon H_*(P(n), Z/p) \to H_*(P(m), Z/p),$$

следовательно, получаем мономорфизм членов E_2 СП Атьи-Хирцебруха и в итоге нужный нам мономорфизм.

Замечание. Если последовательность элементов $(v_0, v_{i_1}, \ldots \ldots, v_{i_k}, \ldots)$ отлична от набора вида $(v_0, \ldots, v_n)$, то для соответствующей теории с особенностями $BP(v_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}, \ldots)_*(\ )$ модуль $BP(v_0, v_{i_1}, \ldots \ldots, v_{i_k}, \ldots)_*(BP(v_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}, \ldots))$ не является плоским $BP(v_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}, \ldots)_*$-модулем. Действительно, из следствия 2.2 [9] вытекает наличие нетривиальных дифференциалов в соответствующей СП Атьи-Хирцебруха. Возникающие соотношения не позволяют рассматриваемому модулю быть плоским над кольцом полиномов $BP(v_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}, \ldots)_*$.

Докажем теперь, что СП Адамса — Новикова для спектра $P(n)$ в теории $P(m)_*(\ )$, $m > n$, тривиальна. Она является спектральной последовательностью особенностей [10] $(v_n, \ldots, v_{m-1})$. Ее член E_1 имеет вид

$$E_1^{s,t} \cong P(m)_*[v_n, \ldots, v_{m-1}],$$

где элементы из $P(m)_*$ лежат в нулевой строке, а $\deg v_j = (1, 2(2^j-1))$, $n \leqslant j \leqslant m-1$. Из того, что вторая градуировка любого нетривиального элемента из $E_1^{s,t}$ четная, следует, что все дифференциалы рассматриваемой СП нулевые.

Пусть теперь спектр X таков, что кодействие

$$\psi_X: P(m)_*(X) \to P(m)_*(P(m)) \otimes_{P(m)_*} P(m)_*(X)$$

пропускается через вложение $P(m)_*(P(n)) \otimes_{P(m)_*} P(m)_*(X) \subset P(m)_* \times \times (P(m)) \otimes_{P(m)_*} P(m)_*(X)$. Тогда для пары теорий гомологий $P(n)_*(\ )$ и $P(m)_*(\ )$, $m > n$, морфизма спектров $u_m^n: P(n) \to P(m)$ и спектра X выполнены все условия, необходимые для существования четырехугольника спектральных последовательностей. Его начальный член изоморфен

$$\mathrm{Ext}_{P(m)_*(P(n))}\left(P(m)_*, \overline{P(n)}_* \otimes_{P(m)_*} P(m)_*(X)\right).$$

Если $m = \infty$, то $P(m) = HZ/p$ и $P(m)_*(P(n)) = H_*(P(n), Z/p)$. Спектр X должен быть таким, что для любого $x \in H_*(X, Z/p)$ $\psi(x)$ не содержит ξ_j, $j \geqslant n+1$, в нечетных степенях при $p=2$ и не содержит τ_j, $j \geqslant n+1$, при $p > 2$. Начальный член имеет вид

$$\mathrm{Ext}_{H_*(P(n), Z/p)}\left(Z/p, \overline{P(n)}_* \otimes H_*(X, Z/p)\right).$$

При $n = 0$ мы получаем классический четырехугольник пары теорий гомологий $BP_*(\ )$ и $H_*(\ , Z/p)$.

После сдачи рукописи настоящей работы в печать авторам стала известна статья Х. Миллера [11], отличающаяся более абстрактным подходом к четырехугольнику СП. В частности, там имеется аналог конструкции четырехугольника (§ 2 настоящей работы), восходящей к работе С. П. Новикова [2]. Спектральные последовательности, участвующие в четырехугольнике, Х. Миллером названы спектральными последовательностями Мея и Маховальда, что представляется нам не совсем правильным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Adams J. F.** On the structure and applications of the Steenrod algebra // Comment. Mat. Helv.— 1958.— V. 32, Fasc.— P. 180—214.
2. **Новиков С. П.** Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1967.— Т. 31, № 4.— С. 855—951.
3. **Baas N.— A.** On the stable Adams spectral sequences.— Aarhus., 1969.— 63 p.— (Various Publ. Ser. N 6).
4. **Adams J. F.** Stable homotopy and generalized homology.— Chicago: University Press, 1971.
5. **Вершинин В. В.** Симплектические кобордизмы с особенностями // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1983.— Т. 47, № 2.— С. 230—247.
6. **Свитцер Р. М.** Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии.— М.: Наука, 1985.
7. **Картан А., Эйленберг С.** Гомологическая алгебра.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
8. **Baas N.— A., Madsen I.** On the realization of certain modules over the Steenrod algebra // Math. Scand.— 1972.— V. 31, Fasc. 1.— P. 220—224.
9. **Yagita N.** On the Steenrod algebra of Morava K-theory // J. London Math. Soc.— 1980.— V. 22, part 3.— P. 423—438.
10. **Botvinnik B. I., Vershinin V. V.** Cobordism with singularities and spectral sequences // Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai, Eger.— 1983.— P. 93—117.
11. **Miller H. R.** On relations between Adams spectral sequences // J. pure and appl. algebra.— 1981.— V. 20, N 3.— P. 287—312.