ках коразмерности 3, отвечающих значениям $\varepsilon_3=\alpha$, $\varepsilon_3=\gamma$, $\varepsilon_3=\zeta$: $\bar{\varepsilon}_\alpha$ — петля трехкратного седла, $\bar{\varepsilon}_\gamma$ — трехкратное состояние равновесия с двумя нулевыми собственными числами, имеющее эллиптическую область, $\bar{\varepsilon}_\zeta$ — сепаратрисный контур, одна из вершин которого седло-узел.

Напомним принятый в [1] способ изображения параметрического портрета в окрестности бифуркационных точек коразмерности 3. Строится пересечение параметрического портрета со сферой достаточно малого радиуса с центром в собственно бифуркационной точке и затем на рисунке изображаются проекции двух дополняющих друг друга полусфер. Построенные таким образом параметрические портреты в окрестностях точек $\bar{\varepsilon}_\alpha$, $\bar{\varepsilon}_\gamma$, $\bar{\varepsilon}_\zeta$ приведены на рис. 5, 6, 7 соответственно, фазовые портреты, отвечающие указанным там областям, см. на рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Базыкин А. Д., Кузнецов Ю. А., Хибник А. И.** Бифуркационные диаграммы динамических систем на плоскости.— Пущино, 1985.— 56 с.— (Информационный материал).
2. **Волокитин Е. П., Тресков С. А.** Математическая модель реакции каталитического окисления (трехпараметрический анализ).— Новосибирск, 1986.— 24 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 4).
3. **Арнольд В. И.** Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
4. **Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1976.
5. **Баутин Н. Н.** Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости.— М.: Наука, 1984.
6. **Хибник А. И., Шноль Э. Э.** Программы для качественного исследования дифференциальных уравнений.— Пущино, 1982.— 16 с.— (Информационный материал).

СТРУКТУРЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ МНОЖЕСТВАМИ МОРФИЗМОВ

В. К. ИОНИН

Рассматриваются произвольные множества A, B и произвольное множество Γ отображений A в B. В настоящей статье показывается, как при помощи некоторой стандартной процедуры множество Γ порождает определенные математические структуры на произвольных множествах, другими словами, как Γ порождает некоторый род структуры. Например, все аффинные отображения вещественной прямой в себя порождают род аффинной структуры; все сжатия $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ — род структуры метрического пространства с внутренней метрикой; все линейные отображения двумерного векторного пространства в одномерное — род структуры векторного пространства.

§ 1. Предварительные определения

В этом параграфе будут приведены известные определения, которые можно найти в книгах [1, 2]. В некоторые определения будут внесены незначительные изменения.

1.1. Будем говорить, что задана категория $\mathscr{K}$, если задан класс $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$ элементов, называемых *объектами*, причем

1. Для каждой пары объектов (A, B) из $\mathscr{K}$ задано множество $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, B)$, называемое *множеством морфизмов A в B* (вместо $u\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, B)$ будем иногда писать $u\colon A\to B$ или $A\xrightarrow{u}B$); A называют *областью морфизма u*, а B — его *кообластью*.

2. Для каждой тройки объектов (A, B, C) из $\mathscr{K}$ задано отображение

$$\mu\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, B)\times \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(B, C)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, C).$$

Морфизм $\mu(u, v)$ обозначается vu и называется *композицией морфизмов* u и v.

3. Морфизмы и композиция морфизмов удовлетворяют следующим трем аксиомам:

(α) Композиция ассоциативна: для каждой тройки морфизмов $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D$ имеет место равенство $w(vu)=(wv)u$.

(β) Для каждого объекта A из $\mathscr{K}$ существует морфизм $1_A\colon A\to A$ (называемый *тождественным морфизмом* или *единицей объекта* A) такой, что $1_A u = u$, $v1_A = v$ для любых морфизмов $B \xrightarrow{u} A$, $A \xrightarrow{v} C$.

(γ) Если пары объектов (A, B) и (C, D) различны, то пересечение множеств $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, B)$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(C, D)$ пусто.

1.2. Морфизм $u\colon A\to B$ называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм $v\colon B\to A$, что $vu=1_A$, $uv=1_B$. Множество изоморфизмов B в B называется *множеством автоморфизмов объекта* B и обозначается $\mathrm{Aut}_{\mathscr{K}}B$

1.3. Ковариантный (соотв. контравариантный) функтор $T\colon \mathscr{K}_1\to\mathscr{K}_2$ из категории $\mathscr{K}_1$ в категорию $\mathscr{K}_2$ состоит из

а) отображения $A\to T(A)$, сопоставляющего каждому объекту $A\in \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_1$ объект $T(A)\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_2$;

б) отображений $T(A, B)\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_1}(A, B)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_2}(T(A), T(B))\times$ $\times$(соотв. $T(A, B)\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_1}(A, B)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_2}(T(B), T(A))$), определенных для всех пар (A, B) объектов из $\mathscr{K}_1$ и таких, что (если вместо $T(A, B)(u)$ писать просто $T(u)$) $T(1_A)=1_{T(A)}$ и $T(vu)=T(v)T(u)$ (соотв. $T(vu)=T(u)T(v)$).

1.4. Пусть T и S — ковариантные функторы из категории $\mathscr{K}_1$ в категорию $\mathscr{K}_2$. Говорят, что задан *функторный морфизм* $h\colon T\to S$ функтора T в функтор S, если для каждого объекта A из $\mathscr{K}_1$ задан морфизм $h(A)\colon T(A)\to S(A)$ в $\mathscr{K}_2$ так, что для любого морфизма $u\colon A\to B$ из $\mathscr{K}_1$ выполняется равенство $S(u)h(A)=h(B)T(u)$. Аналогично определяется функторный морфизм для контравариантных функторов.

Если $h(A)$ — изоморфизм для каждого объекта A из $\mathscr{K}_1$, то h называется *функторным изоморфизмом.*

1.5. Символом Ens обозначается категория всех множеств и всех отображений. Под композицией в Ens понимается обычная композиция (суперпозиция) отображений. Рассмотрим категорию BijEns, состоящую из всех множеств и всех биекций. Очевидно, BijEns — подкатегория категории Ens. Ковариантный функтор T: BijEns $\to$ BijEns называется *родом структуры.* Два рода структуры T и S называются *эквивалентными*, если существует функторный изоморфизм $h\colon T\to S$.

Пример. Пусть M — множество, а $T(M)$ — множество всех метрик $\rho\colon M\times M\to \mathbf{R}$. Очевидно, этим задается функтор T: BijEns $\to$ BijEns, являющийся родом структуры метрического пространства.

1.6. Приведем примеры эквивалентных родов структуры.

I. Пусть род структуры T каждому множеству X сопоставляет множество $T(X)$, состоящее из всех аффинных структур, которые можно задать на X. Если X — конечное множество, содержащее два различных элемента, то $T(X)=\varnothing$. Пусть род структуры S каждому множеству X сопоставляет множество $S(X)$ всех пар (F, Φ), удовлетворяющих условиям

а) множества F и Φ состоят из некоторых отображений $\mathbf{R}$ в X и X в $\mathbf{R}$ соответственно;

б) суперпозиция φf любых отображений $f\in F$ и $\varphi\in\Phi$ есть аффинное отображение $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$;

в) ни одно из множеств F и Φ нельзя расширить так, чтобы сохранились условия а и б;

5*

г) если p, $q \in X$ и $p \neq q$, то найдутся такие отображения $f \in F$ и $\varphi \in \Phi$, что p, $q \in f(\mathbf{R})$ и $\varphi(p) \neq \varphi(q)$.

В работе [3] фактически доказано, что T и S — эквивалентные роды структуры.

II. Пусть теперь род структуры T каждому множеству X сопоставляет множество $T(X)$, состоящее из всех векторных структур над полем вещественных чисел, которые можно задать на X. Очевидно, $T(X) = \varnothing$ для некоторых X. Пусть род структуры S каждому множеству X сопоставляет множество $S(X)$ всех пар (F, Φ), удовлетворяющих условиям

а) множества F и Φ состоят из некоторых отображений $\mathbf{R}^2$ в X и X в $\mathbf{R}$ соответственно;

б) суперпозиция φf любых отображений $f \in F$ и $\varphi \in \Phi$ есть линейное отображение $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}$;

в) ни одно из множеств F и Φ нельзя расширить так, чтобы сохранились условия а и б;

г) если p, $q \in X$ и $p \neq q$, то найдутся такие отображения $f \in F$ и $\varphi \in \Phi$, что p, $q \in f(\mathbf{R}^2)$ и $\varphi(p) \neq \varphi(q)$.

Из результатов статьи [4] вытекает, что роды структуры T и S эквивалентны.

§ 2. Категория $\mathscr{K}(\Gamma)$

Всюду в этом параграфе предполагаются фиксированными некоторая категория $\mathscr{K}$, пара ее объектов (A, B) и множество $\Gamma \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, B)$. Мы покажем, как, зная четверку $(\mathscr{K}, A, B, \Gamma)$, можно естественным образом определить некоторую новую категорию $\mathscr{K}(A, B, \Gamma)$. Так как множество Γ (за исключением тривиального случая $\Gamma = \varnothing$) определяет пару (A, B), то мы, если это не приводит к недоразумению, вместо $\mathscr{K}(A, B, \Gamma)$ будем писать просто $\mathscr{K}(\Gamma)$.

2.1. Определим композицию множеств морфизмов. Пусть n — натуральное число, $n > 1$; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — объекты категории $\mathscr{K}$ и для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ множество H_i принадлежит $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X_i, X_{i+1})$. *Композицией множеств* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называется множество $H = H_n \ldots H_2 H_1$, определяемое следующим образом: для того чтобы морфизм h входил в H, необходимо и достаточно, чтобы он был композицией некоторых морфизмов $h_1 \in H_1, \ldots, h_n \in H_n$, т. е. $h = h_n \ldots h_2 h_1$.

2.2. Зафиксируем целые числа n, m, $i_1, \ldots, i_m$ так, чтобы выполнялись неравенства $1 \leqslant m \leqslant n$, $1 < n$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$. Пусть, по определению, запись $H_n \ldots \dot{H}_{i_m} \ldots \dot{H}_{i_k} \ldots \dot{H}_{i_1} \ldots H_1 \subset H$ (здесь для каждого $k = 1, \ldots, m$ над множителем H_{i_k} стоит точка) означает справедливость следующих двух утверждений:

а) $H_n \ldots H_{i_m} \ldots H_{i_k} \ldots H_{i_1} \ldots H_1 \subset H$;

б) для каждого $k = 1, \ldots, m$ множество H_{i_k} нельзя расширить так, чтобы сохранилось последнее включение.

Отрицание утверждения б означает существование таких числа $k = 1, \ldots, m$ и морфизма $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X_{i_k}, X_{i_k+1}) \setminus H_{i_k}$, что $H_n \ldots H_{i_m} \ldots \ldots (H_{i_k} \cup \{h\}) \ldots H_{i_1} \ldots H_1 \subset H$.

2.3. Пусть $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$, $F \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, X)$, $\Phi \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X, B)$. Тройка (X, F, Φ) называется Γ-*пространством* (или Γ-*объектом*), а пара (F, Φ) — его Γ-*структурой*, если $\dot{\Phi}\dot{F} \subset \Gamma$.

В дальнейшем, если не возникает недоразумений, вместо тройки (X, F, Φ) будем писать просто X. Каждый морфизм из F (соотв. из Φ) будем называть *входным* (соотв. *выходным*) *морфизмом* Γ-объекта X или Γ-*структуры* (F, Φ).

Будем говорить, что Γ-*структура* (F, Φ) *различает входные* (*выходные*) *морфизмы*, если из того, что f_1, $f_2 \in F$ и $f_1 \neq f_2$ (φ_1, $\varphi_2 \in \Phi$ и $\varphi_1 \neq \neq \varphi_2$), следует существование такого выходного (входного) морфизма $\varphi \in \Phi$ ($f \in F$), что $\varphi f_1 \neq \varphi f_2$ ($\varphi_1 f = \varphi_2 f$).

Рассмотрим случай, когда класс $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$ состоит из множеств, наделенных некоторыми структурами, а класс морфизмов категории $\mathscr{K}$ состоит из некоторых соответствий, т. е. из бинарных отношений. Будем говорить, что Γ-*структура* (F, Φ) *соединяет* (*различает*) *точки* Γ-*пространства* (X, F, Φ), если из $p, q \in X$ и $p \neq q$ следует существование таких входного (выходного) соответствия $f \in F$ $(\varphi \in \Phi)$ и точек $a_1, a_2 \in A$ $(b_1, b_2 \in B)$, что $p \in f(a_1)$, $q \in f(a_2)$ и $a_1 \neq a_2$ $(b_1 \in \varphi(p)$, $b_2 \in \varphi(q)$ и $b_1 \neq b_2)$.

Если же класс морфизмов категории $\mathscr{K}$ состоит из отображений, то справедливо следующее утверждение: Γ-*структура* (F, Φ) *соединяет* (*различает*) *точки* Γ-*пространства* X, *если из* $p, q \in X$ *и* $p \neq q$ *следует существование такого входного* (*выходного*) *отображения* $f \in F$ $(\varphi \in \Phi)$, *что* $f(a_1) = p$, $f(a_2) = q$ *для некоторых точек* $a_1, a_2 \in A$ $(\varphi(p) \neq \varphi(q))$.

2.4. Предложение. *Если* (X, F, Φ) *и* (Y, G, Ψ) — Γ-*пространства, то для любого множества* $H \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X, Y)$ *следующие три соотношения*

$$\Psi \dot{H} F \subset \Gamma, \quad \dot{H} F \subset G, \quad \Psi \dot{H} \subset \Phi \tag{2.1}$$

равносильны.

Доказательство. Определим множества L, M и N соотношениями

$$\Psi \dot{L} F \subset \Gamma, \quad \dot{M} F \subset G, \quad \Psi \dot{N} \subset \Phi. \tag{2.2}$$

Достаточно доказать равенства

$$L = M = N. \tag{2.3}$$

Заменив во включениях $\Phi F \subset \Gamma$ и $\Psi G \subset \Gamma$ в соответствии с (2.2) Φ на ΨN, а G на MF, получим

$$\Psi N F \subset \Gamma, \quad \Psi M F \subset \Gamma. \tag{2.4}$$

Из первого соотношения в (2.2), учитывая определения Γ-структур (F, Φ) и (G, Ψ), имеем

$$\Psi L \subset \Phi, \quad LF \subset G. \tag{2.5}$$

Из (2.2) и (2.4) следует

$$N \subset L, \quad M \subset L, \tag{2.6}$$

а из (2.2) и (2.5) —

$$L \subset N, \quad L \subset M. \tag{2.7}$$

Доказательство закончено, так как включения (2.6) и (2.7) означают справедливость равенств (2.3).

Определение. Морфизм из множества H, удовлетворяющего соотношениям (2.1), называется Γ-*морфизмом с областью* X *и кообластью* Y. Множество всех таких Γ-морфизмов обозначается символом $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\Gamma)}(X, Y)$.

После утверждения, которое будет доказано в следующем пункте, станет ясно, что Γ-объекты и Γ-морфизмы образуют некоторую категорию. В дальнейшем эту категорию будем обозначать через $\mathscr{K}(\Gamma)$.

2.5. Предложение. *Если для каждого* $i = 1, 2, 3$ *тройка* (X_i, F_i, Φ_i) *является* Γ-*объектом, а множества* L, M *и* N *являются соответственно множествами всех* Γ-*морфизмов* X_1 *в* X_2, X_2 *в* X_3 *и* X_1 *в* X_3, *то*

$$ML \subset N. \tag{2.8}$$

Доказательство. В силу предложения 2.4 множества L, M и N характеризуются тремя соотношениями

$$\dot{L} F_1 \subset F_2, \quad \dot{M} F_2 \subset F_3, \quad \dot{N} F_1 \subset F_3. \tag{2.9}$$

Из первых двух вытекает

$$MLF_1 \subset F_3, \tag{2.10}$$

а из третьего и (2.10) следует (2.8).

2.6. В заключение параграфа приведем примеры некоторых категорий, рассматриваемых в дальнейшем в качестве категории $\mathscr{K}$. Множества и соответствия образуют категорию, которую мы будем обозначать символом Rel. Введем некоторые определения и обозначения, связанные с произвольным морфизмом $f\colon X \to Y$. *Образом и прообразом множеств* $X' \subset X$ и $Y' \subset Y$ называются соответственно множества

$$f(X') = \{y \in Y \mid \exists x \in X',\ y \in f(x)\}, \quad f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid \exists y \in Y' \cap f(x)\}.$$

Морфизм f будем называть *D_k-отображением* или *D_k-функцией* ($k = 1, 2, \ldots$), если для любого $x \in X$ множество $f(x)$ содержит не более k различных элементов.

Множества и D_k-отображения, как легко видеть, образуют некоторую категорию D_k, которая является подкатегорией Rel. Очевидно, Ens есть подкатегория D_k при любом натуральном k. В дальнейшем для краткости вместо D_1 будем писать просто D.

§ 3. Роды структуры $T(\Gamma)$ и $T_*(\Gamma)$

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые обобщенные роды структуры, порождаемые категорией $\mathscr{K}(\Gamma)$.

3.1. Дадим общее определение структуры на объекте категории $\mathscr{K}$. Рассмотрим категорию $\mathrm{Bij}\,\mathscr{K}$, определенную следующим образом:

а) $\mathrm{Ob\,Bij}\,\mathscr{K} = \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$;

б) каковы бы ни были объекты X и Y, множеством всех морфизмов X в Y в $\mathrm{Bij}\,\mathscr{K}$ служит множество всех изоморфизмов (в категории $\mathscr{K}$) X в Y (за композицию морфизмов в $\mathrm{Bij}\,\mathscr{K}$ принимается композиция морфизмов в $\mathscr{K}$).

Определение. Ковариантный функтор $T\colon \mathrm{Bij}\,\mathscr{K} \to \mathrm{BijEns}$ называется *родом структуры*. Каждый элемент $t \in T(X)$ называется *структурой рода T на объекте X*.

3.2. Обозначим через $T(\Gamma)(X)$ множество всех Г-структур объекта X категории $\mathscr{K}$. Этим, как легко видеть, определяется некоторый род структуры, который в дальнейшем будем называть *родом структуры* $T(\Gamma)$.

3.3. Рассмотрим два рода структуры T, $S\colon \mathrm{Bij}\,\mathscr{K} \to \mathrm{BijEns}$. Как и в 1.5, будем считать, что роды структуры T и S эквивалентны, если существует функторный изоморфизм T на S. Будем говорить, что *род T мажорирует род S* (или *род S мажорируется родом T*), если для каждого объекта X найдется такое инъективное отображение $h(X)\colon S(X) \to T(X)$, что для любого морфизма $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X, Y)$ выполняется равенство $T(u)h(X) = h(Y)S(u)$. Запись $S \leqslant T$ (или $T \geqslant S$) означает, что род T мажорирует род S. Очевидно, если $S \leqslant T$ и $T \leqslant S$, то S и T эквивалентны (в записи $S \sim T$).

Пусть $S \leqslant T$. Определим новый род структуры U, поставив в соответствие каждому объекту X множество $U(X) = h(X)(S(X))$. Легко видеть, что $U \sim S$.

3.4. Сравнение Г-структур. Пусть $(X_i, F_i, \Phi_i) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}(\Gamma)$, $\gamma_i = (F_i, \Phi_i)$, $i = 1, 2$. Будем говорить, что *Г-структура γ_1 мажорирует Г-структуру γ_2* (*γ_2 мажорируется γ_1*), если $X = X_1 = X_2$ в категории $\mathscr{K}$ и тождественный морфизм $1_X\colon X_1 \to X_2$ является Г-морфизмом. Если, кроме того, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то будем говорить, что γ_1 *сильнее* γ_2 (γ_2 *слабее* γ_1).

Очевидна равносильность следующих утверждений:

а) γ_1 мажорирует γ_2;

б) γ_2 мажорируется γ_1;

в) $F_1 \subset F_2$;

г) $\Phi_2 \subset \Phi_1$.

Также очевидна равносильность утверждений

д) γ_1 сильнее γ_2;

е) γ_2 слабее γ_1;

ж) F_1 — собственная часть F_2;

з) Φ_2 — собственная часть Φ_1.

Для того чтобы Г-объект (X, F, Φ) обладал сильнейшей (слабейшей) Г-структурой, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $\Phi = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X, B)$ $(F = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, X))$.

3.5. Если T: $\mathrm{Bij}\,\mathscr{K} \to \mathrm{Bij\,Ens}$ — род структуры и $s \in T(X)$, то s называется *структурой рода T на объекте X категории $\mathscr{K}$*. Очевидно, каждая Г-структура есть структура рода $T(\Gamma)$. Если f: $X \to Y$ — морфизм в $\mathrm{Bij}\,\mathscr{K}$, т. е. изоморфизм в $\mathscr{K}$, то $t = T(f)(s)$ есть структура рода T на Y, называемая *структурой рода T, полученной перенесением структуры s на X посредством f*. В этом случае мы говорим также, что f *осуществляет изоморфизм между объектом X, наделенным структурой s, и объектом Y, наделенным структурой t*.

Будем говорить, что задан род структуры с морфизмами (T, τ), если

а) задан род структуры T: $\mathrm{Bij}\,\mathscr{K} \to \mathrm{Bij\,Ens}$;

б) для каждой четверки (X, s, Y, t), где $s \in T(X)$, $t \in T(Y)$ задано множество $\tau(X, s, Y, t)$ морфизмов X в Y таких, что выполнены условия

б$_1$) если $f \in \tau(X, s, Y, t)$ и $g \in (Y, t, Z, u)$, то $gf \in \tau(X, s, Z, u)$;

б$_2$) если f: $X \to Y$ осуществляет изоморфизм между объектом X, наделенным структурой s, и объектом Y, наделенным структурой t, то $f \in \tau(X, s, Y, t)$ и $f^{-1} \in \tau(Y, t, X, s)$.

С каждым родом структуры с морфизмами (T, τ) можно следующим образом ассоциировать категорию $\mathscr{K}(T, \tau)$:

1) объекты категории $\mathscr{K}(T, \tau)$ — всевозможные пары (X, s), где $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$, а $s \in T(X)$;

2) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(T,\tau)}((X, s), (Y, t)) = \tau(X, s, Y, t)$;

3) композиция морфизмов в $\mathscr{K}(T, \tau)$ есть композиция морфизмов в $\mathscr{K}$.

Пример. Пусть $T = T(\Gamma)$ — род Г-структуры, определенной в 3.2. Мы получим род структуры с морфизмами (T, τ), если определим $\tau(X, s, Y, t)$ как множество всех Г-морфизмов объекта X, наделенного Г-структурой $s \in T(X)$, в объект Y, наделенный Г-структурой $t \in T(Y)$. Ясно, что категория $\mathscr{K}(T, \tau)$ совпадает с категорией $\mathscr{K}(\Gamma)$.

3.6. Пусть категория $\mathscr{K}$ такова, что класс ее объектов состоит из множеств, наделенных некоторыми структурами, а класс морфизмов состоит из некоторых соответствий. В частности, $\mathscr{K}$ может совпадать с одной из категорий Ens, Rel, D_k при любом $k = 1, 2, \ldots$

Каждому объекту X категории $\mathscr{K}$ поставим в соответствие множество $T_*(\Gamma)(X)$ всех таких его Г-структур (F, Φ), которые соединяют и различают (определение см. в п. 2.3) точки Г-пространства (X, F, Φ). Очевидно, род структуры $T(\Gamma)$ мажорирует род структуры $T_*(\Gamma)$, т. е. $T_*(\Gamma) \leqslant T(\Gamma)$.

Рассмотрим еще раз примеры п. 1.6. Ясно, что при этом $\mathscr{K} = \mathrm{Ens}$. Род структуры S, описанный в примере I (соотв. II), совпадает с родом структуры $T_*(\Gamma)$, где Г — множество всех аффинных отображений $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ (соотв. всех линейных отображений $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}$).

В п. 3.7—3.10 мы рассмотрим некоторые простые примеры родов структуры $T(\Gamma)$. Доказательства утверждений приводит не будем, так как они достаточно просты и так как в дальнейшем на них ссылаться не будем.

3.7. Пусть $\mathscr{K} = \mathrm{Ens}$, $A = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{\gamma\}$, где функция γ: $A \to B$ определяется равенством $\gamma(0) = 0$.

Предложение. *Род структуры $T(\Gamma)$ эквивалентен роду структуры S, сопоставляющему каждому множеству X множество $S(X)$ всех его подмножеств.*

Функторный изоморфизм h: $S \to T(\Gamma)$ есть класс отображений $h(X)$: $S(X) \to T(\Gamma)(X)$, где X — произвольное множество, определяемых равенством $h(X)(X') = (F, \Phi)$, F — множество всех таких отображений f: $A \to X$, что $f(0) \in X'$, а Φ — множество всех таких отображений φ: $X \to B$, что $X' \subset \varphi^{-1}(0)$.

Рассмотрим два Г-пространства (X, F, Φ) и (Y, G, Ψ). Для того чтобы отображение k: $X \to Y$ было Г-морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы имело место включение $k(X') \subset Y'$, где множества X' и Y' определяются равенствами $h(X)(X') = (F, \Phi)$, $h(Y)(Y') = (G, \Psi)$.

3.8. Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Rel}$ (определение см. в 2.6), $A = B = \{0\}$, множество Γ состоит из единственного соответствия $\gamma\colon A \to B$, которое является отображением. Очевидно, что $\gamma(0) = 0$.

Предложение. *Род структуры $T(\Gamma)$ эквивалентен роду структуры S, определенному в* 3.7.

Функторный изоморфизм $h\colon S \to T(\Gamma)$ задается классом отображений $h(X)\colon S(X) \to T(\Gamma)(X)$, определяемых равенством $h(X)(X') = (F, \Phi)$, где F — множество всех таких соответствий $f\colon A \to X$, что $f(0) \in X'$, а Φ — множество всех таких соответствий $\varphi\colon X \to B$, что $X' \subset \varphi^{-1}(0)$.

Замечание. Существует всего два соответствия A в B. Если бы мы в Γ включили единственное соответствие, отличное от отображения, то все равно мы получили бы род структуры, эквивалентный роду S.

3.9. Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Ens}$, $A = B = \{0, 1\}$, $\Gamma = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B) \setminus \{\gamma\}$, где функция $\gamma\colon A \to B$ определяется равенствами $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = 0$. Мы предполагаем, что множество $\{0, 1\}$ наделено естественной структурой порядка $\{0 < 1\}$. Ясно, что тогда Γ есть множество всех неубывающих отображений A в B.

Предложение. *Род структуры $T(\Gamma)$ эквивалентен роду структуры S, сопоставляющему каждому множеству X множество $S(X)$ всех его предпорядков, т. е. рефлексивных и транзитивных бинарных отношений.*

Функторный изоморфизм $h\colon S \to T(\Gamma)$ задается классом отображений $h(X)\colon S(X) \to T(\Gamma)(X)$, определяемых равенством $h(X)(\sigma) = (F, \Phi)$, где F и Φ — множества всех неубывающих отображений A в X и X в B соответственно. Очевидно, множество всех Γ-морфизмов (X, F, Φ) в (Y, G, Ψ) совпадает с множеством всех неубывающих отображений.

Замечание. Из предложения следует, что задание на множестве X произвольной Γ-структуры (F, Φ) равносильно заданию на нем структуры предпорядка. Для того чтобы Γ-структура (F, Φ) определяла на множестве X структуру порядка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: если $f, g \in F$ и $f(t) = g(1 - t)$, то $f = g$.

3.10. Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Rel}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{0\}$, $\Gamma = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B) \setminus \{\gamma\}$, где соответствие $\gamma\colon A \to B$ определяется равенствами $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$. Очевидно, γ есть отображение. Множество Γ можно было бы определить следующим образом: Γ есть множество всех таких соответствий A в B, каждое из которых не является отображением.

Предложение. *Род структуры $T(\Gamma)$ мажорирует род структуры S, который сопоставляет каждому множеству X множество $S(X)$ всех его отношений эквивалентности.*

Для доказательства построим класс инъективных отображений $h(X)\colon S(X) \to \mathrm{T}(\Gamma)(X)$, определяемых равенством $h(X)(\sigma) = (F, \Phi)$, где Φ — множество всех таких соответствий $\varphi\colon X \to B$, что $\varphi^{-1}(0)$ входит в один класс эквивалентности σ, а F — множество всех таких соответствий $f\colon A \to X$, для которых выполняются условия

а) каждое из множеств $f(0)$ и $f(1)$ входит только в один класс эквивалентности σ;

б) если $p \in f(0)$ и $q \in f(1)$, то p и q не входят в один класс эквивалентности σ.

Замечание. Рассмотрим произвольную Γ-структуру $(F, \Phi) \in T(\Gamma)(X)$. Введем на множестве Φ отношение порядка, положив $\varphi \leqslant \psi$, если $\varphi, \psi \in \Phi$ и $\varphi^{-1}(0) \subset \psi^{-1}(0)$. Положим, по определению, что $(F, \Phi) \in U(\Gamma)$, если для любых двух максимальных выходных соответствий $\varphi, \psi \in \Phi$ обязательно выполняется одно из равенств $\varphi^{-1}(0) = \psi^{-1}(0)$, $\varphi^{-1}(0) \cap \psi^{-1}(0) = \varnothing$. Можно доказать, что род структуры $U(\Gamma)$ эквивалентен роду структуры S.

§ 4. Способы задания Γ-структур

4.1. Определим входные и выходные базы. Пусть $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$, $F' \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, X)$. Так как из соотношений $\dot{\Phi}F' \subset \Gamma$ и $\Phi\dot{F} \subset \Gamma$ следует, что $\dot{\Phi}\dot{F} \subset \Gamma$, т. е. (F, Φ) есть Γ-структура, то можно считать, что F' порождает (или индуцирует) эту Γ-структуру (F, Φ). В дальнейшем множество F' будем называть *входной базой* Γ-*объекта* (X, F, Φ) или Γ-*структуры* (F, Φ). Теперь рассмотрим объект X категории $\mathscr{K}$ и множество $\Phi' \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X, B)$. Из соотношений $\Phi'\dot{F} \subset \Gamma$ и $\dot{\Phi}F \subset \Gamma$ следует $\dot{\Phi}\dot{F} \subset \Gamma$, поэтому можно считать, что Φ' порождает Γ-структуру (F, Φ). Множество Φ' будем называть *выходной базой* Γ-*объекта* (X, F, Φ) или Γ-*структуры* (F, Φ). Очевидно, пустое множество является входной (выходной) базой сильнейшей (слабейшей) Γ-структуры.

4.2. Определим входной и выходной Γ-объекты. Назовем Γ-*объект* (A, F_A, Φ_A) $((B, F_B, \Phi_B))$ *входным* (*выходным*), если множество Γ есть входная (выходная) база Γ-структуры (F_A, Φ_A) $((F_B, \Phi_B))$. Нетрудно доказать следующие равенства: $\Phi_A = F_B = \Gamma = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\Gamma)}(A, B)$, $F_A = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\Gamma)}(A, A)$, $\Phi_B = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\Gamma)}(B, B)$.

Заметим, что множество Γ кроме категории $\mathscr{K}(\Gamma)$ естественным образом порождает еще некоторые категории. В качестве примера можно привести следующие: $\mathscr{K}(F_A)$, $\mathscr{K}(\Phi_B)$, $\mathscr{K}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\Gamma)}(B, A))$, $\mathscr{K}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, B)\setminus\Gamma)$.

4.3. В этом пункте будет существенно усилено предложение 2.4, именно, будет доказано, что в левой части соотношений (2.1) множества F и Ψ можно несколько уменьшить.

Предложение. *Если F' — входная база Γ-объекта (X, F, Φ), а Ψ' — выходная база Γ-объекта (Y, G, Ψ), то для любого множества $H \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X, Y)$ соотношения*

$$\Psi'\dot{H}F' \subset \Gamma, \quad \dot{H}F' \subset G, \quad \Psi'\dot{H} \subset \Phi \tag{4.1}$$

равносильны.

Доказательство. Вследствие предложения 2.4 множество $L = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\Gamma)}(X, Y)$ определяется каждым из следующих трех эквивалентных условий:

$$\Psi\dot{L}F \subset \Gamma, \quad \dot{L}F \subset G, \quad \Psi\dot{L} \subset \Phi. \tag{4.2}$$

Определим множества M, N и P таким образом:

$$\Psi'\dot{M}F' \subset \Gamma, \quad \dot{N}F' \subset G, \quad \Psi'\dot{P} \subset \Phi. \tag{4.3}$$

Достаточно доказать равенства

$$L = M = N = P. \tag{4.4}$$

Из определения множеств M и F' вытекает, что $\Psi'M \subset \Phi$. Заменив Φ на $\Psi'M$ во включении $\Phi F \subset \Gamma$, получим $\Psi'MF \subset \Gamma$. Из последнего включения (в силу $F' \subset F$) и первого соотношения в (4.3) следует, что $\Psi'\dot{M}F \subset \Gamma$. Таким образом, нам удалось в первом соотношении (4.3) множество F' заменить бо́льшим множеством F. При помощи аналогичных рассуждений можно перейти от (4.3) к более сильным соотношениям

$$\Psi\dot{M}F \subset \Gamma, \quad \dot{N}F \subset G, \quad \Psi\dot{P} \subset \Phi. \tag{4.5}$$

Доказательство закончено, так как из (4.2) и (4.5) следуют равенства (4.4).

4.4. Предложение. *Если $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$, $(Y, G, \Psi) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}(\Gamma)$, Ψ' — выходная база Γ-структуры (G, Ψ), $H \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X, Y)$, то на объекте X существует такая (единственная) Γ-структура (F, Φ), что*

$$\Psi H\dot{F} \subset \Gamma, \quad \Psi' H\dot{F} \subset \Gamma, \quad H\dot{F} \subset G. \tag{4.6}$$

Доказательство состоит из двух частей. В первой доказывается, что для любого множества $F \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, X)$ соотношения (4.6) равносильны, а во второй — существование такой Г-структуры (F, Φ) на объекте X, для которой множество F удовлетворяет условиям (4.6).

I. Определим множества L, M и N соотношениями

$$\Psi H\dot{L} \subset \Gamma,\ \Psi' H\dot{M} \subset \Gamma,\ H\dot{N} \subset G. \tag{4.7}$$

В первой части доказательства достаточно установить равенства

$$L = M = N. \tag{4.8}$$

В силу первых двух соотношений (4.7) (поскольку $\Psi' \subset \Psi$)

$$L \subset M. \tag{4.9}$$

Из определения выходной базы Ψ' и второго соотношения в (4.7) имеем $HM \subset G$, а из последнего включения и третьего соотношения в (4.7) —

$$M \subset N. \tag{4.10}$$

Из первого, третьего соотношений в (4.7) и включения $\Psi HN \subset \Gamma$ (оно вытекает из определения Г-структуры (G, Ψ)) получаем

$$N \subset L. \tag{4.11}$$

Равенства (4.8) следуют из (4.9), (4.10) и (4.11).

II. Теперь будем предполагать, что множество F удовлетворяет условиям (4.6). Пусть (P, Φ) есть Г-структура с входной базой F. Это означает, что $\Phi F \subset \Gamma$ и $\Phi\dot{P} \subset \Gamma$. Нам нужно установить равенство $F = P$. Так как $F \subset P$, достаточно доказать

$$P \subset F. \tag{4.12}$$

Если Q есть множество всех Г-морфизмов (X, P, Φ) в (Y, G, Ψ), то

$$\dot{Q}P \subset G,\ \dot{Q}F \subset G \tag{4.13}$$

ввиду предложения 4.3 и определения 2.4. Сравнив последние соотношения в (4.6) и (4.13), получим включение $H \subset Q$. Заменив в выражении $\dot{Q}P \subset G$ множество Q на H, получим $HP \subset G$. Включение (4.12) доказано, так как $HP \subset G$ и $H\dot{F} \subset G$.

Замечание. Объект X можно рассматривать как G-объект с G-структурой (F, Q). Множество H есть выходная база для этой G-структуры.

4.5. Предложение. *Если* $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$, $(X, F, \Phi) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}(\Gamma)$, F' — *входная база* Г-*структуры* (F, Φ), $H \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X, Y)$, *то на объекте* Y *существует такая* (*единственная*) Г-*структура* (G, Ψ), *что* $\dot{\Psi}HF \subset \Gamma$, $\dot{\Psi}HF' \subset \Gamma$, $\dot{\Psi}H \subset \Phi$.

Доказательство опускаем, так как оно аналогично доказательству предыдущего предложения.

4.6. Инициальные Г-структуры. Пусть I — произвольное множество индексов, а $\{H_i\}_{i \in I}$ — семейство множеств морфизмов $H_i \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X, X_i)$, причем для каждого $i \in I$ объект X_i оснащен Г-структурой (F_i, Φ_i) с выходной базой Φ_i'. Вследствие предложения 4.4 для каждого $i \in I$ существует такой единственный Г-объект (X, G_i, Ψ_i), что $\Phi_i H_i \dot{G}_i \subset \Gamma$, $\Phi_i' H_i \dot{G}_i \subset \Gamma$, $H_i G_i \subset F_i$.

Определение. Пара (F, Φ) называется *инициальной* Г-*структурой относительно семейства* $\{H_i\}_{i \subset I}$, если множество $G = \bigcap\limits_{i \in I} G_i$ является ее входной базой.

Докажем равенство

$$F = G. \tag{4.14}$$

Так как G есть входная база Г-структуры (F, Φ), то

$$G \subset F. \tag{4.15}$$

Из соотношений $G \subset G_i$ и $H_i\dot{G}_i \subset F$ вытекает включение $H_iG \subset F_i$, т. е. $H_i = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}(\Gamma)}((X, F, \Phi), X_i)$, что означает, в силу определения 2.4, $\dot{H}_iF \subset F_i$. Из последнего включения и определения множества $G_i(\dot{H}_iG_i \subset \subset F_i)$ следует, что $F \subset G_i$. Последнее включение выполняется при любом $i \in I$, поэтому

$$F \subset G = \bigcap_{i \in I} G_i. \qquad (4.16)$$

Доказательство закончено, так как из (4.15) и (4.16) имеем равенство (4.14).

Теперь приведенное выше определение можно переформулировать таким образом: Г-структура (F, Φ) называется *инициальной относительно семейства* $\{H_i\}_{i \in I}$, если $F = \bigcap_{i \in I} G_i$.

Этому же определению можно придать следующий вид: Г-структура (F, Φ) называется инициальной относительно семейства $\{H_i\}_{i \in I}$, если множество $\bigcup_{i \in I} \Phi_i' H_i$ является ее выходной базой.

Легко доказывается

Предложение. *Если* (F, Φ) — *инициальная* Г-*структура относительно семейства* $\{H_i\}_{i \in I}$, *то для того чтобы морфизм* h *произвольного* Г-*объекта* (Y, P, Q) *в объект* X *был Г-морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $i \in I$ *и для любого* $h_i \in H_i$ *композиция* h_ih *была* Г-*морфизмом.*

Это предложение можно считать еще одним определением инициальной Г-структуры.

4.7. Здесь мы сформулируем обобщение предложения 4.5. Доказательства будут опущены, так как они аналогичны доказательствам предыдущего пункта.

Пусть I — произвольное множество индексов, а $\{H_i\}_{i \in I}$ — семейство множеств морфизмов $H_i \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X_i, X)$, причем для каждого $i \in I$ объект X_i оснащен Г-структурой (F_i, Φ_i) с входной базой F_i'. Вследствие предложения 4.5 для каждого $i \in I$ существует такой единственный Г-объект (X, G_i, Ψ_i), что $\dot{\Psi}_iH_iF_i \subset \Gamma$, $\dot{\Psi}_iH_iF_i' \subset \Gamma$, $\dot{\Psi}_iH_i \subset \Phi_i$.

Определение. Будем называть Г-структуру (F, Φ) *финальной относительно семейства* $\{H_i\}_{i \in I}$, если выполняется одно из следующих условий (можно показать, что эти условия равносильны):

а) множество $\Psi = \bigcap_{i \in I} \Psi_i$ — выходная база Г-структуры (F, Φ);

б) $\Phi = \bigcap_{i \in I} \Psi_i$;

в) множество $\bigcup_{i \in I} H_iF_i'$ — входная база Г-структуры (F, Φ).

Легко доказывается

Предложение. *Если* (F, Φ) — *финальная* Г-*структура относительно семейства* $\{H_i\}_{i \in I}$, *то для того чтобы морфизм* h *объекта* X *в произвольный* Г-*объект* (Y, P, Q) *был* Г-*морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы для любых* $i \in I$ *и* Г-*морфизма* $h_i \in H_i$ *композиция* hh_i *была* Г-*морфизмом.*

Очевидно, Г-структура входного (выходного) Г-объекта инициальна (финальна) относительно Г.

§ 5. Роды структуры, эквивалентные родам структуры $T(\Gamma)$ и $T_*(\Gamma)$

Любые два Г-объекта (A', a, α) и (B', b, β) порождают новую категорию $\mathscr{K}(\Gamma')$, где Γ' — множество всех Г-морфизмов A' в B'. При этом возникают два рода структуры $T(\Gamma')$ и $T_*(\Gamma')$. В настоящем параграфе будут сформулированы и обоснованы условия, достаточные для того, чтобы $T(\Gamma')$ и $T_*(\Gamma')$ были эквивалентны $T(\Gamma)$ и $T_*(\Gamma$ соответственно, т. е. $T(\Gamma) \sim T(\Gamma')$ и $T_*(\Gamma) \sim T_*(\Gamma')$.

5.1. Пункты 5.2—5.6 посвящены доказательству следующей теоремы.

Теорема. *Для того чтобы роды структуры* $T(\Gamma')$ *и* $T_*(\Gamma')$ *были эквивалентны соответственно родам структуры* $T(\Gamma)$ *и* $T_*(\Gamma)$, *достаточно выполнения условий*

$$1_A \in \alpha' a, \quad 1_B \in \beta b', \tag{5.1}$$

где α' *и* b' — *множества всех* Γ-*морфизмов* A' *в* A *и* B *в* B' *соответственно.*

Замечание. Мы проведем доказательство эквивалентности только родов структуры $T(\Gamma')$ и $T(\Gamma)$. Эквивалентность $T_*(\Gamma')$ и $T_*(\Gamma)$ после этого доказывается легко. В ходе доказательства фактически будет установлена эквивалентность категорий $\mathscr{K}(\Gamma')$ и $\mathscr{K}(\Gamma)$. Мы не будем отвлекаться для того, чтобы отметить этот факт.

5.2. Каждому объекту X категории $\mathscr{K}$ поставим в соответствие отображение $h(X)$: $T(\Gamma)(X) \to T(\Gamma')(X)$, определяемое равенством $h(X)(F, \Phi) = (F', \Phi')$, где F' и Φ' — множества всех Γ-морфизмов A' в (X, F, Φ) и (X, F, Φ) в B' соответственно. Из предложения, которое мы докажем в этом пункте, следует, что отображение $h(X)$ определено корректно, т. е. пара (F', Φ') является Γ'-структурой.

Предложение. *Если* $h(X)(F, \Phi) = (F', \Phi')$, *то*

$$F'a = F, \quad \beta\Phi' = \Phi, \quad \dot{\Phi}'\dot{F}' \subset \Gamma'. \tag{5.2}$$

Доказательство. В дальнейшем, без специальных оговорок, будем применять следующие очевидные включения: $F'a \subset F$, $F\alpha' \subset F'$, $b'\Phi \subset \Phi'$ и $\beta\Phi' \subset \Phi$. Умножив $F\alpha' \subset F'$ справа на a, $b'\Phi \subset \Phi'$ слева на β и воспользовавшись условиями (5.1), получим $F \subset F'a$ и $\Phi \subset \beta\Phi'$. Из двух последних включений и $F'a \subset F$, $\beta\Phi' \subset \Phi$ следуют равенства (5.2).

Осталось доказать, что пара (F', Φ') есть Γ'-структура. Так как композиция Γ-морфизмов — Γ-морфизм, то

$$\Phi' F' \subset \Gamma'. \tag{5.3}$$

Достаточно установить равенства

$$F' = P, \quad \Phi' = Q, \tag{5.4}$$

где множества P и Q морфизмов категории $\mathscr{K}$ определяются соотношениями

$$\Phi'\dot{P} \subset \Gamma', \quad \dot{Q}F' \subset \Gamma'. \tag{5.5}$$

Из (5.3) и (5.5) следует, что

$$F' \subset P, \quad \Phi' \subset Q. \tag{5.6}$$

Умножив $\Phi'P \subset \Gamma'$ слева на β, а $QF' \subset \Gamma'$ справа на a и воспользовавшись равенствами (5.2), получим $\Phi P \subset \beta\Gamma'$, $QF \subset \Gamma' a$. Так как $\beta\Gamma' \subset \alpha$ и $\Gamma' a \subset b$, то

$$\Phi P \subset \alpha, \quad QF \subset b. \tag{5.7}$$

Вследствие определения множеств F' и Φ'

$$\Phi\dot{F}' \subset \alpha, \quad \dot{\Phi}'F \subset b. \tag{5.8}$$

Из (5.7) и (5.8) вытекают включения

$$P \subset F', \quad Q \subset \Phi'. \tag{5.9}$$

Доказательство закончено, так как из (5.6) и (5.9) следуют равенства (5.4).

5.3. Предложение. *Если* X, Y — *объекты категории* $\mathscr{K}$, $(F, \Phi) \in T(\Gamma)(X)$, $(F', \Phi') = h(X)(F, \Phi)$, $(G, \Psi) = \mathrm{T}(\Gamma)(Y)$, $(G', \Psi') = h(Y)(G, \Psi)$, *то*

$$L = M, \tag{5.10}$$

где L — *множество всех* Γ-*морфизмов* (X, F, Φ) *в* (Y, G, Ψ), *а* M — *множество всех* Γ'-*морфизмов* $(X, F'\Phi')$ *в* (Y, G', Ψ').

Доказательство. Будем применять следующие очевидные соотношения: $\dot{L}F \subset G$, $\dot{M}F' \subset G'$ и $LF' \subset G'$. Из двух последних вытекает

$$L \subset M. \tag{5.11}$$

Умножив $MF' \subset G'$ справа на a и воспользовавшись равенствами $F'a = F$ и $G'_a = G$, которые следуют из предложения 5.2, получим включение $MF \subset G$, из которого ввиду $\dot{L}F \subset G$

$$M \subset L. \tag{5.12}$$

Из (5.11) и (5.12) получаем равенство (5.10).

5.4. Предложение. *Для каждого объекта X категории $\mathcal{K}$ отображение $h(X)$ сюръективно.*

Доказательство. Произвольной Γ'-структуре (F', Φ') объекта X сопоставим Γ-структуру (F, Φ), инициальную относительно Φ'. Достаточно доказать равенство $h(X)(F, \Phi) = (F', \Phi')$, которое равносильно двум следующим:

$$F' = P,\ \Phi' = Q; \tag{5.13}$$

P и Q — множества всех Γ-морфизмов A' в X и X в B' соответственно.

Так как Γ-структура (F, Φ) инициальна относительно Φ', то $\Phi'\dot{F} \subset b$ и $\beta\Phi'\dot{F} \subset \Gamma$. Последнее соотношение означает, что $\beta\Phi'$ — выходная база Γ-структуры (F, Φ). В дальнейшем, без специальных оговорок, будем применять очевидные соотношения $QP \subset \Gamma'$, $\dot{Q}F \subset b$, $\Phi\dot{P} \subset \alpha$. Из $\Phi'\dot{F} \subset b$ и $\dot{Q}F \subset b$ следует

$$\Phi' \subset Q. \tag{5.14}$$

Заменив в $QP \subset \Gamma'$ множество Q на Φ', получим $\Phi'P \subset \Gamma'$. Так как (F', Φ') есть Γ'-структура, то в силу последнего включения

$$P \subset F'. \tag{5.15}$$

Заменив в $\Phi\dot{P} \subset \alpha$ множество Φ на $\beta\Phi'$ (на основании предложения 4.3 Φ можно заменить на любую выходную базу Γ-структуры (F, Φ)), имеем

$$\beta\Phi'\dot{P} \subset \alpha. \tag{5.16}$$

Умножив включение $\Phi'\mathrm{F}' \subset \Gamma'$ слева на β и учитывая, что $\beta\Gamma' \subset \alpha$, получим

$$\beta\Phi'F' \subset \alpha. \tag{5.17}$$

Из (5.16) и (5.17) следует

$$F' \subset P. \tag{5.18}$$

Так как $QF' \subset \Gamma'$ (в силу (5.18) и включения $QP \subset \Gamma'$) и $\dot{\Phi}'\dot{F}' \subset \Gamma'$, то

$$Q \subset \Phi'. \tag{5.19}$$

Доказательство закончено, так как из (5.14), (5.15), (5.18) и (5.19) вытекают равенства (5.13).

5.5. Предложение. *Для каждого объекта X категории $\mathcal{K}$ отображение $h(X)$ биективно.*

Доказательство. Вследствие предложения 5.4 достаточно доказать только инъективность $h(X)$, т. е. установить, что из

$$h(X)(F, \Phi) = h(X)(G, \Psi) \tag{5.20}$$

следует

$$F = G,\ \Phi = \Psi. \tag{5.21}$$

Если ввести обозначения $(F', \Phi') = h(X)(F, \Phi)$ и $(G', \Psi') = h(X) \times (G, \Psi)$, то (5.20) будет равносильно

$$F' = G',\ \Phi' = \Psi'. \tag{5.22}$$

Умножив первое из равенств (5.22) справа на a, а второе слева на β и воспользовавшись предложением 5.2, получим (5.21). Доказательство закончено.

5.6. Рассмотрим два произвольных объекта X и Y категории $\mathscr{K}$. Функтор $T(\Gamma)$ задает некоторое отображение множества изоморфизмов X в Y в множество биекций $T(\Gamma)(X)$ в $T(\Gamma)(Y)$. Это отображение $T(\Gamma)$ (в его обозначении мы, для краткости, не указываем объекты X и Y) сопоставляет каждому изоморфизму $u\colon X\to Y$ отображение, переводящее произвольную Г-структуру (F, Φ) объекта X в Г-структуру $(G, \Psi)=T(\Gamma)(u)(F, \Phi)$, финальную относительно $\{u\}$. Аналогично определяется отображение $T(\Gamma')$. Для завершения доказательства теоремы осталось установить равенство

$$h(Y)T(\Gamma)(u)(F, \Phi)=T(\Gamma')(u)h(X)(F, \Phi)$$

для произвольной Г-структуры (F, Φ) объекта X и произвольного изоморфизма $u\colon X\to Y$. Введем обозначения $(F', \Phi')=h(X)(F, \Phi)$, $(G', \Psi')=T(\Gamma')(u)(F', \Phi')$, $(G, \Psi)=T(\Gamma)(u)(F, \Phi)$, $(G'', \Psi'')=$ $=h(Y)(G, \Psi)$. Требуется доказать равенства

$$G'=G'', \quad \Psi'=\Psi''. \tag{5.23}$$

Так как каждое из этих равенств следует из другого, то достаточно доказать какое-нибудь одно из них. Пусть $v\colon Y\to X$ есть обратный изоморфизм для изоморфизма $u\colon X\to Y$, т. е. $vu=1_X$, $uv=1_Y$. Так как $\dot{F}'a\subset F$ и $v\dot{G}'\subset F'$, то $vG'a\subset F$, а так как $\dot{G}''a\subset G$ и $v\dot{G}\subset F$, то $vG''a\subset F$. Из соотношений $v\dot{G}'\subset F'$, $\dot{F}'a\subset F$ и $vG'a\subset F$ легко вывести, что $v\dot{G}'a\subset F$. Аналогично доказывается, что $v\dot{G}''a\subset F$. Из двух последних соотношений следует первое (а значит, и второе) равенство в (5.23). Доказательство закончено.

§ 6. Сжатия и D-сжатия вещественной прямой

Рассмотрим два произвольных метрических пространства M_1 и M_2 с метриками ρ_1 и ρ_2 соответственно. Будем называть D-отображение $\gamma\colon M_1\to M_2$ *D-сжатием*, если из $p, q\in\gamma^{-1}(M_2)$ следует неравенство $\rho_2(\gamma(p), \gamma(q))\leqslant\rho_1(p, q)$; D-сжатие называется *сжатием*, если оно является обычным отображением, т. е. $M_1=\gamma^{-1}(M_2)$.

В этом параграфе мы установим связь между метрическими структурами и некоторыми Г-структурами и Δ-структурами, где Γ — множество всех сжатий $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, а Δ — множество всех D-сжатий $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$.

6.1. Пусть род структуры β: Bij Ens $\to$ Bij Ens сопоставляет каждому множеству X множество всех его внутренних метрик $\rho\colon X^2\to\mathbf{R}$. Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством с внутренней метрикой* (см. также [5] или [6]), если ρ есть метрика, заданная на X и для любых двух точек $p, q\in X$ и для любого числа $\varepsilon>0$ найдется путь, соединяющий точки p и q, длина которого меньше $\rho(p, q)+\varepsilon$.

В п. 6.2—6.7 будет доказана

Теорема. *Род структуры β эквивалентен $T_*(\Gamma)$.*

Из этого результата вытекает, что следующее определение метрического пространства с внутренней метрикой равносильно общепринятому.

Определение. Множество X, наделенное Г-структурой (F, Φ), соединяющей и различающей точки (в записи $(F, \Phi)\in T_*(\Gamma)(X)$), называется *метрическим пространством с внутренней метрикой*, если Γ — множество всех сжатий $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$.

6.2. Предложение. *Если X — метрическое пространство с внутренней метрикой $\rho\in\beta(X)$, F и Φ — множества всех сжатий $\mathbf{R}$ в X и X в $\mathbf{R}$ соответственно, то* $(F, \Phi)\in T_*(\Gamma)(X)$.

Доказательство. Сначала докажем

$$\Phi\dot{F}\subset\Gamma. \tag{6.1}$$

Допустим противное, т. е. пусть существует такое отображение $f\colon\mathbf{R}\to$ $\to X$, что f не входит в F, но $\Phi\{f\}\subset\Gamma$. Так как f не является сжатием, то

$$0<|a-b|<\rho(f(a),\ f(b)) \qquad (6.2)$$

для некоторых чисел a, b. Определим функцию φ: $X\to\mathbf{R}$ равенством $\varphi(p)=\rho(f(a),\ p)$. Из неравенства

$$\rho(p,\ q)\geqslant|\rho(f(a),\ p)-\rho(f(b),\ q)|=|\varphi(p)-\varphi(q)|$$

следует, что φ — сжатие, т. е. $\varphi\in\Phi$. Заменив в $\Phi\{f\}\subset\Gamma$ множество Φ на $\{\varphi\}$, получим, что суперпозиция φf есть сжатие и следовательно,

$$|\varphi f(a)-\varphi f(b)|\leqslant|a-b|.$$

Последнее неравенство противоречит (6.2), так как его левая часть равняется $\rho(f(a),\ f(b))$. Полученное противоречие доказывает (6.1).

Теперь докажем

$$\Phi F\subset\Gamma. \qquad (6.3)$$

Допустим, что существует такое отображение φ: $X\to R$, что φ не выходит в Φ, но $\{\varphi\}F\subset\Gamma$. Так как φ не является сжатием, то

$$0<\rho(p,\ q)<|\varphi(p)-\varphi(q)|$$

для некоторых точек p, $q\in X$. Зафиксируем число ε так, чтобы выполнялись неравенства

$$0<\varepsilon<|\varphi(p)-\varphi(q)|-\rho(p,\ q) \qquad (6.4)$$

и существовал путь σ: $[0,\ \rho(p,\ q)+\varepsilon]\to X$ длины $\rho(p,\ q)+\varepsilon$, соединяющий точки p и q. Последнее означает, что $\sigma(0)=p$, $\sigma(\rho(p,\ q)+\varepsilon)=q$. Будем предполагать, что путь σ имеет естественную параметризацию, т. е. для любых двух чисел a, b, удовлетворяющих условиям $0\leqslant a<b\leqslant\rho(p,\ q)+\varepsilon$, длина пути, являющегося сужением σ на отрезок $[a,\ b]$, равняется $b-a$. Ясно, что тогда отображение f: $\mathbf{R}\to X$, определенное равенством

$$f(t)=\begin{cases} p, & \text{если } t\leqslant 0,\\ \sigma(t), & \text{если } 0\leqslant t\leqslant\rho(p,\ q)+\varepsilon,\\ q, & \text{если } \rho(p,\ q)+\varepsilon\leqslant t,\end{cases}$$

является сжатием, т. е. $f\in F$. Заменив в $\{\varphi\}F\subset\Gamma$ множество F на $\{f\}$, получим, что суперпозиция φf есть сжатие и, следовательно,

$$|\varphi f(0)-\varphi f(\rho(p,\ q)+\varepsilon)|\leqslant\rho(p,\ q)+\varepsilon.$$

Последнее неравенство противоречит (6.4), так как $\varphi f(0)=\varphi(p)$ и $\varphi f(\rho(p,\ q)+\varepsilon)=\varphi(q)$. Полученное противоречие доказывает (6.3).

Из (6.1) и (6.3) следует, что $(F,\ \Phi)\in T(\Gamma)(X)$. Можно считать, что предложение 6.2 доказано, так как очевидно, что Г-структура $(F,\ \Phi)$ соединяет и различает точки Г-пространства $(X,\ F,\ \Phi)$.

Доказанное предложение позволяет каждому множеству X сопоставить отображение $h(X)$: $\beta(X)\to T_*(X)$, определяемое равенством $h(X)(\rho)=(F,\ \Phi)$, где F и Φ — множества всех сжатий $\mathbf{R}$ в $(X,\ \rho)$ и $(X,\ \rho)$ в $\mathbf{R}$ соответственно. Для доказательства теоремы достаточно установить, что класс отображений $h(X)$ задает функторный изоморфизм h: $\beta\to T_*(\Gamma)$.

6.3. Каждой Г-структуре $(F,\Phi)\in T_*(\Gamma)(X)$ поставим в соответствие функцию ρ: $X^2\to\mathbf{R}$, определяемую равенством $\rho(p,\ q)=\sup|\varphi(p)-\varphi(q)|$, где sup берется по всем $\varphi\in\Phi$. Докажем корректность этого определения. Для этого нужно убедиться в справедливости неравенства $\rho(p,\ q)<+\infty$ для любых точек p, $q\in X$. Оно очевидно при $p=q$. Пусть $p\neq q$. Так как $(F,\ \Phi)$ соединяет точки, то $f(a)=p$ и $f(b)=q$ для некоторых a, $b\in\mathbf{R}$ и $f\in\mathbf{R}$. Из неравенства

$$|\varphi(p)-\varphi(q)|=|\varphi f(a)-\varphi f(b)|\leqslant|a-b|,$$

справедливого для любой функции $\varphi\in\Phi$, и определения ρ следует, что $\rho(p,\ q)\leqslant|a-b|$.

6.4. Предложение. *Функция* $\rho\colon X^2\to\mathbf{R}$, *определенная в п.* 6.3, *есть метрика на множестве* X.

Доказательство. Докажем неравенство треугольника

$$\rho(p,\ q)+\rho(q,\ r)\geqslant\rho(p,\ r) \tag{6.5}$$

для любых трех точек $p,\ q,\ r\in X$. Для произвольного $\varepsilon>0$ подберем выходную функцию $\varphi\in\Phi$ так, чтобы

$$|\varphi(p)-\varphi(r)|>\rho(p,\ r)-\varepsilon. \tag{6.6}$$

Ясно, что

$$\rho(p,\ q)\geqslant|\varphi(p)-\varphi(q)|,\ \rho(q,\ r)\geqslant|\varphi(q)-\varphi(r)|. \tag{6.7}$$

Сложив неравенства (6.6) и (6.7), получим

$$\rho(p,\ q)+\rho(q,\ r)>\rho(p,\ r)-\varepsilon. \tag{6.8}$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ из (6.8) следует (6.5). Проверка остальных аксиом метрического пространства не представляет труда.

Замечание. В дальнейшем без специальных оговорок будем предполагать, что каждое Г-пространство X с Г-структурой $(F,\Phi)\in\in T_*(\Gamma)(X)$ является метрическим пространством с метрикой ρ, определенной в п. 6.3.

6.5. Предложение. *Множества всех сжатий* $\mathbf{R}$ *в* X *и* X *в* $\mathbf{R}$ *совпадают соответственно с* F *и* Φ.

Доказательство. Всюду в этом пункте буквами f и φ обозначаются отображения $\mathbf{R}$ в X и X в $\mathbf{R}$ соответственно.

I. Пусть f — сжатие, т. е.

$$\rho(f(a),\ f(b))\leqslant|a-b|. \tag{6.9}$$

В силу определения 6.3 для любого отображения $\varphi\in\Phi$

$$|\varphi f(a)-\varphi f(b)|\leqslant\rho(f(a),\ f(b)). \tag{6.10}$$

Из (6.9) и (6.10) следует включение $\varphi f\in\Gamma$, которое означает, что $f\in F$.

II. Теперь пусть $f\in F$. Зафиксируем произвольно числа $a,\ b,\ \varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ и подберем функцию $\varphi\in\Phi$ так, что $\rho(f(a),\ f(b))<|\varphi f(a)-\varphi f(b)|+\varepsilon$. Из последнего неравенства, учитывая произвольность $\varepsilon>0$ и неравенство $|\varphi f(a)-\varphi f(b)|\leqslant|a-b|$, получаем, что f — сжатие.

III. Пусть φ — сжатие. Зафиксируем произвольно числа $a,\ b$ и входное отображение $f\in F$. Так как f и φ — сжатия, то $|\varphi f(a)-\varphi f(b)|\leqslant\leqslant\rho(f(a),\ f(b))\leqslant|a-b|$. Из неравенства $|\varphi f(a)-\varphi f(b)|\leqslant|a-b|$ вытекает включение $\varphi f\in\Gamma$, которое означает, что $\varphi\in\Phi$.

IV. Теперь пусть $\varphi\in\Phi$. В силу определения 6.3 имеет место неравенство $|\varphi(p)-\varphi(q)|\leqslant\rho(p,\ q)$ для любых $p,\ q\in X$, т. е. φ — сжатие.

6.6. Предложение. *Если* $p,\ q\in X$, *то* $\rho(p,\ q)=\inf E(p,\ q)$, *где числовое множество* $E(p,\ q)$ *определяется следующим образом: для того чтобы число* c *принадлежало* $E(p,\ q)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа* $a,\ b$ *и входное отображение* $f\in F$, *что* $f(a)==p,\ f(b)=q,\ c=|a-b|$.

Доказательство. Докажем сначала неравенство

$$\rho(p,\ q)\leqslant\sigma(p,\ q), \tag{6.11}$$

где $\sigma(p,\ q)=\inf E(p,\ q)$. Для произвольного $\varepsilon>0$ подберем отображения $f\in F$, $\varphi\in\Phi$ и числа $a,\ b$ так, что $f(a)=p,\ f(b)=q$ и

$$|a-b|<\sigma(p,\ q)+\varepsilon,\ \rho(p,\ q)-\varepsilon<|\varphi(p)-\varphi(q)|. \tag{6.12}$$

Так как $|\varphi(p)-\varphi(q)|\leqslant|a-b|$, то из (6.12), учитывая произвольность $\varepsilon>0$, получаем (6.11).

В дальнейшем нам потребуется

Лемма. *Если* f, $g \in F$, $a \in \mathbf{R}$, $f(a) = g(a)$ и отображение k: $\mathbf{R} \to X$ *определяется равенством*

$$k(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t \leqslant a, \\ g(t), & \text{если } a \leqslant t, \end{cases}$$

то $k \in F$.

Доказательство. Установим неравенство $|\varphi k(x) - \varphi k(y)| \leqslant |x-y|$ для любых x, $y \in \mathbf{R}$ и $\varphi \in \Phi$. При этом можно ограничиться случаем, когда число a находится строго между x и y. Для определенности будем считать, что $x < a < y$. Так как φf и φg — сжатия, то лемма следует из неравенства

$$|\varphi k(x) - \varphi k(y)| \leqslant |\varphi f(x) - \varphi f(a)| + |\varphi g(a) - \varphi g(y)|.$$

Докажем, что

$$\sigma(p, q) + \sigma(q, r) \geqslant \sigma(p, r) \tag{6.13}$$

для любых точек p, q, $r \in X$. Так как Г-структура (F, Φ) соединяет точки в X, то существуют такие входные функции f, $g \in F$ и числа x, x', y', y, что $f(x) = p$, $f(x') = q$, $g(y') = q$, $g(y) = r$. Не умаляя общности, будем считать, что $x < x' = a = y' < y$. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$, и пусть функции f и g подобраны так, что

$$a - x < \sigma(p, q) + \varepsilon, \quad y - a < \sigma(q, r) + \varepsilon. \tag{6.14}$$

Если k — отображение, определенное в лемме, то $k(x) = p$, $k(y) = r$, $k \in F$. Из этого обстоятельства и определения σ имеем

$$\sigma(p, r) \leqslant y - x. \tag{6.15}$$

Сложив (6.14) и (6.15), получим $\sigma(p, r) < \sigma(p, q) + \sigma(q, r) + 2\varepsilon$. Вследствие произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего неравенства вытекает (6.13).

Докажем теперь неравенство

$$\rho(p, q) \geqslant \sigma(p, q). \tag{6.16}$$

Определим функцию φ: $X \to \mathbf{R}$ равенством $\varphi(r) = \sigma(p, r)$. Из (6.13) легко вывести, что

$$|\sigma(p, f(a)) - \sigma(p, f(b))| \leqslant \sigma(f(a), f(b)) \tag{6.17}$$

для произвольных $f \in F$ и a, $b \in \mathbf{R}$. Так как $\varphi f(x) = \sigma(p, f(x))$, $\sigma(f(a), f(b)) \leqslant |a-b|$, то из (6.17) следует, что $|\varphi f(a) - \varphi f(b)| \leqslant |a-b|$, т. е. $\varphi \in \Phi$. А поскольку $\varphi \in \Phi$, то $\rho(p, q) \geqslant |\varphi(p) - \varphi(q)| = \varphi(q) = \sigma(p, q)$. Неравенство (6.16) доказано. Из (6.11) и (6.16) следует справедливость предложения 6.6.

Следствие. *Пара* (X, ρ), *где функция* ρ *определена в п.* 6.3, *есть метрическое пространство с внутренней метрикой.*

6.7. Рассмотрим произвольное биективное отображение u: $X \to Y$. Функторы β и $T_*(\Gamma)$ порождают два новых биективных отображения $\beta(u)$: $\beta(X) \to \beta(Y)$ и $T_*(\Gamma)$ u): $T_*(\Gamma)(X) \to T_*(\Gamma)(Y)$. Для завершения доказательства теоремы осталось установить равенство

$$T_*(\Gamma)(u)\, h(X) = h(Y)\, \beta(u), \tag{6.18}$$

для доказательства которого зафиксируем произвольно внутреннюю метрику $\rho \in \beta(X)$ и определим $\sigma \in \beta(Y)$ и $(F, \Phi) \in T_*(\Gamma)(X)$ равенствами $\sigma = \beta(u)(\rho)$ и $(F, \Phi) = h(X)(\rho)$. Достаточно показать, что

$$(G, \Psi) = (G', \Psi'), \tag{6.19}$$

где $(G, \Psi) = T(\Gamma)(u)(F, \Phi)$, $(G', \Psi') = h(Y)(\sigma)$. Если $v = u^{-1}$, то $vG \subset F$. Ясно также, что $vG' \subset F$. Из двух последних соотношений имеем равенство $G = G'$, из которого (так как $\Psi \dot{G} \subset \Gamma$ и $\Psi' \dot{G}' \subset \Gamma$) вытекает (6.19). Теорема доказана.

6.8. Для каждого множества X определим множество $\delta(X) \subset T_*(\Delta)(X)$ следующим образом: Δ-структура $(F, \Phi) \in T_*(\Delta)(X)$

принадлежит $\delta(X)$, если и только если из условий $f, g \in F$; $a, b, c \in \mathbf{R}$; $a \leqslant b \leqslant c$; $f(b) = g(b) \neq \varnothing$ вытекает существование такого входного D-отображения $k \in F$, что $k(a) = f(a)$, $k(b) = f(b) = g(b)$, $k(c) = g(c)$. Этим мы определили род структуры δ: BijEns $\to$ BijEns. Последняя запись корректна, так как Bij D = BijEns.

В п. 6.9—6.13 будет доказана

Теорема. *Род структуры* δ *эквивалентен роду структуры* μ: BijEns $\to$ $\to$ BijEns, *сопоставляющему каждому множеству* X *множество* $\mu(X)$ *всех его метрик.*

6.9. Предложение. *Если* X — *метрическое пространство с метрикой* $\rho \in \mu(X)$, F *и* Φ — *множества всех* D-*сжатий* $\mathbf{R}$ *в* X *и* X *в* $\mathbf{R}$ *соответственно, то* $(F, \Phi) \in \delta(X)$.

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\Phi \dot{F} \subset \Delta. \tag{6.20}$$

Допустим противное, т. е. существует такое D-отображение f: $\mathbf{R} \to X$, что f не входит в F, но $\Phi\{f\} \subset \Delta$. Так как f не является D-сжатием, то

$$0 < |a-b| < \rho(f(a), f(b)) \tag{6.21}$$

для некоторых чисел a, b. Определим отображение φ: $X \to \mathbf{R}$ равенством $\varphi(p) = \rho(f(a), p)$. Из неравенства

$$\rho(p, q) \geqslant |\rho(f(a), p) - \rho(f(a), q)| = |\varphi(p) - \varphi(q)|$$

следует, что φ — D-сжатие (даже просто сжатие), т. е. $\varphi \in \Phi$. Заменив в $\Phi\{f\} \subset \Delta$ множество Φ на $\{\varphi\}$, получим, что композиция φf — D-сжатие и, следовательно, $|\varphi f(a) - \varphi f(b)| \leqslant |a-b|$. Последнее неравенство противоречит (6.21), ибо его левая часть равняется $\rho(f(a), f(b))$. Полученное противоречие доказывает (6.20).

Теперь покажем, что

$$\dot{\Phi} F \subset \Delta. \tag{6.22}$$

Допустим существование такого D-отображения φ: $X \to \mathbf{R}$, которое не входит в Φ, но $\{\varphi\}F \subset \Delta$. Так как φ не является D-сжатием, то

$$0 < \rho(p, q) < |\varphi(p) - \varphi(q)| \tag{6.23}$$

для некоторых точек $p, q \in X$. Определим D-отображение f: $\mathbf{R} \to X$ равенствами $f(0) = p$, $f(\rho(p, q)) = q$, $\{p, q\} = f(\mathbf{R})$. Так как f — D-сжатие, то $f \in F$. Заменив в $\{\varphi\}F \subset \Delta$ множество F на $\{f\}$, получим, что композиция φf — D-сжатие и, следовательно, $|\varphi f(0) - \varphi f(\rho(p, q))| \leqslant \rho(p, q)$. Последнее неравенство противоречит (6.23), поскольку его левая часть равняется $|\varphi(p) - \varphi(q)|$. Полученное противоречие доказывает (6.22).

Из (6.20) и (6.22) вытекает, что пара (F, Φ) есть Δ-структура. Очевидно, что эта Δ-структура соединяет и различает точки Δ-пространства (X, F, Φ), т. е. $(F, \Phi) \in T_*(\Delta)(X)$.

Рассмотрим такие входные D-отображения $f, g \in F$ и числа $a, b, c \in \mathbf{R}$, для которых выполняются условия $a \leqslant b \leqslant c$, $f(b) = g(b) \neq \varnothing$. Определим D-отображение k: $\mathbf{R} \to X$ следующим образом:

а) $k(a) = f(a)$, $k(b) = f(b) = g(b)$, $k(c) = g(c)$;

б) если число $x \neq a, b, c$, то $k(x) = \varnothing$.

Для завершения доказательства предложения 6.9 достаточно установить, что $k \in F$. Так как это очевидно, если $f(a) = \varnothing$ или $g(c) = \varnothing$, то будем считать, что $f(a) \neq \varnothing$ и $g(c) \neq \varnothing$. Нам нужно доказать, что k — D-сжатие, т. е. $\rho(k(a), k(b)) \leqslant b-a$, $\rho(k(b), k(c)) \leqslant c-b$, $\rho(k(a), k(c)) \leqslant c-a$. В доказательстве нуждается только последнее неравенство. Оно верно, ибо в силу неравенства треугольника $\rho(k(a), k(c)) \leqslant \rho(f(a), f(b)) + \rho(g(b), g(c)) \leqslant c-a$. Доказанное предложение позволяет каждому множеству X сопоставить отображение $h(X)$: $\mu(X) \to \delta(X)$, определяемое равенством $h(X)(\rho) = (F, \Phi)$, где F и Φ — множества всех D-сжатий $\mathbf{R}$ в (X, ρ) и (X, ρ) в $\mathbf{R}$ соответственно. Для доказательства теоремы 6.8 достаточно установить, что класс отображений $h(X)$ задает функторный изоморфизм $h\colon \mu \to \delta$.

6.10. Каждой Δ-структуре $(F, \Phi) \in \delta(X)$ поставим в соответствие функцию $\rho\colon X^2 \to \mathbf{R}$, определяемую равенством $\rho(p, q) = \sup|\varphi(p) - \varphi(q)|$, где sup берется по всем таким $\varphi \in \Phi$, для которых $\varphi(p) \neq \varnothing$ и $\varphi(q) \neq \varnothing$. Корректность этого определения доказывается так же, как корректность аналогичного определения 6.3. Имеет место следующее очевидное

Предложение. *Пусть* p, $q \in X$; a, $b \in R$ *и* $|a - b| = \rho(p, q)$. *Тогда*

а) *если* D-*отображение* $f\colon \mathbf{R} \to X$ *удовлетворяет условиям* $f(a) = p$, $f(b) = q$ *и* $f^{-1}(X) = \{a, b\}$, *то* $f \in F$;

б) *если* D-*отображение* $\varphi\colon X \to \mathbf{R}$ *удовлетворяет условиям* $\varphi(p) = a$, $\varphi(q) = b$ *и* $\varphi^{-1}(\mathbf{R}) = \{p, q\}$, *то* $\varphi \in \Phi$.

6.11. Предложение. *Функция* ρ, *определенная в* 6.10, *есть метрика, т. е.* $\rho \in \mu(X)$.

Доказательство. В доказательстве нуждается только неравенство треугольника (6.5). Зафиксируем числа a, b, c так, чтобы выполнялись равенства

$$b - a = \rho(p, q), \quad c - b = \rho(q, r). \tag{6.24}$$

В соответствии с предложением 6.10 подберем D-отображения f, $g \in F$ и $\varphi \in \Phi$ так, что

$$f(a) = p,\ f(b) = g(b) = q,\ f(c) = r,\ \varphi(p) = 0,\ \varphi(r) = \rho(p, r), \tag{6.25}$$

причем $f^{-1}(X) = \{a, b\}$, $g^{-1}(X) = \{b, c\}$, $\varphi^{-1}(\mathbf{R}) = \{p, q\}$. В силу определения 6.8 существует такое входное D-отображение $k \in F$, что

$$k(a) = p, \quad k(b) = q, \quad k(c) = r. \tag{6.26}$$

Так как $\varphi k \in \Delta$, то $|\varphi k(a) - \varphi k(c)| \leqslant |a - c|$. Из последнего неравенства и (6.24) следует

$$|\varphi k(a) - \varphi k(c)| \leqslant \rho(p, q) + \rho(q, r), \tag{6.27}$$

а из (6.24) и (6.25) —

$$|\varphi k(a) - \varphi k(c)| = \rho(p, r). \tag{6.28}$$

Неравенство треугольника (6.5) вытекает из (6.27) и (6.28).

6.12. Предложение. *Если множество* X *наделено* Δ-*структурой* $(F, \Phi) \in \delta(X)$, *то множества всех* D-*сжатий* $\mathbf{R}$ *в* (X, ρ) *и* (X, ρ) *в* $\mathbf{R}$, *где* ρ — *метрика, определенная в* 6.10, *совпадают соответственно с* F *и* Φ.

Доказательство. Всюду в этом пункте буквами f и φ обозначаются D-отображения $\mathbf{R}$ в X и X в $\mathbf{R}$ соответственно. Чтобы не отвлекаться на рассмотрение тривиальных случаев, будем предполагать, что $f(\mathbf{R}) \neq \varnothing$ и $\varphi(X) \neq \varnothing$.

I. Пусть f — D-сжатие, т. е. $\rho(f(a), f(b)) \leqslant |a - b|$ для любых чисел a, $b \in f^{-1}(X)$. В силу определения 6.10 $|\varphi f(a) - \varphi f(b)| \leqslant \rho(f(a), f(b))$ для любого $\varphi \in \Phi$ при условии, что $\varphi f(a) \neq \varnothing$ и $\varphi f(b) \neq \varnothing$. Итак, мы доказали неравенство $|\varphi f(a) - \varphi f(b)| \leqslant |a - b|$, которое означает, что $\varphi f \in \Delta$. Вследствие произвольности φ из последнего включения вытекает, что $f \in F$.

II. Теперь пусть $f \in F$. Зафиксируем произвольно числа a, $b \in f^{-1}(X)$ и подберем $\varphi \in \Phi$ так, чтобы $\varphi f(a) \neq \varnothing$, $\varphi f(b) \neq \varnothing$ и $\rho(f(a), f(b)) = |\varphi f(a) - \varphi f(b)|$. Существование такого φ вытекает из предложения 6.10. Из последнего равенства и неравенства $|\varphi f(a) - \varphi f(b)| \leqslant |a - b|$ следует, что f — D-сжатие.

III. Пусть φ — D-сжатие. Зафиксируем $f \in F$ и числа a, b так, чтобы $\varphi f(a) \neq \varnothing$ и $\varphi f(b) \neq \varnothing$. Так как f и φ — D-сжатия, то $|\varphi f(a) - \varphi f(b)| \leqslant \rho(f(a), f(b)) \leqslant |a - b|$. Из неравенства $|\varphi f(a) - \varphi f(b)| \leqslant |a - b|$ вытекает включение $\varphi f \in \Delta$, которое означает, что $\varphi \in \Phi$.

IV. Теперь пусть $\varphi \in \Phi$. В силу определения 6.10 $|\varphi(p) - \varphi(q)| \leqslant \rho(p, q)$ для любых p, $q \in \varphi^{-1}(\mathbf{R})$, т. е. φ — D-сжатие.

Следствие. *Для любого множества X отображение $h(X)$, определенное в* 6.9, *есть биекция.*

6.13. Рассмотрим произвольное биективное отображение $u\colon X\to Y$. Функторы μ и δ порождают два новых биективных отображения $\mu(u)\colon \mu(X)\to\mu(Y)$ и $\delta(u)\colon \delta(X)\to\delta(Y)$. Завершить доказательство теоремы 6.8 можно рассуждениями, аналогичными приведенным в п. 6.7.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Букур И., Деляну А.** Введение в теорию категорий и функторов.— М.: Мир, 1972.
2. **Голдблатт Р.** Топосы.— М.: Мир, 1983.
3. **Ионин В. К.** Один способ задания аффинной структуры // Геометрический сборник.— Томск, 1982.— Вып. 23.— С. 3—16.
4. **Ионин В. К. Сулейменов Е. К.** Характеризация векторных структур линейными отображениями // Докл. АН СССР.— 1983.— Т. 268, № 4.— С. 781—784.
5. **Александров А. Д.** Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.; Л.: ОГИЗ, 1948.
6. **Александров А. Д., Залгаллер В. А.** Двумерные многообразия ограниченной кривизны.— М.; Л., 1962.— (Труды Мат. ин-та АН СССР; Т. 63).

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Г. КУСРАЕВ

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Основное внимание здесь уделяется изучению различных классов операторов в решеточно нормированных пространствах и пространствах со смешанной нормой. В основном будем придерживаться терминологии и обозначений из [1, 2]. Тем не менее перечислим некоторые обозначения, фиксированные на протяжении всего текста: E и F — это K-пространства; V и W — решеточно нормированные пространства с E- и F-значными нормами соответственно; X и Y — банаховы пространства; $M(V, W)$ — пространство линейных мажорированных операторов из V в W; $\mathscr{L}(X, Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов из X в Y; $L_r(E, F)$ — пространство регулярных операторов из E в F; $X' := \mathscr{L}(X, \mathbf{R})$ — сопряженное к X, E'_n — пространство o-непрерывных регулярных функционалов на E. Каноническая билинейная форма всех встречающихся ниже двойственностей обозначается символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Используются также аббревиатуры: ПБК — пространство Банаха — Канторовича, РНП — решеточно нормированное пространство. При этом в отличие от [1] норма РНП не обязательно разложима.

Векторные нормы обозначаются, как правило, через $|\cdot|$. Напомним, что включение $T\in M(V, W)$ означает линейность оператора $T\colon V\to W$ и существование такого положительного $S\in L_r(E, F)$, что $|Tv|\leqslant S(|v|)$ для всех $v\in V$. Норма $|T|$ оператора T — это наименьший элемент в $L_r(E, F)$ среди всех указанных S. Известно, что $M(V, W)$ — пространство Банаха — Канторовича, нормированное посредством K-пространства $L_r(E, F)$.

Для каждого РНП V с разложимой нормой существует полная булева алгебра коммутирующих проекторов $\mathfrak{Pr}(V)$, действующих в V, и изоморфизм h из булевой алгебры $\mathfrak{Pr}(E)$ проекторов (на компоненты нормирующего K-пространства E) на $\mathfrak{Pr}(V)$ такой, что $\pi|v| = |h(\pi)v|$ для всех $\pi\in\mathfrak{Pr}(E)$ и $v\in V$. Булевы операции в $\mathfrak{Pr}(V)$ имеют вид

$$\pi\vee\rho := \pi+\rho-\pi\circ\rho,\quad \pi\wedge\rho := \pi\circ\rho,\quad \pi^* := I_V-\pi.$$

В дальнейшем проектор из $\mathfrak{Pr}(E)$ и его образ в $\mathfrak{Pr}(V)$ при изоморфизме h часто обозначаем одной и той же буквой. Для элемента $v\in V$ по-