КОНФОРМНО ПЛОСКИЕ МЕТРИКИ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ НА n-МЕРНОЙ СФЕРЕ

В. В. СЛАВСКИЙ

А. Д. Александров в [1, с. 365] отмечает: «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского включает внутреннюю геометрию малых областей всех регулярных поверхностей вообще». В данной работе этот факт в некотором смысле переносится на конформно плоские метрики при $n \geqslant 3$.

§ 1. Одномерная секционная кривизна конформно плоской метрики

Пусть $\mathbf{R}^n$ — n-мерное арифметическое евклидово пространство, $D \subset \mathbf{R}^n$ — область, $f(x)$ — положительная функция в области D класса C^2, задающая конформно плоскую метрику в D

$$ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}. \tag{1.1}$$

Если ξ_1 и ξ_2 — два единичных ортогональных вектора в $\mathbf{R}^n$, то секционная кривизна двумерного направления $\xi_1 \wedge \xi_2$ вычисляется по формуле

$$K(\xi_1 \wedge \xi_2) = f\left(\frac{d^2 f}{d\xi_1^2} + \frac{d^2 f}{d\xi_2^2}\right) - |\nabla f|^2, \tag{1.2}$$

где ∇f — градиент функции f. Одномерная секционная кривизна определяется по формуле

$$K(\xi) = f\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2}|\nabla f|^2. \tag{1.3}$$

Лемма 1.1. *При $n \geqslant 3$ одномерная секционная кривизна имеет внутренний смысл и не зависит от выбора конформной системы координат.*

Доказательство. Из формул (1.2) и (1.3) следует

$$K(\xi) = \frac{1}{2}\{K(\xi \wedge \xi_1) + K(\xi \wedge \xi_2) - K(\xi_1 \wedge \xi_2)\}, \tag{1.4}$$

где ξ_1, ξ_2 — произвольная пара векторов таких, что ξ, ξ_1, ξ_2 — взаимно ортогональны и единичной длины. Лемма доказана.

Замечание 1.1. В статье [2] замечено, что при $n \geqslant 4$ риманово пространство будет конформно плоским, если и только если для любой ортонормированной четверки векторов ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4

$$K(\xi_1 \wedge \xi_2) + K(\xi_3 \wedge \xi_4) = K(\xi_1 \wedge \xi_4) + K(\xi_2 \wedge \xi_3).$$

Нетрудно видеть, что это равносильно утверждению корректности формулы (1.4).

Замечание 1.2. При $n = 1$, 2 выражение (1.3) инвариантно относительно мёбиусовых преобразований координат, но, вообще говоря, меняется при произвольной конформной замене координат.

Замечание 1.3. Так как при $n = 3$ тензор Вейля равен нулю в любом римановом пространстве, то формула (1.4) также корректна для произвольного риманового пространства.

Аналогично (1.2) вычисляется p-мерная секционная кривизна

$$K(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_p) = f\left[\sum_{i=1}^{p} \frac{d^2 f}{d\xi_i^2}\right] - \frac{p}{2}|\nabla f|^2. \tag{1.5}$$

Лемма 1.2. *Пусть $2 \leqslant p < n$ и p-мерная секционная кривизна удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{p}{2}\varkappa_1 \leqslant K(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_p) \leqslant \frac{p}{2}\varkappa_2.$$

Тогда одномерная секционная кривизна удовлетворяет неравенствам

$$\frac{p\varkappa_1-(p-1)\varkappa_2}{2}\leqslant K(\xi)\leqslant\frac{p\varkappa_2-(p-1)\varkappa_1}{2}.$$

Доказательство. Аналогично формуле (1.4) имеем

$$K(\xi)=\frac{1}{p}\left\{\sum_{i=1}^{p}K(\xi\wedge\xi_1\wedge\ldots\wedge\hat{\xi}_i\wedge\ldots\xi_p)-(p-1)K(\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_p)\right\},$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ — произвольная система векторов таких, что $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_p$ — взаимно ортогональные и единичной длины. Отсюда легко следует искомое неравенство.

Итак, достаточно рассмотреть конформно плоские метрики ограниченной одномерной секционной кривизны. Для простоты будем считать, что конформно плоская метрика задана на всем $\bar{\mathbf{R}}^n$, т. е. на сфере S^n. Пусть S^n — единичная сфера с центром в начале координат $\mathbf{R}^{n+1}$. Метрика задана в виде

$$ds^2=\frac{dx^2}{f^2(x)},\quad x\in S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}. \tag{1.6}$$

Для удобства будем считать, что функция $f(x)$ по однородности распространена на все $\mathbf{R}^{n+1}$. В этом случае формула (1.3) имеет тот же вид

$$K(\xi)=f\frac{d^2f}{d\xi^2}-\frac{1}{2}|\nabla f|^2, \tag{1.7}$$

где ξ — единичный касательный вектор к сфере S^n, ∇f — градиент функции f в $\mathbf{R}^{n+1}$.

В работе [4] была использована конструкция явного изометричного вложения конформно плоской метрики в изотропный конус пространства Минковского. Нам также будем полезна эта конструкция.

Итак, пусть $\mathbf{R}^{n+2}$ — псевдоевклидово пространство, скалярный квадрат вектора $(\vec{w}=(\vec{x}, \zeta)\in\mathbf{R}^{n+2}=\mathbf{R}^{n+1}\times\mathbf{R})$ в котором равен $\langle\vec{w}\rangle^2=|\vec{x}|^2-\zeta^2$, где $|\vec{x}|^2$ — скалярный квадрат вектора $\vec{x}\in\mathbf{R}^{n+1}$. Обозначим через $\mathbf{C}^+=\{(\vec{x}, \zeta)\in\mathbf{R}^{n+2}\colon |\vec{x}|^2-\zeta^2=0,\ \zeta>0\}$ изотропный конус (верхнюю половину).

Лемма 1.3. *Имеет место каноническое изометрическое вложение, задаваемое формулой*

$$x\in S^n\overset{i_f}{\mapsto}\left(\frac{\vec{x}}{f(x)},\frac{1}{f(x)}\right)\in\mathbf{C}^+. \tag{1.8}$$

Доказательство проверяется непосредственно.

Замечание 1.4. Отметим, что $i_f(S^n)\subset\mathbf{C}^+$ — пространственно подобная n-мерная поверхность; обратно: каждая такая замкнутая поверхность определяет конформно плоскую метрику на S^n.

Замечание 1.5. Конформно плоская метрика $dx^2/f^2(x)$ постоянной кривизны $\varkappa$ имеет вид $f(x)=\varepsilon|x|+(\vec{b}, \vec{x})$, где $\varkappa=\varepsilon^2-|\vec{b}|^2$; ей соответствует сечение конуса $\mathbf{C}^+$ гиперплоскостью $(\vec{x}, \vec{b})+\varepsilon\zeta=1$. Причем, если $\varkappa\neq0$, то все эти гиперплоскости касаются гиперболоида $H_\varkappa=\{(x, \zeta)\colon |x|^2-\zeta^2=-1/\varkappa\}$, при $\varkappa=0$ гиперплоскость параллельна образующей конуса $\mathbf{C}^+$.

Замечание 1.6. Конформному преобразованию сферы S^n соответствует «вращение» поверхности $i_f(S^n)$ на конусе $\mathbf{C}^+$ под действием псевдоортогональной группы $O^+(n+1, 1)$, т. е. тех псевдоортогональных преобразований $\mathbf{R}^{n+2}$, которые $\mathbf{C}^+$ переводят в $\mathbf{C}^+$.

Замечание 1.7. Если $n=2$ и метрика задана на подобласти $D\subset S^2$, то возможны конформные отображения, отличные от мёбиусовых; им соответствуют нетривиальные движения $i_f(D)$ на конусе $\mathbf{C}^+$.

§ 2. Конформно плоские метрики с ограниченной снизу одномерной секционной кривизной

Пусть $M^n \subset \mathbf{C}^+$ — n-мерная замкнутая пространственно подобная поверхность класса $\mathbf{C}^2$. Нетрудно заметить, что она диффеоморфна сфере. Фиксируем число $\varkappa$ и проведем через точку $w_0 \in M$ гиперплоскость в $\mathbf{R}^{n+2}$, содержащую в себе касательную плоскость $T_{w_0}(M)$ и касающуюся гиперболоида

$$H_\varkappa = \{\vec{x}, \zeta) \in \mathbf{R}^{n+2}\colon |\vec{x}|^2 - \zeta^2 = -1/\varkappa\}$$

при $\varkappa \neq 0$, а при $\varkappa = 0$ — гиперплоскость, параллельную образующей конуса $\mathbf{C}^+$; так определенная гиперплоскость единственна. Если $f(x)$ — метрическая функция на S^n, соответствующая поверхности M^n, и $x_0 \in S^n$ — точка соответствующая точке $w_0 \in M$, то проведение такой гиперплоскости аналитически соответствует разложению функции f в окрестности точки x_0 в виде $f(x) = \varepsilon|x| + \{f(x) - \varepsilon|x|\}$ с последующим выделением главной линейной части второго слагаемого

$$f(x) = \varepsilon|\vec{x}| + (\overrightarrow{\nabla f}_{x_0} - \varepsilon\vec{x}_0, \vec{x}) + \eta(\vec{x}), \tag{2.1}$$

где $\eta(x) = o(|x - x_0|)$ и ε выбрано так, чтобы метрика

$$f_0(x) = \varepsilon|x| + (\nabla f_{x_0} - \varepsilon x_0, x) \tag{2.2}$$

имела кривизну $\varkappa$, т. е. $\varepsilon^2 - (\overrightarrow{\nabla f}_{x_0} - \varepsilon\vec{x}_0)^2 = \varkappa$. Итак, имеем $f_0(x_0) = f(x_0)$, $\overrightarrow{\nabla f_0}|_{x_0} = \overrightarrow{\nabla f}|_{x_0}$,

$$f_0\frac{d^2 f_0}{d\xi^2} - \frac{1}{2}|\overrightarrow{\nabla f}_0|^2 \equiv \frac{\varkappa}{2}. \tag{2.3}$$

Рассмотрим случай метрик, одномерная секционная кривизна которых ограничена снизу, т. е.

$$f\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2}|\nabla f|^2 \geqslant \frac{\varkappa}{2}.$$

Вычитая (2.3), получим в точке $x_0 \in S^n$

$$f(x_0)\left.\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right|_{x=x_0} \geqslant 0 \tag{2.4}$$

для всех векторов ξ, касательных в точке x_0 сферы.

Метрику $f_0^\varkappa(x)$ постоянной кривизны $\varkappa$ и удовлетворяющую условиям $f_0(x_0) = f(x_0)$, $\nabla f|_{x_0} = \nabla f_0|_{x_0}$, будем называть *касательной в точке* x_0. Если $\varkappa > 0$, то $f_0^\varkappa$ положительна на всей сфере; если $\varkappa \leqslant 0$, то *областью определения* $f_0^\varkappa$ будем называть ту часть сферы, где она положительна.

Теорема 2.1. *Пусть конформно плоская метрика $dx^2/f^2(x)$ такова, что ее одномерная секционная кривизна ограничена снизу*

$$K(\xi) \geqslant \varkappa/2 \tag{2.5}$$

и функция $f \in \mathbf{C}^2$; тогда для любой точки $x_0 \in S^n$ справедливо неравенство

$$f(x) \geqslant f_0^\varkappa(x), \tag{2.6}$$

где $f_0^\varkappa$ — касательная метрика в точке x_0 кривизны $\varkappa$ и неравенство справедливо во всей области определения $f_0^\varkappa$.

Замечание 2.1. Геометрическая теорема 2.1 утверждает, что поверхность $M^n \subset \mathbf{C}^+$ лежит целиком по одну сторону (ниже) касательной гиперплоскости, определяющей метрику $f_0^\varkappa$.

Доказательство. Будем считать, что выполняется строгое неравенство

$$K(\xi) > \varkappa/2; \tag{2.7}$$

случай (2.5) получается предельным переходом. В силу формулы (1.7) любая большая k-мерная окружность сферы S^n (т. е. сечение сферы S^n — $(k+1)$-плоскостью в $\mathbf{R}^{n+1}$, проходящей через центр, $k=1, 2, \ldots, n$), снабженная индуцированной метрикой, также обладает свойством (2.7).

Используя конформную замену переменных на S^n (лоренцево преобразование $\mathbf{C}^+$), можно добиться, чтобы в точке x_0

$$\vec{\nabla} f_{x_0} \perp T_{x_0}(S^n), \tag{2.8}$$

где $T_{x_0}(S^n)$ — касательная плоскость к сфере в точке $x_0 \in S^n$. В этом случае для любой большой окружности S^1, проходящей через точку x_0, справедливо равенство

$$f_0^\varkappa |_{S^1} = (f|_{S^1})_0^\varkappa = \tilde{f}_0^\varkappa, \tag{2.9}$$

где $\tilde{f}_0^\varkappa$ — касательная метрика в точке $x_0 \in S^1$ кривизны $\varkappa$ к метрике $f|_{S^1}$. Следовательно, достаточно доказать теорему для $n=1$, т. е. для сужений метрики на большие окружности.

Для наглядности конформно плоскую метрику $ds^2 = dx^2/f^2(x)$ на сфере S^n удобно представлять поверхностью $N = \{x \in \mathbf{R}^{n+1}\colon f(x) = 1\}$; здесь функция $f(x)$ по однородности распространена на все $\mathbf{R}^{n+1}$. Поверхность N получается из $M \subset \mathbf{C}^+$ ортогональным проектированием на подпространство $\mathbf{R}^{n+1} \subset \mathbf{R}^{n+2} = \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}$. Поверхность N будем называть *единичной поверхностью метрики* f.

Для метрик постоянной кривизны поверхность N есть коническое сечение с фокусом в начале координат. Если $\varkappa > 0$, то это будет эллипсоид вращения с фокусом в начале координат, малая полуось которого равна $1/\sqrt{\varkappa}$, если $\varkappa = 0$ — параболоид вращения с фокусом в начале координат, если $\varkappa < 0$ — гиперболоид вращения с фокусом в начале координат и мнимой полуосью $1/\sqrt{|\varkappa|}$.

Итак, пусть $n=1$ и $\varkappa > 0$, $N \subset \mathbf{R}^2$ — замкнутая кривая, звездная относительно начала координат. Условие (2.8) означает, что касательная $T_{x_0}(N)$ к N в точке x_0 перпендикулярна радиус-вектору x_0. Обозначим через $N_0^\varkappa$ кривую, соответствующую касательной метрике $f_0^\varkappa$. Это будет эллипс с малой полуосью $1/\sqrt{\varkappa}$, касающийся N в точке x_0. Из условия (2.7) следует, что N локально (в окрестности точки x_0) лежит внутри $N_0^\varkappa$. Нужно доказать, что N целиком лежит внутри $N_0^\varkappa$.

Используя конформную замену переменных, можно добиться, чтобы $N_0^\varkappa$ стала окружностью с центром в начале координат радиуса $1/\sqrt{\varkappa}$. Предположим, что N не содержится в $N_0^\varkappa$. Пусть точка $x \in N$ лежит вне окружности $N_0^\varkappa$, $x^* = x/|x|\sqrt{\varkappa}$ — соответствующая точка окружности $N_0^\varkappa$. Обозначим через $[x_0, x^*] \subset N_0^\varkappa$ дугу окружности угловой меры меньше π. Рассмотрим деформацию окружности $N_0^\varkappa$, растягивающую ее в эллипс с фокусом в начале координат так, чтобы малая полуось была равна $1/\sqrt{\varkappa}$, а второй фокус удалялся бы от начала координат вдоль луча, делящего пополам дугу, дополнительную к дуге $[x_0, x^*]$. В процессе этой деформации наступит момент, когда этот эллипс «последний» раз пересечет дугу $[x_0, x] \subset N$ кривой N, соответствующую дуге $[x_0, x^*] \subset N_0^\varkappa$. Другими словами, эллипс коснется этой дуги $[x_0, x] \subset N$ изнутри в противоречие с условием (2.7).

Случаи $\varkappa = 0$ и $\varkappa < 0$ доказываются аналогичным путем, путем подбора соответствующей деформации. Теорема доказана.

Замечание 2.2. Если конформно плоская метрика $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ задана не на всей сфере $\bar{\mathbf{R}}^n = S^n$, а в некотором шаре в $\mathbf{R}^n$, то теорема 2.1 без дополнительных ограничений на метрику неверна. В качестве примера рассмотрим конформно плоскую метрику на полуплоскости $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x \geqslant -c_0\}$, $c_0 > 0$, заданную в полярной системе координат формулой

$$ds^2 = \frac{\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2}{[a(\varphi)\rho^2 + 1]^2},$$

где $a(\varphi)$ — функция вида

$$a(\varphi) = \begin{cases} a_0 & \text{при } |\varphi - \pi| > \frac{\pi}{2} - \gamma, \\ a_0 - k\cos^2(\varphi - \gamma) & \text{при } \frac{\pi}{2} + \gamma \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ a_0 - k\cos^2(\varphi + \gamma) & \text{при } \pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi - \gamma, \end{cases}$$

где $a_0 > 0$, $0 < k < a_0$, $0 < \gamma < \pi/2$ — константы. Тогда минимум одномерной секционной кривизны в области D будет

$$\frac{\varkappa_0}{2} = \inf_D \left(f\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2} |\nabla f|^2 \right) = 2\left[a_0 - k - \frac{kc_0^2}{\sin^2\gamma} \right].$$

Касательная мерика кривизны $\varkappa_0$ в точке $\infty \in \partial D$ имеет вид

$$f_0(\rho, \varphi) = a_0\rho^2 + 1 - \frac{k}{a_0}\left(1 + \frac{c_0^2}{\sin^2\gamma}\right).$$

При $a_0 > \left(1 + \frac{c_0^2}{\sin^2\gamma}\right) \Big/ c_0^2 \sin^2\gamma$ получим, что $f_0(c_0, \pi) > f(c_0, \pi)$ и, значит, $f_0 \not\leqslant f$.

Теорема 2.2. *Пусть конформно плоская метрика удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда*

(I) *если $\varkappa > 0$, то для любых трех точек A_1, A_2, $A_3 \in M$ плоскость, проходящая через них, не пересекает гиперболоид*

$$|\vec{x}|^2 - \zeta^2 < -\frac{1}{\varkappa}; \tag{2.10}$$

(II) *если $\varkappa = 0$, то для любых точек A_1, A_2, $A_3 \in M$ плоскость, проходящая через них, пространственно подобна, т. е. не содержит времениподобных векторов $\langle\vec{w}\rangle^2 < 0$;*

(III) *если $\varkappa < 0$, то для любых точек A_1, A_2, $A_3 \in M$ плоскость, проходящая через них, пересекает гиперболоид*

$$|\vec{x}|^2 - \zeta^2 \geqslant -1/\varkappa \tag{2.11}$$

по связному множеству.

Доказательство. Рассмотрим трехмерное подпространство $\mathbf{R}^{n+2}$, натянутое на точки O, A_1, A_2, A_3 (O — начало координат), обозначим это подпространство через $\mathbf{R}^3$. Тогда $\mathbf{R}^3$ — псевдоевклидово пространство. Обозначим соответственно $\tilde{\mathrm{C}}^+ = \mathrm{C}^+ \cap \mathbf{R}^3 = \{\vec{w} \in \mathbf{R}^3: \langle\vec{w}\rangle^2 = 0\}$, $\tilde{H}_\varkappa = H_\varkappa \cap \mathbf{R}^3 = \{\vec{w} \in \mathbf{R}^3: \langle\vec{w}\rangle^2 = -1/\varkappa\}$, $\tilde{M} = M \cap \mathbf{R}^3$. Заметим, что $\tilde{M} \subset \tilde{\mathrm{C}}^+$ — образ при изометрическом вложении (1.8) некоторой одномерной окружности сферы S^n с индуцированной метрикой. Так же, как и в случае большой окружности (см. теорему 2.1), для $\tilde{M}$ будет выполняться неравенство (2.5). Следовательно, достаточно доказать теорему для $\tilde{\mathrm{M}} \subset \tilde{\mathrm{C}}^+ \subset \mathbf{R}^3$. Доказательство в этом случае следует непосредственно из теоремы 2.1 и наглядных соображений.

Выясним, как аналитически записывается утверждение теоремы 2.2. Пусть

$$A_1 = \left\{\frac{x_1}{f(x_1)}, \frac{1}{f(x_1)}\right\}, \; A_2 = \left\{\frac{x_2}{f(x_2)}, \frac{1}{f(x_2)}\right\}, \; A_3 = \left\{\frac{x_3}{f(x_3)}, \frac{1}{f(x_3)}\right\}.$$

Тогда пересечение плоскости, проходящей через точки A_1, A_2, A_3, с гиперболоидом $H_\varkappa$ находится из системы

$$\langle\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3\rangle^2 = -\frac{1}{\varkappa},$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

или

$$2\lambda_1\lambda_2 \langle A_1, A_2\rangle + 2\lambda_1\lambda_3 \langle A_1, A_3\rangle + 2\lambda_2\lambda_3 \langle A_2, A_3\rangle = -\frac{1}{\varkappa},$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

или (в однородных координатах)

$$2\lambda_1\lambda_2\langle A_1, \; A_2\rangle + 2\lambda_1\lambda_3\langle A_1, \; A_3\rangle + 2\lambda_2\lambda_3\langle A_2, \; A_3\rangle + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2/\varkappa = 0. \tag{2.12}$$

Пусть $\varkappa > 0$. Пересечение (2.10) пусто, если квадратичная форма (2.12) неотрицательна. Матрица ее имеет вид

$$\left\| \frac{1}{\varkappa} + \frac{(x_i x_j) - 1}{f(x_i) f(x_j)} \right\|_{i,j=1,2,3}, \tag{2.13}$$

где $x_i \in S^n$, (x_i, x_j) — скалярное произведение в $\mathbf{R}^{n+1}$. Заметим, что

$$2\frac{1-(x_i x_j)}{f(x_i)\, f(x_j)} = \left(\frac{x_i}{f(x_i)} - \frac{x_j}{f(x_j)}\right)^2 - \left(\frac{1}{f(x_i)} - \frac{1}{f(x_j)}\right)^2,$$

т. е.

$$2\,\frac{1-(x_i, x_j)}{f(x_i)\, f(x_j)} = |A_i - A_j|^2, \tag{2.14}$$

где $|A_i - A_j|$ — расстояние в псевдоевклидовом пространстве $\mathbf{R}^{n+2}$ между точками A_i, $A_j \in M \subset C^+$. В силу замечания 1.6 это будет инвариант при конформных преобразованиях сферы S^n. Матрица (2.13) принимает вид

$$\left\| \frac{1}{\varkappa} - \frac{|A_i - A_j|^2}{2} \right\|_{i,j=1,2,3}.$$

Матрица (2.13) неотрицательна, если и только если

$$\begin{gathered} |A_i - A_j|^2 \leqslant 4/\varkappa, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ [a+b+c](a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geqslant \varkappa a^2 b^2 c^2, \end{gathered} \tag{2.15}$$

где $a = |A_1 - A_2|$, $b = |A_2 - A_3|$, $c = |A_3 - A_1|$. Устремляя $\varkappa$ к 0, получим, что при $\varkappa = 0$ теорема 2.2 утверждает выполнение неравенства

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geqslant 0,$$

которое равносильно выполнению неравенства треугольника для любой тройки точек A_1, A_2, $A_3 \in M$.

Пусть $\varkappa < 0$. Условие связности пересечения гиперболоида (2.11) равносильно тому, что матрица (2.13) имеет не более одного отрицательного собственного значения. Применяя правило Декарта, получаем два неравенства:

$$\begin{gathered} \left[\frac{2}{\varkappa} - a^2\right]^2 + \left[\frac{2}{\varkappa} - b^2\right]^2 + \left[\frac{2}{\varkappa} - c^2\right]^2 \geqslant \frac{12}{\varkappa^2}, \\ (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \geqslant \varkappa^2 a^2 b^2 c^2. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Первое из них выполняется автоматически при $\varkappa < 0$. Нетрудно заметить, что первое неравенство в (2.15) при $\varkappa > 0$ следует из второго. Поэтому окончательно теорему 2 можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 2.3. *Пусть конформно плоская метрика на сфере удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда для любых трех точек A_1, A_2, $A_3 \in M$ выполняется неравенство*

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geqslant \varkappa a^2 b^2 c^2, \qquad (2.17)$$

где $a = |A_1 - A_2|$, $b = |A_2 - A_3|$, $c = |A_3 - A_1|$ — расстояние между точками в псевдоевклидовом пространстве $\mathbf{R}^{n+2}$.

Замечание 2.3. Верно обратное утверждение: пусть $f \in \mathbf{C}^2$ и метрика $ds^2 = dx^2/f^2(x)$ на сфере удовлетворяет соотношению (2.17). Тогда выполняется неравенство (2.5).

Замечание 2.4. Если конформно плоская метрика $ds^2 = \dfrac{dx^2}{f^2(x)}$ задана в $\mathbf{R}^n$, то расстояние между точками в псевдоевклидовом пространстве вычисляется по формуле

$$|A_1 - A_2| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{f(x_1) f(x_2)}}, \qquad (2.18)$$

где A_1, A_2 — точки, соответствующие x_1, x_2 при изометричном вложении (1.8), $|x_1 - x_2|$ — обычное расстояние в $\mathbf{R}^n$.

§ 3. Конформно плоские метрики ограниченной кривизны

Рассмотрим конформно плоские метрики на сфере, одномерная секционная кривизна которых ограничена сверху:

$$K(\xi) \leqslant \varkappa/2. \qquad (3.1)$$

Ясно, что в этом случае по необходимости $\varkappa > 0$. Как показывают примеры, утверждение, аналогичное теореме 2.1 (со сменой неравенства на противоположные), неверно без дополнительных ограничений.

Теорема 3.1. *Пусть конформно плоская метрика $dx^2/f^2(x)$ на сфере такова, что ее одномерная секционная кривизна ограничена сверху и снизу,*

$$-\varkappa/2 \leqslant K(\xi) \leqslant \frac{\varkappa}{2}, \qquad (3.2)$$

и $f \in \mathbf{C}^2$. Тогда для любой точки $x_0 \in S^n$ справедливо неравенство

$$f(x) \leqslant f_0^\varkappa(x) \qquad (3.3)$$

для всех $x \in S^n$ (область определения $f_0^\varkappa$ совпадает со сферой, так как $\varkappa > 0$).

Замечание 3.1. Геометрически теорема 3.1 утверждает, что поверхность $M \subset \mathbf{C}^+$ лежит целиком по одну сторону (выше) касательной гиперплоскости, определяющей метрику $f_0^\varkappa$.

Доказательство. Будем считать, что выполняется строгое неравенство

$$-\varkappa/2 < K(\xi) < \varkappa/2; \qquad (3.4)$$

случай (3.2) получается предельным переходом. Предположим, что $f(x) \nleqslant f_0^\varkappa(x)$. Используя конформную замену переменных на S^n (лоренцево преобразование $\mathbf{C}^+$), можно считать, что $f_0^\varkappa(x) \equiv \sqrt{\varkappa}\,|x|$. Пусть

$$f(x_1) = \max\{f(x) :\ x \in S^n\}. \qquad (3.5)$$

По предположению, $f(x_1) > \sqrt{\varkappa}$. Рассмотрим сначала случай $x_1 = -x_0$. В силу теоремы 1.1 и условия (3.2) имеем

$$f(x) \geqslant f_{x_0}^{-\varkappa}(x),\ f(x) \geqslant f_{x_1}^{-\varkappa}(x). \qquad (3.6)$$

Обозначим через N, N_0, N_0^-, N_1^- единичные поверхности (см. теорему 1.1) метрик f, $f_0^\varkappa$, $f_{x_0}^{-\varkappa}$, $f_{x_1}^{-\varkappa}$ соответственно. Тогда N_0 — сфера с центром в начале координат радиуса $1/\sqrt{\varkappa}$, N_0^- — гиперплоскость, касательная к сфере N_0 в точке $x_0/\sqrt{\varkappa}$, N_1^- — гиперболоид вращения с фокусом в начале координат, вершина которого — точка $x_1/f(x_1)$, а мнимая полуось равна $1/\sqrt{\varkappa}$. Если обозначить через N_1^* гиперплоскость, касательную к сфере N_0 в точке $x_1/\sqrt{\varkappa}$, то гиперболоид N_1^- будет лежать по одну сторону N_1^*, что и начало координат.

Поверхность N в силу (3.6) будет лежать между N_0^- и N_1^-, касаясь их в точках $x_0/\sqrt{\varkappa}$ и $x_1/f(x_1)$ соответственно. Сфера N_0 в силу (3.4) локально (в окрестности точки $x_0/\sqrt{\varkappa}$) лежит внутри N, касаясь ее в точке $x_0/\sqrt{\varkappa}$.

Рассмотрим эллипсоиды вращения с фокусом в начале координат, малой полуосью $1/\sqrt{\varkappa}$, фиксированной большой полуосью, равной a, и расположенные между гиперплоскостями N_0^- и N_1^*. Каждый такой эллипсоид касается N_0^- и N_1^*. Проведем через фокус и точки касания двумерную плоскость (она пересечет эллипсоид по эллипсу) и возьмем «дальнюю» от фокуса дугу этого эллипса, соединяющую точки касания. Объединение всех этих дуг составит некоторую поверхность вращения $P(a)$ (кусок огибающей поверхности данного семейства эллипсоидов с фиксированной большой полуосью).

Возьмем a настолько большим, чтобы данная поверхность $P(a)$ вместе с гиперплоскостями N_0^- и N_1^* содержала внутри себя поверхность N. Затем начнем уменьшать a до момента касания $P(a)$ и N. Рассмотрим точку касания, соответствующий эллипсоид ($P(a)$ — огибающая семейства эллипсоидов) и дугу этого эллипсоида, образующую поверхности $P(a)$, проходящую через точку касания. Ясно, что этот эллипсоид касается поверхности N и не лежит локально внутри N в противоречии с правым неравенством в (3.4).

Рассмотрим теперь случай $x_1 \neq -x_0$. Используя прежние обозначения, получим две гиперплоскости N_0^- и N_1^* касающиеся сферы N_0 в точках соответственно $x_0/\sqrt{\varkappa}$ и $x_1/\sqrt{\varkappa}$. Плоскости N_0^- и N_1^* пересекаются по $(n-1)$-й плоскости $N_0^- \cap N_1^*$, обозначим через Q гиперплоскость, проходящую через начало координат и $N_0^- \cap N_1^*$, а через T_a — гиперплоскость, перпендикулярную Q, параллельную $N_0^- \cap N_1^*$ и находящуюся на расстоянии a от начала координат по ту же сторону, что и $N_0^- \cap N_1^*$.

Каждой точке $y \in Q \cap T_a$ сопоставим эллипсоид вращения с фокусом в начале координат, малой полуосью $1/\sqrt{\varkappa}$, касающийся гиперплоскости T_a в точке y. Проведем двумерную плоскость, перпендикулярную к Q, проходящую через центр эллипсоида и точку y; она пересечет эллипсоид по эллипсу. Возьмем дугу этого эллипса с серединой в точке y и составляющую половину эллипса. Объединение всех этих дуг составит некоторую поверхность $P(a)$. Нетрудно проверить, что огибающая поверхность данного семейства эллипсоидов есть эллиптический цилиндр, образующие которого — $(n-1)$-е плоскости, параллельные $N_0^- \cap N_1^*$. Поверхность $P(a)$ составляет половину этого цилиндра. Взяв первоначально a равным расстоянию от начала координат до $N_0^- \cap N_1^*$, будем затем уменьшать a до момента касания с N той частью поверхности $P(a)$, которая находится внутри «клина», образованного гиперплоскостями N_0^- и N_1^*. В результате получаем противоречие с (3.4), как и в предыдущем случае. Теорема доказана.

Изучим те дифференциальные свойства конформно плоской метрики, которые следуют из ограниченности кривизны. Пусть $f(x)$ — неотрицательная функция на сфере S^n, $f(x) < +\infty$. Будем говорить, что метрика $ds^2 = dx^2/f^2(x)$ имеет *обобщенную одномерную секционную кривизну* не меньше, чем $\varkappa/2$, если для любой тройки точек $x_1, x_2, x_3 \in S^n$ выполняется соотношение (2.17).

Теорема 3.2. *Пусть конформно плоская метрика* $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ *на сфере имеет обобщенную одномерную секционную кривизну не меньше, чем* $\varkappa/2$, $\varkappa > -\infty$. *Тогда функция* $f(x)$ *локально липшицева; в области, где* $f(x) > 0$, *функция* f *принадлежит классу* $\overline{W}^2_{1,\mathrm{loc}}$ *и имеет почти всюду второй дифференциал.*

Замечание 3.2. Функция принадлежит классу $\overline{W}^2_1$, если ее вторые обобщенные производные являются мерами [5].

Доказательство. Используя стереографическую проекцию, перенесем конформно плоскую метрику на $\mathbf{R}^n$. Пусть x_1, x_2, x — произвольные точки $\mathbf{R}^n$. Положим согласно (2.18)

$$a = \frac{|x - x_1|}{\sqrt{f(x) f(x_1)}},\ b = \frac{|x_2 - x|}{\sqrt{f(x_2) f(x)}},\ c = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{f(x_2) f(x_1)}}$$

и подставим в (2.17), которое можно переписать в виде

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \geqslant \varkappa a^2b^2c^2.$$

Получим квадратичное неравенство на $f(x)$, которое можно разрешить так:

$$f(x_1)\frac{|x_2 - x|^2}{|x_2 - x_1|^2} - 2\,\frac{|x_2 - x|\,|x - x_1|}{|x_2 - x_1|^2}\sqrt{f(x_1) f(x_2) - \frac{\varkappa |x_2 - x_1|^2}{4}} +$$
$$+ f(x_2)\,\frac{|x - x_1|^2}{|x_2 - x_1|^2} \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)\frac{|x_2 - x|^2}{|x_2 - x_1|^2} +$$
$$+ 2\,\frac{|x_2 - x|\,|x - x_1|}{|x_2 - x_1|^2}\sqrt{f(x_1) f(x_2) - \frac{\varkappa |x_2 - x_1|^2}{4}} + f(x_2)\frac{|x - x_1|^2}{|x_2 - x_1|^2}. \quad (3.7)$$

Заметим, что при $\varkappa > 0$ в силу (2.15)

$$\frac{|x_2 - x_1|^2}{f(x_1) f(x_2)} \leqslant \frac{4}{\varkappa},$$

поэтому выражение под радикалом всегда неотрицательно. Из (3.7) следует локальная ограниченность, а затем локальная липшицевость функции $f(x)$.

Предположим, что $\varkappa \geqslant 0$. Из левой части (3.7) получаем, что

$$f(x) \leqslant f(x_1)\frac{|x_2 - x|^2}{|x_2 - x_1|^2} + 2\,\frac{|x_2 - x|\,|x - x_1|}{|x_2 - x_1|^2}\sqrt{f(x_1) f(x_2)} + f(x_2)\frac{|x - x_1|^2}{|x_2 - x_1|^2}$$

или

$$\sqrt{f(x)} \leqslant \sqrt{f(x_1)}\,\frac{|x_2 - x|}{|x_2 - x_1|} + \sqrt{f(x_2)}\,\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|}.$$

Следовательно, функция $\sqrt{f(x)}$ выпукла вниз.

Пусть $\varkappa < 0$ и в рассматриваемой выпуклой окрестности функция $f(x)$ ограничена снизу $0 < m \leqslant f(x)$. Тогда левую часть (3.7) можно преобразовать к виду

$$f(x) \leqslant \left(\sqrt{f(x_1)}\,\frac{|x_2 - x|}{|x_2 - x_1|} + \sqrt{f(x_2)}\,\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|}\right)^2 + \frac{|\varkappa|}{4m}\,|x_2 - x|\,|x - x_1|; \quad (3.8)$$

здесь мы использовали неравенство

$$\sqrt{f(x_1) f(x_2) - \frac{\varkappa |x_2 - x_1|^2}{4}} \leqslant \sqrt{f(x_1) f(x_2)} + \frac{|\varkappa|}{8m}\,|x_1 - x_2|^2.$$

Еще раз применяя аналогичное неравенство к (3.8), получим

$$\sqrt{f(x)} \leqslant \sqrt{f(x_2)}\,\frac{|x_2 - x|}{|x_2 - x_1|} + \sqrt{f(x_1)}\,\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|} + \frac{|\varkappa|}{8m^{3/2}}\,|x_2 - x|\,|x - x_1|.$$

Отсюда следует, что функция

$$\sqrt{f(x)} + \frac{|\varkappa|}{8m^{3/2}}\,|x|^2$$

выпукла вниз в рассматриваемой окрестности. Как известно [5], вторые обобщенные производные выпуклой функции являются мерами и выпуклые функции имеют почти везде второй дифференциал. Следовательно, в рассматриваемой окрестности $\sqrt{f(x)} \in \overline{W}_1^2$ и $\sqrt{f(x)}$ имеет почти всюду второй дифференциал. Поэтому $f(x)$ также обладает данными свойствами.

Теорема 3.3. *Пусть дана последовательность конформно плоских метрик* $ds_n^2 = dx^2/f_n^2(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *Кроме того,* $f_n > 0$, $f_n \in C^2$ *и одномерная секционная кривизна метрик* ds_n^2 *равномерно ограничена снизу и сверху*:

$$\frac{\varkappa_1}{2} \leqslant f_n(x)\,\frac{d^2 f_n}{d\xi^2} - \frac{1}{2}\,|\nabla f_n|^2 \leqslant \frac{\varkappa_2}{2}. \tag{3.9}$$

Тогда, если f_n *поточечно сходится к* f, *то функция* f *принадлежит классу* $C^{1,1}$ *в области, где она положительна, т. е.* f *дифференцируема и ее производные удовлетворяют локально условию Липшица.*

Доказательство. Каждая из функций $f_n(x)$ удовлетворяет соотношению (3.7). Из поточечной сходимости последовательности $\{f_n\}$ отсюда следует равномерная локальная ограниченность. Опять используя (3.7), получим равномерную локальную липшицевость последовательности $\{f_n\}$, т. е. в данной окрестности

$$|\nabla f_n| \leqslant C \tag{3.10}$$

для всех n. Поэтому последовательность f_n будет равномерно сходиться, и если в данной точке $f(x) > 0$, то последовательность f_n будет равномерно ограничена снизу в окрестности $0 < m \leqslant f_n(x)$. Из (3.9) и (3.10) получаем тогда равномерную ограниченность вторых производных:

$$\left|\frac{d^2 f_n}{d\xi^2}\right| \leqslant C'.$$

Следовательно, предельная функция f дифференцируема в данной окрестности и ее производные удовлетворяют условию Липшица.

Теорема 3.3 дополняет известный результат И. Г. Николаева [3] о том, что общие римановы пространства ограниченной кривизны имеют метрический тензор гладкости $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

§ 4. Конформно плоские метрики и выпуклые поверхности пространства Лобачевского

Пусть $ds^2 = dx^2/f^2(x)$ — конформно плоская метрика на сфере S^n, $M = i_f(S^n) \subset C^+$ — соответствующая ей пространственно подобная поверхность. Фиксируем число $\varkappa > 0$ и проведем через точку $w_0 = i_f(x_0) \in M$ гиперплоскость в $\mathbf{R}^{n+2}$, содержащую в себе касательную плоскость $T_{w_0}(M)$ и касающуюся гиперболоида

$$H_\varkappa = \{(\vec{x}, \zeta):\ |\vec{x}|^2 - \zeta^2 = -1/\varkappa,\ \zeta > 0\}.$$

Обозначим через $\gamma^\varkappa(x_0) \in H_\varkappa$ точку касания этой гиперплоскости. Тогда

$$\gamma^\varkappa(x_0) = \frac{1}{\varkappa}\left\{-\overrightarrow{\nabla f}_{x_0} + \frac{\varkappa + |\overrightarrow{\nabla f}_{x_0}|^2}{2f(x_0)}\,\vec{x}_0,\ \frac{\varkappa + |\overrightarrow{\nabla f}_{x_0}|^2}{2f(x_0)}\right\}; \tag{4.1}$$

здесь функция f по однородности распространена на $\mathbf{R}^{n+1}$ и $\overrightarrow{\nabla f}$ — градиент функции f в $\mathbf{R}^{n+1}$. При этом касательная метрика кривизны $\varkappa$ в точке x_0 будет

$$f_{x_0}^{\varkappa}(x)=\left(\overrightarrow{\nabla f}_{x_0}-\frac{\varkappa+|\overrightarrow{\nabla f}_{x_0}|^2}{2f(x_0)}\vec{x}_0,\vec{x}\right)+\frac{\varkappa+|\overrightarrow{\nabla f}_{x_0}|^2}{2f(x_0)}|\vec{x}|,\tag{4.2}$$

где $\vec{x}\in S^n$, круглые скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbf{R}^{n+1}$.

Нас будет интересовать образ $\gamma^{\varkappa}[S^n]$ в пространстве Лобачевского $H_{\varkappa}$. Отметим, что если исходная метрика $f(x)$ имела постоянную кривизну k, т. е. $\gamma^k(x)\equiv\mathrm{const}\in H_k$, то образ $\gamma^{\varkappa}[S^n]\subset H_{\varkappa}$ есть пересечение $H_{\varkappa}$ и изотропного конуса с вершиной в точке

$$\delta=\delta(x)=\frac{k}{\varkappa}\gamma^k(x).\tag{4.3}$$

Точнее, при $k>\varkappa$ это будет пересечение с нижней $\mathbf{C}^-(\delta)$ полой этого конуса, при $k<\varkappa$ — с верхней полой $\mathbf{C}^+(\delta)$. Если $k=0$, то вершина δ окажется на изотропном конусе $\mathbf{C}^+(0)$, при $k>0$ будет лежать вне изотропного конуса $\mathbf{C}^+(0)$. При $k>0$ образ $\gamma^{\varkappa}[S^n]\subset H_{\varkappa}$ представляет собой сферу в пространстве Лобачевского $H_{\varkappa}$ радиуса

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\varkappa}}\ln\sqrt{\dfrac{k}{\varkappa}} & \text{при } k>\varkappa,\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{\varkappa}}\ln\sqrt{\dfrac{\varkappa}{k}} & \text{при } 0<k<\varkappa.\end{cases}\tag{4.4}$$

Формула (4.4) легко получается из соображений однородности сведением к двумерному пространству Минковского.

Теорема 4.1. *Пусть конформно плоская метрика $dx^2/f^2(x)$ такова, что ее одномерная секционная кривизна $K(\xi)$ в каждой точке и в каждом направлении удовлетворяет неравенству*

$$0<\frac{\varkappa_1}{2}\leqslant K(\xi)\leqslant\frac{\varkappa_2}{2},\tag{4.5}$$

тогда образ $\gamma^{\varkappa_1}[S^n]\subset H_{\varkappa_1}$ содержится в конусе $\mathbf{C}^-[\delta(x_0)]$, где $\delta(x_0)=\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\gamma^{\varkappa_2}(x_0)$ для каждой точки $x_0\in S^n$. Другими словами, для каждой точки $\gamma^{\varkappa_1}(x_0)\in\gamma^{\varkappa_1}[S^n]$ имеется сфера в пространстве $H_{\varkappa_1}$ радиуса

$$R=\frac{1}{\sqrt{\varkappa_1}}\ln\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}},$$

содержащая в себе $\gamma^{\varkappa_1}[S^n]$ и проходящая через точку $\gamma^{\varkappa_1}(x_0)$.

Доказательство. Для краткости введем обозначение $\gamma^{\varkappa_1}(x)=\gamma_1(x)$. Нам необходимо доказать неравенство

$$\langle\gamma_1(x)-\delta(x_0)\rangle^2\leqslant 0\tag{4.6}$$

для любых x, $x_0\in S^n$; здесь $\langle w\rangle^2$ — скалярный квадрат вектора в пространстве Минковского $\mathbf{R}^{n+2}$. Используя конформное преобразование сферы S^n, можно считать, что

$$f(x_0)=\sqrt{\varkappa_2},\quad \overrightarrow{\nabla f}(x_0)=\vec{x}_0\sqrt{\varkappa_2}.\tag{4.7}$$

Подставляя (4.1) в (4.6) и учитывая (4.7), получим, что (4.6) эквивалентно

$$\varkappa_2+\varkappa_1\geqslant\sqrt{\varkappa_2}\,\frac{\varkappa_1+|\nabla f_x|^2}{f(x)}\tag{4.8}$$

для любого $x\in S^n$. В точках экстремума функции $(\varkappa_1+|\nabla f_x|^2)/f(x)$ будем иметь

$$\left(\overrightarrow{\nabla f_x},\ 2f(x)\frac{d\overrightarrow{\nabla f_x}}{\overrightarrow{\partial\tau}}-(\varkappa_1+|\nabla f_x|^2)\overrightarrow{\tau}\right)\equiv 0, \tag{4.9}$$

где $\overrightarrow{\tau}$ — произвольный вектор касательного пространства $T_x(S^n)$. Будем предполагать, что в (4.5) выполняется строгое неравенство

$$\varkappa_1/2<K(\xi). \tag{4.10}$$

Тогда в точках экстремума вектор $\overrightarrow{\nabla f_x}$ параллелен вектору $\overrightarrow{x}$, в противном случае возьмем вектор $\overrightarrow{\tau}\in T_x(S^n)$, параллельный ненулевой проекции вектора $\overrightarrow{\nabla f_x}$ на плоскость $T_x(S^n)$. Так как в силу однородности функции f

$$\frac{d\overrightarrow{\nabla f}}{\overrightarrow{d\tau}}\in T_x(S^n),$$

то из (4.9) получим

$$\left(\overrightarrow{\tau},\ 2f(x)\frac{d\overrightarrow{\nabla f_x}}{\overrightarrow{d\tau}}-(\varkappa_1+|\nabla f|^2)\overrightarrow{\tau}\right)=2f(x)\frac{d^2f}{\overrightarrow{d\tau}^2}-(\varkappa_1+|\nabla f|^2)|\overrightarrow{\tau}|^2=0;$$

противоречие с (4.10). Итак, в точках экстремума из-за однородности f имеем

$$\overrightarrow{\nabla f_x}=\overrightarrow{x}f(x). \tag{4.11}$$

Следовательно, вместо (4.8) достаточно установить неравенство

$$\varkappa_2+\varkappa_1\geqslant\sqrt{\varkappa_2}\,\frac{\varkappa_1+f^2(x)}{f(x)}. \tag{4.12}$$

В силу теоремы (3.1) для любого $x\in S^n$ выполняется

$$f_{x_0}^{\varkappa_1}(x)\leqslant f(x)\leqslant f_{x_0}^{\varkappa_2}(x). \tag{4.13}$$

Подставляя (4.2) и используя (4.7), имеем $\varkappa_1/\sqrt{\varkappa_2}\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{\varkappa_2}$, откуда непосредственно следует (4.12), что требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 4.1. Требования $f\in C^2$ и (4.10) снимаются с помощью предельного перехода.

З а м е ч а н и е 4.2. Теорема справедлива и в случае $\varkappa_2=+\infty$.

Теорема 4.2. *Пусть конформно плоская метрика $dx^2/f^2(x)$ такова, что ее одномерная секционная кривизна $K(\xi)$ в каждой точке и в каждом направлении удовлетворяет неравенству*

$$\varkappa_1/2\leqslant K(\xi)\leqslant\varkappa_2/2, \tag{4.14}$$

где $\varkappa_1+\varkappa_2\geqslant 0$. Тогда образ $\gamma^{\varkappa_2}[S^n]\subset H_{\varkappa_2}$ содержится в конусе $C^+[\delta(x_0)]$, *где*

$$\delta(x_0)=\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\gamma^{\varkappa_1}(x_0)$$

для каждой точки $x_0\in S^n$ (В частности, при $\varkappa_1=-\varkappa_2$ это означает, что через каждую точку $\gamma^{\varkappa_2}(x_0)\in\gamma^{\varkappa_2}[S^n]$ проходит гиперплоскость в $H_{\varkappa_2}$, опорная для $\gamma^{\varkappa_2}[S^n]$.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично (4.6) необходимо доказать неравенство

$$\left\langle\gamma^{\varkappa_2}(x)-\delta(x_0)\right\rangle^2\leqslant 0 \tag{4.15}$$

для любых $x,\ x_0\in S^n$. Будем считать, что $\varkappa_1<0$ (случай $\varkappa_1>0$ доказывается аналогично теореме 4.1). Используя конформное преобразование сферы S^n, можно считать, что

$$f(x_0)=\sqrt{|\varkappa_1|},\quad \overrightarrow{\nabla f}_{x_0}=\vec{x}_0\sqrt{|\varkappa_1|}. \tag{4.16}$$

Подставляя (4.1) в (4.15) и учитывая (4.16), получим, что (4.15) эквивалентно

$$\frac{\varkappa_2+\varkappa_1}{2\sqrt{|\varkappa_1|}}\geqslant\left(\vec{x}_0,\ -\overrightarrow{\nabla f}_x+\frac{\varkappa_2+|\nabla f_x|^2}{2f(x)}\vec{x}\right). \tag{4.17}$$

Точки экстремума правой части определяются из равенства

$$\left(\vec{x}_0,\ B\vec{\tau}-\frac{\vec{x}}{f(x)}(\overrightarrow{\nabla f}_x,\ B\vec{\tau})\right)\equiv 0, \tag{4.18}$$

где $\vec{\tau}$ — произвольный вектор касательного пространства $T_x(S^n)$,

$$B\vec{\tau}=-\frac{d\overrightarrow{\nabla f}_x}{d\vec{\tau}}+\frac{\varkappa_2+|\nabla f_x|^2}{2f(x)}\vec{\tau}. \tag{4.19}$$

Замечаем, что $B\vec{\tau}\in T_x(S^n)$ и

$$(\vec{\tau},\ B\vec{\tau})=-\frac{d^2f}{d\vec{\tau}^2}+\frac{\varkappa_2+|\nabla f_x|^2}{2f(x)}|\vec{\tau}|^2.$$

Будем предполагать, что в (4.14) выполняется строгое неравенство

$$K(\xi)<\varkappa_2/2. \tag{4.20}$$

Тогда $(\vec{\tau},\ B\vec{\tau})>0$ при $\vec{\tau}\neq 0$ и $B\colon T_x(S^n)\to T_x(S^n)$ — взаимно однозначное линейное отображение. Условие (4.18) можно переписать в виде

$$\left(\vec{x}_0,\ \vec{\eta}-\frac{\vec{x}}{f(x)}(\overrightarrow{\nabla f}_x,\ \vec{\eta})\right)\equiv 0 \tag{4.21}$$

для любого $\vec{\eta}\in T_x(S^n)$. Следовательно, в стационарных точках $(\vec{x},\ \vec{x}_0)\neq 0$ и

$$\overrightarrow{\nabla f}_x=f(x)\frac{\vec{x}_0}{(\vec{x},\ \vec{x}_0)}. \tag{4.22}$$

Подставляя (4.22) в (4.17), получим

$$\frac{\varkappa_2+\varkappa_1}{2\sqrt{|\varkappa_1|}}\geqslant(\vec{x},\ \vec{x}_0)\frac{\varkappa_2}{2f(x)}-\frac{f(x)}{2(\vec{x},\ \vec{x}_0)}. \tag{4.23}$$

Подставляя (4.2) в (4.13) и используя (4.16), получим

$$\sqrt{|\varkappa_1|}(x,\ x_0)\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{|\varkappa_1|}(x,\ x_0)+\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{2\sqrt{|\varkappa_1|}}[1-(x,\ x_0)]. \tag{4.24}$$

Замечаем, что при $(x,\ x_0)>0$ неравенство (4.23) следует из левой части неравенства (4.24). При $(x,\ x_0)<0$ неравенство (4.23) эквивалентно неравенству

$$(x,\ x_0)\sqrt{|\varkappa_1|}\leqslant f(x)\leqslant-(x,\ x_0)\frac{\varkappa_2}{\sqrt{|\varkappa_1|}}, \tag{4.25}$$

левая часть которого очевидно выполняется. Заменим в неравенстве (4.13) точку x_0 на точку $(-x_0)$. В силу (4.2) и (4.16)

$$\frac{f^2(x)}{(x,\ x_0)^2}[1-(x,\ x_0)]+\varkappa_1[1+(x,\ x_0)]\leqslant\frac{2f(x)\varkappa_2}{\sqrt{|\varkappa_1|}}$$

или

$$\left|\frac{f(x)}{(x, x_0)}-\frac{\varkappa_2(x, x_0)}{\sqrt{|\varkappa_1|}\,[1-(x, x_0)]}\right|^2\leqslant\frac{\varkappa_2^2(x, x_0)^2+[1-(xx_0)^2]\,\varkappa_1^2}{|\varkappa_1|\,[1-(xx_0)]^2}.$$

Так как $|\varkappa_1|\leqslant\varkappa_2$, то

$$\left|\frac{f(x)}{(x, x_0)}-\frac{\varkappa_2(x, x_0)}{\sqrt{|\varkappa_1|}\,[1-(x, x_0)]}\right|\leqslant\frac{\varkappa_2}{\sqrt{|\varkappa_1|}\,[1-(x, x_0)]}$$

или

$$-\frac{\varkappa_2}{\sqrt{|\varkappa_1|}}\leqslant\frac{f(x)}{(x, x_0)}\leqslant\frac{\varkappa_2}{\sqrt{|\varkappa_1|}}\,\frac{1+(x, x_0)}{1-(x, x_0)}.$$

При $(x, x_0)<0$ отсюда получаем

$$f(x)\leqslant-(x, x_0)\frac{\varkappa_2}{\sqrt{|\varkappa_1|}},$$

что и доказывает (4.25) и теорему.

Замечание 4.3. Условия $f\in C^2$ и (4.20) снимаются с помощью предельного перехода.

Замечание 4.4. Теорема 4.2 позволяет установить взаимно однозначное соответствие между компактными выпуклыми множествами пространства Лобачевского $H_\varkappa$ и конформно плоскими метриками на сфере S^n, удовлетворяющими условию $|K(\xi)|\leqslant\varkappa/2$.

§ 5. Изометричное погружение двумерных конформно плоских метрик в пространство Лобачевского

Пусть $ds^2=dx^2/f^2(x)$ — конформно плоская метрика на двумерной сфере S^2, $f>0$, $f\in C^2$. Обозначим через k_0 — минимум гауссовой кривизны данной метрики ds^2, тогда при $k\leqslant k_0$ из общих результатов А. Д. Александрова [1] следует существование изометричного вложения данной метрики в пространство постоянной кривизны k в виде выпуклой поверхности. При $k\to-\infty$ в пределе получим изометричное вложение в изотропный конус пространства Минковского.

Цель данного параграфа — дать аналитическое описание этого предельного перехода. Пусть $D=\{z=(x, y): x^2+y^2\leqslant 1\}$. Обозначим через ω^1, ω^2 дифференциальные формы в области D, заданные в виде $\omega^1=dx/f(z)$, $\omega^2=dy/f(z)$. Форма связности ω_2^1 метрики $ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$ находится из уравнений

$$d\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1,\quad d\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2,\quad \omega_2^1=-\omega_1^2$$

и равна

$$\omega_1^2=\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy\right). \tag{5.1}$$

Задача изометричного погружения метрики ds^2 в пространство постоянной кривизны $\varkappa$ сводится к нахождению второй квадратичной формы, удовлетворяющей уравнениям Гаусса и Петерсона — Кодацци, другими словами, к нахождению форм ω_1^3 и ω_2^3 таких, что

$$\omega_1^3\wedge\omega^1+\omega_2^3\wedge\omega^2=0, \tag{5.2}$$

$$d\omega_2^1=\varkappa\omega^1\wedge\omega^2+\omega_1^3\wedge\omega_2^3, \tag{5.3}$$

$$d\omega_1^3=\omega_1^2\wedge\omega_2^3,\quad d\omega_2^3=\omega_2^1\wedge\omega_1^3, \tag{5.4}$$

где (5.3) — уравнения Гаусса, (5.4) — уравнения Петерсона — Кодацци. Из (5.2) следует

$$\omega_1^3=b_{11}\omega^1+b_{12}\omega^2$$

$$\omega_2^3=b_{21}\omega^1+b_{22}\omega^2,\quad b_{12}=b_{21} \tag{5.5}$$

где $\|b_{ij}\|$ — коэффициенты второй квадратичной формы. Положим $h = (b_{11}+b_{22})/2$, $\beta = b_{12}$, $\alpha = (b_{11}-b_{22})/2$. В этих переменных уравнения (5.3) и (5.4) примут вид

$$
\begin{gathered}
f\Delta f - |\nabla f|^2 = \varkappa + h^2 - \beta^2 - \alpha^2, \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{f^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{f^2}\right) = \frac{1}{f^2}\frac{\partial h}{\partial y}, \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{f^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{f^2}\right) = \frac{1}{f^2}\frac{\partial h}{\partial x},
\end{gathered} \tag{5.6}
$$

где $f\Delta f - |\nabla f|^2 = K$ — гауссова кривизна метрики ds^2. Вводя комплексно-значную функцию $u(z) = (\beta + i\alpha)/f^2$, систему (5.6) можно записать коротко так:

$$
\begin{gathered}
f\Delta f - |\nabla f|^2 = \varkappa + h^2 - f^4|u|^2, \\
\frac{\partial u}{\partial \bar z} = \frac{i}{f^2}\frac{\partial h}{\partial z}.
\end{gathered} \tag{5.7}
$$

Чтобы устранить сингулярность при $\varkappa \to -\infty$, сделаем замену $\varkappa = -1/\lambda$, $h = \sqrt{\lambda}\varphi + 1/\sqrt{\lambda}$, $u = \sqrt{\lambda} w$. В результате получим

$$
\begin{gathered}
f\Delta f - |\nabla f|^2 = 2\varphi + \lambda[\varphi^2 - f^4|w|^2] \\
\frac{\partial w}{\partial \bar z} = \frac{i}{f^2}\frac{\partial \varphi}{\partial z}.
\end{gathered} \tag{5.8}
$$

Решение будем искать в виде степенного ряда по параметру λ:

$$
\begin{gathered}
\varphi = \varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \ldots \\
w = w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2 w_2 + \ldots .
\end{gathered} \tag{5.9}
$$

Ясно, что $\varphi_0 = \frac{1}{2}[f\Delta f - |\nabla f|^2] = 2f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial \bar z} - \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)$, в качестве w_0 можно взять

$$
w_0 = \frac{2i}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}. \tag{5.10}
$$

Тогда

$$
\varphi_1 = 2f^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \bar z} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial \bar z} - \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right]^2\right). \tag{5.11}
$$

Все последующие коэфициенты рядов (5.9) будем находить рекуррентно из (5.8), полагая

$$
w_n(\zeta) = -\frac{i}{\pi}\iint\limits_D \frac{\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}}{f^2(z)}\frac{dx\,dy}{z-\zeta}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.12}
$$

Имеем

$$
\frac{\partial w_n}{\partial \zeta} = -\frac{i}{\pi}\iint\limits_D \frac{\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}}{f^2(z)}\frac{dx\,dy}{(z-\zeta)^2}. \tag{5.13}
$$

Интеграл (5.13) берется в смысле главного значения. Положим $M = \max\limits_D |f(z)|$, $m = \min\limits_D |f(z)|$, $L = \max\limits_D \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$, $a_n = \max\limits_D |\varphi_n(z)|$, $b_n = \left\|\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}\right\|_{L_p(D)}$, $c_n = \max\limits_D |w_n(z)|$, $d_n = \left\|\frac{\partial w_n}{\partial z}\right\|_{L_p(D)}$. Из свойств сингулярных интегралов [6] при $p > 2$ следуют оценки для $n \geqslant 1$

$$
c_n \leqslant \frac{1}{m^2}Kb_n, \quad d_n \leqslant \frac{1}{m^2}Rb_n, \tag{5.14}
$$

где K, R — константы, зависящие только от p. Из (5.8) получаем при

$n \geqslant 1$

$$2\varphi_{n+1} = f^4 \sum_{i=0}^{n} w_i \bar{w}_{n-i} - \sum_{i=0}^{n} \varphi_i \varphi_{n-i}. \tag{5.15}$$

Следовательно,

$$2a_{n+1} \leqslant 2M^4 c_0 c_n + M^4 \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i} + 2a_0 a_n + \sum_{i=1}^{n} a_i a_{n-i}.$$

Подставляя (5.14), получим

$$2a_{n+1} \leqslant \frac{2M^4 c_0 K b_n}{m^2} + \frac{M^4 b^2}{m^4} \sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{n-i} + 2a_0 a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} =$$

$$= Hb_n + D \sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{n-i} + 2a_0 a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}.$$

Дифференцируя (5.15), имеем при $n \geqslant 1$

$$2\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial z} = f^4 \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial w_i}{\partial z} \bar{w}_{n-i} + w_i \frac{\partial \bar{w}_{n-i}}{\partial z} \right) + 4f^3 \frac{\partial f}{\partial z} \sum_{i=0}^{n} w_i \bar{w}_{n-i} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \varphi_{n-i} + \varphi_i \frac{\partial \varphi_{n-i}}{\partial z} \right). \tag{5.16}$$

Следовательно,

$$2b_{n+1} \leqslant M^4 \left\{ \sum_{i=0}^{n} c_{n-i} d_i + \frac{c_i b_{n-i}}{m^2} \right\} + 4M^3 L \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i} + 2 \sum_{i=0}^{n} b_i a_{n-i}.$$

Применяя оценки (5.14), получим при $n \geqslant 1$

$$2b_{n+1} \leqslant M^4 \left(d_0 \frac{R}{m^2} b_n + c_0 b_n \frac{K}{m^2} + \frac{c_0 b_n}{m^2} + \frac{K}{m^2} b_n b_0 \right) + M^4 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{KR}{m^4} b_{n-i} b_i + \frac{K}{m^4} b_i b_{n-i} \right) +$$

$$+ 8M^3 L c_0 b_n \frac{K}{m^2} + 4M^3 L \sum_{i=1}^{n-1} \frac{K^2}{m^4} b_i b_{n-i} + 2(b_0 a_n + b_n a_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} b_i a_{n-i} =$$

$$= Ab_n + Q \sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{n-i} + 2b_0 a_n + \sum_{i=1}^{n-1} 2b_i a_{n-i}.$$

Рассмотрим рекуррентно определенные последовательности

$$\begin{aligned} 2\tilde{b}_{n+1} &= A\tilde{b}_n + Q \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{b}_i \tilde{b}_{n-i} + 2b_0 \tilde{a}_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{b}_i \tilde{a}_{n-i}, \\ 2\tilde{a}_{n+1} &= H\tilde{b}_n + D \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{b}_i \tilde{b}_{n-i} + 2a_0 \tilde{a}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{a}_i \tilde{a}_{n-i}, \\ \tilde{a}_1 &= a_1, \quad \tilde{b}_1 = b_1. \end{aligned} \tag{5.17}$$

По индукции проверяется, что $a_i \leqslant \tilde{a}_i$, $b_i \leqslant \tilde{b}_i$, $i \geqslant 1$. Положим $B = \max\{A, H\}$, $C = \max\{Q, D\}$, $q = \max\{a_0, b_0\}$ и рассмотрим рекуррентную последовательность

$$\begin{gathered} 2s_{n+1} = Bs_n + C \sum_{i=1}^{n-1} s_i s_{n-i} + 2qs_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} s_i s_{n-i}, \\ s_1 = \max\{a_1, b_1\} = r. \end{gathered} \tag{5.18}$$

Также индукцией проверяется, что $\tilde{a}_i \leqslant s_i$, $\tilde{b}_i \leqslant s_i$, $i \geqslant 1$. Положим $u(x) = s_1 + s_2 x + s_3 x^2 + \ldots$. В силу (5.16) функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$2(u - r)/x = Bu + Cxu^2 + 2qu + 2xu^2$$

или

$$(C+2)x^2u^2+u[x(B+2q)-2]+2r=0.$$

Отсюда

$$u(x)=\frac{-[x(B+2q)-2]+\sqrt{[x(B+2q)-2]^2-8r(C+2)x^2}}{2(C+2)x^2}.$$

Радиус сходимости R ряда $u(x)$ равен расстоянию от начала координат до ближайшей особой точки, которая находится из уравнения

$$x(B+2q)-2=\pm\sqrt{8r(C+2)}\,x.$$

Следовательно,

$$R=\frac{2}{B+2q+\sqrt{8r(C+2)}}>0.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.1. *Пусть в круге D задана метрика $ds^2=|dz|^2/f^2(z)$, где $f\in W_p^3(D)$, $p>2$. Тогда определены ряды* (5.9), *равномерно сходящиеся в $W_p^1(D)$ для достаточно малого параметра λ. При этом функции $h=\sqrt{\lambda}\varphi+1/\sqrt{\lambda}$, $u=\sqrt{\lambda}wf^2$ дают среднюю кривизну и девиатор второй квадратичной формы изометричного погружения метрики ds^2 в пространство Лобачевского кривизны* $(-1/\lambda)$.

Замечание 5.1. Если h — средняя кривизна изометричного погружения в пространство $H_{1/\lambda}$, то предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(h/\sqrt{\lambda}-1/\lambda\right)$ равен гауссовой кривизне метрики ds^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров А. Д.** Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.: Гостехиздат, 1948.
2. **Ravindra S. K.** Curvature structures and conformal transformation // J. Diff. geometry.— 1969.— N 4.— P. 425—451.
3. **Николаев И. Г.** О гладкости метрики пространств с двусторонне ограниченной по А. Д. Александрову кривизной // Сиб. мат. журн.— 1983.— Т. 24, № 2.— С. 114—132.
4. **Кантор Б. Е., Франгулов С. А.** Об изометричном погружении двумерных римановых многообразий в псевдоевклидово пространство // Мат. заметки.— 1984.— Т. 36, № 3.— С. 447—455.
5. **Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.** Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.— М.: Наука, 1983.
6. **Альфорс Л.** Лекции по квазиконформным отображениям.— М.: Наука, 1969.