ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ БЕЗ НАСЫЩЕНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В. Н. БЕЛЫХ

Настоящей работой завершается цикл аналитических исследований автора по нестационарным осесимметричным задачам идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами в точной постановке (частично результаты статьи анонсированы в [1—3]). Под «задачами со свободными границами» понимаются нестационарные задачи гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости, в которых поверхность (или ее часть), ограничивающая объем, занятый жидкостью, заранее не фиксирована, а состоит из жидких частиц. Для определения свободной границы имеются два нелинейных условия (кинематическое или геометрическое и динамическое [4]), связывающих форму поверхности и скорости жидких частиц на ней. Кинематическое условие означает, что граница области во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц, а динамическое равносильно заданию давления вдоль жидкой границы области.

Процесс построения решений нестационарных задач со свободными границами как бы расщепляется на две части: сначала в области, занятой жидкостью, конструируется решение линейной эллиптической задачи, а затем на границе области решается нелокальная задача Коши для системы нелинейных псевдодифференциальных уравнений. Решения нестационарных задач со свободными границами будем трактовать как эволюцию жидких частиц под действием сил инерции, внешнего давления, поверхностного натяжения и потенциальных массовых сил.

Основная трудность как при аналитическом, так и при численном исследовании задач со свободными границами состоит в том, что область, в которой отыскивается решение эллиптической задачи, сама принадлежит к множеству искомых объектов и поэтому может быть достаточно произвольной (разумеется, в рамках, допускаемых классом корректности рассматриваемой задачи). Например, в случае безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости эллиптическая задача состоит в отыскании по данным Дирихле гармонической в области функции с последующим вычислением ее градиента на границе.

Заметим, что проблемы исследования потенциальных движений идеальной несжимаемой жидкости всегда связаны с построением решений вспомогательных эллиптических задач, возникающих здесь в качестве важного промежуточного этапа. Так, задачи о плоских движениях идеальной жидкости сводятся к краевым задачам для аналитических функций [5], задачи обтекания тел — к внешним задачам Неймана для уравнения Лапласа [6—8], нестационарные задачи со свободными границами — к решению нелокальных задач Коши для псевдодифференциальных эллиптических операторов [3, 4, 9, 10].

Примерами нестационарных задач со свободными границами являются классические задачи о развитии неустойчивостей Релея — Тейлора и Гельмгольца — Кельвина, а также целый ряд практически важных задач о движении газовых пузырей [3, 9—20]. Изучением нестационарных задач со свободными границами с помощью ЭВМ занимались многие авторы [1, 11—13, 15, 16, 18]. Вместе с тем ни одну из них реализовать численно в полном объеме пока не удалось. Причина такого положения — отсутствие адекватного им вычислительного аппарата. В связи с этим важное значение приобретают точные результаты, касающиеся классов корректности указанных задач, поскольку нельзя построить рациональный численный алгоритм решения сложной математической задачи, не выяснив предварительно основных ее свойств [21]. Успехов в создании точных теорий этих задач достигнуто сравнительно немного, ибо нелинейные условия на неизвестной свободной границе создают значительные математические трудности. Коротко об имеющихся здесь точных результатах можно сказать следующее: если нет поверхностного натяжения, то классы корректности указанных задач весьма узки, решения, хотя и бесконечно дифференцируемы, существуют недолго и неустойчивы [3, 10, 12]. Ожидать корректности в классах более широких, чем класс аналитических функций, видимо, нет никаких оснований [22].

В § 1 доказана локальная теорема существования аналитического по времени решения в задаче о «всплывании» пузыря в сферическом сосуде, наполненном идеальной несжимаемой жидкостью. В связи со сказанным теорема из § 1 имеет фундаментальное значение для численной реализации этой задачи на ЭВМ. Кроме того, теорема из § 1 указывает подход к решению проблемы «разрушения» свободных границ. Отметим, что эта проблема до сих пор остается наиболее трудной в гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости [11], и на нее неоднократно обращал внимание М. А. Лаврентьев [5, 17]. Однако никаких исследований по выяснению характера разрушения свободных границ до сих пор не предпринималось. Тематика статьи непосредственным образом примыкает к кругу вопросов, возникающих при исследовании этой гидродинамической проблемы. В связи с чем сделаем несколько общих замечаний по технологии предполагаемого решения указанной проблемы. Казалось бы, построить теорию «разрушения» свободных границ без привлечения дополнительных гипотез (топологического, например, характера [16]) вряд ли возможно. Однако надежду на успех здесь вселяют полученные (см. § 1) точные результаты о существовании аналитических решений в задачах со свободными границами. В самом деле, согласно теореме из § 1 аналитическое решение задачи о пузыре существует лишь конечное время t_*, а это означает, что при $t > t_*$ происходит катастрофа (например, аналитическое решение разрушается). Если теперь интересоваться лишь одной из возможных угроз свободной границе — потерей аналитичности,— то можно попытаться построить теорию разрушения свободных границ на основе следующего простого диагноза: разрушение свободной границы наступает в момент образования на ней точечной особенности. Характер особой точки и ее тип должны быть определены в процессе построения решения всей задачи в целом.

Таким образом, в указанных предположениях несуществование аналитического решения задачи при «больших» временах означает просто расширение класса функций, в котором предстоит отыскивать решение. Заметим, что в условиях имеющейся теоремы из § 1 другой причины для разрушения свободной границы, видимо, нет, так что высказанная гипотеза не лишена смысла. Благодаря нетривиальному результату, полученному в § 1, появилась реальная возможность вплотную подойти к решению проблемы зарождения особой точки на свободной границе. Конструктивно реализовать программу поиска особой точки решения в условиях доказанной теоремы существования аналитического решения можно, по мнению автора, с помощью прецизионных численных расчетов и доказательных вычислений. При этом, учитывая большое влияние ошибок округления в этих задачах, в вычислениях целесообразно использовать «арифметику вынесенных порядков».

Посмотрим, что дает высказанная гипотеза в задаче о всплывании пузыря. Пусть при $t < t_*$ решение задачи с компактной свободной границей аналитично по t и существует в обычном смысле, например в виде сходящегося ряда Тейлора. Обозначим его через $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. По известным свойствам аналитических функций локально вблизи каждого $\mathbf{x}$ аналитическое продолжение $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ по t будет удовлетворять уравнениям движения свободных границ при любых $\mathbf{x}$, за исключением, быть может, некоторых особых точек. Для выяснения характера особых точек решения разумно воспользоваться аналитическим продолжением рядов Тейлора из окрестности точки $t = 0$. Известно, что общего конструктивного метода построения области регулярности любой заданной рядом Тейлора функции не существует. Ситуация осложняется еще и тем, что, с одной стороны, ряды Тейлора плохо приспособлены для изучения вещественных функций, а с другой — коэффициенты разложения решения в ряд Тейлора в задачах со свободными границами определяются сложным образом через решения вспомогательных краевых задач для уравнения Лапласа. Поэтому для целей аналитического продолжения следует использовать не сам аппарат рядов Тейлора, а другие аналитические образования, например аппроксимации Паде, являющиеся локально наилучшими рациональными аппроксимациями функций, заданных своими разложениями в степенной ряд. Тем самым для конструктивного построения решения с особой точкой на свободной границе требуется продолжить решение аналитически с тем, чтобы «отыскать» особенности, если они есть, на положительной части вещественной оси t. Заметим, что здесь принципиальное значение имеют теоретические результаты, устанавливающие связи между асимптотическим поведением рациональных аппроксимаций Паде (распределением их полюсов и нулей) и возможностью аналитического продолжения приближаемого решения. Если о решении больше не дано никакой информации, то указанная задача аналитического продолжения с вычислительной точки зрения «плохо» сформулирована. Однако в некоторых случаях, используя конечное число коэффициентов Тейлора, можно приближенно оценить положение и характер особенностей отыскиваемого решения [11, 23].

Ясно, что реализовать аналитическое продолжение в нестационарных задачах со свободными границами без помощи ЭВМ просто немыслимо. Решение же указанной гидродинамической проблемы если и возможно, то только лишь при правильном сочетании аналитических и численных методов. При этом аналитическая сторона исследования проблемы должна быть адаптирована с учетом требований, предъявляемых численными алгоритмами. Здесь оказались перспективными алгоритмы без насыщения [24], т. е. численные алгоритмы, адаптирующиеся к свойствам гладкости отыскиваемого решения. Отметим, что результаты, полученные с помощью ЭВМ, следует рассматривать не более, чем гипотетические, пока не будет осуществлен наиболее ответственный этап работы с ЭВМ — доказательные вычисления [25]. Другими словами, после численного прогнозирования особых точек требуется еще убедительное доказательство того, что к полученному таким образом результату можно отнестись с полным доверием.

В рассматриваемых задачах оказались действенными методы без насыщения, поскольку классом корректности этих задач является некоторое пространство аналитических функций (см. § 1). Действительно, при численном исследовании нестационарных осесимметричных задач со свободными границами приходится столкнуться с численным решением задачи Коши для системы нелинейных псевдодифференциальных уравнений. При этом возникает ряд принципиальных и трудных вопросов. Прежде всего — построение численных алгоритмов решения уравнения Лапласа в гладких осесимметричных областях достаточно произвольной формы и дискретизация задачи Коши в условиях бесконечной дифференцируемости ее решения. Повышенная точность в эллиптических задачах потребовала учета имеющейся гладкости отыскиваемого решения, что оказалось невозможным в рамках существующих вычислительных средств даже в случае классических задач (например, задачи Дирихле для уравнения Лапласа в гладкой осесимметричной области достаточно произвольной формы). Под давлением такой практической необходимости появились алгоритмы без насыщения [12, 24, 26, 27], а затем и метод доказательных вычислений [25]. Математические идеи, лежащие в основе алгоритмов без насыщения, принадлежат К. И. Бабенко [24, 28]. Общие же принципы конструирования алгоритмов вытекают из теории дискретизации и ε-энтропии функциональных компактов [21, 29, 30].

Конструкция алгоритмов без насыщения в плоском случае для эллиптических задач описана в [26]. Указанный в [26] способ аппроксимации решения был использован затем в задаче о развитии неустойчивости Релея — Тейлора, что позволило в одном частном случае «протянуть» по времени численное решение этой задачи вплоть до его разрушения [11]. Заметим, что пока это единственный убедительный численный результат в нестационарных задачах со свободными границами.

В пространственном случае алгоритмы без насыщения сконструированы автором. Эти алгоритмы использованы для численного решения краевых задач для уравнения Лапласа в гладких осесимметричных областях достаточно произвольной формы. Предлагаемая новая методика подробно описана в § 2—6. В § 7 проведено обоснование этой методики: показано, что построенные численные алгоритмы не обладают насыщением, а конечномерная задача, аппроксимирующая исходную эллиптическую, хорошо обусловлена. В § 8 предлагаемый метод демонстрируется на тестовых примерах, в частности задачах обтекания тел потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Здесь с высокой точностью построены численные решения задач Дирихле и Неймана в областях, ограниченных эллипсоидом вращения с отношением полуосей, равным 0.001 (для сравнения укажем, что отношение полуосей, равное 0.04, представляет уже значительные вычислительные трудности для традиционных вычислительных методик).

Сделаем несколько общих замечаний о специфике численной реализации (§ 6) осесимметричных краевых задач для уравнения Лапласа. Конструирование алгоритмов решения эллиптических задач всегда предполагает следующую последовательность действий: сначала на основе выбранного способа аппроксимации задача сводится к ее конечномерному аналогу, а затем указывается эффективный способ решения полученной таким образом системы линейных алгебраических уравнений. Точность построенного численного решения зависит от того, в какой мере конечномерная задача наследует свойства отыскиваемого решения. Слабой стороной существующих численных методик в эллиптических задачах является то обстоятельство, что они не используют в должной степени специфику задания оператора задачи как оператора эллиптического, игнорируя тем самым весьма существенную информацию о решении — его бесконечную дифференцируемость. Способы конечномерной аппроксимации, основанные на методах типа конечно-разностных (т. е. имеющих главный член погрешностей), насыщаемы [21, 24]. Удобно решения краевых задач для уравнения Лапласа находить из эквивалентных им интегральных уравнений. Большей частью методы решения интегральных уравнений оказываются с насыщением, поскольку используют стандартные [31] квадратурные формулы, а это довольно жестко предопределяет качество получаемых приближений. Таким образом, чтобы адекватно учесть информацию о гладкости решения, нужно позаботиться о том, чтобы интегральные операторы задачи были реализованы численно как можно тщательнее, желательно с помощью квадратурных формул без насыщения. Такие квадратурные формулы построены в § 5.

Численная реализация интегральных уравнений осесимметричных краевых задач затруднена еще тем обстоятельством, что ядра интегральных операторов этих задач в точках, близких к оси симметрии, растут обратно пропорционально расстоянию до оси симметрии, формируя вблизи нее своеобразный «пограничный слой» (см. § 6). Обнаруженный чисто вычислительный эффект [32] явился, как оказалось, своеобразной «платой» за цилиндрическую симметрию задачи. Было установлено, что квадратурные формулы с главным членом погрешности не позволяют эффективно справиться с указанной вычислительной трудностью. В известных работах [33—36] о значительном понижении точности расчета вблизи оси симметрии мало говорится. Исключение составляет [37], где сделана попытка преодоления указанных затруднений на основе квадратурных формул с автоматическим выбором шага интегрирования. Однако все численные методики вблизи оси симметрии оказались малоэффективными, поскольку основаны на локальном способе выделения особенности ядра без учета имеющегося в задаче пограничного слоя.

При численной реализации краевых задач на ЭВМ, как правило, используются два типа входной информации. Это — информация аналитического характера об интегральном операторе задачи и информация геометрического характера об области. Всякий адекватный численный метод решения задачи должен предусматривать совместную переработку указанных видов информации, в связи с чем геометрическая информация должна быть преобразована к аналитическому виду. В плоских задачах теории потенциала геометрия области учитывалась [38, 39] с помощью функций, осуществляющих конформное отображение области на круг.

В рассматриваемых здесь задачах геометрическую конфигурацию меридионального сечения области удается учесть в терминах построенной в § 6 математической модели пограничного слоя. В результате трудности численной реализации интегральных операторов осесимметричных краевых задач были редуцированы к проблеме построения специальных квадратурных формул, способных парировать большие градиенты подынтегральных функций (§ 5).

На основе результатов, полученных в § 1—8, в § 9 указан новый подход к численному моделированию нестационарных осесимметричных задач идеальной несжимаемой жидкости с компактными свободными границами. Этот подход состоит в адекватном сведении указанных задач к задаче Коши для конечной системы нелинейных псевдодифференциальных уравнений. Таким образом, здесь в полном объеме осуществлена аналитическая часть исследования проблемы неустановившихся движений идеальной несжимаемой жидкости с компактными свободными границами.

§ 1. Теорема существования аналитического решения в задаче о «всплывании» пузыря

В этом параграфе доказывается теорема существования и единственности аналитического по времени t решения задачи о движении газового пузыря в сферическом сосуде, наполненном идеальной несжимаемой жидкостью. Точная постановка исследовалась в [18, 19], но вопрос о существовании решения в указанных работах не рассматривался. Данная задача относится к классу нестационарных задач со свободными границами [4], важной особенностью которых является нелокальный характер и принадлежность области $\omega(t)$, в которой отыскивается решение, к множеству искомых объектов. Введение лагранжевых координат

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{dt} = \nabla\varphi(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}|_{t=0} = \xi, \quad \xi \in \omega(0)$$

($\varphi(t, \mathbf{x})$ — потенциал скорости) позволяет редуцировать исходную задачу к некоторой ей эквивалентной, но уже с фиксированной областью $\omega(0)$. При этом $\omega(t)$ получается как образ $\omega(0)$ при отображении $\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$. Тем самым задача со свободной границей о движении жидкости сводится к отысканию отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$ $(\boldsymbol{\xi} \in \omega(0))$.

1. Постановка задачи. В пространстве $\mathbf{R}^3$ точек $\mathbf{x} = (x, y, z)$ рассматривается область $\omega(t)$, зависящая от времени $t \geqslant 0$ и ограниченная замкнутыми поверхностями Σ и $\Gamma(t)$. Предполагается, что Σ — неподвижная сфера, а $\Gamma(t)$ является границей односвязной области $Q(t)$ (пузыря), расположенной «внутри» Σ. В $\omega(t)$ имеет место безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости. На жидкость действует однородное поле сил тяжести напряженности g. Пренебрегаем силами поверхностного натяжения и массой газа в $Q(t)$, а также (для простоты) изменением давления в пузыре $Q(t)$. Начальное состояние при $t = 0$ определим условиями: $\Gamma(0)$ есть сфера с радиусом 1 и центром в $(0, 0, 0)$; давление в $Q(t)$ задано и равно p_0; жидкость покоится.

Л. В. Овсянниковым [10] показано, что в лагранжевых координатах систему уравнений, описывающую движение идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\omega: \begin{cases} \Delta\varphi = \operatorname{div} \mathbf{V}, \ \mathbf{V} = \left(M^* - M^{-1}\right)\mathbf{x}_t, \\ \mathbf{x}_t = M^{*-1}\nabla\varphi, \end{cases} \\
&\Gamma: \ \varphi_t = |\mathbf{x}_t|^2/2 - z; \ \Sigma: \ \mathbf{x} \cdot M^{*-1}\nabla\varphi = 0, \\
&\qquad t = 0: \ \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}, \ \varphi = 0;
\end{aligned} \tag{1.1}$$

здесь все дифференциальные операции выполняются по лагранжевым координатам $(t, \boldsymbol{\xi})$; $M = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}$ — матрица Якоби, M^* и M^{-1} — соответственно транспонированная и обратная матрицы;

$$\omega \equiv \omega(0) = \{\boldsymbol{\xi} \mid 1 \leqslant |\boldsymbol{\xi}| \leqslant R\},$$
$$\Gamma \equiv \Gamma(0) = \{\boldsymbol{\xi} \mid |\boldsymbol{\xi}| = 1\}, \ \Sigma = \{\boldsymbol{\xi} \mid |\boldsymbol{\xi}| = R > 1\}.$$

2. Представление решения. Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ и $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Введем сферические системы координат

$$\begin{aligned}
\xi &= \sigma(1-\lambda^2)^{1/2}\cos\theta, & x &= r(1-p^2)^{1/2}\cos q, \\
\eta &= \sigma(1-\lambda^2)^{1/2}\sin\theta, & y &= r(1-p^2)^{1/2}\sin q, \\
\zeta &= \sigma\lambda, & z &= rp;
\end{aligned} \tag{1.2}$$

здесь $\sigma = |\boldsymbol{\xi}|$, $r = |\mathbf{x}|$; $-1 \leqslant \lambda, p \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta, q < 2\pi$.

Так как поверхность, ограничивающая движущийся объем жидкости, во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц, то поверхностям пузыря и стенки сосуда при любом $t \geqslant 0$ будут соответствовать концентрические сферы $\sigma = 1$, $\sigma = R$.

Аналитическим решением задачи (1.1) назовем решение, представимое в виде рядов по степеням времени t. Отметим простой факт, который непосредственно вытекает из анализа системы (1.1) и в дальнейшем будет использован: осевая симметрия относительно оси z, заданная в момент $t = 0$, сохраняется на аналитическом решении для всех $t \geqslant 0$, при которых решение определено. Благодаря указанному обстоятельству матрицы Якоби, присутствующие в уравнениях (1.1), будут матрицами второго порядка, если в качестве искомых функций и независимых переменных выбраны инварианты групп вращения вокруг осей z и ζ

$$(x^2 + y^2)^{1/2}, \ z; \ (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \ \zeta.$$

Используя переменные (1.2), преобразуем (1.1) в систему уравнений для новых искомых функций $\varphi(t,\lambda)$ и $\mathbf{p}=\mathbf{p}(t,\lambda)=(r,p)$:

$$\omega:\ \begin{cases}\Delta\varphi=\operatorname{div}\mathbf{W},\ \mathbf{W}=\left(\overline{M}^{*}-\Lambda\overline{M}^{-1}L\right)\mathbf{p}_t, & (1.3)\\ \mathbf{p}_t=\overline{M}^{*-1}\nabla\varphi, & (1.4)\end{cases}$$

$$\Gamma:\ \varphi_t=(\mathbf{p}_t\cdot L\mathbf{p}_t)/2-rp, \qquad (1.5)$$

$$\Sigma:\ \mathbf{p}\cdot L\overline{M}^{*-1}\nabla\varphi=0, \qquad (1.6)$$

$$t=0:\ \mathbf{p}=\lambda,\ \varphi=0. \qquad (1.7)$$

Здесь

$$\overline{M}=\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\lambda}=\begin{Vmatrix}r_\sigma & r_\lambda\\ p_\sigma & p_\lambda\end{Vmatrix},$$

$$\Lambda=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{\sigma^2}{1-\lambda^2}\end{Vmatrix},$$

$$L=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1-p^2}{r^2}\end{Vmatrix},$$

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial\sigma},\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\right),$$

$$\operatorname{div}=\sigma^{-2}\frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma^2\cdot)+\sigma^{-2}\frac{\partial}{\partial\lambda}((1-\lambda^2)\cdot).$$

Решение системы (1.3)—(1.6) будем искать в виде

$$\varphi(t,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\lambda)\,t^n,\ \mathbf{p}(t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{p}_n(\lambda)\,t^n. \qquad (1.8)$$

В силу (1.7) следует положить

$$\varphi_0(\lambda)=0,\ \mathbf{p}_0(\lambda)=\lambda. \qquad (1.9)$$

Подставив ряды (1.8) в (1.3)—(1.6), придем к уравнениям

$$\Delta\varphi_n=\operatorname{div}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left(M^{*}_{n-k}-\Lambda J_{n-k}\right)\mathbf{p}_{k+1}\right],\ n=1,2,\ldots, \qquad (1.3)_n$$

$$(n+1)\,\mathbf{p}_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}N^{*}_{n-k}\nabla\varphi_k,\ n=0,1,\ldots, \qquad (1.4)_n$$

$$2(n+1)\,\varphi_{n+1}=\sum_{k+l+m\leqslant n}(k+1)(l+1)\,\mathbf{p}_{k+1}\cdot L\mathbf{p}_{l+1}-z_n,\ n=0,1,\ldots, \qquad (1.5)_n$$

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial\sigma}=-\sum_{k+l+m\leqslant n-1}\mathbf{p}_k\cdot J^{*}_{l}\nabla\varphi_m,\ n=1,2,\ldots, \qquad (1.6)_n$$

в которых через M_n, L_n, N_n, J_n обозначены матрицы, получаемые при разложении в ряд по степеням t соответственно матриц $\overline{M}$, L, $\overline{M}^{-1}$, $\overline{M}^{-1}L$.

Система $(1.3)_n$—$(1.6)_n$ имеет рекуррентный характер, т. е. если известны $\mathbf{p}_{k+1}$, φ_k $(0\leqslant k\leqslant n-1,\ n\geqslant 1)$, то $(1.3)_n$ есть уравнение Пуассона относительно φ_n с известной правой частью, а $(1.5)_{n-1}$, $(1.6)_n$ определяют известные значения φ_n и $\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\sigma}$ на границе $\partial\omega=\Gamma\cup\Sigma$. Далее, уравнение $(1.4)_n$ определяет $\mathbf{p}_{n+1}$.

Для $u=\varphi_n$ в сферическом слое имеем задачу

$$\Delta u=\operatorname{div}\mathbf{W},\ \mathbf{W}=\mathbf{W}(\lambda)=(W^1,W^2),$$

$$u|_\Gamma=f,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right|_\Sigma=g. \qquad (1.10)$$

3. Шкала банаховых пространств. Доказательство существования аналитического решения задачи (1.3)—(1.7) сводится к доказательству сходимости рядов (1.8). Возникающие на этом пути трудности, связанные с нелинейностью и нелокальностью задачи, вызваны нетривиальностью получения воспроизводимой априорной оценки решения задачи (1.10). Они преодолевают с помощью аппарата шкал банаховых пространств [4, 10], дающего возможность строить аналитические мажоранты рядов (1.8). Здесь будет использована одна конкретная аналитическая шкала, построенная по коэффициентам Фурье разложений по сферическим гармоникам.

Каждой абсолютно интегрируемой функции $f(\lambda)$ $(-1\leqslant\lambda\leqslant 1)$ поставим в соответствие разложение по полиномам Лежандра

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(\lambda),\quad \int_{-1}^{+1} P_k^2(\lambda)\,d\lambda=1,$$

$$f_k\equiv\{f(\lambda)\}_k=\int_{-1}^{+1} f(\lambda)\,P_k(\lambda)\,d\lambda.$$

Определение. *Пространством* $\mathbf{B}_\rho(\partial\omega)$ *назовем множество функций* $f(\lambda)$ $(-1\leqslant\lambda\leqslant 1)$, *для которых норма*

$$\|f\|_\rho\equiv\|f,\,\partial\omega\|_\rho=3\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,|f_n|\,e^{n\rho} \tag{1.11}$$

конечна.

Легко проверить, что $\mathbf{B}_\rho(\partial\omega)$ банахово и семейство $\mathbf{S}^\partial=\bigcup\limits_{\rho>0}\mathbf{B}_\rho(\partial\omega)$ образует шкалу банаховых пространств.

Лемма 1.1. *Норма* (1.11) *обладает свойствами*

$$\|fg\|_\rho\leqslant\|f\|_\rho\|g\|_\rho, \tag{1.12}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\lambda}f\right\|_\rho\leqslant 2\frac{\partial}{\partial\rho}\|f\|_\rho. \tag{1.13}$$

Доказательство. Пусть $f,\ g\in\mathbf{B}_\rho(\partial\omega)$,

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} f_nP_n(\lambda),\quad g(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} g_nP_n(\lambda).$$

Найдем коэффициент Фурье от произведения fg и обозначим

$$c_{nm\alpha}=\int_{-1}^{+1} P_n(\lambda)\,P_m(\lambda)\,P_\alpha(\lambda)\,d\lambda.$$

Заметив, что $c_{nm\alpha}\neq 0$ только для $|m-n|\leqslant\alpha\leqslant m+n$, получим

$$\|fg\|\leqslant 3\sqrt{3}\sum_{n,m=0}^{\infty}(n+1)\,|f_n|\,(m+1)\,|g_m|\,E(n,\,m). \tag{1.14}$$

Покажем, что для любого $\rho\geqslant 0$

$$E(n,\,m)\equiv\sum_{\alpha=|m-n|}^{m+n}\frac{\alpha+1}{(m+1)\,(n+1)}\,|c_{nm\alpha}|\,e^{[\alpha-(m+n)]\rho}\leqslant 3\sqrt{3}. \tag{1.15}$$

Для этого воспользуемся известным соотношением [40]

$$P_n(\lambda)\,P_m(\lambda)=2^{-1/2}\sum_{\alpha=|m-n|}^{m+n}\frac{\sqrt{(2n+1)\,(2m+1)\,(2\alpha+1)}}{m+n+\alpha+1}D_{nm\alpha}P_\alpha(\lambda).$$

Это даст

$$c_{nm\alpha}=2^{-1/2}\frac{\sqrt{(2n+1)\,(2m+1)\,(2\alpha+1)}}{m+n+\alpha+1}D_{nm\alpha};$$

здесь

$$D_{nm\alpha}=\frac{A_{\frac{m-n+\alpha}{2}}A_{\frac{m+n-\alpha}{2}}A_{\frac{n-m+\alpha}{2}}}{A_{\frac{m+n+\alpha}{2}}},$$

$$A_k=\frac{(2k-1)!!}{k!}.$$

Применив неравенство (доказательство см. в § 3)

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2s}}<\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}<\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2s}}\qquad(s\geqslant 1)$$

и оценку

$$\sqrt{\frac{m+n+\alpha}{(m+n-\alpha)\,[\alpha^2-(m-n)^2]}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{m+n+\alpha}{\sqrt{mn\alpha}},$$

$$|m-n|<\alpha<m+n,$$

получим, что

$$D_{nm\alpha}\leqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\frac{m+n+\alpha}{\sqrt{nm\alpha}}\ (|m-n|\leqslant\alpha\leqslant m+n)$$

(случаи $\alpha=|m-n|$, $m+n$ рассматриваются отдельно). Собирая все оценки, придем к неравенству (1.15), которое в силу (1.14) влечет (1.12).

Докажем (1.13). Если даны разложения

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nP_n(\lambda),\quad f'=\frac{\partial f}{\partial\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^*P_n(\lambda),$$

то дифференцируя первое из них и вычисляя коэффициент Фурье для

$$f'=\sum_{n=0}^{\infty}f_{n+1}P'_{n+1}(\lambda)\quad(P'_0(\lambda)=0),$$

получим

$$f_\alpha^*=\int_{-1}^{+1}f'(\lambda)\,P_\alpha(\lambda)\,d\lambda=([2(\alpha+k)+3]\,(2\alpha+1))^{1/2}f_{k+\alpha+1}\qquad(k\geqslant 0).$$

Мы использовали известное соотношение для полиномов Лежандра [40]

$$P'_{n+1}(\lambda)=\sqrt{2n+3}\sum_{\nu=0}^{[n/2]}\sqrt{2(n-2\nu)+1}\,P_{n-2\nu}(\lambda).$$

Имеем $|f_\alpha^*|\leqslant 2(\alpha+k+1)\,|f_{\alpha+k+1}|$ или, переходя к нормам, (1.13).

4. **Априорная оценка.** Рассмотрим множество функций $F(\sigma,\lambda)$, имеющих в области $\overline{\omega}=\omega\cup\Gamma\cup\Sigma$ разложения по полиномам Лежандра

$$F(\sigma,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(\sigma)\,P_n(\lambda),\ (\sigma,\lambda)\in\overline{\omega},\tag{1.16}$$

с коэффициентом Фурье

$$F_n(\sigma)=\int_{-1}^{+1}F(\sigma,\lambda)\,P_n(\lambda)\,d\lambda.$$

Определение. *Пространство* $\mathbf{B}_\rho(\overline{\omega})$ — *это множество функций вида* (1.16), ***для которых норма***

$$\|F,\overline{\omega}\|_\rho=3\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\max_{1\leqslant\sigma\leqslant R}|F_n(\sigma)|\,e^{n\rho}\tag{1.17}$$

конечна.

Пространство $\mathbf{B}_\rho(\overline{\omega})$ банахово, а семейство $\mathbf{S} = \bigcup\limits_{\rho>0} \mathbf{B}_\rho(\overline{\omega})$ образует шкалу банаховых пространств. Из определения норм (1.17) и (1.11) видно, что сужение шкалы $\mathbf{S}$ на границу $\partial\omega$ есть шкала $\mathbf{S}^\partial$ по норме (1.11), т. е. $\mathbf{S}|_{\partial\omega} = \mathbf{S}^\partial$.

Для функции $\mathbf{p}(t, \lambda) - \lambda$ из (1.8) построим формальные (мажорантные) нормы

$$\|\mathbf{p} - \lambda, \overline{\omega}\|_\rho(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{p}_n(\sigma, \lambda), \overline{\omega}\|_\rho t^n/n!, \; (\sigma, \lambda) \in \overline{\omega},$$

$$\|\mathbf{p} - \lambda\|_\rho(t) \equiv \|\mathbf{p} - \lambda, \partial\omega\|_\rho(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{p}_n(\lambda)\|_\rho t^n/n!, \; (\sigma, \lambda) \in \partial\omega.$$

Здесь и везде в дальнейшем под нормой вектора понимается сумма норм его компонент.

Пусть $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — два ряда по возрастающим степеням параметра t. Предположим, что каждый из коэффициентов ряда $\psi_2(t)$ действителен положителен и превосходит по величине соответствующий коэффициент ряда $\psi_1(t)$; тогда пишем: $\psi_1(t) \ll \psi_2(t)$. Из (1.17) и леммы 1.1 непосредственно вытекает, что для любых функций $F(\sigma, \lambda)$, $G(\sigma, \lambda) \in \mathbf{B}_\rho(\overline{\omega})$ выполняются неравенства

$$\|FG, \overline{\omega}\|_\rho(t) \ll \|F, \overline{\omega}\|_\rho(t) \|G, \overline{\omega}\|_\rho(t), \tag{1.18}$$

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial \lambda}, \overline{\omega}\right\|_\rho(t) \ll 2\frac{\partial}{\partial \rho}\|F, \overline{\omega}\|_\rho(t). \tag{1.19}$$

Лемма 1.2. *Если* $\mathbf{p} - \lambda$ *удовлетворяет уравнениям* (1.3)—(1.7), *то*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\sigma}(\mathbf{p} - \lambda), \overline{\omega}\right\|_\rho(t) \ll 4\varkappa(\mathbf{p} - \lambda, t)\frac{\partial}{\partial\rho}\|\mathbf{p} - \lambda, \overline{\omega}\|_\rho(t), \tag{1.20}$$

$$\|(\det \overline{M})^{-1} - 1, \overline{\omega}\|_\rho(t) \ll \gamma(\mathbf{p} - \lambda, t)\frac{\partial}{\partial\rho}\|\mathbf{p} - \lambda, \overline{\omega}\|_\rho(t). \tag{1.21}$$

Здесь

$$\varkappa(\mathbf{z}, t) = \left[1 - 6\frac{\partial}{\partial\rho}\|\mathbf{z}, \overline{\omega}\|_\rho(t)\right]^{-1},$$

$$\gamma(\mathbf{z}, t) = \left[1 - \sqrt{3}/2 - \frac{\partial}{\partial\rho}\|\mathbf{z}, \overline{\omega}\|_\rho(t)\right]^{-1},$$

а знак $\ll$ означает, что неравенства (1.20), (1.21) выполняются покоэффициентно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для получения оценок (1.20), (1.21) воспользуемся уравнением неразрывности

$$r_\sigma p_\lambda - p_\sigma r_\lambda = \frac{\sigma}{r}\sqrt{\frac{1 - p^2}{1 - \lambda^2}} \; (= \det \overline{M}) \tag{1.22}$$

и законом сохранения вихря

$$r_\sigma r_{t\lambda} + p_\sigma p_{t\lambda} = r_\lambda r_{t\sigma} + p_\lambda p_{t\sigma}. \tag{1.23}$$

Нетрудно проверить, что система (1.22), (1.23) эквивалентна уравнениям (1.3), (1.4) (см. [4]). Здесь и ниже индексы σ, λ, t обозначают частные производные по соответствующим переменным. Подставляя (1.8) в (1.22), (1.23), найдем

$$r_{n,\sigma} = d_n - p_{n,\lambda} - \sum_{\nu=1}^{n-1}(r_{\nu,\sigma}p_{n-\nu,\lambda} - p_{\nu,\sigma}r_{n-\nu,\lambda}), \tag*{(1.22)$_n$}$$

$$p_{n,\sigma} = r_{n,\lambda} + \sum_{\nu=1}^{n-1}(n - 2\nu)(r_{\nu,\sigma}r_{n-\nu,\lambda} + p_{\nu,\sigma}p_{n-\nu,\lambda})/n, \tag*{(1.23)$_n$}$$

где $d = \det \bar{M}$, $d - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n t^n$. Из $(1.22)_n$, $(1.23)_n$ следует, что

$$\left\| \frac{\partial}{\partial\sigma} \mathbf{p}_n, \bar{\omega} \right\|_\rho \leqslant \| d_n, \bar{\omega} \|_\rho + 2 \frac{\partial}{\partial\rho} \| \mathbf{p}_n, \bar{\omega} \|_\rho + A_n, \tag{1.24$_n$}$$

$$A_0 = 0; \ A_n = 4 \sum_{\nu=1}^{n-1} \left\| \frac{\partial}{\partial\sigma} \mathbf{p}_\nu, \bar{\omega} \right\|_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} \| \mathbf{p}_{n-\nu}, \bar{\omega} \|_\rho. \tag{1.25$_n$}$$

Умножая обе части неравенства $(1.24)_n$ на $t^n/n!$ и суммируя по n, получим (если положим $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n t^n/n!$)

$$\left\| \frac{\partial}{\partial\sigma} (\mathbf{p} - \lambda), \bar{\omega} \right\|_\rho (t) \ll \| d - 1, \bar{\omega} \|_\rho (t) + 2 \frac{\partial}{\partial\rho} \| \mathbf{p} - \lambda, \bar{\omega} \|_\rho (t) + A.$$

С другой стороны, из $(1.22)_n$, $(1.25)_n$, $(1.24)_m$ $(0 \leqslant m \leqslant n-1)$ приходим к оценкам

$$\| d - 1, \bar{\omega} \|_\rho (t) \ll 2 \left[1 + \left\| \frac{\partial}{\partial\sigma} (\mathbf{p} - \lambda), \bar{\omega} \right\|_\rho (t) \right] \frac{\partial}{\partial\rho} \| \mathbf{p} - \lambda, \bar{\omega} \|_\rho (t),$$

$$A \ll 4 \frac{\partial}{\partial\rho} \| \mathbf{p} - \lambda, \bar{\omega} \|_\rho (t) \frac{\| d - 1, \bar{\omega} \|_\rho (t) + 2 \frac{\partial}{\partial\rho} \| \mathbf{p} - \lambda, \bar{\omega} \|_\rho (t)}{1 - 4 \frac{\partial}{\partial\rho} \| \mathbf{p} - \lambda, \bar{\omega} \|_\rho (t)},$$

которые вместе с предыдущей приводят к (1.20). Оценка (1.21) получается аналогичным способом. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Если* u, $\mathbf{W}$, f, g *удовлетворяют* (1.10) *и* $f, g \in \mathbf{B}_{\bar{\rho}} (\partial\omega)$, $\mathbf{W} \in \mathbf{B}_{\bar{\rho}} (\bar{\omega})$, *то существует абсолютная постоянная* $c > 0$ *такая, что для всех* $\rho < \bar{\rho}$ *справедливо неравенство*

$$c^{-1} \| \nabla u, \bar{\omega} \|_\rho \leqslant \frac{\partial}{\partial\rho} \| f \|_\rho + \| g \|_\rho + \| \mathbf{V}, \bar{\omega} \|_\rho, \tag{1.26}$$

где $\mathbf{V} = [W^1, (1 - \lambda^2) W^2]$.

Доказательство. Решение задачи (1.10) ищем в виде

$$u(\sigma, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\sigma) P_k(\lambda).$$

Подставляя $u(\sigma, \lambda)$ в (1.10) и отделяя «угловую» часть оператора Лапласа, получаем для коэффициента $u_k(\sigma)$ обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого записывается так:

$$u_k(\sigma) = [c_1^k + \alpha_k(1, \sigma)/(2k+1)] \sigma^k + [c_2^k - \beta_k(1, \sigma)/(2k+1)] \sigma^{-k-1}. \tag{1.27}$$

Здесь

$$c_1^k = \left[(k+1) f_k + R^{k+2} g_k - \frac{k+1}{2k+1} \beta_k(1, R) - B(k, R) \right] a_k^{-1},$$

$$c_2^k = \left(k R^{2k+1} f_k - R^{k+2} g_k \right) a_k^{-1} + ((k+1) \beta_k(1, R)/(2k+1) + B(k, R)) a_k^{-1}, \tag{1.28}$$

$$a_k = 2k + 1 + R^{2k+1}, \ B(k, R) = k R^{2k+1} \alpha_k(1, R)/(2k+1),$$

$$\alpha_k(\tau, \sigma) = \int_\tau^\sigma \theta^{1-k} H_k(\theta)\, d\theta, \ \beta_k(\tau, \sigma) = \int_\tau^\sigma \theta^{k+2} H_k(\theta)\, d\theta$$

и через f_k, g_k, $H_k(\theta)$ обозначены коэффициенты Фурье функций f, g, $\operatorname{div} \mathbf{W}$ соответственно. Далее, учитывая представление для $\operatorname{div} \mathbf{W}$, интегрированием по частям находим

$$\alpha_k(\tau, \sigma) = (k+1)\int_\tau^\sigma \theta^{-k} W_k^1(\theta)\, d\theta + \int_\tau^\sigma \theta^{-k-1} T_k(\theta)\, d\theta + [\theta^{1-k} W_k^1(\theta)]\,|_\tau^\sigma,$$

$$\beta_k(\tau, \sigma) = -k\int_\tau^\sigma \theta^{k+1} W_k^1(\theta) d\theta + \int_\tau^\sigma \theta^k T_k(\theta)\, d\theta + [\theta^{k+2} W_k^1(\theta)]\,|_\tau^\sigma. \tag{1.29}$$

Здесь $W_k^1(\sigma) = \{W^1(\sigma, \lambda)\}_k$, $T_k(\sigma) = \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}[(1-\lambda^2) W^2(\sigma, \lambda)]\right\}_k$. Если положим

$$\Pi_k = \Big[|\alpha_k(1, R)|, \max|\alpha_k(\sigma, R)\sigma^{k-1}|,$$

$$|\beta_k(1, R)|, \max_{1 \leqslant \sigma \leqslant R} |\beta_k(1, \sigma)\sigma^{-k-2}|\Big],$$

$$A_k = [1, 1, 1 + R^{k+2}, 1]$$

и воспользуемся представлением (1.29), то получим покомпонентные неравенства

$$\Pi_k \leqslant c\Big[\max_{1 \leqslant \sigma \leqslant R} |W_k^1(\sigma)| + k^{-1} \max_{1 \leqslant \sigma \leqslant R} |T_k(\sigma)|\Big] A_k \tag{1.30}$$

с постоянной $c > 1$, не зависящей от k. Дифференцируя теперь выражение (1.23) по σ,

$$\frac{du_k}{d\sigma} = k\,[c_1^k + \alpha_k(1, \sigma)/(2k+1)]\,\sigma^{k-1} -$$

$$-(k+1)\,[c_2^k - \beta_k(1, \sigma)/(2k+1)]\,\sigma^{-k-2},$$

и используя (1.28) и (1.30), оценим производную следующим образом:

$$c^{-1} \max_{1 \leqslant \sigma \leqslant R} \left|\frac{du_k}{d\sigma}\right| \leqslant k|f_k| + |g_k| + \max_{1 \leqslant \sigma \leqslant R} |W_k^1(\sigma)| + k^{-1} \max_{1 \leqslant \sigma \leqslant R} |T_k(\sigma)|.$$

Аналогично оценивается k-й коэффициент Фурье производной $\partial/\partial\lambda$ от решения $u(\sigma, \lambda)$ задачи (1.10).

Переходя далее к нормам (1.11) и (1.17), получаем оценку (1.26). Лемма доказана.

5. Основной результат.

Теорема 1.1. *Существуют число* $\rho_0 > 0$ *и убывающая функция* $\theta(\rho)$, $\theta(\rho_0) = 0$, *такие, что решение* $\nabla\varphi(t, \lambda)$ $\mathbf{p}(t, \lambda) - \lambda$ *задачи* (1.3)—(1.7) *существует, единственно и принадлежит* $\mathbf{B}_\rho(\bar\omega)$ *при* $\rho < \rho_0$ *для всех значений* t, *удовлетворяющих неравенству* $t < \theta(\rho)$.

Доказательство. Мажоранту функции $\mathbf{p}(t, \lambda) - \lambda$ введем по формуле

$$\nu(t, \rho) = \sum_{n=1}^\infty \|\mathbf{p}_n(\lambda), \bar\omega\|_\rho\, t^n/n!. \tag{1.31}$$

Обозначая через $l \equiv l(\nu, \rho)$ мажоранту матрицы L, с помощью леммы 1.2 находим мажоранту вектора $\mathbf{V} = [W^1, (1-\lambda^2) W^2]$:

$$V(t, \rho) \ll 4\alpha\varkappa\nu_\rho(1 + \gamma l \nu_\rho)\nu_t, \tag{1.32}$$

где $\nu_\rho = \frac{\partial\nu}{\partial\rho}$, $\nu_t = \frac{\partial\nu}{\partial t}$, $\alpha \equiv \alpha(\rho) = 2\sqrt{3}(1 + 3e^{2\rho})$. Для мажоранты правой части в условии (1.5) на Γ выводим оценку

$$\mu(t, \rho) \ll \int_0^t [l\nu_t^2/2 + \nu^2 + 3\sqrt{3}(R + 2e^\rho)\nu + 6R\sqrt{3}e^\rho]\, dt. \tag{1.33}$$

Если возьмем аналогичную (1.31) мажоранту $\Phi(t, \rho)$ функции $\nabla\varphi(t, \lambda)$, то из (1.3) имеем

$$\nu_t \ll 4\varkappa\gamma\nu_\rho^2\Phi. \tag{1.34}$$

Наконец, из $(1.6)_n$ получим неравенство для мажоранты $\Psi(t, \rho)$ нормальной производной потенциала $\varphi(t, \lambda)$ на границе Σ:

$$\Psi \ll 4l\varkappa\gamma\nu\nu_\rho^2\Phi. \tag{1.35}$$

Из леммы 1.3 следует неравенство

$$c^{-1}\Phi \ll \mu_\rho + \Psi + V. \tag{1.36}$$

Отсюда, учитывая (1.32), (1.35), (1.36), из (1.34) выводим

$$\nu_t \ll \frac{4c\varkappa\gamma\nu_\rho^2\mu_\rho}{1 - 4cl\varkappa\gamma\nu\nu_\rho^2 - 16c\alpha\gamma\varkappa^2\nu_\rho^3(1+\gamma l\nu_\rho)}. \tag{1.37}$$

Заметим, что в (1.37) знаменатель в окрестности точки $t=0$ положителен, поскольку $\nu_\rho(0, \rho)=0$. Окончательно, заменив в (1.33) и (1.37) знак неравенства знаком равенства (отчего мажоранты могут только возрасти) и присоединив начальные условия, получим мажорантную систему задачи (1.3) — (1.7)

$$\nu_t = \mathrm{K}(\rho, \nu)\mu_\rho, \quad \nu(0, \rho)=0,$$

$$\mu_t = l\mathrm{K}^2(\rho, \nu)\mu_\rho^2/2 + \nu^2 + 3\sqrt{3}(R+2e^\rho)\nu + 6R\sqrt{3}e^\rho, \quad \mu(0, \rho)$$

где

$$\mathrm{K}(\rho, \nu) = \frac{4c\varkappa\gamma\nu_\rho^2}{1 - 4cl\varkappa\gamma\nu\nu_\rho^2 - 16c\alpha\gamma\varkappa^2\nu_\rho^3(1+\gamma l\nu_\rho)}.$$

Применение теоремы Коши — Ковалевской завершает доказательство существования аналитического решения. Единственность его следует из однозначности определения коэффициентов φ_n и $\mathbf{p}_n$ из системы $(1.3)_n$—$(1.6)_n$.

§ 2. Дифференцирование потенциалов простого и двойного слоя

В этом параграфе получены эффективные (с точки зрения численных реализаций) интегральные представления градиентов потенциалов простого и двойного слоя на границе области. В частности указана процедура интегрирования по частям, позволяющая в некоторых случаях ослабить порядок особенности ядер интегральных представлений.

1. Общий случай гладкой поверхности. Пусть гладкая замкнутая поверхность $\xi=\xi(\sigma, \varphi)$, $\eta=\eta(\sigma, \varphi)$, $\zeta=\zeta(\sigma, \varphi)$, $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ ограничивает в $\mathbf{R}^3$ конечную область ω_+. Положение точек $\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{x}$ на ней определим соответственно координатами (σ, φ) и (s, v).

Замкнутую поверхность назовем *регулярной*, если все элементы ее кривизны непрерывны и обладают достаточным запасом непрерывных производных. В дальнейшем под поверхностью всегда будем подразумевать регулярную. Обозначим $\omega_- = \mathbf{R}^3/\omega_+$. Свяжем с $\partial\omega$ базис $\mathbf{e} = \delta^{-1}\boldsymbol{\xi}_\sigma$, $\mathbf{t}=\rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_\varphi$, $\mathbf{n}=J^{-1}(\boldsymbol{\xi}_\sigma\times\boldsymbol{\xi}_\varphi)$ и кобазис $\mathbf{e}^*=\varkappa^{-1}(\mathbf{t}\times\mathbf{n})$, $\mathbf{t}^*=\varkappa^{-1}(\mathbf{n}\times\mathbf{e})$, $\mathbf{n}^*=\varkappa^{-1}(\mathbf{e}\times\mathbf{t})$. Здесь $\boldsymbol{\xi}=(\xi, \eta, \zeta)$, $\boldsymbol{\xi}_\lambda$ — частная производная вектора $\boldsymbol{\xi}$ по локальной координате λ, $\delta=|\boldsymbol{\xi}_\sigma|$, $\rho=|\boldsymbol{\xi}_\varphi|$, $J=|\boldsymbol{\xi}_\sigma\times\boldsymbol{\xi}_\varphi|$, $\varkappa=\rho^{-1}\delta^{-1}J > 0$. Положительная нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности $\partial\omega$ всегда направлена из области ω_+.

Пусть функция $F(\mathbf{x})$ непрерывна вне поверхности $\partial\omega$. Ее предельные значения (если они существуют) на $\partial\omega$ изнутри и извне поверхности обозначим соответственно $F_\pm(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x}\in\partial\omega)$; прямое значение $F(\mathbf{x})$ на $\partial\omega$ — $\overline{F}(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x}\in\partial\omega)$.

Назовем функцию $\Phi(\mathbf{x}) \in C(\partial\omega)$ *регулярно продолжимой с $\partial\omega$ в область* $\omega_\pm$, если существует функция $F(\mathbf{x}) \in C^{1+\alpha}(\omega_\pm)$ $(0<\alpha<1)$ такая, что $\bar{F}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$. Сохраним за продолжением тот же символ, что и за первоначальным элементом Φ, заданным на $\partial\omega$.

Касательную плоскость в точке $\xi \in \partial\omega$ обозначим через $\mathbf{\Pi}$; векторы $\mathbf{e}$, $\mathbf{t}$ и $\mathbf{e}^*$, $\mathbf{t}^*$ определяют в $\mathbf{\Pi}$ соответственно базис и кобазис. Принадлежность касательному пространству $\mathbf{\Pi}$ будем отмечать в дальнейшем знаком $^\partial$.

Если $\mathbf{a} \in C^{1+\alpha}(\partial\omega, \mathbf{R}^3)$ $(0<\alpha<1)$ — ненулевое векторное поле, то $\mathbf{a}(\xi) = \mathbf{a}^\partial + \beta\mathbf{n}$, $\mathbf{a}^\partial = -\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{a})$, $\beta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$. Ясно, что $\mathbf{a}^\partial \in \mathbf{\Pi}$, а поэтому $\mathbf{a}^\partial = a^e\mathbf{e} + a^t\mathbf{t}$, $a^e = \mathbf{a}^\partial\cdot\mathbf{e}^*$, $a^t = \mathbf{a}^\partial\cdot\mathbf{t}^*$. Дивергенцию касательной части векторного поля $\mathbf{a}$ определим в Π равенством $\operatorname{div}\mathbf{a}^\partial \equiv \operatorname{div}_\xi^\partial(a^e\mathbf{e} + a^t\mathbf{t})$. Таким образом,

$$\operatorname{div}\mathbf{a}^\partial = J^{-1}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(J\delta^{-1}a^e\right) + J^{-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(J\rho^{-1}a^t\right).$$

Гладкое отображение $\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, действующее на векторы $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^3$ как линейная форма

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\langle\mathbf{c}\rangle = \nabla_x F\langle\mathbf{c}\rangle, \quad \nabla_x F \equiv \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}},$$

назовем *градиентом скалярной функции* F: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Отождествим градиент функции с вектором в сопряженном пространстве — ковектором $\nabla_x F$. Тангенциальную часть градиента обозначим символом $\nabla_x^\partial F$. Для функций $\Phi(\mathbf{x}) \in C^{1+\alpha}(\partial\omega)$, регулярно продолжимых с $\partial\omega$, ковектор $\nabla_x^\partial\Phi$ можно определить равенством

$$\nabla_x^\partial\Phi = (\nabla_x F - \mathbf{n}\nabla_x F\langle\mathbf{n}\rangle)\,|_{\mathbf{x}\in\partial\omega}.$$

Такое определение ковектора $\nabla_x^\partial\Phi$ в точках поверхности корректно, поскольку правая часть приведенного равенства зависит только от прямого значения функции $F(\mathbf{x})$ на поверхности $\partial\omega$, но не зависит от способа регулярного продолжения $\Phi(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in \partial\omega)$ с поверхности [41]. Итак, при наличии регулярного продолжения $\Phi \in C^{1+\alpha}(\partial\omega)$ с поверхности $\partial\omega$ в ее окрестность существует $\nabla_x^\partial\Phi$. Отсюда в частности следует, что если функция $F(\mathbf{x})$ принадлежит $C^{1+\alpha}(\omega_\pm)$ и непрерывна при переходе точки $\mathbf{x}$ через поверхность $\partial\omega$, то таким же свойством непрерывности обладает и касательная часть ее градиента.

Условимся строчными и прописными буквами латинского алфавита отмечать значения векторного поля $\mathbf{a}(\xi)$ в точках ξ и $\mathbf{x}$ соответственно, так что: $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(\xi)$, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{x})$. Для прямого и предельных (изнутри и извне поверхности) значений производной $\dfrac{\partial F}{\partial A} \equiv \nabla_x F\langle\mathbf{A}\rangle$ в точках поверхности $\partial\omega$ примем обозначения $(A\bar{F})(\mathbf{x})$, $(A_\pm\bar{F})(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in \partial\omega)$. Пусть $\chi(\xi) \in C^{1+\alpha}(\partial\omega)$ — регулярно продолжимая с $\partial\omega$ функция. Прямые значения ее производных на $\partial\omega$ по направлениям векторов $\mathbf{e}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ обозначим соответственно $\nu(\xi) \equiv (\mathbf{e}\bar{\chi})(\xi)$, $\theta(\xi) \equiv (\mathbf{t}\bar{\chi})(\xi)$, $\psi(\xi) \equiv (\mathbf{n}\bar{\chi})(\xi)$.

Введем потенциалы простого и двойного слоя

$$V(\mathbf{x}) \equiv V[\chi](\mathbf{x}) = \int_{\partial\omega} \chi(\xi)\, P^{-1}(\xi, \mathbf{x})\, d\omega_\xi,$$

$$W(\mathbf{x}) \equiv W[\chi](\mathbf{x}) = \int_{\partial\omega} \chi(\xi)\, \nabla_x P^{-1}(\xi, \mathbf{x})\langle\mathbf{n}\rangle\, d\omega_\xi.$$

Здесь $P = |\xi - \mathbf{x}|$ — расстояние между точками $\xi \in \partial\omega$ и $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$. Всюду вне $\partial\omega$ оба потенциала удовлетворяют уравнению Лапласа и определяют внутри и вне поверхности гармонические функции, которые будем обозначать соответственно через $V^{\pm}(\mathbf{x})$ и $W^{\pm}(\mathbf{x})$. Относительно свойств введенных потенциалов известно следующее [41]:

1) потенциал $V(\mathbf{x})$ непрерывен всюду в $\mathbf{R}^3$, и поэтому в точках поверхности $\partial\omega$ выполняются равенства $V^+(\mathbf{x}) = V^-(\mathbf{x}) = \overline{V}(\mathbf{x})$;

2) пределы $N_{\pm}\overline{V}(\mathbf{x})$ существуют, являются непрерывными функциями и в точках поверхности $\partial\omega$ удовлетворяют условиям $N_{\pm}\overline{V}[\chi](\mathbf{x}) = \pm 2\pi\chi(\mathbf{x}) + N\overline{V}[\chi](\mathbf{x})$;

3) потенциал $W(\mathbf{x})$ непрерывен в областях $\omega_{\pm}$ вплоть до поверхности, причем в точках поверхности справедливы равенства $W_{\pm}[\chi](\mathbf{x}) = \pm 2\pi\chi(\mathbf{x}) + \overline{W}[\chi](\mathbf{x})$.

Прямые значения $\overline{V}(\mathbf{x})$, $\overline{W}(\mathbf{x})$ потенциалов на $\partial\omega$ получаются непосредственной заменой точки $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ точкой $\mathbf{x} \in \partial\omega$:

$$\overline{V}[\chi](\mathbf{x}) = \overline{\int_{\partial\omega} \chi(\xi) P^{-1}(\xi, \mathbf{x})\, d\omega_\xi},$$

$$\overline{W}[\chi](\mathbf{x}) = \overline{\int_{\partial\omega} \chi(\xi) \nabla_x P^{-1}(\xi, \mathbf{x}) \langle \mathbf{n} \rangle\, d\omega_\xi}.$$

Интегральные операторы $\overline{V}[\chi]$ и $\overline{W}[\chi]$ имеют на регулярной замкнутой поверхности слабую особенность и, значит, вполне непрерывны в $\mathbf{C}$ [42].

Более подробное исследование показывает [41], что на регулярной поверхности потенциалы $V[\chi]$, $W[\chi]$ обладают свойством

4) если плотности $\chi(\xi)$ потенциалов простого и двойного слоя принадлежат соответственно классам $\mathbf{C}^{\alpha}(\partial\omega)$ и $\mathbf{C}^{1+\alpha}(\partial\omega)$, то существуют первые производные потенциалов из класса $\mathbf{C}^{\alpha}(\mathbf{R}^3/\partial\omega)$, непрерывные вплоть до поверхности.

Приведем несколько простых утверждений, играющих важную роль в последующем изложении.

Лемма 2.1. *Пусть поверхность $\partial\omega$ класса $\mathbf{C}^{2+\alpha}(0<\alpha<1)$ опирается на гладкую замкнутую кривую γ. Тогда для любого поля $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^{1+\alpha}(\partial\omega, \mathbf{R}^3)$ верно тождество*

$$\int_{\partial\omega} \nabla_x P^{-1} \langle \mathbf{a} \rangle\, d\omega_\xi = W[\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}](\mathbf{x}) + V[\operatorname{div} \mathbf{a}^{\partial}](\mathbf{x}).$$

Доказательство. Обозначим $\mathbf{u} = \mathbf{a}^{\partial}(\xi)$, $f = 1/P(\xi, \mathbf{x})$. Поскольку $\mathbf{a} = \mathbf{u} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{n}$, то

$$\int_{\partial\omega} \nabla_x P^{-1} \langle \mathbf{a} \rangle\, d\omega_\xi = \int_{\partial\omega} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}) \nabla_x P^{-1} \langle \mathbf{n} \rangle\, d\omega_\xi + \int_{\partial\omega} \nabla_x f \langle \mathbf{u} \rangle\, d\omega_\xi.$$

Второе слагаемое правой части преобразуется к виду

$$\int_{\partial\omega} \nabla_x f \langle \mathbf{u} \rangle\, d\omega_\xi = -\int_{\gamma} f\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, d\gamma + \int_{\partial\omega} f \operatorname{div} \mathbf{u}\, d\omega_\xi,$$

поскольку

$$\nabla_x f\langle \mathbf{u} \rangle = -\nabla_\xi f\langle \mathbf{u} \rangle = -\operatorname{div}_\xi (f\mathbf{u}) + f \operatorname{div}_\xi \mathbf{u}.$$

Интеграл по γ в силу равенства $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$ исчезает. Лемма доказана.

Обозначим

$$\Gamma[\mathbf{a}](\mathbf{x}) = \int_{\partial\omega} \nabla_x P^{-1} \langle \mathbf{a} \rangle\, d\omega_\xi.$$

Следствие

$$\Gamma_{\pm}[\mathbf{a}](\mathbf{x}) = \pm 2\pi (\mathbf{N}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{x}) + \overline{\Gamma}[\mathbf{a}](\mathbf{x}),$$

$$\overline{\Gamma}[\mathbf{a}](\mathbf{x}) = \overline{W}[\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}](\mathbf{x}) + \overline{V}[\operatorname{div} \mathbf{a}^{\partial}](\mathbf{x}).$$

Замечание. Тождество в лемме 2.1 можно считать своеобразной формулой интегрирования по частям: оно позволяет «снимать» с заданного векторного поля $\mathbf{a}(\xi)$ производные по касательному направлению.

Сформулируем теперь правило дифференцирования потенциалов двойного слоя.

Лемма 2.2. *Если поверхность* $\partial\omega$ *замкнута, а плотность* $\chi(\xi) \in C^{1+\alpha}(\partial\omega, \mathbf{R})$ *регулярно продолжима с* $\partial\omega$, *то*

$$(\nabla_x W[\chi])(\mathbf{x}) = \int_{\partial\omega} \nabla_\xi^\partial \chi\langle\mathbf{e}\rangle\left(\mathbf{t}\times\nabla_x P^{-1}\right)\varkappa^{-1}d\omega_\xi - \\ - \int_{\partial\omega} \nabla_\xi^\partial \chi\langle\mathbf{t}\rangle\left(\mathbf{e}\times\nabla_x P^{-1}\right)\varkappa^{-1}d\omega_\xi.$$

Доказательство. Положим $f = 1/P(\xi, \mathbf{x})$. В [41] в условиях леммы 2.2 получено представление

$$\nabla_x W[\chi](\mathbf{x}) = \mathrm{rot}_x \int_{\partial\omega} \frac{\nabla_\xi^\partial \chi\times\mathbf{n}^*}{P(\xi, \mathbf{x})} d\omega_\xi \qquad (\mathbf{x} \notin \partial\omega).$$

Преобразуем подынтегральное выражение правой части. Для этого сначала представим ковектор $\nabla_\xi^\partial\chi$ в Π:

$$\nabla_\xi^\partial \chi = \nu(\xi)\,\mathbf{e}^* + \theta(\xi)\,\mathbf{t}^*,$$
$$\nu(\xi) \equiv \nabla_\xi^\partial \chi\langle\mathbf{e}\rangle, \quad \theta(\xi) \equiv \nabla_\xi^\partial \chi(\mathbf{t}),$$

а затем преобразуем выражение $\nabla_\xi^\partial\chi\times\mathbf{n}^*$ к виду

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi) \equiv \nabla_\xi^\partial\chi\times\mathbf{n}^* = \varkappa^{-1}(-\nu\mathbf{t} + \theta\mathbf{e}).$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться цепочкой следующих равенств: $\mathrm{rot}_x(f\mathbf{u}) = \nabla_x f\times\mathbf{u} = -\nabla_\xi f\times\mathbf{u} = -\varkappa^{-1}\nabla_\xi f\times(-\nu\mathbf{t}+\theta\mathbf{e}) = \varkappa^{-1}\nu(\xi)(\mathbf{t}\times\nabla_x f) - \varkappa^{-1}\theta(\xi)(\mathbf{e}\times\nabla_x f)$. Лемма доказана.

Пусть $\mathbf{a}(\xi)$ — заданное векторное поле. Вычислим производные

$$\frac{\partial V}{\partial A} \equiv \nabla_x V\langle\mathbf{A}\rangle, \quad \frac{\partial W}{\partial A} \equiv \nabla_x W\langle\mathbf{A}\rangle$$

потенциалов простого и двойного слоя по направлению вектора $\mathbf{A}$ и исследуем их свойства вблизи поверхности $\partial\omega$.

Лемма 2.3. *Предельные значения производных* $\frac{\partial V}{\partial A}(\mathbf{x})$ и $\frac{\partial W}{\partial A}(\mathbf{x})$ *в точках замкнутой поверхности* $\partial\omega$ *удовлетворяют соотношениям*

$$A_\pm \overline{V}[\chi] = \pm 2\pi\chi\mathbf{N}\cdot\mathbf{A} + A\overline{V}[\chi],$$
$$A_\pm \overline{W}[\chi] = \pm 2\pi\nu\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{A} \pm 2\pi\theta\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{A} + A\overline{W}[\chi],$$

где $\varkappa = (\mathbf{e}\times\mathbf{t})\cdot\mathbf{n}$, $\nu(\xi) = \nabla_\xi^\partial\chi\langle\mathbf{e}\rangle$, $\theta(\xi) = \nabla_\xi^\partial\chi\langle\mathbf{t}\rangle$,

$$A\overline{V}[\chi] = \overline{\int_{\partial\omega} \chi(\xi)\nabla_x P^{-1}\langle\mathbf{A}\rangle d\omega_\xi}, \quad \mathbf{x}\in\partial\omega,$$

$$A\overline{W}[\chi] = \overline{\int_{\partial\omega} \nu(\xi)\nabla_x P^{-1}\langle\mathbf{A}\times\mathbf{t}\rangle\varkappa^{-1}d\omega_\xi} - \\ - \overline{\int_{\partial\omega} \theta(\xi)\nabla_x P^{-1}\langle\mathbf{A}\times\mathbf{e}\rangle\varkappa^{-1}d\omega_\xi}, \quad \mathbf{x}\in\partial\omega.$$

Доказательство. Положим $f = 1/P(\xi, \mathbf{x})$. Если точка $\mathbf{x}$ находится вне поверхности $\partial\omega$, то выражение $\frac{\partial V}{\partial A}$ можно представить в виде следующей суммы:

$$\frac{\partial V}{\partial A} \equiv \nabla_x V\langle \mathbf{A}\rangle = \int\limits_{\partial\omega} \chi(\xi)\nabla_x f\langle \mathbf{A}\rangle\, d\omega_\xi =$$

$$= \chi(\mathbf{x})\int\limits_{\partial\omega}\nabla_x f\langle \mathbf{a}\rangle\, d\omega_\xi + \chi(\mathbf{x})\int\limits_{\partial\omega}\nabla_x f\langle \mathbf{A}-\mathbf{a}\rangle\, d\omega_\xi +$$

$$+ \int\limits_{\partial\omega}[\chi(\xi)-\chi(\mathbf{x})]\nabla_x f\langle \mathbf{A}\rangle\, d\omega_\xi.$$

При переходе точки $\mathbf{x}$ через поверхность $\partial\omega$ второе и третье слагаемые правой части изменяются непрерывно. Поведение же первого слагаемого определяется леммой 2.1, поэтому

$$A_\pm \overline{V}[\chi](\mathbf{x}) = \pm 2\pi\chi(\mathbf{x})\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{A} + \overline{\int\limits_{\partial\omega}\chi(\xi)\nabla_x f\langle \mathbf{A}\rangle\, d\omega_\xi}.$$

При получении второго предельного соотношения последовательно применяются лемма 2.2, равенство $(\mathbf{b}\times\nabla_x f)\langle\mathbf{A}\rangle = \nabla_x f\langle\mathbf{A}\times\mathbf{b}\rangle$ и лемма 2.1. Для придания формулам компактной записи использовано определение кобазиса в точке $\mathbf{x}\in\partial\omega$. Лемма доказана.

Конструктивный характер приведенных лемм позволяет сформулировать ряд любопытных результатов, касающихся свойств предельных значений градиента гармонической функции на ляпуновской замкнутой поверхности $\partial\omega$. Укажем некоторые из них, непосредственно связанные с тематикой статьи.

Через $\mathbf{L}_p(\partial\omega)$ обозначим класс вещественных функций, суммируемых на $\partial\omega$ с показателем $p\geqslant 1$, норма функции g в нем есть $\|g\|_p$; $\mathbf{W}_p^1(\partial\omega)$ — множество функций в $\mathbf{L}_p(\partial\omega)$, имеющих обобщенные первые производные, суммируемые со степенью $p\geqslant 1$. Пусть $v(\xi)$ — гармоническая в области $\omega_+(\omega_-)$ функция, непрерывно дифференцируемая в замкнутой области, $\bar{v}(\xi)$ — ее предельные значения на $\partial\omega$. Обозначим через $\frac{\partial\bar{v}}{\partial n}(\xi)$ и $(\nabla_\xi^\partial \bar{v})(\xi)$ $(\xi\in\partial\omega)$ соответственно предельные значения на $\partial\omega$ нормальной и касательной составляющих градиента гармонической функции $v(\xi)$. Справедлива

Теорема 2.1. *Для того чтобы* $\frac{\partial\bar{v}}{\partial n}(\xi)\in\mathbf{L}_p(\partial\omega)$, $1<p<\infty$, *необходимо и достаточно* $\bar{v}(\xi)\in\mathbf{W}_p^1(\partial\omega)$. *При этом*

$$c_p^{-1}\|\nabla_\xi^\partial\bar{v}\|_p \leqslant \left\|\frac{\partial\bar{v}}{\partial n}\right\|_p \leqslant c_p\|\nabla_\xi^\partial\bar{v}\|_p, \qquad (*)$$

постоянная c_p зависит только от p и $\partial\omega$.

Доказательство. Необходимость и левое неравенство в $(*)$ установлены в [43, с. 214]. Доказательство достаточности основано на леммах 2.2, 2.3. В самом деле, из формул Грина и леммы 2.3 выводим интегральные уравнения

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial n} \mp N\overline{V}\left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial n}\right] = N_\pm\overline{W}. \qquad (**)$$

Каждое из уравнений $(**)$ имеет единственное решение, которое есть ограниченный в $\mathbf{L}_p(\partial\omega)$ оператор над $N_\pm\overline{W}$. Далее, в силу леммы 2.2 и известной теоремы Кальдерона — Зигмунда (об ограниченности в $\mathbf{L}_p(\partial\omega)$ сингулярных операторов) получаем, что правая часть в $(**)$ — ограниченный в $\mathbf{L}_p(\partial\omega)$ оператор над $\nabla_\xi^\partial\bar{v}$. Отсюда следует правое неравенство в $(*)$. Доказательство достаточности заканчивается стандартной процедурой замыкания.

В качестве следствий теоремы 2.1 приведем результаты, касающиеся непосредственно свойств потенциалов $V[\chi_1]$ и $W[\chi_2]$ на ляпуновской замкнутой поверхности.

Теорема 2.2. *Для того чтобы* $\bar{V}[\chi_1] \in \mathbf{W}^1_p(\partial\omega)$, $N_\pm \bar{W}[\chi_2] \in \mathbf{L}_p(\partial\omega)$, $1 < p < \infty$, *необходимо и достаточно* $\chi_1(\xi) \in \mathbf{L}_p(\partial\omega)$, $\chi_2(\xi) \in \mathbf{W}^1_p(\partial\omega)$. *Справедливы оценки типа* (*).

Результаты теоремы 2.2 носят в определенном смысле завершенный характер [44].

2. **Случай осевой симметрии поверхности.** Введем в $\mathbf{R}^3$ цилиндрические координаты $\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(\eta/\xi)$, $\zeta = \zeta$, связанные с декартовыми координатами точки $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ формулами $\xi = \rho\cos\varphi$, $\eta = \rho\sin\varphi$, $\zeta = \zeta$, $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $|\zeta| < \infty$. Базисом цилиндрической системы координат являются векторы $\mathbf{e}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Ограничимся классом гладких поверхностей вращения. Зададим поверхность вращения $\partial\omega$ в форме $\xi = \rho(\sigma)\cos\varphi$, $\eta = \rho(\sigma)\sin\varphi$, $\zeta = \zeta(\sigma)$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; здесь $\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$, ζ — инварианты группы вращения поверхности $\partial\omega$ вокруг оси ζ. Положение точек ξ, $\mathbf{x}$ на поверхности вращения определим координатами (σ, φ) и (s, v) так, что

$$\xi \equiv \xi(\sigma, \varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \zeta),$$
$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(s, v) = (r\cos v, r\sin v, z),$$

где $\rho \equiv \rho(\sigma)$, $r \equiv \rho(s)$, $\zeta \equiv \zeta(\sigma)$, $z \equiv \zeta(s)$. Расстояние между указанными точками вычисляется по формуле

$$P(\xi, \mathbf{x}) = (r^2 + \rho^2 + (\zeta - z)^2 - 2\rho r\cos(\varphi - v))^{1/2}.$$

Нетрудно убедиться, что локальный базис

$$\mathbf{e} = \delta^{-1}\xi_\sigma = \delta^{-1}(\rho'\mathbf{e}_1 + \zeta'\mathbf{e}_3),$$
$$\mathbf{t} = \rho^{-1}\xi_\varphi = \rho^{-1}\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{n} = J^{-1}(\xi_\sigma \times \xi_\varphi) = \delta^{-1}(\rho'\mathbf{e}_3 - \zeta'\mathbf{e}_1)$$

ортонормирован и поэтому совпадает с кобазисом в точке $\xi \in \partial\omega$. Здесь и далее $\rho' \equiv \frac{\partial\rho}{\partial\sigma}$, $\zeta' \equiv \frac{\partial\zeta}{\partial\sigma}$, $\delta = (\rho'^2 + \zeta'^2)^{1/2}$, $J = \rho\delta$. В дальнейших преобразованиях дифференцирование функций вдоль векторов $\mathbf{e}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ осуществляется по формулам

$$\nabla_\xi\Phi\langle\mathbf{e}\rangle = \delta^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}, \quad \nabla_\xi\Phi\langle\mathbf{t}\rangle = \rho^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},$$
$$\nabla_\xi\Phi\langle\mathbf{n}\rangle = \delta^{-1}\left(-\zeta'\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right).$$

Дивергенцию касательной части $\mathbf{a}^\partial = a^e\mathbf{e} + a^t\mathbf{t}$ гладкого векторного поля $\mathbf{a}$ вычисляем, исходя из представления [45]

$$\operatorname{div}\mathbf{a}^\partial = J^{-1}\frac{\partial(\rho a^e)}{\partial\sigma} + J^{-1}\frac{\partial(\delta a^t)}{\partial\varphi}.$$

В частности имеем $\operatorname{div}\mathbf{e}^\partial = J^{-1}\rho'$, $\operatorname{div}\mathbf{n}^\partial \equiv 0$.

Будем считать, что рассматриваемые в дальнейшем отображения Φ: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $\mathbf{a}$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ инвариантны относительно группы вращения осесимметричной поверхности $\partial\omega$. Поскольку любая симметрия уменьшает свободу отображений, накладывая на них определенные ограничения, то имеют место:

а) для функций Φ: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ — независимость $\Phi(\mathbf{x})$ в цилиндрических координатах от азимутального угла φ, т. е. выполнение равенства $\nabla_\xi\Phi\langle\mathbf{t}\rangle \equiv 0$;

б) для векторных полей $\mathbf{a}$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ — специальная форма их представления $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(\xi) = a(\rho, \zeta)\mathbf{e}_1 + b(\rho, \zeta)\mathbf{e}_3$; здесь $\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$, ζ — инварианты группы вращения поверхности.

Ортогональное к $\mathbf{a}$ векторное поле определим равенством

$$\mathbf{a}_\perp \equiv \mathbf{a}_\perp(\xi) = \mathbf{a} \times \mathbf{t} = -b(\rho, \zeta)\mathbf{e}_1 + a(\rho, \zeta)\mathbf{e}_3.$$

В силу предположения об инвариантности лемма 2.3 упрощается:

$$A_\pm \overline{V}[\chi](\mathbf{x}) = \pm 2\pi\chi(\mathbf{x})\mathbf{N}\cdot\mathbf{A} + A\overline{V}[\chi](\mathbf{x}),$$

$$A_\pm \overline{W}[\chi](\mathbf{x}) = \pm 2\pi\nu(\mathbf{x})\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{A} + A\overline{W}[\chi](\mathbf{x}),$$

где

$$A\overline{V}[\chi] = \int_{\partial\omega} \chi(\xi)\, \nabla_x P^{-1} \langle \mathbf{A} \rangle\, d\omega_\xi,$$

$$A\overline{W}[\chi] = \int_{\partial\omega} \nu(\xi)\, \nabla_x P^{-1} \langle \mathbf{A}\times\mathbf{t} \rangle\, \varkappa^{-1} d\omega_\xi.$$

Сведем указанные поверхностные интегралы к однократным. Для этого зафиксируем меридиональную плоскость $\varphi = \varphi_0$. Меридиональное сечение поверхности вращения зададим посредством отображения γ: $[0, 1] \mapsto \{\rho(\sigma), \zeta(\sigma)\}$, $\rho \geqslant 0$, $\zeta' \geqslant 0$; точки $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ назовем *полюсами поверхности вращения*.

Введем обозначения, которые будут систематически использоваться во всех последующих преобразованиях:

$$h^2 \equiv h^2(\sigma, s) = (\rho - r)^2 + (\zeta - z)^2, \quad h_*^2 \equiv h_*^2(\sigma, s) = (\rho + r)^2 + (\zeta - z)^2,$$

$$q \equiv q(\sigma, s) = 4\rho r h_*^{-2}, \quad \beta = 2\rho r, \quad \rho' = \frac{d\rho}{d\sigma}, \quad \zeta' = \frac{d\zeta}{d\sigma},$$

$$\delta \equiv \delta(\sigma) = (\rho'^2 + \zeta'^2)^{1/2}, \quad \Delta \equiv \delta(s),$$

$$E(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (1 - \alpha\sin^2\varphi)^{1/2} d\varphi, \quad K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (1 - \alpha\sin^2\varphi)^{-1/2} d\varphi,$$

$$D(\alpha) = K(\alpha) - E(\alpha), \quad \mathbf{H} \equiv \mathbf{r}[\sigma, s]/|\mathbf{r}[\sigma, s]|^2, \quad \mathbf{r}[\sigma, s] = (\sigma - s)^{-1}[\rho - r, \zeta - z].$$

Инвариантное векторное поле $\mathbf{a} = a(\rho, \zeta)\mathbf{e}_1 + b(\rho, \zeta)\mathbf{e}_3$, заданное в точках поверхности $\partial\omega$, отождествим с векторным полем на кривой γ следующим способом: $\mathbf{a} \equiv (a, b)$. Как и прежде, обозначим $\mathbf{a}_\perp = (-b, a)$, $\mathbf{A} = (A, B)$, $\mathbf{A}_\perp = (-B, A)$.

Вычисление поверхностных интегралов по $\partial\omega$ редуцируется к вычислению однократных в силу следующего утверждения.

Лемма 2.4. *Если* $P \equiv P(\xi, \mathbf{x}) > 0$ — *расстояние между точками* $\mathbf{x}$, $\xi \in \partial\omega$, *то*

$$\int_0^{2\pi} P^{-1} d\varphi = 4h_*^{-1} K(q),$$

$$\int_0^{2\pi} P^{-3} d\varphi = 4h_*^{-1} h^{-2} E(q),$$

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos(\varphi - v))\, P^{-3} d\varphi = 2\rho^{-1} r^{-1} h_*^{-1} D(q).$$

Доказательство вытекает из равенства $P^2(\xi, \mathbf{x}) = h_*^2 (1 - \cos^2 \times ((\varphi - v)/2))$.

Таким образом, на основании леммы 2.4 прямые значения потенциалов $\overline{V}[\chi]$, $\overline{W}[\chi]$ и их производных $A\overline{V}[\chi]$, $A\overline{W}[\chi]$ на гладкой осесимметричной поверхности преобразуются к виду

$$\overline{V}[\chi](s) = 4\int_0^1 \chi(\sigma) K(q)\, \rho\delta h_*^{-1} d\sigma,$$

$$\overline{W}[\chi](s) = 2\int_0^1 \chi(\sigma)\left\{2\rho \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}}{\sigma - s} E(q) - \delta^{-1}\zeta' D(q)\right\}\delta h_*^{-1} d\sigma,$$

$$A\overline{V}[\chi](s) = 2r^{-1}\int_0^1 \chi(\sigma)\left\{\beta \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{A}}{\sigma - s} E(q) - \rho A D(q)\right\}\delta h_*^{-1} d\sigma,$$

$$A\overline{W}[\chi](s) = 2r^{-1}\int_0^1 \nu(\sigma)\left\{\beta \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{A}_\perp}{\sigma - s} E(q) - (Br + A(\zeta - z)) D(q)\right\}\delta h_*^{-1} d\sigma,$$

$$A\overline{V}[\chi](s) = \chi(s)\,\overline{\Gamma}[\mathbf{a}] + 2r^{-1}\int_0^1 \left\{\beta \frac{\chi(\sigma)\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{A} - \chi(s)\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{a}}{\sigma - s} E(q) - \right.$$

$$\left. - [\chi(\sigma)\rho A + \chi(s) r a] D(q)\right\}\delta h_*^{-1} d\sigma,$$

$$A\overline{W}[\chi](s) = \nu(s)\,\overline{\Gamma}[\mathbf{a}_\perp] + 2r^{-1}\int_0^1 \left\{\beta \frac{\nu(\sigma)\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{A}_\perp - \nu(s)\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{a}_\perp}{\sigma - s} E(q) - \right.$$

$$\left. - [A\nu(\sigma)(\zeta - z) + r(B\nu(\sigma) - b\nu(s))] D(q)\right\}\delta h_*^{-1} d\sigma;$$

здесь $\overline{\Gamma}[\mathbf{a}](s) = \overline{W}[\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}](s) + \overline{V}[\operatorname{div}\mathbf{a}^\partial](s)$. Основной результат этого параграфа состоит в следующем.

Теорема 2.3. *Справедливы представления*

$$N\overline{V}[\chi](s) = 2r^{-1}\int_0^1 \chi(\sigma)\left\{\beta \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{N}}{\sigma - s} E(q) + \rho\Delta^{-1} z' D(q)\right\}\delta h_*^{-1} d\sigma,$$

$$E\overline{W}[\chi](s) = 2r^{-1}\int_0^1 \nu(\sigma)\left\{\beta \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{N}}{\sigma - s} E(q) - \Delta^{-1}[rz' + (\zeta - z) r'] D(q)\right\}\delta h_*^{-1} d\sigma,$$

$$E\overline{V}[\chi](s) = 2r^{-1}\int_0^1 \left\{\beta \frac{\chi(\sigma)\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{E} - \chi(s)\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{e}}{\sigma - s} E(q) + \right.$$

$$\left. + \omega_\chi D(q) + 2\chi(s) r\rho'\delta^{-1} K(q)\right\}\delta h_*^{-1} d\sigma,$$

$$N\overline{W}[\chi](s) = -2r^{-1}\int_0^1 \left\{\beta \frac{\nu(\sigma)\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{E} - \nu(s)\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{e}}{\sigma - s} E(q) + \right.$$

$$\left. + \omega_\nu D(q) + 2\nu(s) r\rho'\delta^{-1} K(q)\right\}\delta h_*^{-1} d\sigma,$$

где $\beta = 2\rho r$, $\nu(\sigma) \equiv \delta^{-1}\frac{d\chi}{d\sigma}$, $\omega_\chi \equiv -\rho r'\Delta^{-1}\chi(\sigma) - r\rho'\delta^{-1}\chi(s)$, $\omega_\nu \equiv$ $\equiv -(\zeta - z) z'\Delta^{-1}\nu(\sigma) \quad r\left(r'\nu(\sigma)\Delta^{-1} - \rho\nu(s)\delta^{-1}\right)$.

Доказательство основано на прямых вычислениях с использованием равенств $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{N}$, $\mathbf{N}_\perp = -\mathbf{E}$,

$$\overline{\Gamma}[\mathbf{e}] = \overline{V}[\operatorname{div}\mathbf{e}^\partial] = 4\int_0^1 \rho' K(q)\, h_*^{-1} d\sigma.$$

§ 3. Вычисление полных эллиптических интегралов

Решение осесимметричных задач математической физики требует эффективных методов вычисления полных эллиптических интегралов как функций их модуля x. При этом первостепенное значение приобретают те методы, с помощью которых вычисления этих функций можно производить в массовом порядке и с нужной точностью. В быстродействующую ЭВМ нецелесообразно вводить большую информацию (типа таблиц) о функциях. Желательно использовать алгоритмы, сводящиеся к выполнению небольшого числа элементарных операций и требующие ввода лишь минимума исходной информации [30].

В настоящем параграфе построены новые алгоритмы вычисления полных эллиптических интегралов первого и второго рода. Они основаны на быстросходящихся степенных рядах; знакоопределенность членов ряда обеспечивает вычислительным процессам хорошую обусловленность (устойчивость к ошибкам округления). Алгоритмы оказались гибкими и легко приспосабливаемыми к конкретным запросам вычислительной практики.

Будем использовать общепринятые обозначения полных эллиптических интегралов:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x\sin^2\varphi)^{-1/2} d\varphi, \quad E(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x\sin^2\varphi)^{1/2} d\varphi,$$

$$D(x) = K(x) - E(x).$$

Аргумент $x \in [0, 1)$ называется *модулем полных эллиптических интегралов*. Вычисление функций $K(x)$, $E(x)$, $D(x)$ затруднено из-за медленной сходимости степенных рядов, представляющих эти функции при $x \to 1$. Одним из приемов, позволяющих ускорить сходимость степенного ряда, является аналитическое продолжение ряда в окрестность его особой точки. Эвристической основой для этого служит известная связь $K(x)$, $E(x)$ с частными решениями гипергеометрического уравнения [40]:

$$K(x) = \pi F(1/2, 1/2; 1; x)/2, \quad E(x) = \pi F(-1/2, 1/2; 1; x)/2.$$

Располагая такой информацией о функциях $K(x)$, $E(x)$, можно, аналитически продолжая решения гипергеометрического уравнения, выделить особенности явно в виде множителя и указать удобные для вычислений рекуррентные формулы.

1. Аналитическое продолжение. *Гипергеометрическим* называется уравнение

$$z(1 - z)\frac{d^2u}{dz^2} - (c - (a + b + 1)z)\frac{du}{dz} - abu = 0, \tag{3.1}$$

в котором a, b, c — любые комплексные числа, не зависящие от точки $z = x + iy$. Уравнение (3.1) обладает тремя правильными особыми точками: 0, 1, ∞. Они являются точками ветвления его решений. Поэтому все решения гипергеометрического уравнения можно получить из любого (не равного тождественно нулю) частного решения аналитическим продолжением вдоль пути, обходящего одну из особых точек [40, 46]. Таким образом, любое решение $u(z)$ уравнения (3.1) можно построить с помощью гипергеометрической функции Гаусса

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n\, n!} z^n,$$

$$(\alpha)_n = \Gamma(\alpha + n)/\Gamma(\alpha), \quad (\alpha)_0 = 1, \tag{3.2}$$

которая является частным решением уравнения (3.1), регулярным в точке $z=0$. Ряд $F(a, b; c; z)$ сходится абсолютно внутри круга $|z|<1$ для всех значений параметров.

Аналитическое продолжение решений уравнения (3.1) будем осуществлять с помощью представления Бернса гипергеометрической функции [40]:

$$F(a, b; c; z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\nu-i\infty}^{\nu+i} \frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c+s)} \Gamma(-s)\,(-z)^s\,ds. \qquad (3.3)$$

Здесь $\nu = \operatorname{Re} s$, $-\min\{\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b\} < \nu < 0$, $|\arg(-z)| < \pi$. Интеграл в правой части равенства (3.3) абсолютно сходится и является однозначной аналитической функцией от z во всей z-плоскости за исключением точек положительной полуоси. Он определяет функцию $F(a, b; c; z)$, аналитически зависящую также и от параметров a, b, c. Проверка равенства (3.3) при $|z|<1$ осуществляется с помощью теоремы о вычетах в полюсах $s=0, 1, 2, \ldots$ (подынтегральная функция при $|s| \to \infty$ имеет вид $|s|^{\operatorname{Re}(a+b-c-1)}$).

Представление (3.3) распространяется для всех значений параметров a, b, c аналитическим продолжением по этим параметрам. В самом деле, если зафиксировать z_0 так, что $|z_0| < 1$, то $F(a, b; c; z_0)/\Gamma(c)$ будет целой аналитической функцией от a, b, c, так как гипергеометрический ряд равномерно сходится в любой конечной области (комплексного) пространства изменения параметров. Таким образом, в области $|\arg(-z)| < \pi$ интегральное представление Бернса может вполне эффективно использоваться для аналитического продолжения гипергеометрической функции $F(a, b; c; z)$. С помощью асимптотических формул для Г-функции [40] оно преобразуется в контурный интеграл. Это позволяет в каждом конкретном случае осуществлять аналитическое продолжение ряда (3.2) путем вычисления интеграла (3.3) как суммы вычетов подынтегральной функции в соответствующих полюсах.

Условимся для обозначения аналитического продолжения гипергеометрической функции $F(a, b; c; z)$ использовать тот же символ $F(a, b; c; z)$. Только теперь он будет обозначать главную ветвь аналитической функции, порожденной рядом (3.2).

Разрежем комплексную плоскость вдоль луча $1 \leqslant z < \infty$ вещественной оси. Функция $(1-z)^{-a}$ однозначно определена в разрезанной z-плоскости. Выберем ветвь этой функции, принимающую значение 1 в точке $z=0$. Известно [40], что $(1-z)^{-a} = F(a, b; b; z)$. Если в равенстве (3.3) положим $b=c$, $a=-t$, то получим представление

$$(1-z)^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{\Gamma(-t+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(-t)} (-z)^s\,ds. \qquad (3.4)$$

Здесь $\nu = \operatorname{Re} s$, $\operatorname{Re} t < \nu < 0$, $|\arg(1-z)| < \pi$, $|\arg(-z)| < \pi$. Далее используется следующее простое утверждение.

Лемма (Бернс). *Если числа α, β, γ, δ и $\mu = \operatorname{Re} t$ таковы, что*

$$-\min\{\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta\} < \mu < \min\{\operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Re}\delta\},$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \Gamma(\alpha+t)\,\Gamma(\beta+t)\,\Gamma(\gamma-t)\,\Gamma(\delta-t)\,dt =$$

$$= \Gamma(\alpha+\gamma)\,\Gamma(\alpha+\delta)\,\Gamma(\beta+\gamma)\,\Gamma(\beta+\delta)\,\Gamma^{-1}(\alpha+\beta+\gamma+\delta).$$

Подробное доказательство леммы Бернса имеется в книге [40]. Отметим, что в силу принципа аналитического продолжения приведенное равенство верно во всей области изменения параметров α, β, γ, δ, в которой обе части равенства являются аналитическими по этим параметрам функциями.

Перед тем как сформулировать основную теорему, приведем еще один вспомогательный результат. Обозначим через $\psi(z)$ логарифмическую производную Г-функции: $\psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$. Определим

$$h(t)=(t-N)^2\,\Gamma(r-t)\,\Gamma(-t), \quad h'(t)=\frac{dh}{dt}.$$

Лемма 3.1. *Пусть N, r — целые числа и $N\geqslant r\geqslant 0$. Тогда*

$$h(N)=\lim_{\to\ I} h(t)=(-1)^r\,(r!\,(N-r)!)^{-1},$$

$$h'(N)=-h(N)[\psi(N-r+1)+\psi(N+1)].$$

Доказательство основано на использовании функционального уравнения $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, $\Gamma(1)=1$.

Если вспомним связь полных эллиптических интегралов с гипергеометрической функцией, то заметим, что интерес представляет как раз тот случай, когда $c=a+b+r$ (r — целое число).

Теорема 3.1. *Аналитическое продолжение гипергеометрической функции* $F(a,\ b;\ a+b+r;\ z)$ ($r\geqslant 0$ — целое), *заданной равенством* (3.3), *в область z-плоскости, определяемую неравенствами* $|\arg(1-z)|<\pi$ *и* $|1-z|<1$, *осуществляется с помощью формулы*

$$F(a,b;a+b+r;z)=\frac{\Gamma(a+b+r)}{\Gamma(a+r)\,\Gamma(b+r)}\sum_{n=0}^{r-1}(-1)^n\,(a)_n\,(b)_n\,\Gamma(r-n)\,(1-z)^n+$$

$$+\frac{\Gamma(a+b+r)\,(-1)^r\,(1-z)^r}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+r)_n\,(b+r)_n}{n!\,(n+r)!}\,[\lambda_{nr}(a,b)-\ln(1-z)]\,(1-z)^n, \tag{3.5}$$

где $\lambda_{nr}(a,\ b)=\psi(n+1)+\psi(n+1+r)-\psi(n+a+r)-\psi(n+b+r)$. *Если* $r=0$, *то первая сумма правой части в* (3.5) *опускается.*

Доказательство. Положим в лемме Бернса $\alpha=a$, $\beta=b$, $\gamma=s$, $\delta=c-a-b$; тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}\Gamma(a+t)\,\Gamma(b+t)\,\Gamma(s-t)\,\Gamma(c-a-b-t)\,dt=$$

$$=\Gamma(c-b)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\Gamma^{-1}(c+s).$$

Если теперь подставим полученное в (3.3), изменим порядок интегрирования и учтем (3.4), то найдем

$$\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma^{-1}(c)\,F(a,b;c;z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}\Gamma(a+t)\,\Gamma(b+t)\,\Gamma(c-a-b-t)\,\Gamma(-t)\,(1-z)^t\,dt. \tag{3.6}$$

Нетрудно указать условия справедливости этого равенства:

$$-\min\{\operatorname{Re}a,\ \operatorname{Re}b\}<\mu<\min\{\nu,\ \operatorname{Re}(c-a-b)\},\quad \mu=\operatorname{Re}t,\quad \nu=\operatorname{Re}s.$$

Выбор числа μ из указанного интервала гарантирует суммируемость рассматриваемых интегралов при $t=\mu+i\tau$, а поэтому допустимо изменение порядка интегрирования.

Дополним контур интегрирования полуокружностью радиуса $|t|$, расположенной справа. Полюсами, лежащими внутри получающегося контура, окажутся полюсы функции $\Gamma(r-t)\,\Gamma(-t)$. Используя асимптотические оценки для Г-функции [40], нетрудно убедиться, что при

$|1-z|<1$ и $|t|\to\infty$ интеграл, взятый по полуокружности, стремится к нулю. Подынтегральная функция в (3.6) имеет простые полюсы в точках $t=0, 1, \ldots, r-1$ и двойные полюсы в точках $t=r, r+1, \ldots$ (если $r=0$, то имеются только двойные). Вычет функции $\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)\Gamma(r-t)\Gamma(-t)(1-z)^t$ в простом полюсе $t=n$ $(0\leqslant n\leqslant r-1)$ равен $(-1)^{r+1}\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(r-n)(1-z)^n/n!$; вычет в двойном полюсе $t=N$ $(N\geqslant r)$ равен

$$(-1)^{r+1}(1-z)^r\frac{\Gamma(a+N)\Gamma(b+N)}{(N-r)!\,N!}[\lambda_{Nr}(a-r,\ b-r)-\ln(1-z)](1-z)^n$$

(здесь использовалась лемма 3.1).

Вычисляя интеграл в (3.6) как сумму вычетов подынтегральной функции в полюсах, лежащих справа от пути интегрирования, получаем (3.5). Теорема доказана.

Перейдем к более детальному исследованию полученного результата. Теорема 3.1 справедлива в области комплексного переменного z, определяемой неравенствами $|\arg(-z)|<\pi$, $|\arg(1-z)|<\pi$, $|1-z|<1$. Поэтому, взяв точку z из этой области такую, что $|z|<1$, определим функцию $F(a,\ b;\ a+b+r;\ z)$ на отрезке $[0,\ 1)$ следующим образом:

$$F(a,\ b;\ a+b+r;\ x)=\lim_{y\to 0}F(a,\ b;\ a+b+r;\ x+iy)\quad(y>0).$$

Введем обозначения $\gamma_n=((1/2)_n/n!)^2$, $\lambda_n=\psi(n+1)-\psi(n+1/2)$. Из (3.5) после преобразований, использующих простые свойства Γ- и ψ-функций, получаем равенства

$$\pi F(1/2,\ 1/2;\ 1;\ x)=-F(1/2,\ 1/2;\ 1;\ 1-x)\ln(1-x)+2\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\gamma_n(1-x)^n,$$

$$\begin{aligned}\pi F(-1/2,\ 1/2;\ 1;\ x)=-[F(1/2,\ 1/2;\ 1;\ 1-x)-F(-1/2,\ 1/2;\ 1;\ 1-x)]\times\\ \times\ln(1-x)+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\lambda_n\gamma_n(1-x)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n}{(2n-1)^2}(1-x)^n.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Если ввести функции

$$\begin{gathered}F(x)=\lambda_0\gamma_0+xF\langle x\rangle,\qquad G(x)=\gamma_0+xG\langle x\rangle,\\ W(x)=-\gamma_0+\lambda_0\gamma_0-xW\langle x\rangle\end{gathered}\tag{3.8}$$

(определение которых будет дано ниже), то представления полных эллиптических интегралов через гипергеометрическую функцию Гаусса можно (в силу равенств (3.7)) записать в следующих компактных формах:

$$\begin{gathered}K(x)=\pi F(1/2,\ 1/2;\ 1;\ x)/2,\\ K(x)=-\pi^{-1}K(1-x)\ln(1-x)+F(1-x);\\ E(x)=\pi F(-1/2,\ 1/2;\ 1;\ x)/2,\\ E(x)=-\pi^{-1}D(1-x)\ln(1-x)+G(1-x);\\ D(x)=\pi[F(1/2,\ 1/2;\ 1;\ x)-F(-1/2,\ 1/2;\ 1;\ x)]/2,\\ D(x)=-\pi^{-1}E(1-x)\ln(1-x)+W(1-x).\end{gathered}\tag{3.9}$$

Итак, для полных эллиптических интегралов $K(x)$, $E(x)$, $D(x)$ получено по два равносильных представления. С точки зрения численных расчетов первое удобно для $x\in[0,\ 0.5]$, а второе — для $x\in[0.5,\ 1]$.

2. Алгоритмы расчета. Основой для дальнейших вычислений служит

Лемма 3.2. *Справедливы неравенства*

$$1/4<n\gamma_n<3/8,\ 1/(2n+1)<\lambda_n<1/(2n)\quad(n>0).$$

Доказательство. Напомним, $\gamma_n = ((1/2)_n/n!)^2$, $\lambda_n = \psi(n+1) - \psi(n+1/2)$. Коэффициенты γ_n, λ_n с помощью простых свойств Г- и ψ-функций преобразуются к следующему виду:

$$\gamma_n = ((2n-1)!!/(2n)!!)^2,$$
$$\lambda_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-1}(2m-1)^{-1} = \ln 4 - \sum_{m=1}^{n} m^{-1}(2m-1)^{-1}.$$

Утверждаемые в лемме неравенства получаются из тождеств

$$\frac{1}{4}\prod_{m=2}^{n}\frac{(2m-1)^2}{(2m-2)\,2m} = n\gamma_n = \frac{3}{8}\,\frac{2n-1}{2n}\prod_{m=2}^{n-1}\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}$$

и интегрального представления

$$2\int_0^1 t^{2n}(1+t)^{-1}\,dt = \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-1}(2m-1)^{-1}.$$

С точки зрения практического использования, представления (3.9) весьма привлекательны, и это связано прежде всего со следующим замечательным свойством: они как бы рекуррентны относительно точки $x = 1/2$, т. е. для нахождения всех функций в (3.9) на промежутке $[0, 1)$ достаточно задать их только на отрезке $[0, 0.5]$ (характер особенности выделен явно). Итак, алгоритмы вычисления функций $K(x)$, $E(x)$, $D(x)$ следует конструировать в зависимости от величины $x \in [0, 1]$ на основе хорошо сходящихся на $[0, 0.5]$ степенных рядов.

Дальнейшее рассмотрение связано с получением удобных рекуррентных формул и оценок погрешностей, которые позволяют проводить вычисления быстро и с любой требуемой точностью. Условимся аргументы степенных рядов, на которых базируется вычисление полных эллиптических интегралов, заключать в угловые скобки $\langle\ \rangle$. Пусть $p \geqslant 0$ — любое целое число. Определим функции

$$K_p\langle x\rangle = \sum_{n=p+1}^{\infty} k_n, \quad k_n = \gamma_n x^{n-p-1},$$
$$E_p\langle x\rangle = \sum_{n=p+1}^{\infty} e_n, \quad e_n = \gamma_n x^{n-p-1}/(2n-1), \tag{3.10}$$
$$D_p\langle x\rangle = \sum_{n=p+1}^{\infty} d_n, \quad d_n = n\gamma_n x^{n-p-1}/(2n-1);$$

$$F\langle x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} F_n, \quad F_n = \lambda_n\gamma_n x^{n-1},$$
$$G\langle x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} G_n, \quad G_n = n(\lambda_n + \lambda_{n-1})\gamma_n x^{n-1}/(2n-1), \tag{3.11}$$
$$W\langle x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} W_n, \quad W_n = (1 + (2n-1)\lambda_n)\gamma_n x^{n-1}/(2n-1)^2;$$

$$CK_p(x) = \sum_{n=0}^{p}\gamma_n x^n, \quad CK_0(x) = \gamma_0,$$
$$CE_p(x) = -\sum_{n=0}^{p}\gamma_n x^n/(2n-1), \quad CE_0(x) = \gamma_0, \tag{3.12}$$
$$CD_p(x) = \sum_{n=0}^{p} n\gamma_n x^n/(2n-1), \quad CD_0(x) = 0.$$

В интегральных уравнениях модуль эллиптических интегралов является, как правило, непрерывной функцией двух переменных: $x =$

$=x(\sigma, s)$, $(\sigma, s)\in\omega\times\omega$ (ω — отрезок действительной оси). Поэтому использовать представления (3.9) можно следующим образом. Характеристическую функцию множества точек $(\sigma, s)\in\omega\times\omega$ таких, что $0\leqslant x(\sigma, s)\leqslant 0.5$, обозначим через $\chi(x)$. Непрерывной на [0, 1] функции $\Phi(x)$ сопоставим разложение

$$\Phi(x)=\begin{cases}\Phi(x)\chi(x), & 0\leqslant x\leqslant 0.5,\\ \Phi(x)\chi(1-x), & 0.5<x\leqslant 1.\end{cases} \tag{3.13}$$

Если теперь в качестве $\Phi(x)$ взять любую из функций $K(x)$, $E(x)$, $D(x)$, то из (3.13) в силу (3.9) получим

$$K(x)=-k^*(1-x)\ln(1-x)+K^*(x),$$

$$k^*(y)=CK_p(y)/2,\ F(y)=\ln 4+yF\langle y\rangle,$$

$$K^*(x)=\begin{cases}\pi(1+xK_0\langle x\rangle)/2+k^*(1-x)\ln(1-x),\\ -0,5(1-x)^{p+1}K_p\langle 1-x\rangle\ln(1-x)+F(1-x),\end{cases}$$

$$E(x)=-e^*(1-x)\ln(1-x)+E^*(x),$$

$$e^*(y)=CD_p(y),\ G(y)=1+yG\langle y\rangle,$$

$$E^*(x)=\begin{cases}\pi(1-xE_0\langle x\rangle)/2+e^*(1-x)\ln(1-x),\\ (1-x)^{p+1}D_p\langle 1-x\rangle\ln(1-x)+G(1-x),\end{cases}$$

$$D(x)=-d^*(1-x)\ln(1-x)+D^*(x),$$

$$d^*(y)=CE_p(y)/2,\ W(y)=\ln(4/e)-yW\langle y\rangle,$$

$$D^*(x)=\begin{cases}\pi xD_0\langle x\rangle+d^*(1-x)\ln(1-x),\\ (1-x)^{p+1}E_p\langle 1-x\rangle\ln(1-x)+W(1-x).\end{cases}$$

Отметим, что параметр p в полученных разложениях может быть любым целым неотрицательным числом; за счет выбора p можно добиться любой степени гладкости по x функций $K^*(x)$, $E^*(x)$, $D^*(x)$.

При суммировании степенных рядов важную роль играют условия окончания процесса суммирования, поскольку сам факт сходимости ряда еще ничего не говорит о том, сколько надо взять членов ряда, чтобы достичь той или иной точности. В связи с этим любую положительную функцию

$$\Re(x, N)=\{\Re(K_p), \Re(E_p), \Re(D_p), \Re(F), \Re(G), \Re(W)\},$$

невозрастающую по N и удовлетворяющую неравенству

$$\mathbf{T}\langle x\rangle-\sum_{n=1}^{N}\mathbf{T}_n\leqslant\Re(x, N),$$

назовем *точностью представления ряда*

$$\mathbf{T}\langle x\rangle=\{K_p, E_p, D_p, F, G, W\}\langle x\rangle$$

конечной суммой из N слагаемых. Полная характеристика алгоритмов вычисления ряда $\mathbf{T}\langle x\rangle$ приведена в следующей теореме.

Теорема 3.2. *Реализация выражений* (3.12), (3.10) *и* (3.11) *на* ЭВМ *осуществляется с помощью формул*

1. $\gamma_0=1$, $\gamma_{n+1}=(n+0.5)^2(n+1)^{-2}\gamma_n$, $1\leqslant n\leqslant p$;
2. $k_{p+1}=\gamma_{p+1}$, $k_{n+1}=x(n+0.5)^2(n+1)^{-2}k_n$, $\Re(K_p)=(N+p+1)^{-1}x^N$;
3. $e_{p+1}=(2p+1)^{-1}\gamma_{p+1}$, $e_{n+1}=x(n^2-0.25)(n+1)^{-2}e_n$, $\Re(E_p)=0.5(N+p+1)^{-1}(N+p+0.5)^{-1}x^N$;
4. $d_{p+1}=(p+1)(2p+1)^{-1}\gamma_{p+1}$, $d_{n+1}=x(n^2-0.25)n^{-1}(n+1)^{-1}d_n$, $\Re(D_p)=0.5(N+p+0.5)^{-1}x^N$;

5. $F_1 = \lambda_1\gamma_1$, $f_1 = \gamma_1$, $F_{n+1} = x(n+0.5)^2(n+1)^{-2}F_n - f_{n+1}$, $f_{n+1} = xn(n^2-0.25)(n+1)^{-3}f_n$, $\Re(F) = 0.5(N+1)^{-2}x^N$;

6. $G_1 = (2\lambda_1+1)\gamma_1$, $g_1 = \gamma_1$, $G_{n+1} = x(n^2-0.25)n^{-1}(n+1)^{-1}[G_n - g_n] - g_{n+1}$, $g_{n+1} = x(n-0.5)^2(n+1)^{-2}g_n$, $\Re(G) = 0.5N^{-1}(N+1)^{-1}x^N$;

7. $W_1 = (\lambda_1+1)\gamma_1$, $w_1 = \gamma_1$, $W_{n+1} = x(n^2-0.25)(n+1)^{-2}[W_n - w_n] + n(n+1)^{-1}w_{n+1}$, $w_{n+1} = x(n-0.5)^2(n+1)^{-2}w_n$, $\Re(W) = 0.5(N+1)^{-1}\times(N+0.5)^{-2}x^N$.

Доказательство теоремы проводится прямыми вычислениями с использованием леммы 3.2.

Программирование указанных алгоритмов вычисления полных эллиптических интегралов не вызывает каких-либо существенных трудностей. При решении интегральных уравнений алгоритмы удобно оформить так, чтобы в программе расчета они воспринимались синтаксически как единый оператор.

Заметим, что выбор целого числа $p \geqslant 0$ будет в дальнейшем (§ 6) тесным образом связан с квадратурными формулами, учитывающими специфику логарифмической особенности интегральных операторов осесимметричных краевых задач.

§ 4. Вычисление интегралов типа Коши с логарифмической особенностью

В этом параграфе вычислены явно следующие интегралы:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(t)\ln|t|}{t-x}\,dt, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{U_{n-1}(t)\ln|t|}{t-x}\,dt, \quad x \in (-1, 1).$$

Здесь $T_n(t)$, $U_{n-1}(t)$ — многочлены Чебышева соответственно первого и второго рода. Указанные интегралы типа Коши возникли при конструировании специальных квадратурных формул для аппроксимации интегральных операторов осесимметричных краевых задач. Известно, что этот этап наиболее ответствен при решении интегральных уравнений. Именно поэтому явное вычисление встретившихся интегралов оказывается предпочтительнее любого приближенного их представления.

Идея метода принадлежит Г. Н. Пыхтееву [47] и состоит в сведении указанных интегралов к некоторым интегралам Коши, мероморфных в круге функций. Однако способ редукции в этом методе не алгоритмизован, поэтому ввиду нетривиального характера рассматриваемых интегралов проведем их вычисление подробно.

1. Вспомогательные преобразования. Зафиксируем в плоскости комплексной переменной ζ единичный круг $\gamma = \{\zeta \mid |\zeta| < 1\}$. В точках его границы $\partial\gamma$, состоящей из верхней $\partial\gamma^+ = \{\zeta \mid |\zeta| = 1, \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ и нижней $\partial\gamma^- = \{\zeta \mid |\zeta| = 1, \operatorname{Im}\zeta \leqslant 0\}$ полуокружностей, определим функцию $F(\tau) \in \mathbf{L}_p(\partial\gamma)$ $(p > 1)$, $\tau \in \partial\gamma$. Значения ее на дугах $\partial\gamma^\pm$ обозначим соответственно $F^\pm(\tau)$. Операцию комплексного сопряжения условимся обозначать чертой.

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\gamma} \frac{F(\tau)}{\tau-\zeta}\,d\tau, \quad \zeta \notin \partial\gamma.$$

Особый интеграл $\Omega(\zeta_0)$ $(\zeta_0 \in \partial\gamma)$ существует. Нетрудно убедиться, что

$$\Omega(\zeta_0) + \Omega(\bar\zeta_0) - \Omega(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\gamma^-} [F^-(\tau) - F^+(\tau)]\,\frac{\tau-\bar\tau}{\tau+\bar\tau-\zeta_0-\bar\zeta_0}\cdot\frac{d\tau}{\tau},$$

$$\Omega(\zeta_0) - \Omega(\bar\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\gamma^-} [F^-(\tau) + F^+(\tau)]\,\frac{\zeta_0-\bar\zeta_0}{\tau+\bar\tau-\zeta_0-\bar\zeta_0}\cdot\frac{d\tau}{\tau}.$$

Если в последние тождества подставим $\tau=\tau(t)=t-i\sqrt{1-t^2}$, $t\in(-1, 1)$, $\zeta_0=\zeta_0(x)=x-i\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1, 1)$, то придем к равенствам

$$\Omega(\zeta_0)+\Omega(\bar\zeta_0)-\Omega(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{+1}\frac{F^-(\tau)-F^+(\tau)}{t-x}\,dt,$$

$$\Omega(\zeta_0)-\Omega(\bar\zeta_0)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi i}\int_{-1}^{+1}\frac{F^-(\tau)+F^+(\tau)}{t-x}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Предположим, что функция $F(\zeta)$ такова, что ее предельные значения на $\partial\gamma$ можно подчинить условиям

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}[F^-(\zeta_0)-F^+(\bar\zeta_0)]=0,\ \zeta_0\in\partial\gamma^-,\\ &\operatorname{Im}[F^-(\zeta_0)-F^+(\bar\zeta_0)]=2f(x),\ x\in(-1, 1),\end{aligned}\qquad\text{(i)}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}[F^-(\zeta_0)+F^+(\bar\zeta_0)]=0,\ \zeta_0\in\partial\gamma^-,\\ &\operatorname{Re}[F^-(\zeta_0)+F^+(\bar\zeta_0)]=2g(x),\ x\in(-1, 1).\end{aligned}\qquad\text{(j)}$$

Тогда предыдущие равенства предстанут в виде

$$\Omega[\zeta_0(x)]+\Omega[\bar\zeta_0(x)]-\Omega(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{f(t)}{t-x}\,dt,$$

$$\Omega[\bar\zeta_0(x)]-\Omega[\zeta_0(x)]=i\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{g(t)}{t-x}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

в соответствии с условиями (i) и (j). Полученные соотношения ясно показывают, что точно вычисляются одновременно и интеграл типа Коши $\Omega(\zeta_0)$, и два следующих интеграла:

$$I(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{f(t)}{t-x}\,dt,\quad x\in(-1, 1),$$

$$J(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{g(t)}{t-x}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad x\in(-1, 1).$$

Интеграл $\Omega(\zeta_0)$ вычисляется явно, если, например, его удается преобразовать к интегралу Коши мероморфной функции. Исходя из этого, будем разыскивать функцию $F(\zeta)$ в классе мероморфных функций, представимых в круге γ интегралом Коши. Указанный класс достаточно широк и характеризуется следующим утверждением [48].

Лемма 4.1. *Для того чтобы функция* $F(\zeta)\in L_p(\partial\gamma)$ $(p>1)$ *была краевым значением однозначной и мероморфной в* γ *функции* $F(\zeta)$, *необходимо и достаточно выполнения условия* $2\Omega(\zeta_0)=F(\zeta_0)-2R(\zeta_0)$, $\zeta_0\in\partial\gamma$. Здесь $R(\zeta)$ $(\zeta\in\gamma)$ — сумма главных частей разложения $F(\zeta)$ в окрестности полюсов в γ.

Пусть функции $F_I(\zeta)$, $F_J(\zeta)$ однозначно мероморфны и представимы в γ интегралами Коши. Допустим, что для $F_I(\zeta)$ выполнено условие (i), а для $F_J(\zeta)$ — условие (j). Тогда справедлива [47]

Теорема 4.1. *Если*

$$f(x)=\operatorname{Im}F_I[\zeta_0(x)],\quad g(x)=\operatorname{Re}F_J[\zeta_0(x)],$$

то

$$I(x)=\operatorname{Re}F_I[\zeta_0(x)]-2\operatorname{Re}R_I[\zeta_0(x)]-F_0(0),$$

$$J(x)=-\operatorname{Im}F_J[\zeta_0(x)]+2\operatorname{Im}R_J[\zeta_0(x)],$$

где $F_0(\zeta)=F_I(\zeta)-R_I(\zeta)$, *а* $R_I(\zeta)$, $R_J(\zeta)$ — *суммы главных частей раз-*

ложения функций соответственно $F_I(\zeta)$ и $F_J(\zeta)$ в окрестностях их полюсов в γ.

Доказательство следует из леммы 4.1, так как в силу (i), (j) функции $F_I(\zeta)$, $F_J(\zeta)$ в сопряженных точках принимают сопряженные значения. Для аналитических в γ функций $F_I(\zeta)$, $F_J(\zeta)$ в приведенных формулах следует положить $R_I(\zeta)\equiv 0$, $R_J(\zeta)\equiv 0$.

Таким образом, указанный способ вычисления интегралов предполагает построение по условиям (i), (j) мероморфных функций, представимых в γ интегралами Коши.

Введем функции

$$N(x)=\frac{1}{2}\int_0^x \ln\frac{1+t}{1-t}\frac{dt}{t},\quad x\in(-1,1), \tag{4.1}$$

$$\alpha(\zeta)=\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta},\quad \zeta\in\gamma, \tag{4.2}$$

$$\beta(\zeta)=\int_0^\zeta \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{d\tau}{\tau},\quad \zeta\in\gamma, \tag{4.3}$$

$$u_n(t)=\sin(n\arccos t),\quad U_{n-1}(t)=u_n(t)/\sqrt{1-t^2},\quad T_n(t)=\cos(n\arccos t).$$

Ветвь логарифма во всех выражениях выбирается стандартным образом: $\ln 1=0$. Функции $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$ аналитичны в круге γ. Отметим свойства введенных функций в следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 4.2. *Функция $N(x)$ удовлетворяет представлениям*

1. $N(x)=\operatorname{sign}(x)N(|x|),\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$
2. $N(x)=\pi^2/8-0.5\int_x^1 \ln\frac{1+t}{1-t}\frac{dt}{t},\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$
3. $N(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}/(2k+1)^{-2},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$
4. $N(x)=\pi^2/8-0.5\ln x\ln\frac{1-x}{1+x}-N\left(\frac{1-x}{1+x}\right),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$

Доказательство. Первое представление легко вытекает из (4.1), второе — из (4.1) и равенства

$$\int_0^1 \ln\frac{1+t}{1-t}\frac{dt}{t}=\frac{\pi^2}{4}.$$

Представления 3, 4 получаются соответственно интегрированием ряда

$$\ln\frac{1-x}{1+x}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

и интегрированием по частям в (4.1). Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Для функции $\alpha(\zeta)$ справедливы разложения*

1. $\alpha(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\zeta^k,\quad \alpha_k=\left(1-(-1)^k\right)/k,$
2. $\alpha(\zeta_0)=0.5\ln\frac{1+x}{1-x}-i\pi/2,\quad -1<x<1.$

Доказательство непосредственно следует из (4.2).

Лемма 4.4. *Для функции* $\beta(\zeta)$ *справедливы равенства*

1. $\beta(\zeta)=\beta(0)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n\zeta^n$, *где* $\beta(0)=-\pi^2/8$, $\beta_n=n^{-1}(1-(-1)^n)d_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$, $d_0=1$, $d_k=-d_{k-1}-0.5/(k^2-0.25)$ $(k\geqslant 1)$,

2. $\beta(\zeta_0)=\mathrm{B}+0.5i\pi\ln|x|$, *где* $\mathrm{B}=\pi^2/8-N(x)-0.5\pi\arg(x)$.

Доказательство. Первое равенство следует из разложения

$$\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}\,\frac{1}{\zeta}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}=2\sum_{n=0}^{\infty}d_n\zeta^{2n},$$

в котором $d_0=1$, $d_n=-(2n+1)^{-1}+2(-1)^n\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)^{-1}$, и определения (4.3), поскольку

$$\beta(\zeta)=\beta(0)+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{2n+1}\zeta^{2n+1}=\beta(0)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^m}{m}d_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\zeta^m\equiv$$

$$\equiv\beta(0)+\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\zeta^m.$$

Для вычисления $\beta(0)$ проинтегрируем (4.3) по частям:

$$\beta(\zeta)=-\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\ln\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}-\int_{\zeta}^{1}\ln\frac{\tau^2+1}{2\tau}\,\frac{2d\tau}{1-\tau^2}.$$

Затем, подставив $\zeta=0$, последовательно преобразуем $\beta(0)$ к виду

$$\beta(0)=-\int_0^1\ln\frac{\tau^2+1}{2\tau}\,\frac{2d\tau}{1-\tau^2}=-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\int_0^1\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^{4k+1}\frac{d\tau}{(1+\tau)^2}=$$

$$=-2\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{-1}\int_0^1 y^{4k+1}dy=-\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{-2}=-\pi^2/8.$$

В справедливости второго равенства убеждаемся так: положим в (4.3) $\tau=t-i\sqrt{1-t^2}$, а затем, отделив действительную и мнимую части, воспользуемся вторым представлением леммы 4.2. Лемма доказана.

2. Вычисление интегралов. Получим теперь явные формулы для интегралов типа Коши с логарифмической особенностью.

Теорема 4.2. *Справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)\ln|t|}{t-x}dt=\frac{2}{\pi}\{NN(x)\,T_n(x)+TD(n,x)\}\quad(n\geqslant 0),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{U_{n-1}(t)\ln|t|}{t-x}dt=\frac{2}{\pi}\{NN(x)\,U_{n-1}(x)+UD(n,x)\}\quad(n\geqslant 1),$$

где

$$NN(x)=\operatorname{sign}(x)[\pi^2/4-N(|x|)],$$

$$TD(n,x)=-\sum_{k=1}^{n}\beta_kT_{n-k}(x)+0.5\beta_n,\quad TD(0,x)\equiv 0,$$

$$UD(n,x)=-\sum_{k=1}^{n}\beta_kU_{n-1-k}(x),\quad UD(1,x)\equiv 0.$$

Доказательство. Функции

$$F_I(\zeta)=\frac{2}{\pi}\beta(\zeta)\frac{\zeta^n+\zeta^{-n}}{2},\quad F_J(\zeta)=i\frac{2}{\pi}\beta(\zeta)\frac{\zeta^n-\zeta^{-n}}{2i}$$

мероморфны в γ и удовлетворяют соответственно условиям (i), (j); кроме того, $F_I(\zeta_0)$, $F_J(\zeta_0)\in \mathrm{L}_p(\partial\gamma)\,(p>1)$. Покажем, что с их помощью указанные в теореме 4.2 интегралы вычисляются явно. В самом деле, на основе равенства $\zeta_0^n(x)=T_n(x)-iu_n(x)$ и леммы 4.4 получаем

$$F_I(\zeta_0)=2\pi^{-1}\mathrm{B}T_n(x)+iT_n(x)\ln|x|,$$
$$F_J(\zeta_0)=u_n(x)\ln|x|-i2\pi^{-1}\mathrm{B}u_n(x).$$

Далее, главные части разложений мероморфных функций $F_I(\zeta)$, $F_J(\zeta)$ в окрестности единственного n-кратного полюса $\zeta=0$ нетрудно подсчитать:

$$\operatorname{Re}R_I(\zeta_0)=\pi^{-1}\operatorname{Re}\left[\beta(0)\zeta_0^{-n}(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k\zeta_0^{k-n}(x)\right]=$$
$$=\pi^{-1}\left[\beta(0)T_n(x)+\sum_{k=1}^{n}\beta_kT_{n-k}(x)-\beta_n\right]=$$
$$=\pi^{-1}[\beta(0)T_n(x)-0.5\beta_n-TD(n,x)],$$
$$F_0(0)\equiv F_I(0)-R_I(0)=\beta_n/\pi,$$
$$\operatorname{Im}R_J(\zeta_0)=-\pi^{-1}\operatorname{Im}\left[\beta(0)\zeta_0^{-n}(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k\zeta_0^{k-n}(x)\right]=$$
$$=-\pi^{-1}\left[\beta(0)u_n(x)+\sum_{k=1}^{n}\beta_ku_{n-k}(x)\right]=$$
$$=-\pi^{-1}\sqrt{1-x^2}\,[\beta(0)U_{n-1}(x)-UD(n,x)].$$

Таким образом, из теоремы 4.1 следует

$$f(x)=\operatorname{Im}F_I(\zeta_0)=T_n(x)\ln|x|,$$
$$I(x)=\operatorname{Re}F_I(\zeta_0)-2\operatorname{Re}R_I(\zeta_0)-F_0(0)=$$
$$=2\pi^{-1}[\mathrm{B}-\beta(0)]T_n(x)+2\pi^{-1}TD(n,x);$$
$$g(x)=\operatorname{Re}F_J(\zeta_0)=u_n(x)\ln|x|=\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)\ln|x|,$$
$$J(x)=-\operatorname{Im}F_J(\zeta_0)+2\operatorname{Im}R_J(\zeta_0)=$$
$$=2\pi^{-1}\sqrt{1-x^2}\{[\mathrm{B}-\beta(0)]U_{n-1}(x)+UD(n,x)\}.$$

Для завершения доказательства осталось еще раз воспользоваться леммами 4.4 и 4.2:

$$\mathrm{B}-\beta(0)=0.25\pi^2-0.5\pi\arg(x)-N(x)=$$
$$=\operatorname{sign}(x)[0.25\pi^2-N(|x|)]\equiv NN(x).$$

Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(t)}{t-x}\,dt=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{2}T_n(x)\ln\frac{1-x}{1+x}+TC(n,x)\right\}(n\geqslant 0),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{U_{n-1}(t)}{t-x}\,dt=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{2}U_{n-1}(x)\ln\frac{1-x}{1+x}+UC(n,x)\right\}(n\geqslant 1),$$

где $$TC(n, x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_{n-k}(x) - 0.5\alpha_n, \quad TC(0, x) \equiv 0,$$

$$UC(n, x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_{n-1-k}(x), \quad UC(1, x) \equiv 0.$$

Доказательство. Функции

$$F_I(\zeta) = -\frac{2}{\pi}\alpha(\zeta)\frac{\zeta^n + \zeta^{-n}}{2},$$

$$F_J(\zeta) = -i\frac{2}{\pi}\alpha(\zeta)\frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{2i}$$

мероморфны в γ, условия (i), (j) для них соответственно выполнены; кроме того, $F_I(\zeta_0)$, $F_J(\zeta_0) \in \mathrm{L}_p(\partial\gamma)$ $(p > 1)$. Поэтому в силу равенств

$$F_I(\zeta_0) = \pi^{-1}T_n(x)\ln\frac{1-x}{1+x} + iT_n(x),$$

$$\operatorname{Re} R_I(\zeta_0) = \pi^{-1}(\alpha_n/2 - TC(n, x)),$$

$$F_0(0) = F_I(0) - R_I(0) = -\alpha_n/\pi,$$

$$F_J(\zeta_0) = u_n(x) - i\pi^{-1}u_n(x)\ln\frac{1-x}{1+x},$$

$$\operatorname{Im} R_J(\zeta_0) = \pi^{-1}\sqrt{1-x^2}\,UC(n, x)$$

и теоремы 4.1 получаем

$$f(x) = \operatorname{Im} F_I(\zeta_0) = T_n(x),$$

$$I(x) = \operatorname{Re} F_I(\zeta_0) - 2\operatorname{Re} R_I(\zeta_0) - F_0(0) = \pi^{-1}\left[T_n(x)\ln\frac{1-x}{1+x} + TC(n, x)\right],$$

$$g(x) = \operatorname{Re} F_J(\zeta_0) = u_n(x) = \sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x),$$

$$J(x) = -\operatorname{Im} F_J(\zeta_0) + 2\operatorname{Im} R_J(\zeta_0) =$$

$$= \pi^{-1}\sqrt{1-x^2}\left[U_{n-1}(x)\ln\frac{1-x}{1+x} + 2UC(n, x)\right].$$

Теорема доказана.

3. Алгоритмы вычисления интегралов. Приведем удобные способы вычисления функций $NN(x)$, $TD(n, x)$, $UD(n, x)$, $TC(n, x)$, $UC(n, x)$. Рассмотрим ряд (см. лемму 4.2)

$$A\langle z\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$A_k = (2k+1)^{-2}z^{k-1}$, $z \in [0, 0.5]$. Положительную функцию $\mathfrak{R}(z, n)$, невозрастающую по n и удовлетворяющую неравенству

$$A\langle z\rangle - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \leqslant \mathfrak{R}(z, n),$$

назовем *точностью представления ряда* $A\langle z\rangle$ *конечной суммой из* n *слагаемых*. Информация о характере сходимости ряда $A\langle z\rangle$ содержится в следующем утверждении.

Лемма 4.5. *Верны равенства*

а) $A_1 = 1/9$, $A_{k+1} = z(k+0.5)(k+1.5)^{-1}A_k$ $\quad (k \geqslant 1)$,

б) $\mathfrak{R}(z, n) = 0.5(n+1.5)^{-2}z^n$ $\quad (z \in [0, 0.5])$.

Доказательство тривиально. Для эффективного прерывания процесса суммирования ряда с точностью $\varepsilon > 0$ нужно воспользоваться неравенством $\mathfrak{R}(z, n) \leqslant \varepsilon$.

Из теоремы 4.2 получаем равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\ln|t|}{t-x}\,dt=\frac{2}{\pi}NN(x),\quad x\in(-1,1),$$

а из лемм 4.2 и 4.5 — удобные для вычисления формулы

$$NN(x)=\operatorname{sign}(x)\begin{cases}\pi^2/4-x\omega(x^2), & 0\leqslant x\leqslant 0.5,\\ (\pi^2/4+\ln x\ln y)/2+y\omega(y^2), & 0.5<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Здесь $y=(1-x)/(1+x)$, $\omega(z)=1+zA\langle z\rangle$.

Из лемм 4.4 и 4.3 вытекает, что $\beta_{2m}=0$, $\alpha_{2m}=0$ $(m\geqslant 0)$. Поэтому для ускорения вычислений функций $TD(n, x)$, $UD(n, x)$, $TC(n, x)$, $UC(n, x)$ на ЭВМ желательно нулевые коэффициенты исключить из сумм заранее. Введем обозначения $D_m=\beta_{2m-1}$, $C_m=\alpha_{2m-1}$ $(m\geqslant 1)$.

Лемма 4.6. *Числа D_m, C_m можно определить по формулам*

1. $D_1=2$, $D_j=-(j-1.5)D_{j-1}/(j-0.5)-0.5/(j-0.5)/(j-0.5)^2$ $(j\geqslant 2)$,
2. $C_1=2$, $C_j=1/(j-0.5)$ $(j\geqslant 2)$.

Доказательство основано на рекуррентном характере числовых последовательностей β_k, α_k $(k\geqslant 0)$.

После несложных преобразований из леммы 4.6 получаются расчетные формулы (к теоремам 4.2, 4.3)

$$TD(n,x)=-\sum_{m=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}D_mT_{n+1-2m}(x)+\frac{1-(-1)^n}{4}D_{\left[\frac{n+1}{2}\right]},$$

$$UD(n,x)=-\sum_{m=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}D_mU_{n-2m}(x),$$

$$TC(n,x)=\sum_{m=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}C_mT_{n+1-2m}(x)-\frac{1-(-1)^n}{4}C_{\left[\frac{n+1}{2}\right]},$$

$$UC(n,x)=\sum_{m=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}C_mU_{n-2m}(x).$$

Заметим, что выбор числа n диктуется конкретными условиями решаемой задачи. В задачах с осевой симметрией число узлов квадратурной формулы выбирается достаточно большим, например 51, 201, 501. Так как все операции на ЭВМ делаются с округлением, при суммировании большого количества чисел желательно сначала складывать малые, поскольку на каждом шаге получения частичных сумм дополнительная погрешность округления будет пропорциональна этим суммам. Но числа $|D_m|$ и C_m убывают с ростом m, поэтому порядок накопления слагаемых при вычислении функций $TD(n, x)$, $UD(n, x)$, $TC(n, x)$, $UC(n, x)$ на ЭВМ необходимо изменить на противоположный по сравнению с указанным выше. Все функции легко вычисляются по предварительно рассчитанным коэффициентам D_m, $C_m\left(1\leqslant m\leqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$.

§ 5. Вопросы аппроксимации функций и квадратурные формулы без насыщения

1. Аппроксимация непериодических функций. Пусть $I\equiv[-1, 1]$, а $C[I]$ — пространство непрерывных функций с естественной топологией равномерной сходимости. Норму в $C[I]$ обозначим $\|\cdot\|$. Рассмотрим функциональный компакт $\mathbf{X} \subset \mathbf{C}[I]$. Выберем на I n несовпадающих точек $t_1, \ldots, t_n$ — узлов интерполяции — и рассмотрим отображение $\mathbf{J}$: $\mathbf{C}[I] \to \mathbf{R}^n$, $\mathbf{J}f = (f(t_1), \ldots, f(t_n))$. Ясно, что $\mathbf{J}$ — непрерывно. Вектор $\mathbf{J}f$ будет тем агрегатом, с помощью которого будем приближенно представлять функцию $f \in \mathbf{C}[I]$. Чтобы по заданному вектору $\mathbf{J}f$ восстановить функцию $f \in \mathbf{C}[I]$, воспользуемся интерполяционным многочленом

$$p_n(t; \mathbf{J}f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, l_{ni}(t), \qquad p_n(t_k, \mathbf{J}f) \equiv f(t_k), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5.1}$$

Здесь $l_{ni}(t)$ — фундаментальные полиномы лагранжевой интерполяции. Найдя элемент $p_n(t; \mathbf{J}f)$ и приняв за меру точности величину $\sup\limits_{f \in \mathbf{X}} \| f(t) - p_n(t; \mathbf{J}f) \|$, получим способ аппроксимации компакта $\mathbf{X} \subset \mathbf{C}[I]$. Интерполяционный многочлен выступает здесь в роли алгоритма, расшифровывающего предтаблицу $\mathbf{J}$: $\mathbf{C}[I] \to \mathbf{R}^n$ [21].

Многочлен Лагранжа определяет проектор $\mathbf{p}_n$: $\mathbf{C}[I] \to \mathscr{P}^n$ на подпространство многочленов степени не выше $(n-1)$, причем

$$(\mathbf{p}_n f)(t) \equiv p_n(t; \mathbf{J}f), \quad f \in \mathscr{P}^n. \tag{5.2}$$

Нормой проектора $\mathbf{p}_n$ в $\mathbf{C}[I]$ служит константа Лебега интерполяции

$$\| \mathbf{p}_n \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} | l_{ni}(t) | \right\|. \tag{5.3}$$

Построенное численное описание f всегда неоднозначно (элемент $f \in \mathbf{C}[I]$ восстанавливается по конечному числу битов информации), поэтому следует учитывать, что f принадлежит функциональному компакту $\mathbf{X}$. В связи с этим в форму ответа $p_n(t; \mathbf{J}f)$ нужно заложить правила структурной организации элементов f компакта $\mathbf{X} \subset \mathbf{C}[I]$. Таким образом, расшифровывающий алгоритм осуществляет на самом деле нечто больше, чем просто переработка входной информации по правилу (5.1).

Классифицировать непрерывные функции можно по различным признакам, например по характеру той аппроксимации с помощью многочленов наилучшего приближения, какую допускают эти функции. Поставим вопрос: какой точности приближения можно добиться, если заранее ограничить степень приближающих полиномов, но использовать при этом информацию о том, что $f \in \mathbf{X}$? В теории приближений доказывается [49], что для всякого натурального числа $n \geqslant 1$ в $\mathscr{P}^n$ существует единственный многочлен $P_n(t)$ наилучшего чебышевского приближения функции $f \in \mathbf{C}[I]$ такой, что

$$E_n(f) = \| f(t) - P_n(t) \| = \inf_{Q_n \in \mathscr{P}^n} \| f(t) - Q_n(t) \|. \tag{5.4}$$

Здесь нижняя грань берется по подпространству $\mathscr{P}^n$ многочленов степени не выше $(n-1)$.

Любой непрерывной функции $f(t) \in \mathbf{C}[I]$ соответствует невозрастающая последовательность наилучших приближений $E_n(f)$ $(n \geqslant 1)$, причем по теореме Вейерштрасса $\lim E_n(f) = 0$, $n \to \infty$. Скорость убывания $E_n(f)$ зависит от дифференциальных свойств функции $f \in \mathbf{X}$ (прямая теорема Джексона [49]). Наоборот, информация о порядке стремления к нулю последовательности $E_n(f)$ $(n \geqslant 1)$ позволяет судить о дифференциальных свойствах функционального компакта $\mathbf{X}$ (обратная теорема Джексона [49]). Все это свидетельствует о том, что между поведением последовательности $E_n(f)$ при $n \to \infty$ и дифференциальными свойствами функций устанавливается взаимосвязь и последовательность $E_n(f)$ $(n \geqslant 1)$ можно выбрать в качестве конструктивной характеристики классов гладких функций из $\mathbf{C}[I]$. Отметим (см. [49]), что по порядку приближения последовательность подпространств полиномов $\mathscr{P}^n$ является экстремальной сразу для многих классов гладкости функций из $\mathbf{C}[I]$. С этой точки зрения многочлены наилучшего приближения, как аппарат приближения, аппроксимативно универсальны в $\mathbf{C}[I]$.

Таким образом, практическая ценность многочленов наилучшего приближения определяется тем, что они, принадлежа конструктивно простому классу $\mathscr{P}^n$, одновременно дают информацию о f как об элементе компакта $\mathbf{X} \subset \mathbf{C}[I]$. При необходимости эта информация извлекается с помощью классических теорем Джексона [49].

В конструктивном отношении многочлены наилучшего приближения неудобны, поскольку процесс их построения весьма трудоемок [31]. Для практических целей желательно иметь такой способ аппроксимации функций, который, осуществляя приближение того же порядка, что и наилучшее, был бы конструктивно более удобен для реализации на ЭВМ.

Неравенство Лебега [50]

$$\|f - \mathbf{p}_n f\| \leqslant (1 + \|\mathbf{p}_n\|) E_n(f) \tag{5.5}$$

позволяет согласовать аналитические и конструктивные свойства указанного аппарата приближений. Как видно из (5.5), интерполяционные многочлены (5.1) реагируют на любое изменение гладкости приближаемой функции (теоремы Джексона [49]).

При практическом использовании лагранжевой интерполяции большое значение приобретает порядок роста нормы проектора $\mathbf{p}_n$ в зависимости от числа n, который определяется в конечном счете выбором узлов интерполяции $t_1, \ldots, t_n$. Взятые наугад интерполяционные многочлены не годятся, поскольку желательно, чтобы скорость приближения была не намного хуже той, которую дают многочлены наилучшего приближения.

Анализ поведения норм $\|\mathbf{p}_n\|$ при $n \to \infty$ оказывается очень сложным. Теорема Лозинского — Харшиладзе [50] позволяет надеяться, что дело упростится, если удастся свести вычисление этих норм к получению оценок снизу и указать многочлены, для которых эти оценки хотя бы по порядку величины достигаются. Возможный ответ, связанный с соображениями удобства, приводит к многочленам Чебышева первого рода $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$, $n \geqslant 1$, поскольку нули многочлена $T_n(t)$ легко вычисляются по формуле

$$t_i = \cos(\pi(2i-1)/(2n)), \quad i = 1, \ldots, n,$$

а проекторы

$$(\mathbf{p}_n f)(t) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \frac{T_n(t)}{(t - t_i)\, T_n'(t_i)} \tag{5.6}$$

таковы, что нормы их оцениваются сверху через $\ln n$ [50]. Таким образом, последовательность норм проекторов (5.6) имеет минимально возможный порядок роста по n. Из неравенства Лебега (5.5) вытекает, что способ приближения функций из $\mathbf{C}[I]$ с помощью (5.6) практически мало отличается от способа приближения с помощью многочлена наилучшего приближения. Постоянная Лебега $\|\mathbf{p}_n\|$ позволяет также судить о влиянии на интерполяционный многочлен ошибок округления, допущенных в значениях функции $f(t)$. При фиксированном числе разрядов, отведенных для представления чисел на ЭВМ, использование полиномов (5.6) приводит к меньшим ошибкам округления, чем при использовании интерполяционных многочленов других типов, хотя, казалось бы, алгебраически все многочлены Лагранжа эквивалентны. Преимущество лагранжевой аппроксимации (5.6) заключается также в том, что интерполяционные многочлены (5.6) легко реализуются на ЭВМ [51] и, как следует из (5.5), осуществляют приближение почти столь же хорошее, как и наилучшее. Другими словами, многочлены (5.6) представляют функцию f с точностью тем более высокой, чем выше гладкость самой f.

2. Квадратурные формулы для вычисления интегралов

$$\int_{-1}^{+1} f(t)\,dt, \quad -\int_{-1}^{+1} f(t)\ln|t|\,dt \tag{5.7}$$

свяжем со способом аппроксимации подынтегральных функций (5.6). Построим квадратурные формулы так, чтобы они были точны на многочленах из подпространства $\mathcal{P}^n \subset \mathrm{C}[I]$. Для этого сначала в фиксированных узлах $T_n(t_i)=0$, $i=1, \ldots, n$, $t_i=\cos(\pi(2i-1)/(2n))$, определим весовые коэффициенты

$$\begin{gathered} c_i = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(t)}{(t-t_i)\,T_n'(t_i)}\,dt, \\ d_i = -\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(t)}{(t-t_i)\,T_n'(t_i)}\ln|t|\,dt, \end{gathered} \tag{5.8}$$

а затем положим

$$\begin{gathered} \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} c_i f(t_i) + \mathfrak{R}_n^c(f), \\ -\int_{-1}^{+1} f(t)\ln|t|\,dt = \sum_{i=1}^{n} d_i f(t_i) + \mathfrak{R}_n^d(f). \end{gathered} \tag{5.9}$$

Коэффициенты $c_i = 2TC(n, t_i)/T_n'(t_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, $d_i = -2TD(n, t_i)/T_n'(t_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$ вычисляются на основании теорем 4.2, 4.3. Линейные функционалы

$$\begin{gathered} \mathfrak{R}_n^c(f) = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} c_i f(t_i), \\ \mathfrak{R}_n^d(f) = -\int_{-1}^{+1} f(t)\ln|t|\,dt - \sum_{i=1}^{n} d_i f(t_i) \end{gathered} \tag{5.10}$$

непрерывны в $\mathrm{C}[I]$. Они характеризуют погрешность, возникающую от замены интегралов квадратурными суммами (5.9).

Если $g \in \mathcal{P}^n$, то $p_n(t;\ \mathrm{J}g) \equiv g$, а поэтому $\mathfrak{R}_n^c(f) \equiv 0$, $\mathfrak{R}_n^d(f) \equiv 0$. В связи с чем

$$\begin{gathered} |\mathfrak{R}_n^c(f)| = |\mathfrak{R}_n^c(f-g)| \leqslant \|\mathfrak{R}_n^c\| E_n(f), \\ |\mathfrak{R}_n^d(f)| = |\mathfrak{R}_n^d(f-g)| \leqslant \|\mathfrak{R}_n^d\| E_n(f). \end{gathered}$$

Нормы функционалов погрешности оцениваются сверху таким образом [31]:

$$\|\mathfrak{R}_n^c\| \leqslant 2 + \sum_{i=1}^{n} |c_i|, \quad \|\mathfrak{R}_n^d\| \leqslant 2 + \sum_{i=1}^{n} |d_i|.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} |\mathfrak{R}_n^c(f)| \leqslant \left(2 + \sum_{i=1}^{n} |c_i|\right) E_n(f), \\ |\mathfrak{R}_n^d(f)| \leqslant \left(2 + \sum_{i=1}^{n} |d_i|\right) E_n(f). \end{gathered} \tag{5.11}$$

Из равенств (5.8) и (5.3) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i| \leqslant 2\|\mathbf{p}_n\|, \quad \sum_{i=1}^{n} |d_i| \leqslant 2\|\mathbf{p}_n\|.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_n^c(f)| &\leqslant 2(1+\|\mathbf{p}_n\|)E_n(f), \\ |\mathfrak{R}_n^d(f)| &\leqslant 2(1+\|\mathbf{p}_n\|)E_n(f). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ясно, что накопление ошибок округления при вычислении интегралов (5.7) будет как-то зависеть от коэффициентов (5.8) квадратурных формул. Не проводя подробного анализа, отметим, что наличие отрицательных чисел среди коэффициентов c_i и d_i свидетельствует о плохой обусловленности квадратурных формул. Во многих методах, в которых встречаются отрицательные коэффициенты, велики значения модулей $|c_i|$ и $|d_i|$. Это приводит к потере точности из-за сокращения значащих цифр [31]. Вычислительные процессы, определяемые квадратурными формулами (5.9), лишены таких недостатков, поскольку хорошую обусловленность им обеспечивает

Теорема 5.1. *Если число узлов n в квадратурных формулах* (5.9) *нечетно, то* $c_i > 0$, $d_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Доказательство полностью проводить не будем. Отметим только, что положительность коэффициентов c_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеет место при любых n, а доказательство положительности d_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, существенно использует нечетность числа n. Вычисления на ЭВМ показывают, что при четном n среди чисел d_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, всегда имеются отрицательные.

Из теоремы 5.1 вытекают оценки

$$|\mathfrak{R}_n^c(f)| \leqslant 4E_n(f), \quad |\mathfrak{R}_n^d(f)| \leqslant 4E_n(f), \tag{5.13}$$

более сильные, нежели оценки (5.12).

Весьма важно, что функционалы погрешности квадратурных формул (5.9) оценены через $E_n(f)$, т. е. не имеют главного члена погрешности (см. (5.12), (5.13)). Многие квадратурные формулы значительно проигрывают из-за того, что имеют главный член погрешности, поскольку этим они очень жестко ориентированы на определенный класс гладкости функций и остаются безразличными к дополнительной информации о конкретной функции $f(t)$. В связи с этим напомним один классический результат: для того чтобы функция $f(t)$ имела производные всех порядков на отрезке I, необходимо и достаточно, чтобы при всяком $k \geqslant 0$ выполнялось равенство

$$\lim E_n(f) n^k = 0, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, чем проще оказывается дифференциальная природа подынтегральной функции $f(t)$, тем быстрее убывают ее характеристики $E_n(f)$ и тем, следовательно, эффективнее осуществится численная реализация интегралов (5.7) с помощью квадратурных формул (5.9). Покажем, что дополнительная информация о f позволяет парировать сильный рост градиентов подынтегральных функций в (5.7). Ясно, что поведение функционалов погрешности (5.10) при $n \to \infty$ существенно зависит от того, как с ростом порядка дифференцирования растут производные функции $f(t)$. Рассмотрим класс бесконечно дифференцируемых функций, нормы в $\mathbf{C}[-1, 1]$ которых растут согласно оценке

$$\begin{aligned} &g(t) \in \mathbf{C}[-1, 1], \quad \|g^{(k)}(t)\| \leqslant G(k), \\ &\lim G(k)/x^k = \infty, \quad k \to \infty. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Последнее соотношение в (5.14) фиксирует класс бесконечно дифференцируемых функций условием роста производных при $k \to \infty$: производные функций $g(t)$ растут быстрее любой степени числа x ($x \geqslant 1$ — любое положительное число, не зависящее от k). Условию (5.14) удовлетворяют, например, классы аналитически продолжимых с I функций, а также классы Жеврея.

Определение [27]. *Бесконечно дифференцируемая функция $f(t) \in C[I]$ имеет на отрезке I пограничный слой толщины $\varepsilon_0 > 0$, если существуют такие малое число $\tau > 0$ и функция $F(k)$, зависящая только от k, что для любого целого $k \geqslant 0$*

$$|f^{(k)}(t)| \leqslant \begin{cases} F(k), & t \in I_\tau, \\ \varepsilon_0^{-k} F(k), & t \in I/I_\tau. \end{cases} \tag{5.15}$$

Здесь $I_\tau \equiv [-1+\tau, 1-\tau]$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\tau)$.

Установим скорость сходимости квадратурных формул (5.9) при наличии у подынтегральных функций пограничного слоя толщины ε_0. Как замечено в [27], для нейтрализации пограничного слоя удобно использовать информацию о конструктивных особенностях класса функций конечной гладкости $C^k[I] \subset C[I]$. Классическим результатом в этом направлении является

Теорема [49]. *Для того чтобы $f(t) \in C^k[I]$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $n \geqslant k$ существовал алгебраический многочлен $R_n(t)$ степени n такой, что для всех $t \in I$*

$$|f(t) - R_n(t)| \leqslant A_k(\sqrt{1-t^2}/n + 1/n^2)^k, \tag{5.16}$$

где A_k — постоянная, не зависящая от t и n.

Ясно, что указанный здесь результат существенно сильнее неравенства Джексона $E_n(f) \leqslant Mn^{-k}$, ибо при равномерной оценке $O(n^{-k})$ устанавливает возможность приближения у концов отрезка I с погрешностью более высокого порядка.

Из приведенной теоремы следует, что при конструктивном описании класса $C^k[I]$ от однородных чебышевских приближений $E_n(f)$ приходится отказаться и перейти к взвешенным приближениям, учитывающим положение точки t на отрезке I. На этом эффекте неоднородности приближения функций $f(t) \in C^k[I]$ многочленами из $\mathscr{P}^n$ и основан способ нейтрализации пограничного слоя подынтегральных функций в (5.7). Поясним его подробнее. Правая часть неравенства (5.16) в точках t, удаленных от концов отрезка I, имеет порядок убывания n^{-k}; при стремлении же t к его концам она стремится к n^{-2k}. Следовательно, в окрестности границ I многочлены $R_n(t)$ аппроксимируют функцию $f(t) \in C^k[I]$ существенно лучше, чем на остальной части I. Это наблюдение свяжем с определением пограничного слоя (5.15).

Лемма 5.1 [27]. *Если $f(t) \in C[I]$ и верно* (5.15), *то при любом целом $n \geqslant k$ справедлива оценка*

$$E_n(f) \leqslant 0.5\pi F_k \varepsilon_0^{-k/2}/n^k; \tag{5.17}$$

числа F_k вычисляются известным способом по $F(k)$ из (5.15).

Обратим внимание на прикладное значение леммы: за счет перераспределения пограничного слоя по всему отрезку I толщину его удалось увеличить до значения $\sqrt{\varepsilon_0}$ (ср. с оценкой (5.15)).

При каждом фиксированном ε_0 из (5.17) выбираем самое сильное неравенство; в результате из (5.13) получаем следующую оценку для функционалов (5.10):

$$|\Re_n(f)| \leqslant 4 \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \{F_k \varepsilon_0^{-k/2}/n^k\}. \tag{5.18}$$

Таким образом, исследование функционалов погрешности квадратурных формул (5.9) фактически сведено к изучению правой части неравенства (5.18). Качественную характеристику поведения функционалов (5.10) можно получить с помощью следующих рассуждений. Введем функции

$$y=\lambda(x)=\inf_{1\leqslant k\leqslant x} G(k)/x^k,\quad \theta(x)=\min_k\left\{k \mid \inf_{1\leqslant k\leqslant x} G(k)/x^k\right\},\quad G(k)=F_k\varepsilon_0^{-k/2}.$$

Пусть $\lim G(k)/x^k=\infty$ при любом $x\geqslant 1$ и $k\to\infty$.

Лемма 5.2. *При* $x\geqslant 1$

1) $\lambda(x)$ — *непрерывная монотонно убывающая, стремящаяся к нулю при* $x\to\infty$ *функция;*

2) $\theta(x)$ — *целочисленная непрерывная справа монотонно возрастающая, стремящаяся к бесконечности при* $x\to\infty$ *функция.*

Доказательство. Свойства функции $\lambda(x)$ очевидны. Проверим, что $\theta(x)$ при $x\geqslant 1$ монотонно возрастает. В самом деле, если $x_1>x$, а $\theta(x_1)<\theta(x)$, то

$$x_1^{\theta(x)-\theta(x_1)}>x^{\theta(x)-\theta(x_1)}\geqslant\frac{G(\theta(x))}{G(\theta(x_1))},$$

что означает

$$\lambda(x_1)=\frac{G(\theta(x_1))}{x^{\theta(x_1)}}>\frac{G(\theta(x))}{x_1^{\theta(x)}}$$

при $\theta(x)\leqslant x<x_1$. Но это противоречит определению $\lambda(x_1)$. Непрерывность справа функции $\theta(x)$ следует из ее монотонности и непрерывности $\lambda(x)$. Лемма доказана.

Роль обратной функции $x=\lambda^{-1}(y)$, т. е. такой, что $\lambda^{-1}(\lambda(x))=\delta$, весьма существенна, поскольку она определяет количество узлов $n=[x]$, необходимое для получения заданной точности δ вычисления интегралов (5.7) с помощью квадратурных формул (5.9).

Сделаем качественные выводы из полученных результатов. Зафиксируем число $n\equiv n_0$ в квадратурных формулах (5.9). Среди оценок (5.17), отвечающих различным k, имеется наилучшая. Номер $k_0\equiv\theta(n_0)$ этой оценки есть тот максимальный порядок производной, который учитывается еще квадратурными формулами (5.9). Производные порядка $k>k_0$ смогут активно повлиять на точность вычисления лишь в случае $n>n_0$. Таким образом, при увеличении числа узлов n вычислительные процессы (5.9) как бы самонастраиваются на оптимальный порядок дифференцирования $k=\theta(n)$, формируя наилучшие для этого n оценки погрешности (5.18). Отсюда в частности следует, что для численной реализации интегралов с заданной точностью $\delta>0$ не обязательно, чтобы подынтегральная функция была даже бесконечно дифференцируемой; вполне можно обойтись конечным запасом ее производных. Их количество в каждом конкретном случае подсчитывается по правой части неравенства (5.18). В самом деле, зафиксируем параметр ε_0 — толщину пограничного слоя. Если значение δ правой части (5.18) реализуется при n, превосходящем некоторое число $n_{\min}$, то нижняя грань в (5.18) достигается при $k=\theta(n_{\min})$. Это обеспечивает нейтрализацию пограничного слоя в (5.18), что означает вычисление интегралов (5.7) с точностью δ. При уменьшении параметра ε_0 функция $k=\theta(n)$ монотонно возрастает, а потому растет и число $n_{\min}$. В реальных расчетах отыскать функцию $\theta(n)$ непросто. Однако делать это не нужно, поскольку при увеличении n квадратурные формулы (5.9) сами настраиваются на фактическую гладкость подынтегральных функций. Таким образом, вместо трудоемкого вычисления параметра $k=\theta(n)$ удобнее распорядиться выбором числа n, выступающего здесь в роли нелинейного регулятора точности квадратурных формул (5.9). Полученный результат особенно важен тем, что освобождает от вычисления функции $\theta(n)$.

Решающим фактором в отношении точности построенных квадратурных формул является скорость уменьшения погрешности при увеличении числа узлов n. В случае бесконечно дифференцируемых функций правая часть неравенства (5.18) будет убывать быстрее любой конечной степени числа $1/n$. При наличии погранслоя диапазон экспоненциального порядка точности квадратур (5.9) достигается только при $n > n_{\min}$.

Таким образом, оценки функционалов погрешности через чебышевские характеристики подынтегральных функций означают, что квадратурные процессы активно «чувствуют» гладкость участвующих в них функций: учет гладкости происходит автоматически и так, чтобы обеспечивался оптимальный для данного n порядок сходимости (и соответственно точности). Следовательно, квадратурные формулы (5.9) — без насыщения [24].

3. Аппроксимация периодических функций. Пусть $S \equiv [0, 2\pi]$, а $C[S]$ — пространство непрерывных периодических функций с периодом 2π. Норму в $C[S]$ обозначим $\|\cdot\|$. Зададим узлы интерполяции $s_k = 2\pi k/(2m+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2m$, $s_k \in S$. Отображение $\mathbf{j}$: $C[S] \to \mathbf{R}^{2m+1}$, $\mathbf{j}f = (f(s_0), \ldots, f(s_{2m}))$, с расшифровывающим алгоритмом, основанным на вычислении интерполяционного многочлена Лагранжа

$$q_m(s; \mathbf{j}f) = \sum_{k=0}^{2m} f(s_k) D_m(s - s_k) \tag{5.19}$$

(здесь

$$D_m(y) = \frac{1}{2m+1} \frac{\sin(m+1/2)y}{\sin(y/2)}$$

— ядро Дирихле), является агрегатом, интерполирующим функцию $f(s) \in C[S]$. В качестве меры точности приближения примем

$$\|f(s) - q_m(s; \mathbf{j}f)\|.$$

Многочлен $q_m(s, \mathbf{j}f)$ определяет проектор $\mathbf{q}_m$: $C[S] \to \mathcal{T}^m$ на подпространство $\mathcal{T}^m$ тригонометрических многочленов порядка не выше m так, что $(\mathbf{q}_m f)(s) \equiv q_m(s; \mathbf{j}f)$, $f \in \mathcal{T}^m$. В силу теоремы Бернштейна [50] имеем $\|\mathbf{q}_m\| \leqslant 3 + 4\pi^{-2} \ln m$. Неравенство Лебега [50]

$$\|f(s) - q_m(s; \mathbf{j}f)\| \leqslant (1 + \|\mathbf{q}_m\|) e_m(f) \tag{5.20}$$

дает меру уклонения интерполяционного многочлена $q_m(s; \mathbf{j}f)$ от функции f. Здесь $e_m(f) = \inf\limits_{Q_m \in \mathcal{T}^m} \|f(s) - Q_m(s)\|$ — наилучшее чебышевское приближение периодической функции $f(s) \in C[S]$ тригонометрическими многочленами порядка m.

Поскольку для любой функции $f(s) \in C[S]$ в силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса $\lim e_m(f) = 0$, то естественно возникает вопрос о скорости сходимости к нулю последовательности $e_m(f)$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Интуитивно ясно, что скорость должна зависеть от гладкости f. Конструктивные характеристики различных классов периодических функций в $C[S]$ хорошо изучены [50]. Классическим результатом здесь является следующая теорема: необходимым и достаточным условием того, чтобы $f \in C^r[S]$, является убывание при $m \to \infty$ ее наилучших приближений порядка m как m^{-r} (прямая и обратная теоремы Джексона). Для того чтобы более полно судить о том, насколько простой и глубокой оказывается связь характеристик $e_m(f)$ с дифференциальными свойствами f, приведем еще один классический результат: для бесконечной дифференцируемости периодической функции $f(s) \in C[S]$ необходимо и достаточно, чтобы $e_m(f)$ убывали на S экспоненциально с возрастанием m [52]. Поскольку в периодическом случае между прямыми и обратными теоремами теории приближения практически нет «зазора» (см. теорему о поперечнике [50]), то тригонометрические многочлены оказываются наилучшим аппаратом приближения непрерывных периодических функций сразу для многих классов функций из $C[S]$.

Таким образом, в качестве конструктивного элемента теории приближения непрерывных периодических функций выступает тригонометрический многочлен.

Интерполяционный многочлен (5.19) используется для приближения не только самих функций, но и их производных. Производные функции $f(s) \in \mathbf{C}^r[S]$ будем вычислять дифференцированием интерполяционного многочлена (5.19):

$$q_m^{(n)}(s; \mathbf{j}f) = \sum_{k=0}^{2m} f(s_k) D_m^{(n)}(s - s_k). \tag{5.21}$$

Наилучшие чебышевские приближения производных $f^{(n)}(s)$ $(0 \leqslant n \leqslant r)$ элементами пространства $\mathcal{T}^m$ обозначим через

$$e_m(f^{(n)}) = \inf_{Q_m \in \mathcal{T}^m} \| f^{(n)}(s) - Q_m(s) \| = \| f^{(n)}(s) - T_{mn}(s) \|.$$

Многочлены наилучшего приближения производных функции f, вообще говоря, не являются производными от многочлена наилучшего приближения самой функции. Заметим, что если $e_m(f) > 0$, то и $e_m(f^{(n)}) > 0$ при любом n, $0 \leqslant n \leqslant r$. В самом деле, допустив противное для некоторого n, имеем

$$\| f^{(n)}(s) - T_{mn}(s) \| = e_m(f^{(n)}) = 0.$$

Но тогда $f^{(n)}(s) \equiv T_{mn}(s)$ и, следовательно, $f \in \mathcal{T}^m$, а поэтому $e_m(f) = 0$, что противоречит неравенству $e_m(f) > 0$.

Пусть $e_m(f) > 0$. Функционал

$$\mathbf{l}_m^r(f) = \inf_{Q_m \in \mathcal{T}^m} \max_{0 \leqslant n \leqslant r} \frac{\| f^{(n)}(s) - Q_m^{(n)}(s) \|}{e_m(f^{(n)})}, \tag{5.22}$$

показывает, насколько хорошо (по сравнению с соответствующими наилучшими приближениями) можно приблизить функцию $f(s)$ с ее первыми r производными тригонометрическим многочленом порядка m и его производными. Решение экстремальной задачи (5.22) для любой $f(s) \in \mathbf{C}^r[S]$ всегда существует [53]. Им является некоторый тригонометрический многочлен $R_m(s) \in \mathcal{T}^m$. Из (5.22) следует неравенство

$$\| f^{(n)}(s) - R_m^{(n)}(s) \| \leqslant \| \mathbf{l}_m^r \| e_m(f^{(n)}).$$

Оценка нормы функционала (5.22) получена в [53] и имеет вид

$$\| \mathbf{l}_m^r \| \leqslant 4\pi^{-2} \ln\{\min(r, m) + 1\} + \pi e + 4.$$

Установим теперь, в какой мере близость интерполяционного многочлена $q_m(s; \mathbf{j}f)$ к функции $f(s)$ обеспечивает близость производных $q_m^{(n)}(s; \mathbf{j}f)$ к производным $f^{(n)}(s)$. Для этого воспользуемся существованием многочлена $R_m(s)$, теоремой Бернштейна об оценке производной многочлена [50] и неравенством Лебега (5.20). Имеем

$$\| f^{(n)}(s) - q_m^{(n)}(s; \mathbf{j}f) \| \leqslant (1 + \| \mathbf{q}_m \| + \| \mathbf{l}_m^r \|) m^n e_m(f) + \| \mathbf{l}_m^r \| e_m(f^{(n)}).$$

Если в полученном неравенстве учтем оценку [50]

$$e_m(f) \leqslant 0.5\pi (m+1)^{-n} e_m(f^{(n)}),$$

то придем к следующему результату.

Теорема 5.2. *Если* $f(s) \in \mathbf{C}^r[S]$ *и* $0 \leqslant n \leqslant r$, *то*

$$\| f^{(n)}(s) - q_m^{(n)}(s; \mathbf{j}f) \| \leqslant \alpha_{mr} e_m(f^{(n)}),$$

где $\alpha_{mr} = \pi(1 + \| \mathbf{q}_m \|)/2 + (1 + \pi/2) \| \mathbf{l}_m^r \|$.

Из теоремы 5.2 вытекает, что если последовательность интерполяционных многочленов $q_m(s; \mathbf{j}f)$ доставляет функции $f(s)$ приближения, близкие к наилучшим, то же верно для последовательности $q_m^{(n)}(s;\, jf)$ и производных $f^{(n)}(s)$. Ясно, что указанный способ приближения периодической функции одновременно с ее производными при помощи интерполяционного многочлена (5.19) не обладает насыщением [24] и близок к оптимальному [50].

К аппарату приближения периодических функций (5.19) должны быть предъявлены требования и практического характера. Оценить, следует ли способ аппроксимации считать удачным в качестве инструмента для расчетов, можно по влиянию ошибок округления на окончательный результат. Полезную информацию по этому вопросу дает неравенство Лебега (5.20). Заметим, что та форма, в которой интерполяционный многочлен (5.19) записан, мало способствует его быстрой реализации на ЭВМ. Однако существуют [51] «быстрые» алгоритмы вычисления интерполяционных многочленов. Они основаны на простых трехчленных рекурсиях и поэтому реализуются на ЭВМ экономно и достаточно быстро. Тщательный анализ выявил своеобразную устойчивость этих алгоритмов к накоплению ошибок округления. В связи с чем бытующее предположение, что большой порядок m может помещать вычислению многочленов (5.19), (5.21) с достаточной точностью, оказалось несостоятельным.

§ 6. Численная реализация интегральных операторов осесимметричных краевых задач

Перспективным способом отыскания решений осесимметричных краевых задач для уравнения Лапласа является метод граничных интегральных уравнений. Численная реализация его, однако, затруднена тем, что в точках, близких к оси симметрии, ядра интегральных операторов растут обратно пропорционально расстоянию до оси симметрии, формируя вблизи нее своеобразный «пограничный слой». В рамках существующих численных алгоритмов справиться с этой вычислительной трудностью не удается.

Новые возможности в решении проблемы «пограничного слоя» осесимметричных задач открыло введенное К. И. Бабенко понятие алгоритмов без насыщения. На их основе в этом параграфе построена математическая модель пограничного слоя, позволившая (за счет гладкости отыскиваемого решения) выразить специфику геометрии меридионального сечения области в терминах погранслоя и свести нейтрализацию последнего к соответствующему свойству квадратурных формул (5.9).

1. Пограничный слой. Согласно теореме 2.4 прямые значения интегральных операторов осесимметричных краевых задач имеют следующую структуру:

$$r\Lambda(s) = \int_0^1 [\Omega E(q) + \omega D(q) + \mu K(q)]\, \delta h_*^{-1} d\sigma.$$

Здесь $E(q)$, $D(q)$, $K(q)$ — полные эллиптические интегралы аргумента $q \equiv q(\sigma, s)$, а $\Omega(\sigma, s)$, $\omega(\sigma, s)$, $\mu(\sigma, s)$ — равномерно непрерывные на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ функции. В силу (3.13)

$$r\,\Lambda(s) = \int_0^1 [\Omega E^*(q) + \omega D^*(q) + \mu K^*(q)]\, \delta h_*^{-1} d\sigma - \int_0^1 [\Omega e^*(q) + \omega d^*(q) + \mu k^*(q)]\, \delta h_*^{-1} \ln(1 - q)\, d\sigma. \tag{6.1}$$

В полюсах гладкой поверхности вращения представление (6.1) регулярно, т. е. не содержит логарифмической особенности.

Для численной реализации выражения (6.1) потребовалось дополнительно выявить те факторы, которые предопределяют резкое падение точности квадратурных формул, когда точка s приближается по кривой $\gamma(s)$ к оси симметрии. Для этого был осуществлен численный эксперимент. На последовательности точек, близких к полюсам поверхности вращения, вычислялся интеграл Гаусса теории потенциала [32]. Хотя предпринятые попытки не дали ощутимого увеличения точности вблизи полюсов поверхности, однако обозначили причины, приводящие к ее потере. Одна из причин связана со способом выделения логарифмической особенности. Оказалось [32], что общепринятое представление $\ln(1-q) = 2\ln|\sigma - s| + A(\sigma, s)$, $\sigma \in (0, 1)$, $s \in (0, 1)$ непригодно, поскольку добавка $A(\sigma, s)$ не является равномерно непрерывной на $[0, 1]\times[0, 1]$ функцией. В связи с этим, при применении любых квадратурных формул для численной реализации (6.1) потеря точности тем больше, чем ближе точка s к полюсам поверхности. Другая, и более серьезная, причина — наличие в (6.1) весового множителя $h_*^{-2}(\sigma, s)$, который в точках, близких к оси симметрии, растет обратно пропорционально расстоянию до оси. Если для устранения первой причины нужно было более квалифицированно подойти к учету логарифмической особенности, то для устранения второй потребовалось построение модели пограничного слоя, основанного на введенном К. И. Бабенко понятии алгоритма без насыщения [24] (см. § 5).

Проблема численной реализации интегралов (6.1) казалась неприступной до тех пор, пока не было достигнуто понимание того факта, что функция $h_*^{-1}(\sigma, s)$ является универсальной характеристикой роста подынтегральных функций в (6.1). Вес $h_*^{-1}(\sigma, s)$ растет вблизи оси симметрии. В связи с этим назовем функцию $h_*^{-1}(\sigma, s)$ *пограничным слоем* осесимметричной задачи, а параметр $h_* \equiv h_*(\sigma, s)$ — его *толщиной*. Пограничный слой присущ всем осесимметричным задачам, и именно он создает основную вычислительную трудность. Острота проблемы усугубляется тем, что справиться с ней при помощи насыщаемых квадратурных формул не удается, поскольку стандартные [31] методы численного интегрирования не учитывают специфики подынтегральных функций и потому здесь неэффективны. Целесообразно использовать квадратурные формулы (5.9), реагирующие на степень гладкости подынтегральных функций. Оказалось, что для класса функций, достаточно гладких, квадратурные формулы (5.9) осуществляют нейтрализацию пограничного слоя в (6.1). При этом нужная степень гладкости подынтегральных функций определяется по правой части неравенства (5.18).

Заметим, что «пограничный слой» как основная вычислительная трудность в осесимметричных краевых задачах «ускользнул» от внимания предшественников [33—37], поскольку авторы существующих численных методик ограничивались в своих расчетах невысокой точностью.

Преобразуем выражение (6.1) к виду, удобному для применения квадратурных формул (5.9). Для этого введем функции

$$R_*^2 \equiv R_*^2(\sigma, s) = \left[\frac{\rho + r}{\sin\frac{\pi(\sigma+s)}{2}}\right]^2 + \left[\frac{\zeta - z}{\sin\frac{\pi(\sigma+s)}{2}}\right]^2,$$

$$R^2 \equiv R^2(\sigma, s) = \left[\frac{\rho - r}{\sin\frac{\pi(\sigma-s)}{2}}\right]^2 + \left[\frac{\zeta - z}{\sin\frac{\pi(\sigma-s)}{2}}\right]^2,$$

$$B \equiv B(\sigma, s) = R^2(\sigma, s)/R_*^2(\sigma, s), \quad b \equiv b(\sigma, s) = \ln B(\sigma, s),$$

$$a \equiv a(\sigma, s) = \delta(\sigma)\, R_*^{-1}(\sigma, s)\sin(\pi(\sigma+s)/2),$$

$$Q \equiv Q(\sigma, s) = 4\,(r/\sin\pi s)\,(\rho/\sin\pi\sigma)/R_*^2(\sigma, s).$$

Если кривая $\gamma(s)$ достаточно гладкая, то все эти функции равномерно непрерывны на $[0, 1]\times[0, 1]$. Модуль эллиптических интегралов и вес

h_*^{-1} имеют при этом следующие представления:

$$q(\sigma, s) = \frac{\sin \pi s \sin \pi\sigma}{\sin^2 \frac{\pi(\sigma+s)}{2}} Q(\sigma, s),$$

$$h_*^{-1}(\sigma, s) = R_*^{-1}(\sigma, s)/\sin\frac{\pi(\sigma+s)}{2}.$$

Далее будем считать кривую $\gamma(s)$ достаточно гладкой, если не оговорено противное.

Зафиксируем значение параметра $s \in (0, 1)$. Сделаем в (6.1) следующую неявную замену переменной интегрирования σ:

$$t \equiv t(\sigma, s) = \frac{\sin(\pi(\sigma - s)/2)}{\sin(\pi(\sigma+s)/2)}. \tag{6.2}$$

Функция $t(\sigma, s)$, как функция переменной σ, непрерывна и монотонно возрастает на $[0, 1]$; обратная ей функция $\sigma(t, s)$ обладает такими же свойствами по переменной t на отрезке $[-1, 1]$. Обе функции бесконечно дифференцируемы по σ и t соответственно, при этом

$$\varepsilon \frac{d}{dt} = \beta \frac{d}{d\sigma}, \quad \varepsilon = \pi \sin \pi s/2, \qquad \beta = \sin^2(\pi(\sigma+s)/2). \tag{6.3}$$

Пусть $F(\sigma, s)$, как функция двух переменных, равномерно непрерывна и бесконечно дифференцируема на $(0, 1)\times(0, 1)$. В силу равенства (6.2) переход к переменной t в $F(\sigma, s)$ при фиксированной $s \in (0, 1)$ будет осуществлять операция $\tilde{}$:

$$\tilde{F} \equiv \tilde{F}(t) = F(\sigma(t, s), s), \quad s \in (0, 1). \tag{6.4}$$

Соответствие $F \to \tilde{F}$ при фиксированном значении параметра s взаимно однозначно.

Центральный момент конструируемой численной методики состоит в том, что с помощью равенства

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \tilde{F}(t) = \varepsilon^{-k}\left(\beta \frac{d}{d\sigma}\right)^k F(\sigma, s) \tag{6.5}$$

пограничный слой выделяется в явном виде так, что его толщина $\varepsilon = \pi \sin \pi s/2$ не зависит от точки интегрирования σ в (6.1) (ср. с функцией $h_*(\sigma, s)$).

Отображение σ: $[-1, 1] \to [0, 1]$ играет важную роль в осесимметричных задачах, поскольку, с одной стороны, способствует выяснению структуры «плохих» функций этих задач, так как

$$\tilde{q} \equiv (1-t)(1+t)\tilde{Q}(t), \quad 1 - \tilde{q} = t^2 \tilde{B}(t),$$

$$h_*^{-1}(\sigma, s)\,\delta d\sigma = \varepsilon^{-1}\tilde{a}(t)\,dt,$$

а с другой — выделяет пограничный слой задачи явно. Итак, с помощью (6.2) выражение (6.1) преобразуется к виду

$$\Lambda(s) = \varepsilon^{-1} r^{-1}\left[\int_{-1}^{+1} \tilde{F}_c(t)\,dt - \int_{-1}^{+1} \tilde{F}_d(t) \ln|t|\,dt\right], \tag{6.6}$$

где

$$\tilde{F}_c(t) \equiv [\tilde{\Omega}(E^* - e^*\tilde{b}) + \tilde{\omega}(D^* - d^*\tilde{b}) + \tilde{\mu}(K^* - k^*\tilde{b})]\tilde{a},$$

$$\tilde{F}_d(t) \equiv 2[\tilde{\Omega}e^* + \tilde{\omega}d^* + \tilde{\mu}k^*]\tilde{a},$$

а аргументом функций E^*, e^*, D^*, d^*, K^*, k^* (алгоритмы вычисления которых указаны в теореме 3.2) служит модуль эллиптических интегралов $\tilde{q} \equiv \tilde{q}(t)$.

Если в неравенстве (5.15) взять

$$\varepsilon_0 = \pi \sin \pi s/2,$$

$$F_c(k) = \left\| \left(\beta(\sigma, s) \frac{d}{d\sigma}\right)^k F_c(\sigma, s) \right\|,$$

$$F_d(k) = \left\| \left(\beta(\sigma, s) \frac{d}{d\sigma}\right)^k F_d(\sigma, s) \right\|,$$

то функции $\tilde{F}_c(t)$, $\tilde{F}_d(t)$ в (6.6) будут обладать пограничным слоем (см. § 5). Для численной реализации интегралов (6.6) можно использовать квадратурные формулы (5.9). При этом поведение функционалов погрешности при $n \to \infty$ будет зависеть от того, как с ростом порядка дифференцирования $k \geqslant 0$ растут мажоранты $F_c(k)$, $F_d(k)$ производных (см. лемму 5.2). Значения $\sigma_i \equiv \sigma(t_i, s)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, восстанавливаются из неявного уравнения

$$t_i = \frac{\sin(\pi(\sigma_i - s)/2)}{\sin(\pi(\sigma_i + s)/2)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

по методу Ньютона:

$$\overset{\alpha+1}{y} = \overset{\alpha}{y} - f\left(\overset{\alpha}{y}\right) \Big/ f'\left(\overset{\alpha}{y}\right), \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$f(x) = x - s - 2\arcsin\left(\frac{t_i \sin \pi(x+s)/2}{2}\right),$$

$$f'(x) = 1 - t_i \frac{\cos \pi(x+s)/2}{\sqrt{1 - t_i^2 \sin^2 \pi(x+s)/2}}.$$

Здесь $s \in (0, 1)$, $t_i \in I$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t_i = \cos \pi(2i-1)/2n$.

Вопрос о начальном приближении $\overset{\circ}{y} = \overset{\circ}{\sigma}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ решается просто:

$$\overset{\circ}{\sigma}_1 = 1 - (1 - t_1)\operatorname{ctg}(\pi s/2)/\pi,$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{i+1} = \sigma_i + 2\pi^{-1}(t_{i+1} - t_i)\frac{\sin^2 \pi(\sigma_i + s)/2}{\sin \pi s}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Построенный итерационный процесс сходится квадратично, и поэтому уже 2—3 итерации обеспечивают значениям σ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ не менее десяти точных десятичных разрядов для $s \in [0.001, 0.999]$.

Отметим, что конструирование узлов интерполяции σ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ подынтегральных функций в (6.1) происходит автоматически в зависимости от толщины пограничного слоя $\varepsilon_0 = \pi \sin \pi s/2$.

Замечание. Параметр $p \geqslant 0$, фигурирующий в алгоритме вычисления полных эллиптических интегралов (см. представление (3.13)), ответствен за степень гладкости подынтегральных функций в (6.6) (функции принадлежат классу $C^{2p+1}[I]$). Подчиним его выбор неравенству

$$p \geqslant p_0 = \left[\frac{k_0 - 1}{2}\right] + 1,$$

являющемуся в данном случае условием нейтрализации пограничного слоя толщины $\varepsilon_0 = \pi \sin \pi s/2$ в (6.6).

Количество производных, участвующих в нейтрализации пограничного слоя, определяется по правой части неравенства (5.18) и равно $k_0 = \theta(n_{\min})$. Таким образом, при численной реализации интегральных операторов, ядра которых содержат полные эллиптические интегралы, необходимо использовать гибкие методы (как, например, в теореме 3.2) вычисления функций $E(q)$, $D(q)$, $K(q)$, поскольку параметр p меняется от задачи к задаче (численные результаты по этому поводу см. в [32]).

2. Алгоритмы вычисления (к теореме 2.3). В результате замены переменной интегрирования (6.2) детальный учет геометрии меридионального сечения осесимметричной области в алгоритме вычисления (6.1) не требуется. Многообразие меридиональных сечений определяется теперь величиной пограничного слоя и его расположением вдоль кривой $\gamma(s)$. Таким образом, указанная модель «пограничного слоя» привела к значительному упрощению численного исследования гладких задач с осевой симметрией. Укажем формулы, по которым следует организовать вычисления интегральных операторов из теоремы 2.4.

Число узлов L в квадратурных формулах (5.9) выберем из условия $T_L(t_k)=0$, $k=1, 2, \ldots, L$. Прямые значения потенциала простого слоя $\overline{V}[\chi]$ и его производных $N\overline{V}[\chi]$, $E\overline{V}[\chi]$ вычисляются по следующим формулам:

$$\overline{V}[\chi](s) = 4\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{L}[c_k\widetilde{F}_c(t_k) + d_k\widetilde{F}(t_k)]\,\widetilde{a}(t_k),$$
$$\widetilde{F}_c(t) = \widetilde{\chi}\widetilde{\rho}(K^* - k^*\widetilde{b}), \tag{6.7}$$
$$\widetilde{F}_d(t) = 2\widetilde{\chi}\widetilde{\rho}k^*;$$

$$N\overline{V}[\chi](s) = 2\varepsilon^{-1}r^{-1}\sum_{k=1}^{L}[c_k\widetilde{F}_c(t_k) + d_k\widetilde{F}_d(t_k)]\,\widetilde{a}(t_k),$$
$$\widetilde{F}_c(t) = \widetilde{\chi}[\widetilde{\Omega}(E^* - e^*\widetilde{b}) + \widetilde{\omega}(D^* - d^*\widetilde{b})], \tag{6.8}$$
$$\widetilde{F}_d(t) = 2\widetilde{\chi}[\widetilde{\Omega}e^* + \widetilde{\omega}d^*],$$
$$\Omega(\sigma, s) = \frac{2\rho r(\sigma - s)^{-1}\mathbf{r}[\sigma, s]\cdot\mathbf{N}}{|\mathbf{r}[\sigma, s]|^2}, \quad \omega(\sigma, s) = \rho z'\Delta^{-1};$$

$$E\overline{V}[\chi](s) = 2\varepsilon^{-1}r^{-1}\sum_{k=1}^{L}[c_k\widetilde{F}_c(t_k) + d_k\widetilde{F}_d(t_k)]\,\widetilde{a}(t_k),$$
$$\widetilde{F}_c(t) = \widetilde{\Omega}(E^* - e^*\widetilde{b}) + \widetilde{\omega}(D^* - d^*\widetilde{b}) + \widetilde{\mu}(K^* - k^*\widetilde{b}), \tag{6.9}$$
$$\widetilde{F}_d(t) = 2(\widetilde{\Omega}e^* + \widetilde{\omega}d^* + \widetilde{\mu}k^*),$$
$$\Omega(\sigma, s) = 2\rho r\frac{\chi(\sigma)\mathbf{r}[\sigma, s]\cdot\mathbf{E} - \chi(s)\mathbf{r}[\sigma, s]\cdot\mathbf{e}}{(\sigma - s)|\mathbf{r}[\sigma, s]|^2},$$
$$\omega(\sigma, s) = -\rho r'\Delta^{-1}\chi(\sigma) - r\rho'\delta^{-1}\chi(s), \quad \mu(\sigma, s) = 2r\rho'\delta^{-1}\chi(s).$$

Для вычисления прямых значений потенциала двойного слоя $\overline{W}[\chi]$ и его производных $N\overline{W}[\chi]$, $E\overline{W}[\chi]$ используются формулы

$$\overline{W}[\chi](s) = 2\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{L}[c_k\widetilde{F}_c(t_k) + d_k\widetilde{F}_d(t_k)]\,\widetilde{a}(t_k),$$
$$\widetilde{F}_c(t) = \widetilde{\chi}[\widetilde{\Omega}(E^* - e^*\widetilde{b}) + \widetilde{\omega}(D^* - d^*\widetilde{b})], \tag{6.10}$$
$$\widetilde{F}_d(t) = 2\widetilde{\chi}[\widetilde{\Omega}e^* + \widetilde{\omega}d^*],$$
$$\Omega(\sigma, s) = \frac{2\rho(\sigma - s)^{-1}\mathbf{r}[\sigma, s]\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}[\sigma, s]|^2}, \quad \omega(\sigma, s) = -\zeta'\delta^{-1};$$

$$N\overline{W}[\chi](s) = -2\varepsilon^{-1}r^{-1}\sum_{k=1}^{L}[c_k\widetilde{F}_c(t_k) + d_k\widetilde{F}_d(t_k)]\,\widetilde{a}(t_k),$$
$$\widetilde{F}_c(t) = \widetilde{\Omega}(E^* - e^*\widetilde{b}) + \widetilde{\omega}(D^* - d^*\widetilde{b}) + \widetilde{\mu}(K^* - k^*\widetilde{b}),$$
$$\widetilde{F}_d(t) = 2(\widetilde{\Omega}e^* + \widetilde{\omega}d^* + \widetilde{\mu}k^*), \tag{6.11}$$
$$\Omega(\sigma, s) = 2\rho r\frac{\nu(\sigma)\mathbf{r}[\sigma, s]\cdot\mathbf{E} - \nu(s)\mathbf{r}[\sigma, s]\cdot\mathbf{e}}{(\sigma - s)|\mathbf{r}[\sigma, s]|^2},$$

$$\omega(\sigma, s) = \nu(\sigma)\Delta^{-1}(rr' - (\zeta - z)z') - \nu(s)r\rho'\delta^{-1},$$
$$\mu(\sigma, s) = 2\nu(s)r\rho'\delta^{-1}, \ \nu(\sigma) = \delta^{-1}(d\chi/d\sigma);$$
$$E\overline{W}[\chi](s) = 2\varepsilon^{-1}r^{-1}\sum_{k=1}^{L}[c_k\widetilde{F}_c(t_k) + d_k\widetilde{F}_d(t_k)]\,\widetilde{a}(t_k),$$
$$\widetilde{F}_c(t) = \widetilde{\nu}[\widetilde{\Omega}(E^* - e^*\widetilde{b}) + \widetilde{\omega}(D^* - d^*\widetilde{b})],$$
$$\widetilde{F}_d(t) = 2\widetilde{\nu}[\widetilde{\Omega}e^* + \omega d^*], \qquad (6.12)$$
$$\Omega(\sigma, s) = \frac{2\rho r(\sigma - s)^{-1}\mathbf{r}[\sigma, s]\cdot\mathbf{N}}{|\mathbf{r}[\sigma, s]|^2},$$
$$\omega(\sigma, s) = -(rz' + (\zeta - z)r')\Delta^{-1}, \ \nu(\sigma) = \delta^{-1}(d\chi/d\sigma).$$

§ 7. Обоснование численного метода решения осесимметричной задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Важное место в теории неустановившихся движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами занимает проблематика, связанная с конструированием алгоритмов численного решения эллиптических краевых задач. Так, в случае потенциальных осесимметричных движений идеальной жидкости требуется по данным Дирихле отыскать гармоническую в области функцию, а затем вычислить ее градиент на границе [1, 13]. Специфичность задачи состоит в том, что граница области, хотя и является очень гладкой поверхностью вращения, в остальном достаточно произвольна. С позиции существующих вычислительных средств указанные задачи представляются очень трудными [21]. В связи с этим возникла необходимость поиска новых численных методов решения эллиптических задач. На этом пути основополагающую роль сыграла идея К. И. Бабенко [24]. Суть ее применительно к рассматриваемым задачам состоит в том, что при создании численных алгоритмов целесообразно использовать «гибкие» способы приближения решения с тем, чтобы ошибка аппроксимации определялась не «малостью разбиения» области, а наличием и степенью роста производных высокого порядка. В алгоритмах такого рода, названных алгоритмами без насыщения, информация о степени гладкости конструируемого решения заключена в функционале погрешности и выражается в терминах наилучших чебышевских приближений отыскиваемого решения многочленами высоких степеней (см. § 6). Преимущество алгоритмов без насыщения особенно ощутимо в задачах, чебышевские характеристики решений которых убывают экспоненциально с возрастанием степени приближающих их многочленов. Именно экспоненциальный характер сходимости вычислительных процессов, определяемых «гибкими» алгоритмами, может стать основным доводом в пользу их широкого распространения, например в эллиптических задачах.

Напомним, что методы типа конечно-разностных приводят в эллиптических задачах к алгоритмам с насыщением [24], что обеспечивает им лишь «конечную» (не экспоненциальную) скорость сходимости (характеризуемую для уравнения Лапласа вторым порядком по величине шага сетки).

В данном параграфе основное внимание сосредоточено на принципиальных вопросах построения и обоснования нового метода численного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае гладких осесимметричных областей достаточно произвольной формы. Показано, что приводимые здесь алгоритмы не обладают насыщением. Построению их предшествовало исследование ряда важных вспомогательных вопросов (§ 2—6), без успешного решения которых построенная численная методика вряд ли могла бы считаться эффективной.

Отметим, что формирование проводимой здесь идеологии происходило под впечатлением работ К. И. Бабенко, из которых в первую очередь хотелось бы назвать [24, 26, 28—30, 38, 39].

Перейдем к изложению результатов. Пусть ω_+ — осесимметричная область в $\mathbf{R}^3$, ограниченная гладкой поверхностью $\partial\omega$, меридиональное сечение которой есть гладкая кривая $\gamma:[0,1]\to\{r(s), z(s)\}$, $\gamma(s)\in C^\infty$ $[0, 1]$. Рассмотрим в области $\omega_+\cup\partial\omega$ задачу Дирихле

$$\Delta u=0,\ \mathbf{x}\in\omega_+,\ u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\partial\omega. \tag{7.1}$$

Ограничимся случаем осесимметричных решений. Решение $u(\mathbf{x})$ задачи (7.1) является настолько гладким, насколько позволяет ему функция $f(\mathbf{x})$. Ввиду осевой симметрии задачи (7.1) можно предположить, что непрерывная функция $f(s)$, заданная на отрезке $[0, 1]$, непрерывно продолжается четным образом на $[1, 2]$ и становится непрерывной периодической функцией с периодом 2. В связи с этим введем класс $\mathbf{C}\,[0, 2]$ непрерывных 2-периодических функций. Норму в нем обозначим $\|\cdot\|$. Наилучшее чебышевское приближение функции $g\in\mathbf{C}\,[0, 2]$ тригонометрическими многочленами порядка не больше m обозначим через $e_m(g)$. Множество четных периодических функций образует в $\mathbf{C}\,[0, 2]$ замкнутое подпространство, которое обозначим $\mathbf{C}^+\,[0, 1]$.

Задача (7.1) эквивалентна интегральному уравнению на границе области $\partial\omega$

$$\varphi+\mathbf{K}\varphi=f,\quad f\in\mathbf{C}^+\,[0,1] \tag{7.2}$$

с компактным в $\mathbf{C}^+\,[0, 1]$ оператором (см. § 2)

$$(\mathbf{K}g)(s)=\int_0^1 K(s,\sigma)\,g(\sigma)\,d\sigma,\quad \|\mathbf{K}\|=\left\|\int_0^1 |K(s,\sigma)|\,d\sigma\right\|. \tag{7.3}$$

Поскольку $\varphi(s)\in\mathbf{C}^+\,[0, 1]$, то размерность конечномерной задачи, аппроксимирующей задачу (7.2), можно уменьшить вдвое. В связи с этим модифицируем интерполяционную формулу (5.19). Пусть $g\in\mathbf{C}^+\,[0, 1]$. Обозначим

$$s_i=2i/(2m+1),\ i=0,1,\ldots,m,$$
$$\mathbf{J}:\mathbf{C}^+[0,1]\to\mathbf{R}^{m+1},\ \mathbf{J}g=(g(s_0),\ldots,g(s_m)).$$

Фундаментальные интерполяционные многочлены возьмем в виде

$$v_k(s)=\begin{cases}D_m(\pi s), & k=0,\\ D_m(\pi(s-s_k))+D_m(\pi(s+s_k)), & 1\leqslant k\leqslant m.\end{cases} \tag{7.4}$$

Здесь $D_m(\theta)=\dfrac{\sin(2m+1)\theta/2}{\sin\theta/2\,(2m+1)}$ — ядро Дирихле, а сам интерполяционный проектор (5.19) представим таким образом:

$$(\mathbf{Q}_m g)(s)\equiv Q_m(s;\mathbf{J}g)=\sum_{k=0}^m g(s_k)\,v_k(s),$$
$$Q_m(s_i;\ \mathbf{J}g)=g(s_i),\ 0\leqslant i\leqslant m, \tag{7.5}$$
$$\|\mathbf{Q}_m\|=\left\|\sum_{k=0}^m |v_k(s)|\right\|,\quad \|\mathbf{Q}_m\|\leqslant 3+4\pi^{-2}\ln m.$$

Из (7.3) найдем

$$(\mathbf{K}\mathbf{Q}_m g)(s)=\sum_{k=0}^m g(s_k)\,a_k(s),\ g\in\mathbf{C}^+[0,1], \tag{7.6}$$

$$a_k(s)=\int_0^1 K(s,\sigma)\,v_k(\sigma)\,d\sigma \tag{7.7}$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{KQ}_m\| = \left\| \sum_{k=0}^{m} |a_k(s)| \right\|. \tag{7.8}$$

Правую часть равенства (7.6) можно трактовать как своеобразную аппроксимацию интеграла (7.3).

Конечномерный аналог уравнения (7.2) получается следующим образом. Положим $\varphi(s) = (\mathbf{Q}_m\varphi)(s) + \rho_m(\varphi)(s)$, $v = \mathbf{J}\varphi$, $\psi = \mathbf{J}f$, $\delta = -\mathbf{JK}\rho_m$. Тогда из уравнения (7.2) имеем $v + Av = \psi + \delta$, где $A = (a_{ik})$ — матрица размеров $(m+1)\times(m+1)$ с элементами

$$a_{ik} \equiv a_k(s_i) = \int_0^1 K(s_i, \sigma)\, v_k(\sigma)\, d\sigma. \tag{7.9}$$

Отбрасывая вектор $\delta \in \mathbf{R}^{m+1}$ — погрешность аппроксимации — и обозначая приближенное значение вектора $\mathbf{J}\varphi \in \mathbf{R}^{m+1}$ через $\overline{\varphi}$, получим искомую дискретизацию задачи (7.2):

$$(\mathscr{I} + \mathscr{A})\overline{\varphi} = \psi. \tag{7.10}$$

Здесь $\mathscr{I}$ — единичная матрица. Таким образом, задача (7.2) сведена к конечномерной задаче (7.10).

Чебышевскую норму векторов $\mathbf{J}g \in \mathbf{R}^{m+1}$ и матриц $\mathscr{A} : \mathbf{R}^{m+1} \to \mathbf{R}^{m+1}$ условимся обозначать соответственно $|\mathbf{J}g|_\infty$ и $|\mathscr{A}|_\infty$, а меру обусловленности матрицы $\mathscr{A}$ —

$$\mu(\mathscr{A}) = |(\mathscr{I} + \mathscr{A})|_\infty \, |(\mathscr{I} + \mathscr{A})^{-1}|_\infty.$$

Предположим, что краевая задача (7.2) разрешима при любой правой части $f \in \mathbf{C}^+ [0, 1]$ и $\|\varphi\| \leqslant M\|f\|$. Справедлива

Теорема 7.1. *Если $m \geqslant m_0$, то уравнение* (7.10) *разрешимо при любой правой части ψ, причем $\|\mathbf{KQ}_m\| \leqslant q_0 < \infty$, $\mu(\mathscr{A}) \leqslant \mu_0 < \infty$ и*

$$e_m(\varphi) \leqslant \|\varphi(s) - Q_m(s;\ \overline{\varphi})\| \leqslant c_0\|\mathbf{Q}_m\|(1 + \|\mathbf{Q}_m\|)\, e_m(\varphi). \tag{7.11}$$

Постоянные q_0, μ_0, c_0 не зависят от m; их можно выбрать следующим образом: $q_0 = \sup\limits_{m \geqslant 0} \|\mathbf{KQ}_m\|$, $\mu_0 = 2(1 + q_0)^2$, $c_0 = 2(1 + Mq_0)\|\mathbf{K}\|$.

Доказательство. Решающим моментом явилось то, что оператор $\mathbf{K}$ имеет слабую особенность и потому [41, 43] обладает более сильными свойствами непрерывности, чем сами функции, на которые он действует. Это свойство позволяет установить равномерную ограниченность норм операторов $\mathbf{KQ}_m$ в $\mathbf{C}^+ [0, 1]$. Далее доказательство осуществляется по схеме, изложенной в работе [38] с учетом свойства нормы вполне непрерывного оператора в пространстве непрерывных функций с чебышевской топологией равномерной сходимости [54].

Замечание к оценке (7.11). Правую часть неравенства (7.11) можно усилить, исключив из нее сомножитель $\|\mathbf{Q}_m\|$. Однако доказательство теоремы 7.1, использующее понятие компактной аппроксимации [55] оператора $\mathbf{K}$ последовательностью операторов $\mathbf{KQ}_m$, оказалось неконструктивным и здесь не приводится.

Скорость сходимости приближенных решений интегрального уравнения (7.2) определяется гладкостью точного решения $\varphi(s)$, но не ядра интегрального оператора $\mathbf{K}$, что отличает указанный метод от метода численных квадратур. В последнем для быстрой сходимости приближенного решения нужно, чтобы быстро убывала погрешность замены интеграла (7.3) квадратурной суммой, а это обычно требует достаточной гладкости не только точного решения задачи, но и ядра интегрального оператора $\mathbf{K}$. Таким образом, указанное выше преимущество построенного численного метода может быть сохранено лишь в случае, если вычисление интегралов (7.9) осуществляется либо аналитически, либо при помощи квадратурных формул с погрешностью, не превосходящей $\|\rho_m(\varphi)\|$ при любом m. Применение квадратурных формул (5.9) с числом узлов n, $n > n_{\min}$ ($n_{\min}$ зависит от толщины пограничного слоя в точке s) позволяет вычислить элементы матрицы $\mathscr{A}$ практически с любой точностью $\delta = (1 + \|Q_m\|) e_m(\varphi)$, поскольку при $n > n_{\min}$ погрешность квадратурной формулы убывает экспоненциально с ростом n (см. лемму 5.2).

Влияние ошибок округления тоже можно учесть, например по схеме, описанной в [56]. Правда, это приведет к некоторому изменению константы c_0 и добавлению еще одного сомножителя $(1 + \|Q_m\|)$ в правую часть неравенства (7.11).

Прокомментируем теорему 7.1. По сравнению с конечно-разностными построенные численные алгоритмы имеют важное преимущество — они без насыщения [24]. Конечно, для эффективного использования оценок (7.11) необходимо располагать априорной информацией о точном решении задачи (7.1). Во многих случаях порядок стремления к нулю чебышевских характеристик $e_m(\varphi)$ отыскиваемого решения φ устанавливается по гладкости функции f. В практических расчетах, однако, важны не столько сами априорные оценки решения задачи (7.2), сколько дифференциальные свойства решения, обеспечивающие достаточно быстрое убывание чисел $e_m(\varphi)$ при возрастании m. Такую информацию можно получить по входным данным эллиптической задачи. Тем самым в оценку погрешности (7.11) входят те характеристики точного решения, которыми мы практически всегда располагаем.

Решающим фактором в отношении точности построенного численного решения является скорость уменьшения погрешности при увеличении m. В случае бесконечно дифференцируемого решения характеристики $e_m(\varphi)$ точного решения краевой задачи (7.2) убывают быстрее любой конечной степени числа $1/m$ [52]. В связи с этим предлагаемый метод очень быстро приводит к приближенному решению краевой задачи (7.2) с нужной точностью, поскольку правая часть в неравенстве (7.11) убывает экспоненциально с ростом числа m, $m \geqslant m_0$, и достижение нужной точности, очевидно, произойдет при небольших m. Напротив, конечно-разностные методы обеспечивают задачам (7.1), (7.2) всего лишь второй порядок точности по величине шага сетки.

Ясно, что каким бы путем не определялся тригонометрический многочлен порядка не выше m, левое неравенство в (7.11) будет всегда выполнено, поскольку не может быть приближения лучше наилучшего. Как уже неоднократно отмечалось, достоинство аппроксимирующего аппарата определяется прежде всего тем, насколько полно он сохраняет дифференциальные характеристики отыскиваемых решений. Для периодических функций одной переменной эффект сохранения дифференциальных характеристик приближаемых функций известен [49]: только осуществляя наивысшую скорость приближения, аппроксимирующий аппарат полностью унаследует дифференциальные характеристики отыскиваемого решения. В связи с этим любая дискретизация задачи (7.2) не сохранит гладкости конструируемого решения, поскольку правая часть неравенства (7.11) имеет порядок убывания, не соответствующий порядку убывания характеристик точного решения $e_m(\varphi)$. Правое неравенство в (7.11) как бы характеризует потерю гладкости приближенного решения (7.5). Таким образом, для того чтобы величина погрешности не способствовала утрате информации о точном решении задачи (7.2), необходимо способ аппроксимации (7.5) и метод решения (7.10) согласовать с априорной информацией о решении дифференциального прототипа (7.1).

Утверждение теоремы 7.1 о том, что число обусловленности матрицы $\mathscr{A}$ не зависит от ее порядка, обеспечивает устойчивость процесса построения приближенного решения задачи (7.10), т. е. ошибки округления приближенного решения окажутся примерно того же порядка малости, что и ошибки, допущенные при вычислении матрицы $\mathscr{A}$ и правой части ψ (см. оценку (7.11)). Несмотря на то что матрица $\mathscr{A}$ не имеет специальной структуры и оказывается полностью заполненной, можно указать эффективный способ решения системы (7.10).

Теорема 7.2. *В условиях теоремы* 7.1 *систему* (7.10) *можно решить итерациями по схеме*

$$\bar{\varphi}^{k+1} = (1-\gamma)\bar{\varphi}^k - \gamma\mathscr{A}\bar{\varphi}^k + \gamma\psi, \quad \gamma = (1 + \|\mathbf{K}Q_m\|)^{-1}. \tag{7.12}$$

Итерации сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\beta < 1$; *константа* γ *заключена в пределах* $0 < \gamma < \gamma_0$, *значение* γ_0 *эффективно вычисляется.*

Доказательство состоит в простом использовании условий разрешимости задач (7.1) и (7.10) и проводится по аналогии с [38].

В построенном итерационном процессе выбор параметров осуществляется автоматически согласно конкретно складывающейся ситуации. Вместе с этим отметим, что ошибки округления хорошо сходящего итерационного процесса не накапливаются в процессе вычислений. Причина этого явления ясна — ошибки каждого предыдущего приближения исправляются последующими. Таким образом, ошибки округления последнего приближения зависят только от арифметических операций, с помощью которых оно получено из предпоследнего. Указанное свойство является важным преимуществом итерационных методов решения линейных алгебраических уравнений перед всеми другими. Критерием трудности решения систем линейных алгебраических уравнений является число обусловленности $\mu(\mathscr{A}) = |\mathscr{I} + \mathscr{A}|_\infty |(\mathscr{I} + \mathscr{A})^{-1}|_\infty$, которое определяет скорость сходимости приближений $\bar{\varphi}^k$ к точному решению $\bar{\varphi}$ системы (7.10). Однако для окончательного заключения о близости $\bar{\varphi}^k$ к $\bar{\varphi}$ требуется эффективный критерий прерывания итерационного процесса (7.12). За такой критерий естественно принять количество верных значащих цифр в предполагаемом ответе, т. е. исходить из определения относительной ошибки отыскиваемого решения системы (7.10)

$$|\bar{\varphi}^k - \bar{\varphi}|_\infty / |\bar{\varphi}|_\infty \leqslant \varepsilon. \tag{7.13}$$

Поскольку само решение $\bar{\varphi}$ неизвестно, в практических расчетах более удобно следующее условие окончания итерационного процесса (7.12):

$$|(\mathscr{I} + \mathscr{A})\bar{\varphi}^k - \psi|_\infty / |\psi|_\infty \leqslant \varepsilon / \mu(\mathscr{A}). \tag{7.14}$$

Смысл числа обусловленности $\mu(\mathscr{A})$ задачи (7.10) выявляется следующим результатом.

Теорема 7.3. *Из оценки* (7.14) *следует неравенство* (7.13).

Доказательство этой важной для практических расчетов теоремы извлекается из определения числа $\mu(\mathscr{A})$ (см. [57]).

Таким образом, итерационный процесс (7.12) вместе с условием его окончания (7.14) гарантируют относительную точность приближенного решения задачи (7.10), равную ε.

Заметим, что осуществить итерационный процесс (7.12) с любой заданной точностью $\varepsilon > 0$, используя конечно-разрядную арифметику ЭВМ, нельзя, если не предпринимать специальных мер (см. [57]).

§ 8. Точные решения уравнения Лапласа. Некоторые результаты численных расчетов

В этом параграфе построены точные решения осесимметричных краевых задач для уравнения Лапласа в эллипсоиде вращения. Решения выписаны явно в форме, тонко улавливающей специфику осевой симметрии, в силу чего они могут успешно использоваться для тестирования численных методик решения осесимметричных краевых задач. Точные решения конкретных задач, рассматриваемых в этом параграфе, использовались для проверки эффективности численной методики из § 7. Результаты проведенных расчетов представлены в табл. 1—14.

1. Общая схема построения тестов. Для построения точных решений краевых задач для уравнения Лапласа ищется система ортогональных криволинейных координат (λ, μ, θ) такая, что граничная поверхность будет одной из координатных поверхностей и уравнение Лапласа после перехода к новым переменным допускает разделение переменных. Если такая система координат известна, решения краевых задач удается получить в явном виде. Рассмотрим ортогональные криволинейные системы координат вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения. Они связаны с прямоугольными декартовыми координатами (r, z) меридионального сечения равенствами

$$r=c((\lambda^2-1)(1-\mu^2))^{1/2},\ z=c\lambda\mu,\ 1\leqslant\lambda<\infty,\ -1\leqslant\mu\leqslant 1,$$
$$r=c((\lambda^2+1)(1-\mu^2))^{1/2},\ z=c\lambda\mu,\ 0\leqslant\lambda<\infty,\ -1\leqslant\mu\leqslant 1.$$

Здесь c — некоторый масштабный множитель. Пусть $\lambda=\lambda_0$ — уравнение поверхности эллипсоида вращения; областям, лежащим внутри и вне эллипсоида, будут отвечать соответственно совокупности значений $\lambda<\lambda_0$, $\lambda>\lambda_0$. Дифференцирование вдоль нормального и касательного направлений к поверхности эллипсоида, заданного уравнениями

$$r=a\sin\pi s=c\sqrt{(\lambda_0^2\mp 1)(1-\mu^2)},\quad z=b\cos\pi s=c\lambda_0\mu, \tag{8.1}$$

осуществляется с помощью операторов

$$N\equiv\pi\Delta^{-1}(\lambda_0^2\mp 1)^{1/2}\,\partial/\partial\lambda,\quad E\equiv-\Delta^{-1}\partial/\partial s, \tag{8.2}$$

где

$$\Delta=\pi b\left(1\mp\lambda_0^{-2}\cos^2\pi s\right)^{1/2} \tag{8.3}$$

(здесь и везде в дальнейшем верхние и нижние знаки в формулах соответствуют случаю вытянутого ($b>a$) и сплюснутого ($b<a$) эллипсоидов вращения). Как и прежде (см. § 2), прямые и предельные значения операторов дифференцирования на поверхности $\lambda=\lambda_0$ будем обозначать соответственно символами N, E, $N_\pm$, $E_\pm$.

Ограничимся случаем, когда гармоническая функция Φ не зависит от азимутального угла θ. При этом уравнение Лапласа в координатах (λ, μ, θ) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left((\lambda^2\mp 1)\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right)=0.$$

Совокупности мультипликативных решений

$$\Phi^+(\lambda,\mu)=A_nP_n(\mu)\begin{cases}P_n(\lambda), & 1<\lambda\leqslant\lambda_0,\\ p_n(\lambda), & 0<\lambda\leqslant\lambda_0,\end{cases} \tag{8.4}$$

$$\Phi^-(\lambda,\mu)=B_nP_n(\mu)\begin{cases}Q_n(\lambda), & \lambda_0\leqslant\lambda<\infty,\\ q_n(\lambda), & \lambda_0\leqslant\lambda<\infty\end{cases} \tag{8.5}$$

подходят для рассмотрения соответственно внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа. Здесь $n\geqslant 1$ — целое число, $P_n(x)$ — полином Лежандра,

$$Q_n(x)=P_n(x)\int_x^\infty(x^2-1)^{-1}P_n^{-2}(x)\,dx$$

— функция Лежандра второго рода; $p_n(x)=i^{-n}P_n(ix)$, $q_n(x)=i^{n+1}Q_n(ix)$ — соответственно полином и функция Лежандра мнимого аргумента

$i=\sqrt{-1}$; A_n, B_n — произвольные постоянные. Отметим, что [58] при $x\to\infty$

$$Q_n(x)=O(x^{-n-1}).$$

Вне поверхности $\lambda=\lambda_0$ потенциалы $V[\chi_1]\equiv V[\chi_1](\lambda,\ \mu)$, $W[\chi_2]\equiv\equiv W[\chi_2](\lambda,\ \mu)$ являются гармоническими функциями; обозначим их

$$V^\pm(\lambda,\ \mu)\equiv V^\pm[\chi_1](\lambda,\ \mu),\ W^\pm(\lambda,\ \mu)=W^\pm[\chi_2](\lambda,\ \mu). \tag{8.6}$$

(Знаки $\pm$ указывают здесь на области существования гармонических функций: $\lambda<\lambda_0$, $\lambda>\lambda_0$.) Введенные потенциалы на поверхности $\lambda=\lambda_0$ удовлетворяют следующим равенствам (см. § 2):

$$V^+(\lambda_0,\ \mu)=V^-(\lambda_0,\ \mu),\quad NW^+(\lambda_0,\ \mu)=NW^-(\lambda_0,\ \mu). \tag{8.7}$$

Таким образом, из частных решений (8.4), (8.5) по условию (8.7) легко конструируются гармонические функции $V^\pm(\lambda,\ \mu)$ и $W^\pm(\lambda,\ \mu)$. Их граничные значения на поверхности $\lambda=\lambda_0$ связаны соотношениями (лемма 2.3)

$$V_\pm=\overline{V},\ N_\pm V=\pm 2\pi\chi_1+N\overline{V}[\chi_1],\ E_\pm V=E\overline{V}[\chi_1]; \tag{8.8}$$
$$W_\pm=\pm 2\pi\chi_2+\overline{W}[\chi_2],\ N_\pm\overline{W}=N\overline{W}[\chi_2],\ E_\pm W=\pm 2\pi\nu_2+E\overline{W}[\chi_2].$$

Здесь приняты обозначения $V_\pm\equiv V^\pm(\lambda_0,\ \mu)$, $N_\pm V\equiv NV^\pm(\lambda_0,\ \mu)$, $E_\pm V\equiv\equiv EV^\pm(\lambda_0,\ \mu)$; $W_\pm\equiv W^\pm(\lambda_0,\ \mu)$, $N\pm W\equiv NW^\pm(\lambda_0,\ \mu)$, $E_\pm W\equiv EW^\pm(\lambda_0,\ \mu)$.

Такова общая схема получения точных решений краевых задач для уравнения Лапласа из набора частных решений (8.4), (8.5). Укажем теперь конкретные формулы, использующиеся при проверке построенных численных алгоритмов.

2. Тесты для потенциалов V и W.

$$\begin{gathered}\chi_1=-\text{э}\Delta^{-1}\Lambda P_n(\mu)/4,\ \overline{V}[\chi_1]=-q(\lambda_0)P_n(\mu),\\ V^+[\chi_1]=-p(\lambda)q(\lambda_0)P_n(\mu),\ V^-[\chi_1]=-q(\lambda)P_n(\mu),\\ N\overline{V}[\chi_1]=-\pi\text{э}\Delta^{-1}(1+\Lambda/2)P_n(\mu),\\ E\overline{V}[\chi_1]=-q(\lambda_0)EP_n(\mu);\end{gathered} \tag{8.9}$$

$$\begin{gathered}\chi_2=-\pi^{-1}\Lambda P_n(\mu)/4,\ \overline{W}[\chi_2]=(1+\Lambda/2)P_n(\mu),\\ W^+[\chi_2]=p(\lambda)P_n(\mu),\ W^-[\chi_2]=p'(\lambda_0)q(\lambda)P_n(\mu),\\ N\overline{W}[\chi_2]=\pi\text{э}\Delta^{-1}p'(\lambda_0)P_n(\mu),\\ E\overline{W}[\chi_2]=(1+\Lambda/2)EP_n(\mu).\end{gathered} \tag{8.10}$$

Здесь

$$f'(\lambda)=(\partial/\partial\lambda)f(\lambda),$$

$$EP_n(\mu)=-\Delta^{-1}(\partial/\partial s)P_n(\mu),\ \mu=\cos\pi s,$$

$$p(\lambda)=\begin{cases}P_n(\lambda)/P_n(\lambda_0), & b>a,\\ p_n(\lambda)/p_n(\lambda_0), & b<a,\end{cases}$$

$$q(\lambda)=\begin{cases}Q_n(\lambda)/Q_n'(\lambda_0), & b>a,\\ q_n(\lambda)/q_n'(\lambda_0), & b<a,\end{cases}$$

$$\Lambda^{-1}=\begin{cases}(\lambda_0^2-1)P_n'(\lambda_0)Q_n(\lambda_0)-1, & b>a,\\ (\lambda_0^2+1)p_n'(\lambda_0)q_n(\lambda_0)-1, & b<a,\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{cases}\pi b(1-\lambda_0^{-2}\cos^2\pi s)^{1/2}, & b>a,\\ \pi b(1+\lambda_0^{-2}\cos^2\pi s)^{1/2}, & b<a,\end{cases}$$

$$\text{э}=\begin{cases}(\lambda_0^2-1)^{1/2}, & b>a,\\ (\lambda_0^2+1)^{1/2}, & b<a,\end{cases}$$

$$\lambda_0=\begin{cases}b(b^2-a^2)^{-1/2}, & b>a,\\ b(a^2-b^2)^{-1/2}, & b<a.\end{cases}$$

3. Тесты для задач Дирихле и Неймана. Ограничимся рассмотрением внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана. Решения указанных задач будем искать в виде $\Phi(\lambda, \mu) = W[\varphi](\lambda, \mu)$, $\Psi(\lambda, \mu) = V[\psi](\lambda, \mu)$. Плотности потенциалов определяются из уравнений Фредгольма второго рода

$$2\pi\varphi + \overline{W}[\varphi] = W_+, \quad W_+ \equiv W^+(\lambda_0, \mu), \tag{8.11}$$

$$-2\pi\psi + N\overline{V}[\psi] = N_-V, \quad N_-V \equiv NV^-(\lambda_0, \mu), \tag{8.12}$$

правые части которых суть данные соответственно Дирихле и Неймана на поверхности $\lambda = \lambda_0$. Функции W_+ и N_-V сформируем теперь из гармонического полинома $r^2 - 2z^2$:

$$\begin{aligned} W_+ &= a^2 \sin^2 \pi s - 2b^2 \cos^2 \pi s, \\ N_-V &= 2\pi ab(\sin^2 \pi s - 2\cos^2 \pi s)/\Delta. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Решения задач (8.11), (8.12) с правыми частями (8.13) выписываются явно:

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= \pi^{-1}c^2[\alpha + 2\Lambda p(\lambda_0)P_2(\mu)]/6, \\ \Phi(\lambda_0, \mu) &= -2c^2[1 - 2\alpha p(\lambda_0)P_2(\mu)]/3, \end{aligned} \tag{8.14}$$

$$\begin{aligned} \psi(\mu) &= -ab\Delta^{-1}\Lambda P_2(\mu), \\ \Psi(\lambda_0, \mu) &= -4c^2(1 + \Lambda)p(\lambda_0)P_2(\mu)/3. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Здесь $\alpha = (a - b)/|a - b|$, $c = b/\lambda_0$, $\mu = \cos \pi s$, $P_2(\mu) = (3\mu^2 - 1)/2$,

$$p(\lambda) = \begin{cases} (3\lambda^2 - 1)/2, & b > a, \\ (3\lambda^2 + 1)/2, & b < a, \end{cases}$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{cases} 3\lambda_0(\lambda_0^2 - 1)\,Q_2(\lambda_0) - 1, & b > a, \\ 3\lambda_0(\lambda_0^2 + 1)\,q_2(\lambda_0) - 1, & b < a, \end{cases}$$

$$4Q_2(\lambda) = (3\lambda^2 - 1)\ln((\lambda + 1)/(\lambda - 1)) - 6\lambda,$$

$$2q_2(\lambda) = (3\lambda^2 + 1)\arcsin(\lambda^2 + 1)^{-1/2} - 3\lambda,$$

$$\Delta = \begin{cases} \pi b\,(1 - \lambda_0^{-2}\cos^2 \pi s)^{1/2}, & b > a, \\ \pi b\,(1 + \lambda_0^{-2}\cos^2 \pi s)^{1/2}, & b < a, \end{cases}$$

$$\lambda_0 = \begin{cases} b\,(b^2 - a^2)^{-1/2}, & b > a, \\ b\,(a^2 - b^2)^{-1/2}, & b < a. \end{cases}$$

4. Тесты для задачи обтекания. Задача о внешнем обтекании тела ω_+ потенциальным потоком несжимаемой жидкости сводится к отысканию потенциала скорости φ — функции, гармонической вне ω_+ [7, 8]. Потенциал φ удовлетворяет граничным условиям

$$N_-\varphi|_{\partial\omega} = 0, \quad \lim \nabla\varphi = \mathbf{U} \equiv (0, 0, U), \quad |\mathbf{x}| \to \infty.$$

Пусть $\Phi = \varphi - Uz$, тогда Φ гармонична вне ω_+ и $N_-\Phi|_{\partial\omega} = -U\cos(N, z)$, $\lim \Phi = 0$, $|\mathbf{x}| \to \infty$. Убывание Φ на бесконечности обеспечивает единственность решения внешней задачи Неймана. Пусть обтекаемое тело — эллипсоид вращения. Ограничимся случаем осесимметричных течений. Представим гармоническую функцию $\Phi(\lambda, \mu)$ потенциалом простого слоя $\Phi(\lambda, \mu) = V[\chi](\lambda, \mu) = V^-(\lambda, \mu)$, плотность которого определяется из уравнения

$$-2\pi\chi + N\overline{V}[\chi] = N_-\Phi, \tag{8.16}$$

где $N_-\Phi = -\pi a\Delta^{-1}U\cos \pi s$. Решение выписывается явно:

$$\begin{aligned} \chi(\mu) &= -0.25a\Delta^{-1}\Lambda U \cos \pi s, \\ \varphi(\lambda_0, \mu) &= \Phi(\lambda_0, \mu) + Uz = -b\Lambda U \cos \pi s, \\ E\overline{\varphi} &= \pi b\Delta^{-1}\Lambda U \sin \pi s. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Здесь

$$\Lambda^{-1}=\begin{cases}(\lambda_0^2-1)\,Q_1(\lambda_0)-1, & b>a,\\ (\lambda_0^2+1)\,q_1(\lambda_0)-1, & b<a,\end{cases}$$

$$2Q_1(\lambda)=\lambda\ln((\lambda+1)/(\lambda-1))-2,$$

$$q_1(\lambda)=1-\lambda\arcsin(\lambda^2+1)^{-1/2},$$

$$\Delta=\begin{cases}\pi b\,(1-\lambda_0^{-2}\cos^2\pi s)^{1/2}, & b>a,\\ \pi b\,(1+\lambda_0^{-2}\cos^2\pi s)^{1/2}, & b<a,\end{cases}$$

$$\lambda_0=\begin{cases}b\,(b^2-a^2)^{-1/2}, & b>a,\\ b\,(a^2-b^2)^{-1/2}, & b<a.\end{cases}$$

5. Комментарии к таблицам. В качестве тестовых осесимметричных областей выбраны эллипсоиды вращения, меридиональное сечение которых задается в виде $r=a\sin\pi s$, $z=b\cos\pi s$, $0\leqslant s\leqslant 1$. Здесь a и b — положительные постоянные. В тестовых расчетах использованы как вытянутые $(b>a)$, так и сплюснутые $(b<a)$ вдоль оси симметрии z эллипсоиды вращения. При выборе параметров a и b предпочтение отдано отношениям $a/b=0.01$, $a/b=100$ и $a/b=0.001$ (недоступным для традиционных методов).

В таблицах левые столбцы содержат рассчитанные значения, правые — точные. Числовая информация таблиц представлена в узлах $s_j=2j/(2m+1)$, $j=0{,}1,\ \ldots,\ m$, $m=20$. Глобальные параметры вычислительных алгоритмов p (теорема 3.2) и L (представления (6.7)—(6.12)) для всех расчетов выбраны одинаковыми и соответственно равны 10 и 501. В итерационных процессах (теорема 7.2) в качестве начального приближения выбиралась функция, тождественно равная единице; количество итераций при этом ограничивалось десятью. Точность приближенных решений (и их градиентов) на границе области составила 5—6 десятичных разрядов (в чебышевской норме). Все вычисления проводились в арифметике с одинарной точностью. Время, затраченное на получение любой из таблиц, не превышало десяти минут на ЭВМ БЭСМ-6 (программы написаны на АЛГОЛе).

Табл. 1—8 содержат прямые значения производных потенциалов V, W по нормальному и касательному направлениям. В качестве расчетных формул брались соотношения (6.8), (6.9) и (6.11), (6.12). В левые столбцы помещены значения $N\overline{V}[\chi_1](s_j)$, $E\overline{V}[\chi_1](s_j)$, $0\leqslant j\leqslant 20$, $N\overline{W}[\chi_2](s_j)$, $E\overline{W}[\chi_2](s_j)$, $0\leqslant j\leqslant 20$. Правые столбцы таблиц рассчитывались по формулам (8.9), (8.10) в случае $n=1$. При этом учитывалось, что $\chi_1=-0.25$ э $\Delta^{-1}\Lambda\cos\pi s$, $\chi_2=-0.25\pi^{-1}\Lambda\cos\pi s$, $P_1(x)=p_1(x)=x$, $2Q_1(x)=x\ln((x+1)/(x-1))-2$, $q_1(x)=1-x\arcsin(x^2+1)^{-1/2}$.

Табл. 9—12 содержат результаты численного решения внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана. Схема получения численных решений, указанных в табл. 9—12, стандартна. Решения задач отыскивались с помощью потенциалов $\Phi(\lambda,\ \mu)=\overline{W}[\varphi]$, $\Psi(\lambda,\ \mu)=\overline{V}[\psi]$, плотности φ и ψ которых находились из уравнений

$$2\pi\varphi+\overline{W}[\varphi]=W_+,\quad -2\pi\psi+N\overline{V}[\psi]=N_-V \tag{8.18}$$

по схеме, изложенной в § 7. Правые части уравнений (8.18) определены в (8.13). Решения вычислялись в узлах s_j, $0\leqslant j\leqslant 20$, по формулам $\Phi(\lambda_0,\ \cos\pi s_j)=2\pi\varphi(s_j)+\overline{W}[\varphi](s_j)$, $\Psi(\lambda_0,\ \cos\pi s_j)=\overline{V}[\psi](s_j)$. Точные значения решений находились по формулам (8.14) и (8.15).

Таблица 1

Вычисление $N\overline{V}$ ($a = 1$, $b = 100$, $m = 20$)

j	$N\overline{V}$	$TN\overline{V}$
0	—0.004998766	—0.004998099
1	—0.000322910	—0.000322910
2	—0.000157854	—0.000157854
3	—0.000100924	—0.000100924
4	—0.000071051	—0.000071051
5	—0.000051932	—0.000051931
6	—0.000038101	—0.000038098
7	—0.000027183	—0.000027178
8	—0.000017956	—0.000017951
9	—0.000009697	—0.000009693
10	—0.000001917	—0.000001916
11	—0.000005773	0.000005770
12	0.000013740	0.000013735
13	0.000022411	0.000022406
14	0.000032371	0.000032367
15	0.000044543	0.000044541
16	0.000060602	0.000060601
17	0.000084060	0.000084060
18	0.000123973	0.000123973
19	0.000213391	0.000213391
20	0.000645557	0.000645557

Таблица 2

Вычисление $E\overline{V}$ ($a = 1$, $b = 100$, $m = 20$)

j	$E\overline{V}$	$TE\overline{V}$
0	0.000000000	0.000000000
1	—0.000004292	—0.000004292
2	—0.000004299	—0.000004299
3	—0.000004300	—0.000004300
4	—0.000004301	—0.000004301
5	—0.000004301	—0.000004301
6	—0.000004301	—0.000004301
7	—0.000004301	—0.000004301
8	—0.000004301	—0.000004301
9	—0.000004301	—0.000004301
10	—0.000004301	—0.000004301
11	—0.000004301	—0.000004301
12	—0.000004301	—0.000004301
13	—0.000004301	—0.000004301
14	—0.000004301	—0.000004301
15	—0.000004301	—0.000004301
16	—0.000004301	—0.000004301
17	—0.000004300	—0.000004300
18	—0.000004300	—0.000004300
19	—0.000004297	—0.000004297
20	—0.000004265	—0.000004265

Таблица 3

Вычисление $N\overline{W}$ ($a = 1$, $b = 100$, $m = 20$)

j	$N\overline{W}$	$TN\overline{W}$
0	0.010000000	0.010000000
1	0.000646067	0.000646066
2	0.000315829	0.000315829
3	0.000201926	0.000201925
4	0.000142161	0.000142155
5	0.000103927	0.000103901
6	0.000076286	0.000076224
7	0.000054472	0.000054377
8	0.000036017	0.000035915
9	0.000019467	0.000019394
10	0.000003849	0.000003833
11	—0.000011592	—0.000011545
12	—0.000027573	—0.000027480
13	—0.000044932	—0.000044829
14	—0.000064838	—0.000064758
15	—0.000089159	—0.000089116
16	—0.000121262	—0.000121248
17	—0.000168185	—0.000168183
18	—0.000248040	—0.000248040
19	—0.000426944	—0.000426944
20	—0.001291606	—0.001291605

Таблица 4

Вычисление $E\overline{W}$ ($a = 1$, $b = 100$, $m = 20$)

j	$E\overline{W}$	$TE\overline{W}$
0	0.000000000	—0.000000000
1	—0.004987408	—0.004987408
2	—0.004995356	—0.004995356
3	—0.004996831	—0.004996831
4	—0.004997360	—0.004997345
5	—0.004997688	—0.004997580
6	—0.004998080	—0.004997704
7	—0.004998630	—0.004997776
8	—0.004999271	—0.004997817
9	—0.004999823	—0.004997840
10	—0.005000101	—0.004997849
11	—0.005000005	—0.004997846
12	—0.004999570	—0.004997831
13	—0.004998949	—0.004997799
14	—0.004998336	—0.004997745
15	—0.004997866	—0.004997651
16	—0.004997528	—0.004997482
17	—0.004997147	—0.004997143
18	—0.004996312	—0.004996312
19	—0.004993292	—0.004993292
20	—0.004955986	—0.004955986

Таблица 5

Вычисление $N\overline{V}$ ($a = 100$, $b = 1$, $m = 20$)

j	$N\overline{V}$	$TN\overline{V}$
0	0.312382185	0.312382191
1	0.312410787	0.312381818
2	0.312356475	0.312380626
3	0.312393027	0.312378362
4	0.312371339	0.312374463
5	0.312359176	0.312367725
6	0.312373984	0.312353313
7	0.312303592	0.312329383
8	0.312289906	0.312261177
9	0.311941180	0.311967749
10	0.302277429	0.302265161
11	—0.311198945	—0.311216805
12	—0.312180473	—0.312175569
13	—0.312311632	—0.312304500
14	—0.312327350	—0.312344954
15	—0.312387645	—0.312362527
16	—0.312342971	—0.312371568
17	—0.312404019	—0.312376670
18	—0.312358674	—0.312379654
19	—0.312390372	—0.312381335
20	—0.312397830	—0.312382099

Таблица 6

Вычисление $E\overline{V}$ ($a = 100$, $b = 1$, $m = 20$)

j	$E\overline{V}$	$TE\overline{V}$
0	0.000000000	0.000000000
1	—0.000980532	—0.000980453
2	—0.002008669	—0.002008825
3	—0.003143031	—0.003142883
4	—0.004464671	—0.004464726
5	—0.006108566	—0.006108717
6	—0.008327085	—0.008326615
7	—0.011670232	—0.011671160
8	—0.017668496	—0.017666905
9	—0.032683949	—0.032686779
10	—0.160249430	—0.160238229
11	—0.054776666	—0.054778997
12	—0.023083675	—0.023083476
13	—0.014156467	—0.014156089
14	—0.009800166	—0.009800736
15	—0.007122738	—0.007122165
16	—0.005234216	—0.005234689
17	—0.003773966	—0.003773644
18	—0.002558144	—0.002558312
19	—0.001485447	—0.001485403
20	—0.000487259	—0.000487338

Таблица 7

Вычисление $N\overline{W}$ ($a = 100$, $b = 1$, $m = 20$)

j	$N\overline{W}$	$TN\overline{W}$
0	1.000000000	1.000000000
1	0.999998179	0.999998807
2	0.999985586	0.999994992
3	1.000011874	0.999987742
4	0.999935184	0.999975263
5	1.000006908	0.999953692
6	0.999855143	0.999913960
7	0.999881414	0.999830952
8	0.999596365	0.999612609
9	0.998587836	0.998673288
10	0.968532173	0.967613297
11	—0.996706307	—0.996269361
12	—0.999130691	—0.999338560
13	—0.999873664	—0.999751295
14	—0.999812847	—0.999880797
15	—0.999966453	—0.999937052
16	—0.999962719	—0.999965996
17	—0.999970669	—0.999982329
18	—0.000008385	—0.999991878
19	—0.999984235	—0.999997262
20	—1.000003298	—0.999999705

Таблица 8

Вычисление $E\overline{W}$ ($a = 100$, $b = 1$, $m = 20$)

j	$E\overline{W}$	$TE\overline{W}$
0	0.000000000	0.000000000
1	0.048252389	0.048247922
2	0.098845921	0.098853906
3	0.154668522	0.154660648
4	0.219705252	0.219708303
5	0.300601594	0.300608759
6	0.409774386	0.409751107
7	0.574289304	0.574335540
8	0.869464494	0.869385001
9	1.608368510	1.608510098
10	7.885852597	7.885292294
11	2.695547499	2.695663870
12	1.135943088	1.135933375
13	0.696637583	0.696618391
14	0.482263626	0.482292304
15	0.350509144	0.350480360
16	0.257574395	0.257598055
17	0.185716301	0.185700298
18	0.125886026	0.125894016
19	0.073097929	0.073096394
20	0.023983502	0.023981788

Таблица

Задача Дирихле ($a = 1$, $b = 100$, $m = 20$)

j	Φ	$T\Phi$
0	—19999.9999982	—20000.0000000
1	—19533.9406194	—19533.9406187
2	—18179.2025713	—18179.2025723
3	—16062.0572227	—16062.0572223
4	—13379.8377914	—13379.8377926
5	—10382.5464898	—10382.5464883
6	—7349.5524866	—7349.5524873
7	—4563.5557166	—4563.5527162
8	—2284.2224567	—2284.2224572
9	—724.0117390	—724.0117378
10	—28.3434547	—28.3434553
11	—262.0589133	—262.0589135
12	—1403.3741450	—1403.3741453
13	—3345.9103362	—3345.9103355
14	—5908.6090943	—5908.6090940
15	—8852.6084036	—8852.6084042
16	—11903.5062861	—11903.5062871
17	—14776.9370463	—14776.9370451
18	—17205.0761965	—17205.0761968
19	—18961.6036518	—18961.6036524
20	—19882.7983775	—19882.7983780

Таблица 10

Задача Неймана ($a = 1$, $b = 100$, $m = 20$)

j	Ψ	$T\Psi$
0	15.2160167	15.2164331
1	14.6846869	14.6845775
2	13.1387293	13.1385838
3	10.7227032	10.7225496
4	7.6618324	7.6616667
5	4.2414083	4.2412315
6	0.7803051	0.7800533
7	—2.3987682	—2.3992612
8	—4.9994474	—5.0003768
9	—6.7794422	—6.7808510
10	—7.5730486	—7.5747305
11	—7.3064346	—7.3080202
12	—6.0043999	—6.0055793
13	—3.7881124	—3.7888047
14	—0.8639691	—0.8643159
15	2.4955044	2.4953038
16	5.9770838	5.9769134
17	9.2561643	9.2560020
18	12.0270887	12.0269347
19	14.0315860	14.0314407
20	15.0828305	15.0826854

Таблица 11

Задача Дирихле ($a = 100$, $b = 1$, $m = 20$)

j	Φ	$T\Phi$
0	—2.0000790	—2.0000000
1	231.0647082	231.0646434
2	908.5352679	908.5352668
3	1967.2667121	1967.2667198
4	3308.5776012	3308.5775911
5	4807.4480075	4807.4480288
6	6324.1725159	6324.1724925
7	7717.3812908	7717.3813176
8	8857.2174311	8857.2173884
9	9637.4397286	9637.4397580
10	9985.3261055	9985.3260718
11	9868.4507841	9868.4508149
12	9297.7076158	9297.7076046
13	8326.2938071	8326.2938266
14	7044.7522625	7044.7522546
15	5572.5318042	5572.5318105
16	4046.8540797	4046.8540631
17	2609.9231668	2609.9231876
18	1395.6715465	1395.6715104
19	517.2759793	517.2760497
20	56.6096296	56.6096007

Таблица 12

Задача Неймана ($a = 100$, $b = 1$, $m = 20$)

j	Ψ	$T\Psi$
0	156.7800796	156.7815430
1	151.2999018	151.3016038
2	135.3730077	135.3725562
3	110.4785577	110.4791023
4	78.9412912	78.9414916
5	43.6992966	43.6992570
6	8.0369847	8.0372292
7	—24.7208415	—24.7206337
8	—51.5208466	—51.5210623
9	—69.8666100	—69.8660633
10	—78.0454585	—78.0457503
11	—75.2980240	—75.2977175
12	—61.8782300	—61.8781012
13	—39.0376591	—39.0377067
14	—8.9056654	—8.9054233
15	25.7099708	25.7102025
16	61.5829699	61.5827446
17	95.3678078	95.3686234
18	123.9190917	123.9187512
19	144.5713245	144.5720499
20	155.4016491	155.4034831

Таблица 13

Задача обтекания ($a = 0.5$, $b = 500$, $m = 20$)

j	$E\overline{\varphi}$	$TE\overline{\varphi}$
0	0.0000000	0.0000000
1	0.9999876	0.9999856
2	1.0000029	1.0000016
3	1.0000035	1.0000046
4	1.0000041	1.0000056
5	1.0000045	1.0000061
6	1.0000054	1.0000063
7	1.0000062	1.0000065
8	1.0000071	1.0000065
9	1.0000077	1.0000066
10	1.0000081	1.0000066
11	1.0000079	1.0000066
12	1.0000074	1.0000066
13	1.0000066	1.0000065
14	1.0000058	1.0000064
15	1.0000049	1.0000062
16	1.0000043	1.0000059
17	1.0000037	1.0000052
18	1.0000035	1.0000035
19	0.9999993	0.9999975
20	0.9999240	0.9999218

Таблица 14

Задача Дирихле ($a = 0.5$, $b = 500$, $m = 20$)

j	Ф	ТФ
0	—499999.99998	—500000.00000
1	—488349.09220	—488349.09219
2	—454482.31740	—454482.31743
3	—401556.30354	—401556.30352
4	—334504.13682	—334504.13685
5	—259575.56325	—259575.56321
6	—183754.46604	—183754.46633
7	—114107.91191	—114107.91955
8	—57127.44789	—57127.48361
9	—18124.10665	—18124.14629
10	—733.29771	—733.30007
11	—6575.87728	—6575.89732
12	—35107.32025	—35107.36581
13	—83668.34700	—83668.36679
14	—147732.66266	—147732.66457
15	—221329.00428	—221329.00431
16	—297597.67606	—297597.67609
17	—369429.88937	—369429.88935
18	—430130.36347	—430130.36347
19	—474041.37626	—474041.37626
20	—497070.10446	—497070.10448

В табл. 13, 14 представлены результаты по классической гидродинамической задаче обтекания осесимметричного тела потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Известно [8], что параметром, характеризующим реализуемость этих задач на ЭВМ, является удлинение эллипсоида вращения, т. е. отношение его полуосей a/b. Указанная задача обтекания (внешняя задача Неймана для потенциала скорости) для сильно удлиненных тел($b \gg a$) до недавнего времени считалась численно неразрешимой [8]. В связи с этим представляют интерес табл. 13 и 14, в которых помещены результаты численного решения внешней задачи Неймана и внутренней задачи Дирихле для сильно вытянутого вдоль оси симметрии эллипсоида вращения. Несмотря на «экзотичность» указанной области ($a/b = 0.001$), предлагаемая методика прекрасно справляется с построением численного решения этих задач.

Левый столбец табл. 13 содержит численное решение задачи внешнего обтекания эллипсоида вращения с отношением полуосей $a/b = 0.001$ (т. е прямое значение касательной производной на границе решения внешней задачи Неймана (8.16) с $U \equiv 1$). В правый столбец помещены точные значения касательных скоростей на границе эллипсоида, вычисленные по формуле (8.17) с $U \equiv 1$.

В табл. 14 представлено численное решение внутренней задачи Дирихле по данным (8.13) для эллипсоида вращения с отношением полуосей, равным $a/b = 0.001$ (левый столбец) и соответствующее точное решение этой задачи, определенное по формулам (8.14) (правый столбец).

Дополнительное представление о роли параметров L и p в вычислительном процессе можно получить из работы автора [32].

§ 9. К вопросу конструирования численных алгоритмов нестационарных задач идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами

В этом параграфе подытоживается то немногое, что стало известно о нестационарных задачах со свободными границами в идеальной несжимаемой жидкости, и ставятся вопросы, которые смогут служить ориентиром при численном исследовании этих задач. Все сказанное здесь является прямым следствием доказанной в § 1 теоремы существования аналитического решения в задачах со свободными границами.

Общая трехмерная задача о неустановившемся движении идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами представляет собой очень сложную вычислительную проблему. Поэтому ограничимся осесимметричным случаем при естественном предположении: осевая симметрия относительно некоторой оси z задачи, заданная в момент $t=0$, сохраняется для всех $t \geqslant 0$, при которых решение определено. Благодаря этому обстоятельству в уравнениях движения в качестве независимых переменных можно выбрать время t и цилиндрические координаты $\mathbf{r} = (r, z)$ — инварианты группы вращения вокруг оси z.

Рассмотрим для определенности эволюцию конечного жидкого объема $\omega(t)$, ограниченного одной свободной поверхностью $\partial\omega_t$. Все выводы остаются в силе и в более общей ситуации, если в процессе движения свободные поверхности и жесткие стенки (если есть таковые) не имеют точек контакта.

Нахождение потенциальных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей $\partial\omega_t$ сводится к решению следующей задачи Коши для псевдодифференциального оператора $\mathbf{K}$ (черта означает прямое значение функций на $\partial\omega_t$)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \alpha\overline{\nabla\varphi}, \quad \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0(s),$$
$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = |\overline{\nabla\varphi}|^2/2 - U + \sigma\Omega, \quad \bar{\varphi}|_{t=0} = \varphi_0(s), \tag{9.1}$$

$$\bar{\varphi}_n = \mathbf{K}\bar{\varphi}_s. \tag{9.2}$$

Здесь U — потенциал массовых сил; σ — поверхностное натяжение жидкости; Ω — кривизна поверхности $\partial\omega_t$; s, n — соответственно касательный и нормальный векторы к $\partial\omega_t$; α — ортогональная матрица перехода от дифференцирования по (r, z) к дифференцированию по (s, n) на $\partial\omega_t$; $\nabla\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_s, \bar{\varphi}_n)$ — образ функций $(r, \bar{\varphi})$ при действии отображения u, определенного так: по данным (границе $\partial\omega_t$ и функции $\bar{\varphi}$ на ней) путем решения задачи Дирихле в области ω_t восстанавливается гармоническая функция $\varphi(r, z, t)$ и затем вычисляется $\overline{\nabla\varphi} = (\nabla\varphi)|_{\partial\omega_t}$. Образ отображения u — это значение касательной и нормальной составляющих скорости частицы жидкости на границе $\partial\omega_t$. Укажем непосредственную связь между значениями $\bar{\varphi}_s$ и $\bar{\varphi}_n$ на $\partial\omega_t$. Для этого зафиксируем границу $\partial\omega_t$ в определении u. В результате отображение $u^\partial\colon \bar{\varphi} \to \overline{\nabla\varphi}$ будет линейным, а оператор $\mathbf{K} \equiv \mathbf{K}(\partial\omega_t)$ в (9.2), очевидно, псевдодифференциальным.

Отметим, что система (9.1) нелинейна, а в силу (9.2) и нелокальна. Граница $\partial\omega_t$ является искомым элементом в задаче (9.1).

Если поверхностного натяжения нет, т. е. $\sigma \equiv 0$, то задача (9.1) имеет аналитическое по времени t решение при аналитичных начальных данных (доказательство осуществляется по схеме, изложенной в § 1).

Согласно теореме из § 1, свободные границы в задаче (9.1) очень быстро становятся неустойчивыми. В связи с этим при конструировании численного решения возникает проблема отличия неустойчивости, обусловленной природой уравнений (9.1), от неустойчивости, порожденной непосредственно численным методом решения системы (9.1). Если под корректностью вычислительного алгоритма понимать его способность сохранять в достаточной мере для приближений дифференциальные свойства точного решения задачи, то в связи с реализацией уравнений (9.1) на ЭВМ возникают два принципиальных вопроса. Первый — численная реализация соотношения (9.2), второй — дискретизация задачи (9.1), классом корректности которой является некоторое пространство бесконечно дифференцируемых функций. В случае $\sigma = 0$ классом корректности задачи (9.1) будет некоторое пространство аналитических функций. В задачах с $\sigma \neq 0$ при конструировании численного алгоритма также следует ориентироваться на класс $\mathbf{C}^{\infty}$, поскольку из общих соображений вытекает, что поверхностное натяжение должно способствовать стабилизации свободных границ, т. е. расширению класса корректности задачи (9.1). Заметим, однако, что никаких точных результатов здесь пока неизвестно [20].

В задаче (9.1) одна независимая переменная — время t — имеет особое значение. В связи с этим решать систему (9.1) можно шагами по времени. Каждый шаг представляет собой переход системы из состояния в момент t_0 к состоянию в момент $t_0 + \tau$ (величина τ меняется на каждом шаге интегрирования). Эффективность численной реализации указанного процесса, при котором рекуррентно одно за другим определяются положения свободной границы в точках сетки, зависит от того, до какой степени можно предсказать поведение свободных границ по предыдущим ее положениям. Предварительная информация о классе корректности задачи (9.1) оказывается, таким образом, весьма существенной для правильной стратегии выбора шага τ, поскольку необоснованная экстраполяция решения с исходного промежутка времени на более широкий интервал приводит к значительным ошибкам. Для аналитических функций процесс экстраполяции можно организовать устойчивым способом [29].

Таким образом, эволюционный характер задачи (9.1) позволяет свести ее численное исследование к решению линейных задач на шагах по времени. Центральным моментом при этом будет реализация оператора $\mathbf{K}$ — построение численного решения вспомогательной эллиптической задачи в гладкой осесимметричной области достаточно произвольной формы. Остановимся на этом более подробно. Входными данными для задачи (9.2) на шаге по времени являются граница $\partial\omega$ и функция $\bar{\varphi}|_{\partial\omega}$. Они формируются в процессе решения задачи (9.1) на предыдущих временных шагах и представляются в виде определенного количества битовой информации. Естественно потребовать, чтобы полученная таким образом информация перерабатывалась в $\bar{\varphi}_n$ на шаге по времени по возможности без потерь. Препятствием здесь оказывается [21] насыщаемость вычислительного процесса, осуществляющего реализацию соотношения (9.2). Поэтому ввиду большой чувствительности задачи (9.1) к классу гладкости начальных данных численное решение эллиптической задачи (9.2) на шаге по времени следует отыскивать с помощью алгоритмов без насыщения. Таким образом, численную реализацию отображения $\mathbf{K}: \bar{\varphi}_s \to \bar{\varphi}_n$ удобно проводить на основе методов теории потенциала. При этом способе задача (9.2) эквивалентна уравнению Фредгольма второго рода, что позволяет довести численное исследование в известном смысле до конца (см. [21]). Вывод уравнения Фредгольма для задачи (9.2) основан на формуле Грина

$$4\pi\varphi = W[\bar{\varphi}] + V[\psi], \tag{9.3}$$

представляющей гармоническую функцию в виде суммы потенциалов двойного и простого слоев, причем плотности потенциалов вычисляются по известным значениям гармонической функции $\bar{\varphi}$ и ее нормальной производной $\psi \equiv \overline{\varphi}_n$ на поверхности $\partial\omega$. Дифференцируя (9.3) и применяя лемму 2.3, получаем нужное уравнение

$$2\pi\psi - N\overline{V}[\psi] = N\overline{W}[\overline{\varphi}]. \qquad (9.4)$$

Ядро интегрального оператора $N\overline{V}$ имеет слабую особенность, и значит, он вполне непрерывен в $C(\partial\omega)$. Уравнение (9.4) однозначно разрешимо в пространстве непрерывных функций с нулевым средним значением по $\partial\omega$.

Качество численного алгоритма решения уравнения (9.4) зависит от таблицы искомой функции ψ [21]. Зададим таблицу набором значений ψ в узлах решетки разбиения. Теоретически при любом конечном числе заданных значений непрерывной функции в узлах разбиения, в промежутках между ними возможны сколь угодно большие отклонения от этих значений. Наличие их свидетельствует о том, что задача аппроксимации решения ψ поставлена неправильно, поскольку таблица решения должна коррелироваться классом гладкости отыскиваемого решения.

В ЭВМ таблица представляется последовательностью битов. Тем самым приближенное решение задачи зависит от расшифровывающего таблицу алгоритма. Ясно, что восстановление приближенного решения задачи всегда неоднозначно. Однако решение задачи (9.4), принадлежа определенному функциональному компакту, подчиняется законам его структурной организации. Хорошо известно [49], что конструктивно гладкость функций можно выразить с помощью методов теории приближений (см. § 5). Поэтому интерпретировать численное решение задачи (9.4) на основе класса корректности можно, задав таблицу решения ψ набором его значений в узлах $s_i = 2i/(2m+1)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, и приняв в качестве расшифровывающего таблицу алгоритма интерполяционный многочлен Лагранжа (7.5). Точность указанного способа аппроксимации ψ определяется неравенством Лебега. В связи со сказанным становится особенно ясной роль аналитических функций, компакты которых устроены довольно просто [21, 52]. Способ аппроксимации интегральных операторов $N\overline{V}[\psi]$, $N\overline{W}[\overline{\varphi}]$ описан в § 7.

Таким образом, задача (9.4) на шаге по времени сводится к аппроксимирующей ее конечномерной задаче — системе линейных алгебраических уравнений с матрицей размеров $(m+1)\times(m+1)$. Точность определения решения этой системы линейных уравнений ограничена фиксированным числом разрядов, отводимых для представления чисел на ЭВМ. В связи с этим весьма тонким критерием трудности решения дискретной задачи выступает ее мера обусловленности [57]. Оказалось (теорема 7.1), что при выбранном способе конечномерной аппроксимации уравнения (9.4), число обусловленности не зависит от m. Значение этого факта в целом для задачи (9.1) состоит в том, что для сохранения точности приближенного решения ее на шаге по времени в промежуточных вычислениях следует удерживать всего лишь определенное, не зависимое от m, количество дополнительных точных разрядов. В связи с этим линейную систему уравнений целесообразно решать итерационным методом, поскольку ошибки округления каждой итерации будут затем исправляться последующими (теорема 7.2). В качестве начального приближения удобно принять значение функции ψ с предыдущего временного шага (теорема 7.3).

Для заданного начального состояния системы (9.1) в момент времени $\overline{t} = 0$ искомое решение задачи (9.1) — это совокупность значений $(r, z, \overline{\varphi})$ вдоль некоторого временного интервала $[0, t_*)$. Разработку приближенного метода решения задачи со свободной границей следует начинать с дискретного описания границы, вводя сетку, состящую из m точек (узлов), распределенных по границе. Математически указанная процедура означает, что бесконечномерная динамическая система (9.1) заменяется конечномерной (по числу узлов m). Важнейшее требование, предъявляемое к построенной конечномерной модели — ее адекватность оригиналу (9.1). Вопрос о разумном ограничении числа m (числа степеней свободы конечномерной модели) является одним из центральных, поскольку тесно связан с возможностью доведения численного исследования задачи (9.1) до конца. Уменьшать m без заметной потери точности можно исходя из класса корректности задачи (9.1). Например, в отсутствие поверхностного натяжения следует воспользоваться аналитичностью начальных данных и решения задачи (9.1). В результате оптимальное значение для m может оказаться весьма небольшим.

Отметим, что способ аппроксимации решения интегрального уравнения (9.4), основанный на интерполяционном многочлене Лагранжа (7.5), одновременно указывает и на способ сведения динамической системы (9.1) к некоторому конечномерному ее аналогу. Иначе говоря, (9.1) редуцируется к задаче Коши для конечной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что полученная конечномерная модель не снимает вопроса о соответствии свойств ее решения свойствам точного решения задачи (9.1). Адекватность нужно обеспечивать соответствующими численными алгоритмами без насыщения для решения задачи Коши. В связи с этим конечномерная модель должна конструироваться с ориентацией на предполагаемый метод ее решения с тем, чтобы по возможности обеспечить сохранение аналитичности ее решения (в смысле конструктивной теории приближения функций, см. § 5).

В более сложных ситуациях (например, в задачах с поверхностным натяжением), когда отсутствует точно очерченный класс корректности задачи (9.1), адекватность получаемой конечномерной модели становится не столь ясной. Применение же неадекватной модели может привести к тому, что построенный численный алгоритм не уловит или чрезмерно исказит свойства решения точной задачи (9.1). В таких случаях проверку адекватности удобно осуществлять с помощью специально разработанной для этой цели системой тестов. Иногда полезно воспользоваться таким фактом. Поскольку вся информация, определяющая начальное состояние системы (9.1), сохраняется в ходе эволюции системы, то она восстанавливается обращением времени при решении задачи Коши. Указанный прием может служить тестом в задачах со свободными границами, так как точные решения этих задач выписываются в явном виде лишь в специальных случаях [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белых В. Н.** К вопросу конструирования численных алгоритмов нестационарных задач идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами // Уравнения в частных производных и задачи со свободными границами.— Киев: Наук. думка, 1983.— С. 24—28.
2. **Белых В. Н.** Численные алгоритмы без насыщения в осесимметричных задачах гидродинамики: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07.— Новосибирск, 1984.— 16 с.
3. **Белых В. Н.** Теорема существования и единственности решения задачи о сферическом пузыре // Динамика сплошной среды.— Новосибирск, 1972.— Вып. 12.— С. 63—76.
4. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении со свободной границей.— Новосибирск: Наука, 1967.— С. 5—75.
5. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1977.— 407 с.
6. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.— 757 с.
7. **Ламб Х.** Гидродинамика.— М.: Гостехиздат, 1947.— 928 с.
8. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1978.— 736 с.
9. **Налимов В. И., Плотников П. И.** Краевые задачи в теории движения жидкости со свободными границами // Динамика сплошной среды.— Новосибирск, 1979.— Вып. 38.— С. 111—142.
10. **Овсянников Л. В.** О всплывании пузыря // Некоторые проблемы математики и механики.— Л.: Наука, 1970.— С. 209—222.

11. **Бабенко К. И.** Об использовании ЭВМ при исследовании гидродинамической устойчивости // Исследование гидродинамической устойчивости с помощью ЭВМ.— М.: Изд-во Ин-та прикл. мат. АН СССР, 1981.— С. 5—79.
12. **Бабенко К. И., Петрович В. Ю.** О неустойчивости Рэлея — Тейлора.— М., 1978.— 48 с.— (Препр./АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 68).
13. **Бабенко К. И., Петрович В. Ю.** О неустойчивости Рэлея — Тейлора // Докл. АН СССР.— 1979.— Т. 245, № 3.— С. 551—554.
14. **Волевич Л. Р.** Исследование неустойчивости Гельмгольца — Кельвина.— М., 1979.— 41 с. (Препр./АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 38).
15. **Воинов О. В., Воинов В. В.** Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Докл. АН СССР.— 1975.— Т. 221, № 3.— С. 559—562.
16. **Гарипов Р. М.** Кавитационное обтекание эллипсоида // Динамика сплошной среды.— Новосибирск, 1969.— Вып. 1.— С. 154—179.
17. **Кедринский В. К.** Поверхностные эффекты при подводном взрыве (обзор) // Журн. прикл. математики и техн. физики.— 1978.— № 4.— С. 66—87.
18. **Пухначев Ю. В.** Введение в динамику пузыря, находящегося внутри жидкости // Математические методы в динамике космических аппаратов.— М., 1968.— Вып. 6.— С. 22—37.
19. **Борисов И. Д.** О движении газового пузыря в идеальной жидкости // Тр./АН УССР. Физ. техн. ин-т низких температур.— 1969.— Вып. 1.— С. 56—63.
20. **Налимов В. И., Пухначев В. В.** Неустановившиеся движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей.— Новосибирск: Изд-во НГУ, 1975.— 173 с.
21. **Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики**/Н. Н. Анучина, К. И. Бабенко, С. К. Годунов и др.— М.: Наука, 1977.— 295 с.
22. **Плотников П. И.** Некорректность нелинейной задачи о развитии неустойчивости Рэлея — Тэйлора // Зап. научн. сем./АН СССР. Ленингр. отд-ние. Мат. ин-т.— 1980.— Т. 96.— С. 240—246.
23. **Бибербах Л.** Аналитическое продолжение.— М.: Наука, 1967.— 240 с.
24. **Бабенко К. И.** О явлении насыщения в численном анализе // Докл. АН СССР.— 1978.— Т. 241, № 3.— С. 505—508.
25. **Бабенко К. И., Петрович В. Ю.** О доказательных вычислениях на ЭВМ.— М., 1983.— 28 с.— (Препр./АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 133).
26. **Бабенко К. И.** Несколько замечаний о дискретизации эллиптических задач // Докл. АН СССР.— 1975.— Т. 221, № 1.— С. 11—14.
27. **Бабенко К. И., Стебунов В. А.** О спектральной задаче Орра — Зоммерфельда.— М., 1975.— 34 с.— (Препр./АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 93).
28. **Бабенко К. И.** О некоторых общих свойствах вычислительных алгоритмов.— М., 1977.— 71 с.— (Препр./АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 29).
29. **Бабенко К. И.** Некоторые вопросы приближенного задания и вычисления функций.— М., 1970.— 153 с.— (Препр./АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 1—4).
30. **Бабенко К. И.** Об одном подходе к оценке качества вычислительных алгоритмов.— М., 1974.— 68 с.— (Препр./АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 7).
31. **Бахвалов Н. С.** Численные методы.— М.: Наука, 1973.— 631 с.
32. **Белых В. Н.** Вычисление на ЭВМ интеграла Гаусса теории потенциала // Динамика сплошной среды.— Новосибирск, 1979.— Вып. 43.— С. 20—44.
33. **Иванов В. Я., Ильин В. П.** Типовые программы решения задач математической физики.— Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1978.— 27 с.
34. **Колобов Б. П.** Потенциальное обтекание идеальной несжимаемой жидкостью произвольно движущегося тела вращения при наличии отсоса // Численные методы механики сплошной среды.— Новосибирск, 1971.— Т. 2, № 2.— С. 19—37.
35. **Цецохо В. А.** Внешняя задача Неймана для тела вращения // Вычислительные системы.— Новосибирск, 1964.— Вып. 12.— С. 26—51.
36. **Шепеленко В. Н.** Расчет потенциально установившегося течения около тела вращения // Численные методы механики сплошной среды.— Новосибирск, 1971.— Т. 2, № 3.— С. 46—55.
37. **Воинов В. В., Воинов О. В., Петров А. Г.** Метод расчета потенциального обтекания тела вращения потоком несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1974.— Т. 14, № 3.— С. 797—802.
38. **Алгазин С. Д., Бабенко К. И.** Об одном численном алгоритме решения задачи на собственные значения для линейных дифференциальных операторов.— М., 1978.— 80 с.— (Препр./АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 46).
39. **Алгазин С. Д., Бабенко К. И.** Об одном численном алгоритме решения задачи на собственные значения для линейных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР.— 1979.— Т. 224, № 5.— С. 1049—1053.
40. **Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.** Курс современного анализа.— М.: Физматгиз, 1963.— Т. 2.— 515 с.
41. **Гюнтер Н. М.** Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.— М.: Гостехиздат, 1953.— 416 с.

42. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1971.— 512 с.
43. **Михлин С. Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1962.— 254 с.
44. **Ляпунов А. М.** Работы по теории потенциала.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.— 178 с.
45. **Мак-Коннел А. Дж.** Введение в тензорный анализ.— М.: Физматгиз, 1963.— 411 с.
46. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики.— М.: Наука, 1974.— Т. 3, ч. 2.— 672 с.
47. **Пыхтеев Г. Н.** Точные методы вычисления интегралов типа Коши по разомкнутому контуру.— Apl. mat.— 1965.— Т. 10, № 4.— С. 351—372.
48. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи.— М.: Физматгиз, 1963.— 639 с.
49. **Дзядык В. К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.— 222 с.
50. **Даугавет И. К.** Введение в теорию приближения функций.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.— 184 с.
51. **Люк Ю.** Специальные математические функции и их аппроксимации.— М.: Мир, 1980.— 608 с.
52. **Кушнель А. К.** Об интерполяции периодических функций // Укр. мат. журн.— 1986.— Т. 38, № 1.— С. 114—116.
53. **Гаркави А. Л.** О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1960.— Т. 24, № 1.— С. 103—128.
54. **Даугавет И. К.** Об одном свойстве вполне непрерывных операторов в пространстве С // Успехи мат. наук.— 1963.— Т. 18, вып. 5.— С. 157—158.
55. **Вайникко Г. М.** Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений.— Тарту: Изд-во Тарт. гос. ун-та, 1970.— 192 с.
56. **Бабенко К. И., Юрьев С. П.** Об одной задаче Гаусса.— М., 1977.— 69 с.— (Препр./ АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 63).
57. **Годунов С. К.** Решение систем линейных уравнений.— Новосибирск: Наука, 1980.— 177 с.
58. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— 5-е изд.— М.: Наука, 1971.— 1108 с.

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ АНАЛОГОВ ДИССИПАТИВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

А. М. БЛОХИН

В настоящее время для нахождения приближенных решений уравнений математической физики часто используют конечно-разностные методы. Так, в задачах газовой динамики для расчета течений с ударными волнами широко применяются различные разностные схемы (см. [1]). При этом сплошь и рядом имеет место следующая парадоксальная ситуация: вычислитель находит приближенное «решение» краевой задачи, не зная, разрешима или нет эта математическая задача. Однако в рамках теории дифференциальных уравнений давно принято изучать одновременно исходную математическую задачу и ее конечно-разностный аналог. Здесь уместно вспомнить основополагающую работу [2], а также монографии [3, 4]. Очевидно, что этот подход в полном объеме удается реализовать в основном лишь для линейных краевых задач.

В основу конструирования и исследования разностных схем мы положим требование адекватности разностной модели исходной дифференциальной задаче. Под адекватностью будем понимать следующее: разностная модель строится так, чтобы с ее помощью можно было бы доказать теорему существования решения исходной дифференциальной задачи. Последнее обстоятельство представляется нам чрезвычайно важным фактом, поскольку при численных расчетах мы должны быть уверены в том, что приближенное решение действительно стремится в пределе к решению исходной дифференциальной задачи.

В качестве исходных математических моделей мы рассмотрим смешанные задачи для симметрических t-гиперболических систем с диссипативными граничными условиями (см. [3]) и для системы уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне (см. [5]). Коррект-