

При расчетах задач газовой динамики хорошо зарекомендовала себя разностная схема Годунова [4]. В настоящее время активно разрабатываются варианты схемы Годунова повышенного порядка точности (см., например, [2]). В то же время возникают новые задачи математической физики, описываемые гиперболическими уравнениями, требующие численного решения.

В настоящей работе дано применение схемы Годунова для расчета гиперболических уравнений термоупругопластичности, в которых пластические деформации и теплопередача моделируются младшими членами дифференциальных уравнений. В работе [3] подобная схема использовалась для расчета уравнений упругопластической среды с релаксацией касательных напряжений. Методика, изложенная в данной работе, разрабатывалась независимо и применялась для решения ряда задач, например для расчета импульсного нагрева металлов электрическим током [4].

§ 1. Одномерные уравнения механики релаксирующей сплошной среды

В этом параграфе рассматриваются одномерные дифференциальные уравнения механики нелинейной упругопластической сплошной среды с конечной скоростью распространения тепла. Пластические деформации моделируются с помощью релаксационных членов (такой подход для пластических деформаций сдвига см. в [5]). Возможность учета в рамках релаксационной модели пластических деформаций объема обсуждалась в [6]. В [7] сформулированы квазилинейные уравнения для корректного описания процессов теплопередачи с конечной скоростью. Приведенные ниже уравнения представляют собой одномерный вариант уравнений, объединяющий процессы релаксации касательных напряжений, давления и потока тепла (см. [5–7]).

Пусть t — время, r — пространственная координата. Система уравнений

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{\nu}{r^\nu} (\sigma_2 - \sigma_1) &= 0, \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} + u \frac{\partial h_1}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r} &= - \frac{h_1 - (h_1 + h_2 + h_3)/3}{\tau_\sigma} - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3\tau_p}, \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + u \frac{\partial h_2}{\partial r} - \nu \frac{u}{r^\nu} &= - \frac{h_2 - (h_1 + h_2 + h_3)/3}{\tau_\sigma} - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3\tau_p}, \\ \frac{\partial h_3}{\partial t} + u \frac{\partial h_3}{\partial r} &= - \frac{h_3 - (h_1 + h_2 + h_3)/3}{\tau_\sigma} - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3\tau_p}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial r} &= - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{\tau_p}, \\ \rho \frac{\partial q}{\partial t} + \rho u \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial r} &= - \frac{\rho q}{\tau_T}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$r^\nu \frac{\partial \rho (E + u^2/2 + \alpha q^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} r^\nu [\rho u (E + u^2/2 + \alpha q^2/2) - u \sigma_1 + \alpha T q] = 0$$

при $\nu = 0$ и $\nu = 1$ описывает процессы соответственно в плоской и цилиндрической геометрии. Первое уравнение — это закон сохранения импульса: u — скорость движения среды; ρ — плотность; σ_1 — напряже-

ние вдоль r -оси; σ_2 в плоском случае — напряжение, перпендикулярное r -оси (среда предполагается изотропной); σ_2 в цилиндрическом случае — напряжение, действующее по углу. Три следующих уравнения для h_1, h_2, h_3 являются уравнениями эволюции главных значений логарифмического тензора эффективных упругих деформаций Генки. Касательные деформации в одномерных процессах отсутствуют. Здесь h_1 — деформация вдоль r -оси. В случае плоской геометрии $h_2 = h_3$ — деформации, перпендикулярные r -оси. В случае цилиндрической геометрии h_2 — деформация по углу, h_3 — деформация вдоль оси симметрии. Уравнение для параметра $\theta = \ln(\rho_*/\rho_0)$ отражает неупругое изменение плотности. Здесь ρ_0 — начальное значение плотности, ρ_* — значение разгрузочной плотности среды, находящейся в состоянии термодинамического равновесия. Вообще говоря, плотность ρ определяется формулой $\rho = \rho_* \exp(-h_1 - h_2 - h_3)$. Следовательно, из уравнений для h_1, h_2, h_3, θ можно получить уравнение неразрывности

$$r^{\nu} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial r^{\nu} \rho u}{\partial r} = 0. \quad (1.2)$$

Уравнение для плотности теплового импульса q описывает эволюцию потока тепла. Здесь T — температура. Последнее уравнение системы (1.1) выражает закон сохранения энергии. Здесь E — плотность внутренней энергии. Коэффициент α связан со скоростью теплопередачи. В уравнениях для h_1, h_2, h_3, θ, q участвуют релаксационные члены, включающие в себя три времени релаксации: τ_{σ} (касательных напряжений), τ_p (давления), τ_T (потока тепла). Все времена релаксации суть нелинейные функции параметров, характеризующих состояние среды.

Термодинамическое тождество

$$\rho dE = \sigma_1 dh_1 + \sigma_2 dh_2 + \sigma_3 dh_3 + T dS$$

дает возможность определить напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и температуру T , если известна зависимость плотности внутренней энергии от деформаций и энтропии $E = E(h_1, h_2, h_3, S)$. Таким образом, $\sigma_1 = \rho \frac{\partial E}{\partial h_1}$, $\sigma_2 = \rho \frac{\partial E}{\partial h_2}$, $\sigma_3 = \rho \frac{\partial E}{\partial h_3}$, $T = \frac{\partial E}{\partial S}$. Следствием системы (1.1) является уравнение для энтропии

$$E_{h_i} \rho \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial r} \right) = \frac{1}{\tau_{\sigma}} \sum_{i=1}^3 E_{h_i} \left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} \right) + \frac{1}{3\tau_p} (E_{h_1} + E_{h_2} + E_{h_3}) (h_1 + h_2 + h_3) + \frac{\rho \alpha q^2}{\tau_T}.$$

Для термодинамической корректности необходимо потребовать неотрицательность правой части уравнения для энтропии. Это накладывает некоторые ограничения на вид уравнения состояния. Достаточно, чтобы (естественно считать $\tau_{\sigma} > 0$, $\tau_p > 0$, $\tau_T > 0$, $\alpha > 0$)

$$\sum_{i=1}^3 E_{h_i} \left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} \right) \geq 0, \quad (E_{h_1} + E_{h_2} + E_{h_3}) (h_1 + h_2 + h_3) \geq 0.$$

Отметим, что первое из этих неравенств — необходимое условие гиперболичности трехмерных уравнений нелинейной теории упругости [5].

Систему (1.1) с помощью уравнения неразрывности (1.2) можно записать в эквивалентном дивергентном виде

$$r^{\nu} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial r^{\nu} \rho u}{\partial r} = 0,$$

$$\begin{aligned}
r^\nu \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial r^\nu (\rho u^2 - \sigma_1)}{\partial r} &= -\nu \sigma_2, \\
r^\nu \frac{\partial \rho h_2}{\partial t} + \frac{\partial r^\nu \rho u h_2}{\partial r} &= \nu \rho u - r^\nu \rho \psi_2, \\
r^\nu \frac{\partial \rho h_3}{\partial t} + \frac{\partial r^\nu \rho u h_3}{\partial r} &= -r^\nu \rho \psi_3, \\
r^\nu \frac{\partial \rho \theta}{\partial t} + \frac{\partial r^\nu \rho u \theta}{\partial r} &= -r^\nu \rho \psi_0, \\
r^\nu \frac{\partial \rho q}{\partial t} + \frac{\partial r^\nu (\rho u q + T)}{\partial r} &= \nu T - r^\nu \rho q / \tau_T, \\
r^\nu \frac{\partial \rho (E + u^2/2 + \alpha q^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial r^\nu [\rho u (E + u^2/2 + \alpha q^2/2) - u \sigma_1 + \alpha T q]}{\partial r} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Данная система вместо уравнения для h_1 (ср. (1.1)) содержит уравнение неразрывности (h_1 можно вычислить, если известны ρ , h_2 , h_3 , θ). Здесь $\psi_0 = (h_1 + h_2 + h_3)/\tau_p$, $\psi_2 = \psi_0/3 + (h_2 - (h_1 + h_2 + h_3)/3)/\tau_\sigma$, $\psi_3 = \psi_0/3 + (h_3 - (h_1 + h_2 + h_3)/3)/\tau_\sigma$. Следствием (1.3) является система интегральных законов сохранения, выполненная для любого замкнутого контура:

$$\begin{aligned}
\oint r^\nu \rho dr - r^\nu \rho u dt &= 0, \\
\oint r^\nu \rho u dr - r^\nu (\rho u^2 - \sigma_1) dt &= \iint \nu \sigma_2 dr dt, \\
\oint r^\nu \rho h_2 dr - r^\nu \rho u h_2 dt &= \iint (-\nu \rho u + r^\nu \rho \psi_2) dr dt, \\
\oint r^\nu \rho h_3 dr - r^\nu \rho u h_3 dt &= \iint r^\nu \rho \psi_3 dr dt, \\
\oint r^\nu \rho \theta dr - r^\nu \rho u \theta dt &= \iint r^\nu \rho \psi_0 dr dt, \\
\oint r^\nu \rho q dr - r^\nu (\rho u q + T) dt &= \iint (-\nu T + r^\nu \rho q / \tau_T) dr dt, \\
\oint r^\nu \rho \left(E + \frac{u^2}{2} + \alpha \frac{q^2}{2} \right) dr - r^\nu \left[\rho u \left(E + \frac{u^2}{2} + \alpha \frac{q^2}{2} \right) - u \sigma_1 + \alpha T q \right] dt &= 0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Эти интегральные законы получены из (1.3) применением формулы Гаусса — Остроградского. Разностная схема, описанная ниже, основана именно на них.

Выясним теперь, каковы характеристики системы (1.1). Для этого, отбрасывая младшие члены уравнений, рассмотрим линеаризованную относительно постоянного фона систему

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u^0 \frac{\partial u}{\partial r} - \alpha_1 \frac{\partial h_1}{\partial r} - \alpha_2 \frac{\partial h_2}{\partial r} - \alpha_3 \frac{\partial h_3}{\partial r} - \alpha_0 \frac{\partial S}{\partial r} &= 0, \\
\frac{\partial h_1}{\partial t} + u^0 \frac{\partial h_1}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r} &= 0, \\
\frac{\partial h_2}{\partial t} + u^0 \frac{\partial h_2}{\partial r} &= 0, \\
\frac{\partial h_3}{\partial t} + u^0 \frac{\partial h_3}{\partial r} &= 0, \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + u^0 \frac{\partial \theta}{\partial r} &= 0, \\
\frac{\partial q}{\partial t} + u^0 \frac{\partial q}{\partial r} + \beta_2 \frac{\partial S}{\partial r} + \gamma_1 \frac{\partial h_1}{\partial r} + \gamma_2 \frac{\partial h_2}{\partial r} + \gamma_3 \frac{\partial h_3}{\partial r} &= 0, \\
\frac{\partial S}{\partial t} + u^0 \frac{\partial S}{\partial r} + \beta_1 \frac{\partial q}{\partial r} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь u^0 — фоновая скорость, $\alpha_1 = E_{h_1 h_1} - E_{h_1}$, $\alpha_2 = E_{h_1 h_2} - E_{h_1}$, $\alpha_3 = E_{h_1 h_3} - E_{h_1}$, $\alpha_4 = E_{h_1}$, $\alpha_0 = E_{h_1 S}$, $\beta_1 = \alpha/\rho_0$, $\beta_2 = E_{SS}/\rho_0$, $\gamma_1 = E_{Sh_1}/\rho_0$, $\gamma_2 = E_{Sh_2}/\rho_0$, $\gamma_3 = E_{Sh_3}/\rho_0$; ρ_0 — фоновая плотность; производные от внутренней энергии $E(h_1, h_2, h_3, S)$ вычислены для фоновых значений h_1, h_2, h_3, S . Нетрудно определить, что система (1.5) имеет следующие характеристики:

$$\frac{dr}{dt} = u^0 \text{ (трехкратная),}$$

$$\frac{dr}{dt} = u^0 + c, \frac{dr}{dt} = u^0 - c, \frac{dr}{dt} = u^0 + a, \frac{dr}{dt} = u^0 - a.$$

Скорости распространения малых возмущений a и c вычисляются по формулам

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha_1 + \beta_1 \beta_2 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1 \beta_2)^2 + 4\alpha_0 \beta_1 \gamma_1}]^{1/2},$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha_1 + \beta_1 \beta_2 - \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1 \beta_2)^2 + 4\alpha_0 \beta_1 \gamma_1}]^{1/2}. \quad (1.6)$$

Условия гиперболичности $c^2 > 0$, $a^2 > 0$ формулируются в виде неравенств $\alpha_1 + \beta_1 \beta_2 > 0$, $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_0 \gamma_1 > 0$, которые через производные внутренней энергии пишутся следующим образом:

$$E_{h_1 h_1} - E_{h_1} + \alpha E_{SS}/\rho_0^2 > 0, (E_{h_1 h_1} - E_{h_1}) E_{SS} - E_{h_1 S}^2 > 0. \quad (1.7)$$

Отметим, что если внутренняя энергия зависит только от плотности или, что то же самое, от удельного объема $V = \rho^{-1} = \rho_* \exp(h_1 + h_2 + h_3)$, то неравенства (1.7) принимают вид

$$E_{VV} E_{SS} - E_{VS}^2 > 0, E_{VV} + \alpha E_{SS}/\rho_0^2 > 0$$

и вытекают из выпуклости внутренней энергии как функции от V и S .

«Скорости звука» a и c являются скоростями распространения малых возмущений только в случае очень высоких частот возмущений, значительно превосходящих величины τ^{-1} для всех времен релаксаций.

Учет релаксационных процессов даже в линейном приближении существенно меняет эффективные скорости распространения малых возмущений [6]. На обсуждении этих вопросов мы останавливаться не будем.

§ 2. Разностная схема

Перейдем к описанию разностной схемы Годунова первого порядка точности для уравнений, сформулированных в § 1. Методика ничем не отличается от изложенной для уравнений газовой динамики в [1], куда можно обратиться за подробностями. Единственное отличие схемы, излагаемой ниже, от схемы из [1] заключается в том, что все величины относятся к точкам с целыми индексами, а не с полуцелыми. На наш взгляд, это дает преимущество при расчете движения границ в двумерных задачах. Определенные трудности возникают при аппроксимации релаксационных членов в уравнениях, так как они являются, как правило, резко нелинейными функциями. Мы остановились на наиболее простом способе их вычисления, обеспечивающим устойчивость схемы.

Ограничимся рассмотрением только одной области, так как подобласти связаны друг с другом посредством граничных условий. Пусть область разбита на N интервалов точками с координатами r_1, r_2, \dots, r_{N+1} , где r_1 и r_{N+1} — координаты соответственно начала и конца области. Предположим, что в момент времени $t = t_0$ известны $u, h_1, h_2, h_3, \theta, S, q$ в

точках r_j , $j = 1, 2, \dots, N+1$. Задача заключается в определении всех этих величин в момент времени $t + \Delta t$.

Считаем, что решение является кусочно-постоянной функцией, принимающей в интервале $(r_{j-1/2}, r_{j+1/2})$ значение решения в точке r_j . Как обычно, $r_{j+1/2} = (r_j + r_{j+1})/2$. Предположим, что нам известны временной шаг Δt , скорости движения w_j всех точек сетки r_j и значения решения $\tilde{u}_{j+1/2}$, $\tilde{h}_{1, j+1/2}$, $\tilde{h}_{2, j+1/2}$, $\tilde{h}_{3, j+1/2}$, $\tilde{\theta}_{j+1/2}$, $\tilde{S}_{j+1/2}$, $\tilde{q}_{j+1/2}$ на линиях, соединяющих точки $r_{j+1/2}$ и $R_{j+1/2} = r_{j+1/2} + w_{j+1/2}\Delta t$, где $w_{j+1/2} = (w_j + w_{j+1})/2$. Способ вычисления всех этих величин с помощью решения задачи о распаде разрыва будет описан в § 3.

Рассмотрим счетную ячейку $ABCD$; см. рис. 1. Требуется определить решение w^j , h_1^j , h_2^j , h_3^j , θ^j , S^j , q^j на отрезке CD , если известны значения решения

на AB : u_j , $h_{1, j}$, $h_{2, j}$, $h_{3, j}$, θ_j , S_j , q_j ;

на BC : $\tilde{u}_{j+1/2}$, $\tilde{h}_{1, j+1/2}$, $\tilde{h}_{2, j+1/2}$, $\tilde{h}_{3, j+1/2}$, $\tilde{\theta}_{j+1/2}$, $\tilde{S}_{j+1/2}$, $\tilde{q}_{j+1/2}$;

на DA : $\tilde{u}_{j-1/2}$, $\tilde{h}_{1, j-1/2}$, $\tilde{h}_{2, j-1/2}$, $\tilde{h}_{3, j-1/2}$, $\tilde{\theta}_{j-1/2}$, $\tilde{S}_{j-1/2}$, $\tilde{q}_{j-1/2}$.

Для примера рассмотрим уравнение неразрывности в интегральной форме из системы (1.4):

$$\oint r^\nu \rho dr - r^\nu \rho u dt = 0.$$

Очевидно, что $dt = 0$ на AB и CD , $dt = dr/w_{j+1/2}$ на BC и $dt = dr/w_{j-1/2}$ на DA . Распишем интегральное тождество для ячейки $ABCD$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} \frac{\rho_j}{v+1} dr^{v+1} + \int_{r_{j+1/2}}^{R_{j+1/2}} \left(\tilde{\rho}_{j+1/2} - \frac{\tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{u}_{j+1/2}}{w_{j+1/2}} \right) \frac{dr^{v+1}}{v+1} + \\ &+ \int_{R_{j+1/2}}^{R_{j-1/2}} \frac{\rho_j}{v+1} dr^{v+1} + \int_{R_{j-1/2}}^{r_{j-1/2}} \left(\tilde{\rho}_{j-1/2} - \frac{\tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{u}_{j-1/2}}{w_{j-1/2}} \right) \frac{dr^{v+1}}{v+1} = \\ &= \rho_j \frac{r_{j+1/2}^{v+1} - r_{j-1/2}^{v+1}}{v+1} + \frac{\tilde{\rho}_{j+1/2} (w_{j+1/2} - \tilde{u}_{j+1/2})}{w_{j+1/2}} \cdot \frac{R_{j+1/2}^{v+1} - r_{j+1/2}^{v+1}}{v+1} + \\ &+ \rho_j \frac{R_{j-1/2}^{v+1} - R_{j+1/2}^{v+1}}{v+1} + \frac{\tilde{\rho}_{j-1/2} (w_{j-1/2} - \tilde{u}_{j-1/2})}{w_{j-1/2}} \cdot \frac{r_{j-1/2}^{v+1} - R_{j-1/2}^{v+1}}{v+1} = 0. \end{aligned}$$

Используя равенство

$$\frac{R_{j+1/2}^{v+1} - r_{j+1/2}^{v+1}}{w_{j+1/2}} = \Delta t \frac{R_{j+1/2}^v + r_{j+1/2}^v}{2-v},$$

получим окончательно формулу для вычисления ρ^j :

$$\begin{aligned} \rho^j &= \rho_j \frac{r_{j+1/2}^{v+1} - r_{j-1/2}^{v+1}}{R_{j+1/2}^{v+1} - R_{j-1/2}^{v+1}} + \frac{\Delta t}{2-v} \tilde{\rho}_{j-1/2} (\tilde{u}_{j-1/2} - w_{j-1/2}) \times \\ &\times \frac{R_{j-1/2}^v + r_{j-1/2}^v}{R_{j+1/2}^{v+1} - R_{j-1/2}^{v+1}} - \frac{\Delta t}{2-v} \tilde{\rho}_{j+1/2} (\tilde{u}_{j+1/2} - w_{j+1/2}) \cdot \frac{R_{j+1/2}^{v+1} + r_{j+1/2}^v}{R_{j+1/2}^{v+1} - R_{j-1/2}^{v+1}}. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Точно таким же способом вычисляются контурные интегралы в других уравнениях системы (1.4). Для получения расчетных формул необходимо еще вычислить интегралы в правых частях уравнений.

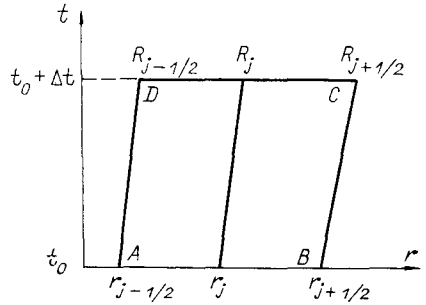


Рис. 1.

Для вычисления интеграла в правой части закона сохранения импульса используем формулу

$$\int \int v \sigma_2 dr dt = v (\sigma_2)_j (R_{j+1/2} - R_{j-1/2} + r_{j+1/2} - r_{j-1/2}) \Delta t / 2,$$

где $(\sigma_2)_j = \sigma_2(h_{1,j}, h_{2,j}, h_{3,j}, \theta_j, S_j)$ — значение σ_2 в точке r_j .

Интегралы, содержащие релаксационные члены, вычислим следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \int r^v \rho \psi_0 dr dt &= \int \int \frac{r^v}{\tau_p} \left(\theta - \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) dr dt = \\ &= \frac{\rho^j}{(\tau_p)_j} \left(\theta^j - \ln \frac{\rho^j}{\rho_0} \right) \int \int r^v dr dt = \\ &= \frac{\rho^j (\theta^j - \ln (\rho^j / \rho_0))}{(v+1)(v+2)(\tau_p)_j} \left(\frac{R_{j+1/2}^{v+2} - r_{j+1/2}^{v+2}}{w_{j+1/2}} - \frac{R_{j-1/2}^{v+2} - r_{j-1/2}^{v+2}}{w_{j-1/2}} \right) = \\ &= \Delta t \frac{\rho^j (\theta^j - \ln (\rho^j / \rho_0))}{(v+1)(\tau_p)_j} [r_{j+1/2}^v (r_{j+1/2} + (v+1)w_{j+1/2} \Delta t / 2 - \\ &\quad - r_{j-1/2}^v (r_{j-1/2} + (v+1)w_{j-1/2} \Delta t / 2)]. \end{aligned}$$

Здесь мы релаксирующую величину берем с верхнего слоя, что обеспечивает устойчивость схемы при любом отношении $\Delta t / (\tau_p)_j$. Величина $(\tau_p)_j^{-1}$ вычисляется как среднее арифметическое значений τ_p^{-1} в точках r_{j-1} , r_j , r_{j+1} $(\tau_p)_j^{-1} = ((\tau_p)_{j-1}^{-1} + (\tau_p)_j^{-1} + (\tau_p)_{j+1}^{-1}) / 3$. Это позволяет избежать «пилообразных» графиков, если τ_p является сильно нелинейной функцией параметров среды. Аналогично вычисляются и остальные релаксационные члены, а также другие правые части в оставшихся уравнениях.

В итоге получим следующие расчетные формулы (для вычисления плотности ρ^j используется (2.1)):

$$\begin{aligned} \rho^j u^j &= \rho_j u_j \frac{r_{j+1/2}^{v+1} - r_{j-1/2}^{v+1}}{R_{j+1/2}^{v+1} - R_{j-1/2}^{v+1}} + \\ &+ \frac{\Delta t}{2-v} \left[\tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{u}_{j-1/2} (\tilde{u}_{j-1/2} - w_{j-1/2}) - (\tilde{\sigma}_1)_{j-1/2} \right] \frac{R_{j-1/2}^v + r_{j-1/2}^v}{R_{j+1/2}^v - R_{j-1/2}^v} - \\ &- \frac{\Delta t}{2-v} \left[\tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{u}_{j+1/2} (\tilde{u}_{j+1/2} - w_{j+1/2}) - (\tilde{\sigma}_1)_{j+1/2} \right] \frac{R_{j+1/2}^v + r_{j+1/2}^v}{R_{j+1/2}^v - R_{j-1/2}^v} - \\ &- v(v+1) \frac{\Delta t}{2} \frac{R_{j+1/2} - R_{j-1/2} + r_{j+1/2} - r_{j-1/2}}{R_{j+1/2}^{v+1} - R_{j-1/2}^{v+1}} (\sigma_2)_j, \\ \theta^j \rho^j &[(R_{j+1/2}^{v+1} - R_{j-1/2}^{v+1}) + \Delta t \mathcal{D} / (\tau_p)_j] = \rho^j \ln (\rho^j / \rho_0) \mathcal{D} \Delta t / (\tau_p)_j + \\ &+ (r_{j+1/2}^{v+1} - r_{j-1/2}^{v+1}) \rho_j \theta_j + \tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{\theta}_{j-1/2} (\tilde{u}_{j-1/2} - w_{j-1/2}) (R_{j-1/2}^v + r_{j-1/2}^v) \times \\ &\times \Delta t / (2-v) - \tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{\theta}_{j+1/2} (\tilde{u}_{j+1/2} - w_{j+1/2}) (R_{j+1/2}^v + r_{j+1/2}^v) \Delta t / (2-v), \\ \text{где } \mathcal{D} &= r_{j+1/2}^{v+1} - r_{j-1/2}^{v+1} + \Delta t (v+1) (w_{j+1/2} r_{j+1/2}^v - w_{j-1/2} r_{j-1/2}^v) / 2. \\ h_2^j \rho^j &[(R_{j+1/2}^{v+1} - R_{j-1/2}^{v+1}) + \Delta t \mathcal{D} / (\tau_\sigma)_j] = \\ &= v(v+1) (R_{j+1/2} - R_{j-1/2} + r_{j+1/2} - r_{j-1/2}) \Delta t \rho_j u_j / 2 - \\ &- \rho^j (\theta^j - \ln (\rho^j / \rho_0)) ((\tau_p)_j^{-1} - (\tau_\sigma)_j^{-1}) \mathcal{D} \Delta t / 3 + \rho_j h_{2,j} (r_{j+1/2}^{v+1} - r_{j-1/2}^{v+1}) + \\ &+ \tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{h}_{2,j-1/2} (\tilde{u}_{j-1/2} - w_{j-1/2}) (R_{j-1/2}^v + r_{j-1/2}^v) \Delta t / (2-v) - \\ &- \tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{h}_{2,j+1/2} (\tilde{u}_{j+1/2} - w_{j+1/2}) (R_{j+1/2}^v + r_{j+1/2}^v) \Delta t / (2-v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h_3^j \rho^j [(R_{j+1/2}^{v+1} - R_{j-1/2}^{v+1}) + \Delta t \mathcal{D} / (\bar{\tau}_\sigma)_j] = \\
& = -\rho^j (\theta^j - \ln(\rho^j / \rho_0)) ((\bar{\tau}_p)_j^{-1} - (\bar{\tau}_\sigma)_j^{-1}) \mathcal{D} \Delta t / 3 + \rho_j h_{3,j} (r_{j+1/2}^{v+1} - r_{j-1/2}^{v+1}) + \\
& \quad + \tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{h}_{3,j-1/2} (\tilde{u}_{j-1/2} - w_{j-1/2}) (R_{j-1/2}^v + r_{j-1/2}^v) \Delta t / (2 - \nu) - \\
& \quad - \tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{h}_{3,j+1/2} (\tilde{u}_{j+1/2} - w_{j+1/2}) (R_{j+1/2}^v + r_{j+1/2}^v) \Delta t / (2 - \nu). \\
& \quad q^j \rho^j [(R_{j+1/2}^{v+1} - R_{j-1/2}^{v+1}) + \Delta t \mathcal{D} / (\bar{\tau}_T)_j] = \\
& = \nu(\nu + 1) \Delta t (R_{j+1/2} - R_{j-1/2} + r_{j+1/2} - r_{j-1/2}) T_{j/2} + \rho_j q_j (r_{j+1/2}^{v+1} - r_{j-1/2}^{v+1}) + \\
& \quad + [\tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{q}_{j-1/2} (\tilde{u}_{j-1/2} - w_{j-1/2}) + \tilde{T}_{j-1/2}] (R_{j-1/2}^v + r_{j-1/2}^v) \Delta t / (2 - \nu) - \\
& \quad - [\tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{q}_{j+1/2} (\tilde{u}_{j+1/2} - w_{j+1/2}) + \tilde{T}_{j+1/2}] (R_{j+1/2}^v + r_{j+1/2}^v) \Delta t / (2 - \nu), \\
& \quad \rho^j (E^j + (u^j)^2 / 2 + \alpha (q^j)^2 / 2) = \rho_j (E_j + u_j^2 / 2 + \alpha q_j^2 / 2) \times \\
& \quad \times \frac{r_{j+1/2}^{v+1} - R_{j-1/2}^{v+1}}{R_{j+1/2}^{v+1} - R_{j-1/2}^{v+1}} + \frac{\Delta t}{(2 - \nu)} [\tilde{\rho}_{j-1/2} (\tilde{E}_{j-1/2} + \tilde{u}_{j-1/2}^2 / 2 + \alpha \tilde{q}_{j-1/2}^2 / 2) \times \\
& \quad \times (\tilde{u}_{j-1/2} - w_{j-1/2}) - \tilde{u}_{j-1/2} \tilde{\sigma}_{1,j-1/2} + \alpha \tilde{q}_{j-1/2} \tilde{T}_{j-1/2}] \frac{R_{j-1/2}^v + r_{j-1/2}^v}{R_{j+1/2}^v - R_{j-1/2}^v} - \\
& \quad - \frac{\Delta t}{2 - \nu} [\tilde{\rho}_{j+1/2} (\tilde{E}_{j+1/2} + \tilde{u}_{j+1/2}^2 / 2 + \alpha \tilde{q}_{j+1/2}^2 / 2) (\tilde{u}_{j+1/2} - w_{j+1/2}) - \\
& \quad - \tilde{u}_{j+1/2} \tilde{\sigma}_{1,j+1/2} + \alpha \tilde{q}_{j+1/2} \tilde{T}_{j+1/2}] \frac{R_{j+1/2}^v + r_{j+1/2}^v}{R_{j+1/2}^v - R_{j-1/2}^v}.
\end{aligned}$$

Итак, применяя последовательно выписанные выше формулы, вычислим величины ρ^j , u^j , θ^j , h_2^j , h_3^j , q^j , E^j в момент времени $t_0 + \Delta t$. Используя выражение для плотности $\rho = \rho_* \exp(-h_1 - h_2 - h_3)$, вычислим h_1^j и далее, используя выражение для внутренней энергии $E(h_1, h_2, h_3, S)$, — энтропию S^j . После этого можно приступать к расчету следующего временного шага.

Мы привели расчетные формулы для постоянного значения параметра α ; в случае зависимости α от параметров среды все делается точно таким же образом.

Отметим, что предложенный грубый способ вычисления релаксационных членов, по-видимому, хорошо передает качественную картину процесса. Представляет интерес разработка более точного вычисления релаксационных членов для расчета тонких эффектов, связанных с нелинейностью времен релаксации.

Перейдем теперь к описанию решения задачи о распаде разрыва, которая необходима для работы описанной в данном параграфе разностной схемы.

§ 3. Задача о распаде разрыва

Явная схема Годунова первого порядка точности использует для вычисления потоков через боковые грани счетной ячейки решения задачи о распаде разрыва (задачи Римана) между двумя соседними точками. Поскольку даже для уравнений нелинейной теории упругости не имеется исчерпывающего анализа решения данной задачи, мы вынуждены использовать акустическое приближение.

Предположим, что слева и справа от точки $r = 0$ заданы различные значения всех неизвестных функций, входящих в систему уравнений (1). Предполагая, что эти функции не сильно отличаются, линеаризуем уравнения (1.1) относительно некоторого среднего значения этих функций, например среднего арифметического. Отбрасывая правые части во всех

уравнениях (так как они нарушают автомодельность), получим в акустическом приближении систему (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u^0 \frac{\partial u}{\partial r} - \alpha_1 \frac{\partial h_1}{\partial r} - \alpha_2 \frac{\partial h_2}{\partial r} - \alpha_3 \frac{\partial h_3}{\partial r} - \alpha_0 \frac{\partial S}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} + u^0 \frac{\partial h_1}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + u^0 \frac{\partial h_2}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial h_3}{\partial t} + u^0 \frac{\partial h_3}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u^0 \frac{\partial \theta}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + u^0 \frac{\partial q}{\partial r} + \beta_2 \frac{\partial S}{\partial r} + \gamma_1 \frac{\partial h_1}{\partial r} + \gamma_2 \frac{\partial h_2}{\partial r} + \gamma_3 \frac{\partial h_3}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u^0 \frac{\partial S}{\partial r} + \beta_1 \frac{\partial q}{\partial r} &= 0. \end{aligned}$$

Формулы для вычисления коэффициентов, а также характеристик данной системы приведены в § 1.

Для решения задачи о распаде разрыва целесообразно привести систему к римановым инвариантам:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u^0 - c) \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(u + ch_1 - \frac{c^2 - \alpha_1}{\gamma_1} q + \frac{c(c^2 - \alpha_1)}{\gamma_1 \beta_1} S + z_2(c) h_2 + \right. \\ \left. + z_3(c) h_3 + z_4(c) \theta \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u^0 + c) \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(u - ch_1 - \frac{c^2 - \alpha_1}{\gamma_1} q - \frac{c(c^2 - \alpha_1)}{\gamma_1 \beta_1} S - z_2(c) h_2 - \right. \\ \left. - z_3(c) h_3 - z_4(c) \theta \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u^0 - a) \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(u + ah_1 - \frac{a^2 - \alpha_1}{\gamma_1} q + \frac{a(a^2 - \alpha_1)}{\gamma_1 \beta_1} S + z_2(a) h_2 + \right. \\ \left. + z_3(a) h_3 + z_4(a) \theta \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u^0 + a) \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(u - ah_1 - \frac{a^2 - \alpha_1}{\gamma_1} q - \frac{a(a^2 - \alpha_1)}{\gamma_1 \beta_1} S - z_2(a) h_2 - \right. \\ \left. - z_3(a) h_3 - z_4(a) \theta \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^0 \frac{\partial}{\partial r} \right) h_2 &= 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^0 \frac{\partial}{\partial r} \right) h_3 = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^0 \frac{\partial}{\partial r} \right) \theta &= 0, \end{aligned}$$

где $z_2(a) = (\gamma_2(a^2 - \alpha_1)/\gamma_1 + \alpha_2)/a$, $z_3(a) = (\gamma_3(a^2 - \alpha_1)/\gamma_1 + \alpha_3)/a$, $z_4(a) = \alpha_4/a$.

Приведем теперь решение задачи о распаде разрыва. Пусть слева и справа от точки $r=0$ заданы постоянные значения $u^1, h_1^1, h_2^1, h_3^1, \theta^1, S^1, q^1$ и $u^2, h_1^2, h_2^2, h_3^2, \theta^2, S^2, q^2$ соответственно. Полушпоскость $t > 0$ разбивается характеристиками на шесть секторов (см. рис. 2), в каждой

из которых решение будет постоянным. В зависимости от того, в какой из секторов I—VI попадет линия $dr/dt = w$, где w — скорость точки $r(t)$ ($r(0) = 0$), и определяется решение на боковой грани счетной ячейки для разностной схемы. Определение решений в секторах I и VI не представляет труда — для этого нужно выяснить, какие римановы инварианты приносятся по характеристикам в каждый сектор. Выпишем окончательный ответ:

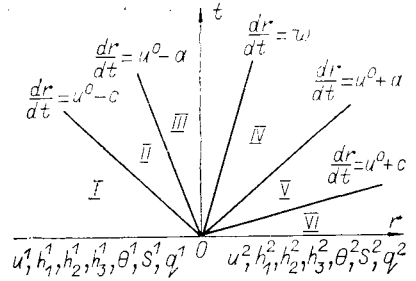


Рис. 2.

Область I:

$$u^I = u^1, \quad h_1^I = h_1^1, \quad h_2^I = h_2^1, \quad h_3^I = h_3^1, \quad \theta^I = \theta^1, \quad S^I = S^1, \quad q^I = q^1.$$

Область II:

$$h_1^{II} = h_1^1 + [(a^2 - \alpha_1) \Delta h_1 + (a^2 - \alpha_1) \Delta u/c + \alpha_0 \beta_1 \Delta q/c - \alpha_0 \Delta S + (a^2 - \alpha_1) V(c)/c]/(c^2 - a^2)/2,$$

$$u^{II} = u^1 + [(a^2 - \alpha_1) \Delta u + c(a^2 - \alpha_1) \Delta h_1 + \alpha_0 \beta_1 \Delta q - \alpha_0 c \Delta S + (a^2 - \alpha_1) V(c)]/(c^2 - a^2)/2,$$

$$S^{II} = S^1 + [\beta_1(c^2 - \alpha_1) \Delta q/c - \gamma_1 \beta_1 \Delta u/c - \gamma_1 \beta_1 \Delta h_1 - (c^2 - \alpha_1) \Delta S - \gamma_1 \beta_1 V(c)/c]/(c^2 - a^2)/2,$$

$$q^{II} = q^1 + [\gamma_1 \Delta u - (c^2 - \alpha_1) \Delta q + \gamma_1 c \Delta h_1 + c(c^2 - \alpha_1) \Delta S/\beta_1 + \gamma_1 V(c)]/(c^2 - a^2)/2,$$

$$h_2^{II} = h_2^1, \quad h_3^{II} = h_3^1, \quad \theta^{II} = \theta^1.$$

Область III:

$$h_1^{III} = (h_1^1 + h_1^2)/2 - [(\beta_1 \beta_2 + ac) \Delta u/(ac) + \alpha_0 \beta_1 \Delta q/(ac) - (a^2 - \alpha_1) V(c)/c/(c - a) + (c^2 - \alpha_1) V(a)/a/(c - a)]/(c + a)/2,$$

$$u^{III} = (u^1 + u^2)/2 - [(\alpha_1 + ac) \Delta h_1 - \alpha_0 \Delta S - (a^2 - \alpha_1) V(c)/(c - a) + (c^2 - \alpha_1) V(a)/(c - a)]/(c + a)/2,$$

$$S^{III} = (S^1 + S^2)/2 + [\beta_1 \gamma_1 \Delta u/(ac) + \beta_1(ac + \alpha_1) \Delta q/(ac) - \beta_1 \gamma_1 V(c)/c/(c - a) + \beta_1 \gamma_1 V(a)/a/(c - a)]/(c + a)/2,$$

$$q^{III} = (q^1 + q^2)/2 + [\gamma_1 \Delta h_1/(c + a) + (\beta_1 \beta_2 + ac) \Delta S/\beta_1/(c^2 - a^2) + \gamma_1(V(c) - V(a))/(c^2 - a^2)]/2,$$

$$h_3^{III} = h_3^1, \quad h_2^{III} = h_2^1, \quad \theta^{III} = \theta^1.$$

Область IV:

$$h_1^{IV} = (h_1^1 + h_1^2)/2 - [(\beta_1 \beta_2 + ac) \Delta u/(ac) + \alpha_0 \beta_1 \Delta q/(ac) + (a^2 - \alpha_1) V(c)/c/(c - a) - (c^2 - \alpha_1) V(a)/a/(c - a)]/(c + a)/2,$$

$$u^{IV} = u^{III}, \quad q^{IV} = q^{III},$$

$$S^{IV} = (S^1 + S^2)/2 + [\beta_1 \gamma_1 \Delta u/(ac) + \beta_1(ac + \alpha_1) \Delta q/(ac) + \beta_1 \gamma_1 V(c)/c/(c - a) - \beta_1 \gamma_1 V(a)/a/(c - a)]/(c + a)/2,$$

$$h_2^{IV} = h_2^2, \quad h_3^{IV} = h_3^2, \quad \theta^{IV} = \theta^2.$$

Область V:

$$h_1^V = h_1^2 - [(a^2 - \alpha_1) \Delta h_1 - (a^2 - \alpha_1) \Delta u/c - \alpha_0 \beta_1 \Delta q/c - \alpha_0 \Delta S + (a^2 - \alpha_1) V(c)/c]/(c^2 - a^2)/2,$$

$$\begin{aligned}
u^V &= u^2 - [(a^2 - \alpha_1)\Delta u - c(a^2 - \alpha_1)\Delta h_1 + \alpha_0\beta_1\Delta q + \\
&\quad + \alpha_0\Delta S - (a^2 - \alpha_1)V(c)] / (c^2 - a^2)/2, \\
S^V &= S^1 + [\beta_1(c^2 - \alpha_1)\Delta q/c - \gamma_1\beta_1\Delta u/c + \gamma_1\beta_1\Delta h_1 + \\
&\quad + (c^2 - \alpha_1)\Delta S + \gamma_1\beta_1V(c)/c] / (c^2 - a^2)/2, \\
q^V &= q^2 + [(c^2 - \alpha_1)\Delta q - \gamma_1\Delta u + \gamma_1c\Delta h_1 + \\
&\quad + c(c^2 - \alpha_1)(\Delta S/\beta_1 + \gamma_1V(c))] / (c^2 - a^2)/2, \\
h_2^V &= h_2^2, \quad h_3^V = h_3^2, \quad \theta^V = \theta^2.
\end{aligned}$$

Область VI:

$$u^{VI} = u^2, \quad h_1^{VI} = h_1^2, \quad h_2^{VI} = h_2^2, \quad h_3^{VI} = h_3^2, \quad \theta^{VI} = \theta^2, \quad S^{VI} = S^2, \quad q^{VI} = q^2.$$

Здесь $\Delta u = u^1 - u^2$, $\Delta h_i = h_i^1 - h_i^2$, $\Delta S = S^1 - S^2$, $\Delta q = q^1 - q^2$, $\Delta \theta = \theta^1 - \theta^2$, $V(a) = (\gamma_2(a^2 - \alpha_1)/\gamma_1 + \alpha_2)\Delta h_2/a + (\gamma_3(a^2 - \alpha_1)/\gamma_1 + \alpha_3)\Delta h_3/a + \alpha_4\Delta \theta/a$. Для определения скорости движения внутренних точек необходимо знать скорости движения граничных точек. Эти скорости, а также потоки через боковые ребра приграничных счетных ячеек вычисляются при помощи процедуры граничного распада разрыва.

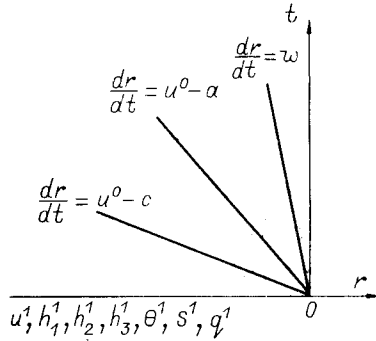


Рис. 3.

Граничные распады разрыва также рассчитываются в акустическом приближении. Рассмотрим, например, случай, когда заданы граничные условия $\sigma_1 = p(t)$, $\alpha q = Q(t)$ при $r = R(t)$, а область расположена при $r < R(t)$; в ней заданы постоянные значения $u^1, h_1^1, h_2^1, h_3^1, \theta^1, S^1, q^1$. От границы влево уходят характеристики $dr/dt = u^0 - c$, $dr/dt = u^0 - a$, а сама граница является траекторией $dr/dt = w$ (см. рис. 3). Требуется определить решение в области III. Для этого, во-первых, выясним, какие римановы инварианты приносятся в область III по характеристикам $u^0 + c$ и $u^0 + a$, а во-вторых, используем линеаризованные граничные условия:

$$\alpha_1(h_1^{III} - h_1^1) + \alpha_0(S^{III} - S^1) = \frac{p(t) - \sigma_1(h_1^1, h_2^1, h_3^1, \theta^1, S^1)}{\rho(h_1^1, h_2^1, h_3^1, \theta^1, S^1)},$$

$$\alpha(q^{III} - q^1) = Q(t) - \alpha q^1.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned}
u^{III} &= u^1 + \frac{ac(c+a)}{\alpha_1(c^2 + a^2 + ac - \alpha_1) - \alpha_0\beta_1\gamma_1} \frac{p(t) - \sigma_1^1}{\rho^1} + \\
&\quad + \frac{\alpha_0\beta_1ac^1}{\alpha_1(c^2 + a^2 + ac - \alpha_1) - \alpha_0\beta_1\gamma_1} \frac{Q(t) - \alpha q^1}{\alpha},
\end{aligned}$$

$$q^{III} = q^1 + \frac{Q(t) - \alpha q^1}{\alpha} = \frac{Q(t)}{\alpha},$$

$$\begin{aligned}
S^{III} &= S^1 - \frac{\beta_1\gamma_1}{\alpha_1(c^2 + a^2 + ac - \alpha_1) - \alpha_0\beta_1\gamma_1} \frac{p(t) - \sigma_1^1}{\rho^1} - \\
&\quad - \frac{\beta_1\alpha_1(c+a)}{\alpha_1(c^2 + a^2 + ac - \alpha_1) - \alpha_0\beta_1\gamma_1} \frac{Q(t) - \alpha q^1}{\alpha},
\end{aligned}$$

$$h_1^{\text{III}} = h_1^1 + \frac{c^2 + a^2 + ac - \alpha_1}{\alpha_1(c^2 + a^2 + ac - \alpha_1) - \alpha_0 \beta_1 \gamma_1} \frac{p(t) - \sigma_1^1}{\rho^1} +$$

$$+ \frac{\alpha_0 \beta_1 (c + a)}{\alpha_1(c^2 + a^2 + ac - \alpha_1) - \alpha_0 \beta_1 \gamma_1} \frac{Q(t) - \alpha q^1}{\alpha}$$

$$h_2^{\text{III}} = h_2^1, \quad h_3^{\text{III}} = h_3^1, \quad \theta^{\text{III}} = \theta^1.$$

Итак, мы нашли величины, необходимые для вычисления потоков через приграничную ячейку. Скорость границы принимаем равной $\frac{dr}{dt} = w = u^{\text{III}}$. Действуя аналогичным образом, можно получить решение задачи о распаде разрыва на границе счетной области для других граничных условий.

После того как определены скорости границ счетной области w_1 — скорость точки r_1 и w_{N+1} — скорость точки r_{N+1} , можно найти скорости внутренних точек. Желая сохранить неизменной расстановку счетных точек на каждом временном слое, скорости внутренних точек вычислим по формуле

$$w_j = w_1 + (w_{N+1} - w_1)(r_j - r_1)/(r_{N+1} - r_1), \quad j = 2, \dots, N.$$

Временной шаг Δt получим теперь из условия устойчивости Куранта [1]

$$\Delta t < \tau^*, \quad \tau^* = \min_j \tau_j^*,$$

$$\tau_j^* = \frac{r_{j+1/2} - r_{j-1/2}}{\max(u_{j+1/2}^0 + c_{j+1/2} - w_{j+1/2}, c_{j+1/2} - u_{j+1/2}^0 - w_{j-1/2})},$$

где $u_{j+1/2}^0$, $c_{j+1/2}$ — соответственно скорость и скорость звука в точке $r_{j+1/2}$, $w_{j+1/2}$ — скорость точки $r_{j+1/2}$.

§ 4. Численный пример

Для уравнений, рассматриваемых в данной статье, к сожалению, отсутствуют какие-либо аналитические решения или тестовые расчеты. Более того, даже физическое замыкание данных уравнений, а именно, функциональные зависимости внутренней энергии и времен релаксации, требует еще всестороннего уточнения.

В качестве примера модельного расчета рассмотрим решение задачи об импульсном нагреве через границу медной пластины. Пусть дана пластина толщиной 1 см, на правой границе которой задан тепловой поток в виде полуволны синуса; при $r = R_2(t)$ ($R_2(0) = 1$ см)

$$Q(t) = \alpha q(t) = \begin{cases} A \sin \omega t, & 0 \leq t \leq \pi/\omega, \\ 0, & t \geq \pi/\omega, \end{cases}$$

где

$$A = 0.003 \frac{(4.651)^3}{8.9 \cdot 300} \frac{\text{см}^6}{\text{г} \cdot \text{град} \cdot \text{с}^3}, \quad \omega = 3 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Кроме того, предполагается, что эта граница свободна от напряжений: $\sigma_1(t) = 0$ при $r = R_2(t)$. На левой границе при $r = R_1(t)$ ($R_1(0) = 0$) заданы нулевой тепловой поток $\alpha q(t) = 0$ и нулевое напряжение $\sigma_1(t) = 0$.

Для описания материала используется интерполяционная формула

$$E = \frac{K_0}{x_1(x_1 + 1)} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{x_1} - 1 \right) + c_V T_0 \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{x_2} e^{S/c_V} - 1 \right) +$$

$$+ \left(\frac{K_0}{x_1 + 1} + x_2 c_V T_0 \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) + b^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{x_3} \sum_{i=1}^3 \left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} \right)^2,$$

где $K_0 = c^2 - 4b^2/3$, c — скорость продольных звуковых волн, b — скорость поперечных звуковых волн, c_V — удельная теплоемкость, x_1, x_2, x_3 — интерполяционные константы. В расчетах использовались значения $c = 4.651$ км/с, $b = 2.14$ км/с, $c_V = 0.412$ Дж/(г · град), $\rho_0 = 8.9$ г/см³, $x_1 = 3.7$, $x_3 = 3.14$, $x_2 = 1.91$, $T_0 = 300^\circ\text{К}$. Данное уравнение состояния удовлетворяет условиям гиперболичности (1.7). Напряжения, вычисленные по этому уравнению состояния, определяются по формуле

$$\sigma_i = \rho \frac{\partial E}{\partial h_i} = -p + 2\rho_0 b^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{x_3+1} \left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right),$$

где

$$p = \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho} = \frac{\rho_0 K_0}{x_1 + 1} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{x_1+1} + \rho_0 x_2 c_V T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{x_2} e^{S/c_V} - \rho_0 \left(\frac{K_0}{x_1 + 1} + x_2 c_V T_0\right),$$

а температура — по формуле

$$T = \frac{\partial E}{\partial S} = T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{x_2} e^{S/c_V}.$$

Время релаксации касательных напряжений задавалось интерполяционной формулой из [8]

$$\tau_\sigma = \tau_0 \left(\frac{\rho_0 b^2}{k_0 \sigma}\right)^{K(T)-1} \exp(\mu U(T)/RT),$$

где

$$K(T) = k_1^{-1} [(T/(k_2 \theta_0) - 1)^2 + k_3]^{-1},$$

$$U(T) = \frac{b^2}{k_4 \theta_0} \left(1 - \frac{T}{k_5 \theta_0}\right) K(T),$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}.$$

Значения констант, входящих в формулу для τ_σ , таковы: $\mu = 63.54$, $R = 8.31 \cdot 10^7 \frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{град} \cdot \text{с}^2}$, $\theta_0 = 315^\circ\text{К}$, $\tau_0 = 23.98 \cdot 10^{-5}$ с, $k_0 = 1.96 \cdot 10^4$, $k_1 = 0.0184$, $k_2 = 0.955$, $k_3 = 1.902$, $k_4 = 1.4 \cdot 10^2$, $k_5 = 7.22$. Предполагалось, что материал не испытывает неупругого изменения плотности, т. е. время релаксации давления считалось бесконечным: $\tau_p = \infty$. Время

релаксации теплового потока бралось следующим (по порядку совпадающим с инерционным временем электрона [9]): $\tau_T = 6 \cdot 10^{-14}$ с. Коэффициент α выбирался таким образом [7], чтобы при квазистационарном процессе теплопередачи эффективный коэффициент теплопроводности имел табличное значение: $\kappa = T_0 \tau \alpha / \rho_0 = 0.916$ кал/см · град · с, т. е. $\alpha = 1.989 \cdot 10^{19}$ г²/с⁴ · см² · град².

На рис. 4 приведены профили температуры и напряжения σ_1 в зависимости от пространственной координаты r на момент времени $t = 0.8 \cdot 10^{-6}$ с, когда температура на нагреваемой поверхности близка к температуре плавления. Видно, что от поверхности влево движется тепловая волна, в соответствии с которой на фоне теплового расширения формируется профиль сжимающих напряжений. Дальнейший расчет показывает, что по-

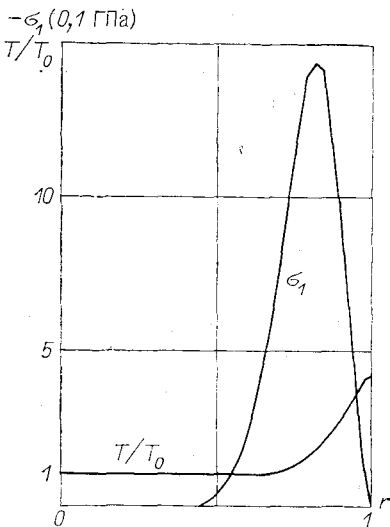


Рис. 4.

сле прекращения действия поверхностного потока тепла вблизи поверхности начинается интенсивное расширение, приводящее к появлению растягивающих напряжений, которые могут привести к отколу.

Рассмотрим теперь задачу о возникновении остаточных напряжений при нагружении бесконечного цилиндра осесимметричным импульсом внешнего давления.

Для описания материала (медь) используем приведенные выше формулы для внутренней энергии и времен релаксации. Пусть ось цилиндра совпадает с осью z цилиндрической системы координат. В качестве граничных условий заданы импульс внешнего давления, как функция времени, и нулевая радиальная скорость на оси симметрии:

$$\sigma_r |_{r=R(t)} = -p(t), \quad u |_{r=0} = 0.$$

Рассмотрим результаты расчета для цилиндра с начальным радиусом $R_0 = 0,1$ см и внешнего давления, заданного по формуле

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \sin(\omega t), & 0 \leq t \leq \pi/\omega, \\ 0, & t \geq \pi/\omega, \end{cases}$$

где $p_0 = 0,6$ Гпа, $\omega = 10^6$ с⁻¹.

Таким образом, внешнее давление становится нулевым, начиная с момента времени $t \approx 3,14 \cdot 10^{-6}$ с.

На протяжении действия импульса профили напряжений характеризуются малыми градиентами — это обусловлено тем, что характерное время нарастания давления $t_m = 1,57 \cdot 10^{-6}$ с существенно больше характерного звукового времени $t_* = R_0/c = 0,215 \cdot 10^{-6}$ с.

Процесс нагружения сопровождается пластическими деформациями на участке роста внешнего давления, а на участке спада они практически отсутствуют. Плотность, так же как и температура, меняется незначительно. Минимальное значение внешнего радиуса цилиндра при сжатии ($t = 1,54 \cdot 10^{-6}$ с) $R/R_0 = 0,9978$; при этом на внешней границе $\rho/\rho_0 = 1,0042$, $T/T_0 = 1,0084$.

После окончания действия импульса цилиндр начинает совершать свободные колебания. Процесс колебаний сопровождается незначительными пластическими деформациями на всем рассматриваемом интервале времени. На рис. 5 приведен график временной зависимости напряжения σ_z , действующего вдоль оси цилиндра, на внешней границе $r = R(t)$.

Таким образом, в результате пластических деформаций формируется профиль остаточных сжимающих напряжений σ_z , которые могут привести к потере устойчивости цилиндра.

Опишем теперь на примере последней задачи методикку, которую можно использовать для определения остаточных напряжений, после того как в среде произошли пластические деформации. Основная идея заключается в том, что при пластических деформациях возникает отличный от нуля тензор несовместности [5], который в совокупности с уравнениями равновесия и определяет поле остаточных напряжений.

Рассмотрим цилиндрическую систему координат и обозначим σ_r , σ_φ , σ_z и ε_r , ε_φ , ε_z напряжения и деформации, действующие по осям r , φ , z . Предположим, что среда подчиняется закону Гука

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_z,$$

$$\sigma_\varphi = \lambda\varepsilon_r + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_z,$$

$$\sigma_z = \lambda\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z.$$

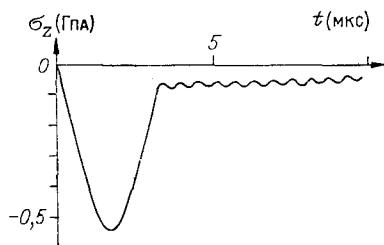


Рис. 5.

Температурные эффекты рассматривать не будем. Пусть нам задано поле напряжений $\sigma_r^0, \sigma_\varphi^0, \sigma_z^0$, а значит, известно поле деформаций $\varepsilon_r^0, \varepsilon_\varphi^0, \varepsilon_z^0$. Необходимо выяснить, какие напряжения $\sigma_r^\infty, \sigma_\varphi^\infty, \sigma_z^\infty$ и деформации $\varepsilon_r^\infty, \varepsilon_\varphi^\infty, \varepsilon_z^\infty$ будут в среде в состоянии равновесия. Для этого используем, во-первых, уравнение равновесия, в цилиндрических координатах имеющее вид

$$\frac{d\sigma_r^\infty}{dr} + \frac{\sigma_r^\infty - \sigma_\varphi^\infty}{r} = 0,$$

а во-вторых — уравнения совместности, которые в данном случае можно получить из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial r \varepsilon_\varphi}{\partial r} - \varepsilon_r \right) = 0 \quad \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, уравнения совместности имеют вид

$$\frac{\partial r \varepsilon_\varphi^\infty}{\partial r} - \varepsilon_r^\infty = \frac{\partial r \varepsilon_\varphi^0}{\partial r} - \varepsilon_r^0, \quad \varepsilon_z^\infty = \varepsilon_z^0.$$

Интегрируя последние уравнения вместе с уравнением равновесия (предполагая ограниченность решения при $r=0$ и используя закон Гука), получим для деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^\infty &= \varepsilon_r^0 - \frac{\sigma_r^0}{\lambda + 2\mu} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r^2} \int_0^r r \sigma_r^0 dr + \\ &+ \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r^2} \int_0^r r (\varepsilon_\varphi^0 - \varepsilon_r^0) dr - \frac{\tau}{\lambda + 2\mu} \int_0^r \frac{\varepsilon_r^0 - \varepsilon_\varphi^0}{r} dr + A/2, \\ \varepsilon_z^\infty &= \varepsilon_z^0, \\ \varepsilon_\varphi^\infty &= \varepsilon_\varphi^0 - \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r^2} \int_0^r r \sigma_r^0 dr - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r^2} \int_0^r r (\varepsilon_\varphi^0 - \varepsilon_r^0) - \\ &- \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \int_0^r \frac{\varepsilon_r^0 - \varepsilon_\varphi^0}{r} dr + A/2. \end{aligned}$$

Теперь можно получить формулы для остаточных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r^\infty &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r^2} \int_0^r r (\sigma_r^0 + \sigma_\varphi^0) dt + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \int_0^r \frac{\sigma_\varphi^0 - \sigma_r^0}{r} dr + (\lambda + \mu) A, \\ \sigma_\varphi^\infty &= \sigma_\varphi^0 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_r^0 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r^2} \int_0^r r (\sigma_r^0 + \sigma_\varphi^0) dr + \\ &+ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \int_0^r \frac{\sigma_\varphi^0 - \sigma_r^0}{r} dr + (\lambda + \mu) A, \\ \sigma_z^\infty &= \sigma_z^0 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_r^0 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \int_0^r \frac{\sigma_\varphi^0 - \sigma_r^0}{r} dr + \lambda A. \end{aligned}$$

Константа A определяется из граничного условия, например, из равенства нулю нормального напряжения

$$\sigma_r^\infty|_{r=R} = 0.$$

Аналогичную методику можно использовать и для решения задачи об определении остаточных напряжений в многомерном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Численное решение многомерных задач газовой динамики/С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др.— М.: Наука, 1976.— 400 с.
2. Colella P., Woodward P. The numerical simulation of two — dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comput. Phys.— 1984.— V. 54, N 1.— P. 115—173.
3. Мерзиевский Л. А. Метод расчета течений вязкоупругой среды // Динамика сплошной среды.— 1980.— Вып. 45.— С. 141—151.
4. Доровский В. Н., Искольдский А. М., Роменский Е. И. Динамика импульсного нагрева металла током и электрический взрыв проводников // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1983.— № 4.— С. 10—25.
5. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.— 303 с.
6. Искольдский А. М., Роменский Е. И. Динамическая модель термоупругой сплошной среды с релаксацией давления // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1984.— № 2.— С. 132—138.
7. Малышев А. Н., Роменский Е. И. Гиперболические уравнения теплопроводности. Глобальная разрешимость задачи Коши.— Новосибирск.— 21 с.— (Препр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 75).
8. Применение релаксационной модели вязкоупругости при расчете одноосных однородных деформаций и уточнении интерполяционных формул максвелловской вязкости/С. К. Годунов, В. В. Денисенко, Н. С. Козин, Н. К. Кузьмина//Журн. прикл. механики и техн. физ.— 1975.— № 5.— С. 162—167.
9. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Электричество.— М.: Наука, 1983.— 687 с.