3. **Чэн Ч., Кейслер Г.** Теория моделей.— М.: Мир, 1977.
4. **Andreka H., Nemeti I.** Generalization of the concept of variety and quasivariety to partial algebras though categori theory.— Diss. Math., 1983.
5. **Sain I.** On classes of algebraic systems closed with respect to quotients // Universal algebra and applications.— Banach center publicationes: Warszaw, 1982.— P. 127—131.

Л. П. ЛИСОВИК

ЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЧНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе развивается операциональный подход к понятию функции, предполагающий понимание функции как действия. Рассматриваемые здесь функции задаются посредством различных преобразователей и, в частности, посредством макропреобразователей над размеченными деревьями. Этот подход соответствует принципу Фреге, согласно которому понятие функции первично по отношению к понятию множества. В § 1 отражен процесс развития понятия функции. В § 2 исследуются свойства конкретных классов функций и операторов, заданных преобразователями. Строится и развивается Δ-исчисление (§ 3), в котором устанавливаются теоремы, определяющие «логические свойства частично непрерывных функций». Обсуждаются также аксиоматические теории, близкие к Δ-исчислению. В § 4 рассмотрены модели Δ-исчисления, определяемые на основе § 2, 3. Последний параграф дает достаточно общую классификацию функций (в частности, функций в канторовом пространстве) по трем основным типам: R, Z, V. Она основана на классификации машин Тьюринга с оракулом, причем в общем случае допускаются недетерминированные машины Тьюринга с оракулом, имеющие несколько входных лент, одну выходную ленту, бесконечный процесс обработки входных данных и осциллирование относительно выходной ленты.

Автор благодарен В. Ю. Сазонову за полезные замечания.

§ 1. ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Известны следующие основные подходы к понятию функции *): геометрический (Декарт), аналитический (И. Бернулли, Эйлер), строгий (предельный) (Больцано, Коши, Вейерштрасс), теоретико-множественный или классический (Дедекинд, Кантор), интуиционистский (Брауэр), конструктивный (Тьюринг, Банах и Мазур, Марков) и др., см. [3—5], операциональный. Последний, так же как интуиционистский и конструктивный подходы, противостоит классическому пониманию функции как соответствия между элементами двух множеств. Операциональный подход существенно предполагается в λ-исчислении (Карри, Черч) [6], в теории категорий [7] и получает все большее распространение в функциональном анализе (см. [4], а также рецензию [8] на монографию [9]).

С момента возникновения абстрактного понятия функциональной зависимости (Декарт) основой понятия функции служит понятие непрерывной функции. Ему соответствует классическое понятие непрерывного оператора в топологическом пространстве (Риман, Хаусдорф [10]). Интересно, что различные конструктивные (рекурсивные) трактовки (см. [4, 5, 11, 12]) подразумевают, что каждая вычислимая вещественная функция с необходимостью должна быть непрерывной. Классически (экстенсионально) понятие непрерывной вещественной функции описы-

*) Приведенная схема лишь отмечает основные этапы формирования понятия функции. Развернутое представление об истории этого понятия дают, например, книги [1, 2].

вается посредством «ε-δ-нотации» [13, 14]. Возможности конструктивизации математического анализа с максимальным сохранением традиционных названий и «ε-δ-нотации» показаны в монографии [15]. Предпосылкой к пересмотру классического понятия непрерывной функции служила уже теорема Вейерштрасса [13, 16], согласно которой понятие определенной на отрезке $[a, b]$ непрерывной вещественной функции можно уточнить как предел последовательности полиномов, равномерно сходящейся в банаховом пространстве $C[a, b]$. При таком подходе, принятом в конструктивной теории функций [25], непрерывность функции f на отрезке $[a, b]$ есть следствие ее способа задания. В теореме Вейерштрасса можно дополнительно предполагать, что исходные полиномы имеют только рациональные коэффициенты. Дальнейшее уточнение понятия непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции может быть связано с соответствующим уточнением понятия равномерно сходящейся последовательности полиномов с рациональными коэффициентами. Шанин [17] указывает конструктивный вариант такого уточнения, основанный на аналитическом подходе Эйлера.

Введенное в данной работе понятие реальной функции (см. также [18, 19]) можно рассматривать как операциональное, соответствующее экстенсиональному понятию непрерывной вещественной функции и дополняющее его акцентированием внимания на способ задания функции. Операциональное задание, например, функции $\sin(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ не зависит от того, сколько точек (конечное число, счетное или несчетное множество) представляем мы себе на этом отрезке. Так, согласно [20] геометрическая прямая — это вовсе не множество точек, а самостоятельный геометрический объект, на котором мы вправе вводить различные множества точек для различных целей. Выделение операционального аспекта понятия функции приводит нас к тезису «функция есть преобразователь», который содержательно отличен от более жесткого тезиса «функция есть алгоритм». Последний, как известно, получил ряд математических уточнений, хотя понятие вычислимой вещественной функции все же не имеет пока общепризнанного единого математического смысла (см. [5; 21—23, проблема 108] и библиографию там). Развертывание тезиса «функция есть преобразователь» проводится в данной статье путем рассмотрения на содержательном и аксиоматическом уровнях свойств ряда конкретных классов функций и операторов, заданных преобразователями, а также путем выделения общих типов функций. Основные виды функций и преобразователей суть V-функции, R-функции, Δ-функции, R-преобразователи и макропреобразователи. Каждая V-функция задается недетерминированным R-преобразователем, перерабатывающим двоичные представления действительных чисел. R-функции или реальные функции задаются (детерминированными) R-преобразователями. Каждой R-функции f ставится в соответствие вещественная функция $\tilde{f}$, причем каждая непрерывная вещественная функция h представима некоторой R-функцией f так, что $h = \tilde{f}$.

Область определения и область значений R-функции есть множество D. Его можно понимать как множество всех бесконечных двоичных представлений вещественных чисел, в которых указание знака числа x «наносится» на отличные от нуля цифры двоичного представления числа $|x|$. При сегментной топологии на множестве D (когда базисные окрестности определяются начальными сегментами сверхслов) класс непрерывных функций на D совпадает с классом строгих R-функций. Последний составляет собственный подкласс класса R-функций. Так, например, вещественная функция $f(x) = 3x$ не представима никакой строгой R-функцией, но представима R-функцией g. При вычислении этой функции g соответствующий R-преобразователь A читает слева направо входное сверхслово $x \in D$ и последовательно (возможно, с задержками) пишет слева направо сверхслово $y \in D'$, в котором кроме символов 0, 1 используется символ 2, означающий «переполнение разряда». Тогда

$g(x)=\widehat{y}$, где $\widehat{y}\in D$ определяется по y так, что они оба представляют одно и то же вещественное число $\tilde{y}=\|g(x)\|$. По такой же схеме производится определение значений и для любой другой R-функции g. В случае, когда g — строгая R-функция, задающий ее R-преобразователь A не использует символ 2 на выходе. Понятия R-функции и строгой R-функции распространяются на многоместные функции. Вещественная функция сложения не представима никакой строгой двуместной R-функцией, но представима двуместной R-функцией g_1. Более того, эта R-функция g_1 может быть задана R-преобразователем с конечной памятью. Оказывается, что среди функций, задаваемых R-преобразователями с конечной памятью, существуют непрерывные нигде не дифференцируемые функции. Все они в рациональных точках принимают рациональные значения.

При задании V-функций посредством недетерминированных R-преобразователей возможность использования символа 2 на выходе несущественна. Δ-функция есть фактически реальная функция в множестве всех двоичных представлений действительных чисел отрезка [0, 1]. Непрерывные операторы над бесконечными размеченными деревьями задаются макропреобразователями. Существует всего континуум различных макропреобразователей, R-преобразователей (включая недетерминированные), V-функций, R-функций, Δ-функций, включая частичные функции этих видов. В теории реальных функций имеют место аналоги как теорем теории непрерывных вещественных функций, так и теорем теории рекурсивных функций. То же относится к теориям Δ-функций, операторов, заданных макропреобразователями, и ряду других теорий. Все это многообразие различных теорий, имеющих существенную общую часть, позволяет говорить о логических свойствах Δ-функций, R-функций, операторов, заданных макропреобразователями и т. д. Анализ соответствующих доказательств приводит к аксиоматической теории, названной Δ-исчислением [24]. Его можно рассматривать как абстрактную теорию частично непрерывных операторов. В Δ-исчислении получены доказательства аналогов теорем Клини, Райса, Майхилла и других теорем теории рекурсивных функций. При этом имеется характерное отличие Δ-исчисления от теорий, близких к аксиоматической теории Вагнера [25—30] (см. также [31]). Поскольку Δ-исчисление вложимо в теорию частично непрерывных операторов в бэровском пространстве, третья аксиома Вагнера (о кусочном задании функции) в Δ-исчислении не выводима. В данной работе рассмотрен широкий класс моделей Δ-исчисления, названный $D\Sigma$-системами. Основные объекты, связанные с такими системами, суть непрерывные частичные операторы в соответствующем пространстве (бэровском, канторовом и т. д.). Эти понятия возникают аналогично понятию частично непрерывной вещественной функции, под которой подразумевается такая частичная вещественная функция, которая не только непрерывна в точках определения, но и представима частичной R-функцией. В связи с данным подходом в работе описано интенсиональное понятие непрерывного оператора на пространстве $\mathfrak{M}_3(\Sigma)$, отличное от экстенсионального понятия оператора на $\mathfrak{M}_3(\Sigma)$, непрерывного в топологии Скотта. В частности, $\mathfrak{M}_3(\mathbf{N})$, $\mathfrak{M}_3(\{0, 1\})$ суть соответственно множества непрерывных частичных операторов в бэровском и канторовом пространствах. Упорядочение возможностей рассмотрения операторов над операторами проведено в работе посредством понятия Δ-оператора, частным случаем которого является понятие Δ-функции. По техническим соображениям многие результаты изложены в виде теорем теории Δ-функций, хотя они имеют аналоги в теориях R-функций, V_i-функций, в теориях операторов, заданных макропреобразователями, непрерывных частичных операторов в бэровском пространстве и т. д.

Заметим, что любая частичная конструктивная (по Маркову) функция действительного переменного (КФДП) может быть в определенном смысле задана в виде частичной R-функции. Действительно, по теореме Цейтина [12] частичная КФДП непрерывна в точках определения. Кроме того, имеет место следующее утверждение. Если h — частичная вещественная функция, определенная на счетном множестве S и непрерывная в точках определения, то существует частичная R-функция f такая, что $\Gamma_h \subseteq \Gamma_{\tilde{f}}$, т. е. на множестве S функция $\tilde{f}$ совпадает с h. Множество вычислимых чисел счетно. Значит, для любой частичной КФДП h найдется частичная R-функция f такая, что $\Gamma_h \subseteq \Gamma_{\tilde{f}}$. Здесь уместно вспомнить мнение А. И. Мальцева, состоящее в том, что конструктивная математика есть частный случай классической. В данной работе дано определение C-вычислимой функции (см. [18]). Такие функции задаются алгоритмическими R-преобразователями. Понятие C-вычислимой функции дает формальное уточнение определенного интуитивного представления о вычислимой функции действительного переменного, которое может быть названо частично конструктивным представлением. Известно, что вполне конструктивное представление о понятии вычислимой вещественной функции формализовано и изучено А. А. Марковым, Н. А. Шаниным, Г. С. Цейтиным, И. Д. Заславским и др. (см. [12, 22]) в виде понятия конструктивной функции действительного переменного. Класс C-вычислимых функций и класс КФДП несравнимы между собой. Важнейшие отличия между ними состоят в следующем.

1. C-вычислимые функции определяются на всех вещественных числах (точнее, на всех двоичных разложениях вещественных чисел), КФДП определяются только на конструктивных действительных числах (КДЧ).

2. КФДП непрерывны на области определения, C-вычислимые функции непрерывны во всех точках кроме, быть может, точек вида $m/2^n$, где m, n — целые числа.

3. C-вычислимая функция на каждом отрезке $[a, b]$ имеет точные верхнюю и нижнюю грани, КФДП, даже будучи определена во всех точках отрезка $[0, 1]$, может не быть ограниченной на этом отрезке.

4. КФДП удовлетворяет сильному семантическому условию (условию коррективности, накладываемому внешним образом): на различных, но эквивалентных КДЧ x, y, КФДП f выдает эквивалентные КДЧ $f(x)$, $f(y)$; C-вычислимая функция на различных двоичных разложениях x, y одного и того же вещественного числа вида $m/2^n$ может выдавать неэквивалентные двоичные разложения $f(x)$, $f(y)$ (это влечет возможные разрывы в точках вида $m/2^n$).

При исследовании вопроса о способах представления вычислимых вещественных чисел произошел в различных формах возврат к исходной идее Брауэра об использовании для этого последовательностей налегающих интервалов [5, с. 48]. Идея Тьюринга об использовании для этого последовательностей прилегающих интервалов [32] была отброшена самим Тьюрингом [33], а затем и другими исследователями в связи с имевшейся в [32] некорректностью. Все же возможна такая реализация исходной идеи Тьюринга: считать (вычислимым) вещественным числом результат соединения прилегающих отрезков, элементов (вычислимой) последовательности, в которой содержатся только отрезки длины 2^{-a} (a — целое число) так, что длина следующего не больше длины предыдущего и существует не более двух отрезков одинаковой длины.

§ 2. ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫЕ R-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ

Определяя некоторый класс T-функций ($T \in \{R, \Delta, V, \ldots\}$), мы здесь действуем по аналогии с теорией рекурсивных функций или, точнее, теорией функций, вычислимых по Тьюрингу. Вначале определяем соответствующий класс преобразователей, затем класс частичных T-функций, задаваемых преобразователями, и, наконец, класс T-функций. Если под частичной T-функцией понимается функция вида f_A: $U \to V$, заданная преобразователем A и, вообще говоря, частично определенная на множестве U, то далее под *T-функцией* понимается (тотальная) частичная T-функция f_A: $U \to V$, которая определена на всех $x \in U$. В силу этого соглашения определение класса частичных T-функций определяет также и класс T-функций. Например, при $T = R$ триада [R-преобразователь — частичная R-функция (частично реальная функция) — R-функция (реальная функция)] аналогична триаде [машина Тьюринга — частично рекурсивная функция — рекурсивная функция]. Таким образом, понятие T-функции вторично относительно понятия частичной T-функции и T-функция есть частичная T-функция, удовлетворяющая семантическому условию тотальности. Это условие отражает внешнее свойство частичных T-функций, а не внутреннее ограничение на способ функционирования преобразователя.

Введем необходимые определения. Пусть $\Sigma_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ \bar{1},\ \bar{2},\ \nabla\}$ — алфавит, где символы $\bar{1}$, $\bar{2}$, ∇ понимаются как -1, -2, запятая. Пусть $\Delta_0 = \Sigma_0 \setminus \{\nabla\}$, $\Delta_+ = \Delta_0 \setminus \{\bar{1},\ \bar{2}\}$, $\Delta_- = \Delta_0 \setminus \{1,\ 2\}$; V^* — множество всех слов в алфавите V (множество всех конечных последовательностей элементов множества V), включая пустое слово ε, $V^+ = V^* \setminus \{\varepsilon\}$, $|v|$ — длина слова $v \in V^*$, V^∞ — множество всех сверхслов в алфавите V (множество всех бесконечных последовательностей элементов множества V). Вместо $\{a\}^*$, $\{a\}^\infty$ примем a^*, a^∞ $(a \in \Sigma_0^+)$. Пусть $0' = 0 \nabla 0^\infty$, $1' = 0 \nabla 1^\infty$, $\mathbf{N} = \{0,\ 1,\ \ldots\}$, $\mathbf{N}^+ = N \setminus \{0\}$, $\mathbf{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$. Пусть $D = D' \cap (\Sigma_0 \setminus \{2,\ \bar{2}\})^\infty$ — множество реальных чисел, или R-чисел, где $D' = (\{0\} \cup 1\{0,\ 1\}^*)(\{\varepsilon\} \cup \nabla \Delta_+^* \cup \nabla \Delta_+^\infty) \cup (\{0\} \cup \bar{1}\{0,\ \bar{1}\}^*)(\{\varepsilon\} \cup \nabla \Delta_-^* \cup \nabla \Delta_-^\infty)$. Для любого $x \in D'$, $x = a_k \ldots a_0 \nabla a_{-1} a_{-2} \ldots$, обозначим через $\tilde{x}$ вещественное число $\sum_{i=-\infty}^{k} a_i 2^i$, где $\bar{1} \cdot 2^i = -2^i$, $\bar{2} \cdot 2^i = -2^{i+1}$ $(a_i \in \Delta_0)$. Далее под *двоичным представлением вещественного числа x* понимается элемент $y \in D$ такой, что $\tilde{y} = x$. Для любого $x \in D'$ положим $\|x\| = \tilde{x}$.

Возьмем $F_0 = D \cap \Sigma_0^* 0^\infty$ (F_0 — множество финальных чисел), $K_0 = D \cap \Sigma_0^* \{1,\ \bar{1}\}^\infty$ (K_0 — множество кофинальных чисел), $G_0 = D \setminus (F_0 \cup K_0)$. Пусть $F_+ = \{x \mid x \in F_0,\ \tilde{x} > 0\}$, $K_+ = \{x \mid x \in K_0,\ \tilde{x} > 0\}$, $F_- = F_0 \setminus (F_+ \cup \{0'\})$, $K_- = K_0 \setminus K_+$. Введем метрику (ρ) и порядок ($\prec$) на множестве D. Для любых x, $y \in D$ положим $\rho(x,\ y) = |\tilde{x} - \tilde{y}|$. Выражение $x \prec y$ означает, что или $\tilde{x} < \tilde{y}$, или $\tilde{x} = \tilde{y}$, $x \neq y$, $x \in F_- \cup K_+$, а $x \preccurlyeq y$ означает, что $x \prec y$ или $x = y$. Естественным образом согласно метрике ρ и порядку $\prec$ для функций вида f: $D \to D$ определяются понятия непрерывности, непрерывности слева и справа в точке $x \in D$ и непрерывности функции на всем множестве D.

Обозначим через V_α множество вида $\alpha\{0,\ 1,\ \bar{1}\}^\infty \cap D$, где $\alpha 0^\infty \in D$. Назовем *λ-конусом* любое множество вида V_α. Частичную функцию f: $D \to D$ назовем *псевдонепрерывной в точке x*, если $f(x)$ определено и для любого $\varepsilon > 0$ существует λ-конус V такой, что $x \in V$ и для любых y, $z \in V$, если $f(y)$, $f(z)$ определены, то выполняется условие $\rho(f(y),\ f(z)) < \varepsilon$. Частичную функцию f: $D \to D$ назовем *частичной псевдонепрерывной*, если она псевдонепрерывна в каждой точке. Каждой частичной функции f: $D \to D$ поставим в соответствие частичную функцию действительного переменного $\tilde{f}$ так, что $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{y}$ при $y = f(x)$, $x \in D \setminus K_0$. Назовем f: $D \to D$ *функцией, представляющей функцию $\tilde{f}$*.

Некоторые утверждения, имеющие несложные доказательства, приведены ниже без доказательств или сопровождаются краткими пояснениями. В ряде случаев отсутствие доказательств мотивируется тем, что соответствующие утверждения имеют аналоги в конструктивном анализе.

Теорема 1. *Частичная функция f: $D \to D$ псевдонепрерывна тогда и только тогда, когда для любого x из области определения функции f выполняются такие условия:*

а) f *непрерывна в* x, *если* $x \in G_0 \cup \{0'\}$,

б) f *непрерывна в* x *слева, если* $x \in F_- \cup K_+$,

в) f *непрерывна в* x *справа, если* $x \in K_- \cup F_+$.

R-преобразователь задается в виде $A = (K, H, q_0)$, где K — конечное или счетное множество (множество состояний), H — подмножество множества $K \times \Sigma_0 \times K \times \Sigma_0^*$ (система команд), q_0 — элемент множества K, причем для любых $q \in K$, $\sigma \in \Sigma_0$ существует единственная четверка (q, σ, p, v), принадлежащая множеству H. Для удобства будем элементы (q, σ, p, v) множества H записывать в виде $q\sigma \to pv$ и называть *продукциями*. С R-преобразователем A связано множество $O_1(A) \subset \subset \Sigma_0^\infty \times (\Sigma_0^* \cup \Sigma_0^\infty)$ — отображение, задаваемое R-преобразователем A, где $O_1(A) = \{(w, y) \mid w = a_0 a_1 \ldots$ и существуют элементы y_0, q_1, y_1, q_2, $y_2, \ldots$ такие, что $(q_i, a_i, q_{i+1}, y_i) \in H$, $i \in \mathbf{N}$, а y получается из последовательности $y_0 y_1 \ldots$ вычеркиванием всех символов $\varepsilon\}$. Возьмем еще множество $O(A) = O_1(A) \cap (D \times (D' \cap \Sigma_0^\infty))$. Полагаем, что R-преобразователь A задает частичную R-функцию f_A: $D \to D$, где $f_A(w) = \widehat{y}$, если $(w, y) \in O(A)$ и $f_A(w)$ не определено в противном случае. При этом любому $y \in D' \cap \Sigma_0^\infty$ ставится в соответствие $\widehat{y} \in D$ так, что при $y = = u \nabla y_1 y_2 \ldots$ $(y_i \in \Delta_0)$ имеем $\widehat{y} = \alpha \nabla \beta_1 \beta_2 \ldots$, где для любого $i \geqslant 1$ существует j такое, что все конечные двоичные представления вещественных чисел $\widetilde{v}_{j+k} (v_{j+k} = u \nabla y_1 \ldots y_{j+k})$, $k \geqslant 0$, имеют начало $\alpha \nabla \beta_1 \ldots \beta_i$, где $\beta_i \in \{0, 1, \bar{1}\}$. Считаем, что $(x, y) \in O_1(A)$ эквивалентно $A(x) = y$.

R-преобразователь A называется *реалом*, если f_A — всюду определенная функция. Тогда f_A называется *реальной функцией*.

Теорема 2. *Каждая частичная R-функция f есть частичная псевдонепрерывная функция.*

Следствие 1. *Если f — реальная функция и для любых x, $y \in D$ из $\widetilde{x} = \widetilde{y}$ следует $\|f(x)\| = \|f(y)\|$, то f — непрерывная функция.*

Положим, что функции f_i: $D \to D$, $i = 1, 2$, эквивалентны между собой, если условие $\rho(f_1(x), f_2(x)) = 0$ верно для любого $x \in D$.

Лемма 1. *Пусть f — псевдонепрерывная функция, a, $b \in D$, $a \prec b$. Тогда множество $\{f(x) \mid a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\}$ имеет точные верхнюю и нижнюю грани.*

Это выводится из леммы Кёнига.

Теорема 3. *Для любой псевдонепрерывной функции f существует эквивалентная ей реальная функция g.*

Доказательство. Пусть $P = \{(u, \alpha) \mid u \nabla \alpha 0^\infty \in D\}$. Поскольку f псевдонепрерывна, согласно лемме Кёнига можно выбрать две функции h_1: $P \to \mathbf{N} \cup \{-1\}$, h_2: $P \to \mathbf{Z}$, удовлетворяющие условиям

$$\forall x \in D \forall i \in \mathbf{N} \exists (u, \alpha) \in$$
$$\in P\left(x \in V_{u\nabla\alpha}, h_1\left(u, \alpha\right) = i, \frac{h_2(u, \alpha)}{2^i} < \|f(x)\| < \frac{h_2(u, \alpha) + 2}{2^i}\right)$$
$$h_1(u, \alpha\beta) \geqslant h_1(u, \alpha).$$

Тогда реал A, задающий искомую функцию $g = f_A$, на произвольном входном R-числе $x = u \nabla \gamma$ работает следующим образом. Реал A читает слева направо входное сверхслово $u \nabla \gamma$ и записывает слева направо выходное сверхслово $y \in D'$, $y = w \nabla \beta_1 \beta_2 \ldots$, последовательно выполняя указанные ниже шаги 1, 2, ... так, что на шаге 1 строится слово $w \nabla \beta_1$, и на шаге j определяется $\beta_j \in \Delta_0$, $j \in \mathbf{N}^+$.

Шаг 1. Прочитывается минимальное по длине левое подслово $u \nabla \alpha_1$ сверхслова x такое, что $h_1(u, \alpha_1) = 1$. Если $h_2(u, \alpha_1) \in \{0, -1, -2\}$, то $w \nabla \beta_1 = 0 \nabla 0$. Если $h_2(u, \alpha_1) \geqslant 1$, то $\beta_1 \in \{0, 1\}$, $2\|w \nabla \beta_1\| = h_2(u, \alpha_1)$. Если $h_2(u, \alpha_1) \leqslant -3$, то $\beta_1 \in \{0, \bar{1}\}$, $2\|w \nabla \beta_1\| = h_2(u, \alpha_1) + 2$.

Шаг j. Пусть $j > 1$ и до шага j уже прочитано левое подслово $u \nabla \alpha_{j-1}$ сверхслова x. Тогда на шаге j прочитывается минимальное по длине, следующее сразу после $u \nabla \alpha_{j-1}$, подслово γ_j сверхслова x такое, что $h_1(u, \alpha_j) = j$, где $\alpha_j = \alpha_{j-1}\gamma_j$. Если $h_2(u, \alpha_j) \in \{0, -1, -2\}$, то $\beta_j = 0$. Если $h_2(u, \alpha_j) \geqslant 1$, то $\beta_j \in \{0, 1\}$, $2^j \|w \nabla \beta_1 \dots \beta_j\| = h_2(u, \alpha_j)$. Если $h_2(u, \alpha_j) \leqslant -3$, то $\beta_j \in \{0, \bar{1}\}$, $2^j \|w \nabla \beta_1 \dots \beta_j\| = h_2(u, \alpha_j) + 2$.

Это дает искомую R-функцию g и определяет способ последовательного приближения к значению функции $g(x)$ при фиксированном значении аргумента x. Отметим попутно, что в случае, когда $\|f(x)\| = \sin(\tilde{x})$, обязательно и независимо от выбора реала A имеем $\tilde{x} = \pi/2 \to g(x) = 0 \nabla 1^\infty$, хотя, возможно, что $f(x) = 1 \nabla 0^\infty$, при $\tilde{x} = \pi/2$. Теорема 3 доказана.

Заметим, что для частичной псевдонепрерывной функции

$$f(x) = \begin{cases} 0' & \text{при } x \in F_0, \\ \text{не определено при } x \notin F_0 \end{cases}$$

не существует эквивалентной частичной R-функции. Это следует из указанной ниже леммы 5(г).

Теорема 3_1. *Любая частичная псевдонепрерывная функция f продолжается до (частичной) R-функции.*

Эта теорема доказывается подобно теореме 3. Обобщение же леммы 1 на класс частичных псевдонепрерывных функций невозможно.

Для любого R-преобразователя $A = (K, H, q_0)$ понятие макропродукции (или макрокоманды) определяется индуктивно:

1) продукция (R-преобразователя A) есть макропродукция;

2) если $q\alpha \to vp_1$, $p_1\beta \to wp_2$ — макропродукция, q, $p_i \in K$, то $q\alpha\beta \to vwp_2$ есть макропродукция.

Средством задания непрерывных вещественных функций могут служить также размеченные бесконечные деревья, которые рассматриваются ниже как возможный способ задания реальных функций. Ограничимся здесь только полными бинарными размеченными деревьями (сокращенно — разметками) и с их помощью определим понятие Δ-функции.

Разметкой называется любой функционал μ: $\{0, 1\}^* \to \{0, 1, 2, \bar{\varepsilon}\}$ такой, что $\mu(\varepsilon) = 0$. Разметке μ ставится в соответствие частичная Δ-функция f_μ: $C_d \to C_d$, $C_d = \{0, 1\}^\infty$ так, что $f_\mu(x) = y$, если $x = x_1, x_2 \dots$, $x_i \in \{0, 1\}$, $z_i = \mu(x_1 \dots x_i)$, $z = z_1 z_2 \dots$, z' — сверхслово, полученное из сверхслова z вычеркиванием всех символов $\bar{\varepsilon}$, $t = 0 \nabla 0z'$, $0 \nabla y = \hat{t}$.

Разметка μ называется *P-разметкой*, если f_μ — Δ-функция. Пусть $\tilde{x} = \|x\| = \|0 \nabla x\|$ при $x \in C_d$. Любой частичной функции f: $C_d \to C_d$ поставим в соответствие частичную функцию $\bar{f}$: $D \to D$, где

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0 \nabla f(0^\infty) & \text{при } \tilde{x} < 0, \\ 0 \nabla f(x') & \text{при } x = 0 \nabla x', \\ 0 \nabla f(1^\infty) & \text{при } \tilde{x} \geqslant 1. \end{cases}$$

Лемма 2. *Функция f: $C_d \to C_d$ есть Δ-функция тогда и только тогда, когда $\bar{f}$ — реальная функция.*

Δ-функция f называется *непрерывной*, если непрерывна реальная функция $\bar{f}$. Введем функцию Θ: $\{0, 1\}^* \to \mathbf{N}$, нумерующую элементы множества $\{0, 1\}^*$ так, что $\Theta(u) < \Theta(v)$, если или $|u| < |v|$, или $|u| = |v|$ и слово u лексикографически предшествует слову v, $\Theta(0) < \Theta(1)$. Через ξ_i обозначим слово из $\{0, 1\}^*$, имеющее номер i относительно функции Θ. Введем функцию Φ, которая произвольной разметке μ ставит в соответствие элемент множества C_d так, что $\Phi(\mu) = v_1 v_2 \dots$, где

$$v_i = \begin{cases} 11 & \text{при } \mu(\xi_i) = 0, \\ 01 & \text{при } \mu(\xi_i) = 1, \\ 10 & \text{при } \mu(\xi_i) = 2, \\ 00 & \text{при } \mu(\xi_i) = \bar{\varepsilon}. \end{cases}$$

Для любого $x \in C_d$ обозначим через ψ_x частичную Δ-функцию f_μ, где $\mu = \Phi^{-1}(x)$. Пусть $W_x = \{y \mid y \in C_d,\ \psi_x(y)$ определено$\}$. Множества вида W_x, $x \in C_d$, назовем *множествами типа* 0, или 0-*множествами*. Ниже будет показано, что существует аналогия между понятиями Δ-функции, частичной Δ-функции, 0-множества теории Δ-функций и соответственно понятиями рекурсивной функции, частично рекурсивной функции, рекурсивно перечислимого множества теории рекурсивных функций.

По аналогии с канторовскими нумерационными функциями

$$c^n : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N},\ n \geqslant 2,\ c^2(x, y) = c(x, y) = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2},$$

определим функции $\bar{c}^n$: $D_n \to D$, $n \in \mathbf{N}^+$. Пусть λ: $\mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ — взаимно однозначная функция, где $\lambda(0) = 0$, $\lambda(i) = 2i - 1$, $\lambda(-i) = 2i$, при $i \in \mathbf{N}^+$. Для любых x, $y \in D$, $x = u \nabla x_1 x_2 \ldots$, $y = v \nabla y_1 y_2 \ldots$ $(x_i, y_i \in \{0, 1, \bar{1}\})$ положим, что $\bar{c}(x, y) = w \nabla \alpha_1 \alpha_2 \ldots$, где $\alpha_j \in \{0, 1, \bar{1}\}$, $j \in \mathbf{N}^+$, $\bar{c}(x, y) \in D$, $\tilde{w} = \lambda^{-1}(c(\lambda(\tilde{u}), \lambda(\tilde{v})))$, а значения α_j определяются следующим образом:

1) $|\tilde{\alpha}_{2i-1}| = |\tilde{x}_i|$, $|\tilde{\alpha}_{2i}| = |\tilde{y}_i|$ при $\tilde{u} \cdot \tilde{v} \neq 0$,

2) $|\tilde{\alpha}_{2i-1}| = |\tilde{x}_i|$, $|\tilde{\alpha}_{2i}| = |\tilde{z}_i|$, где $z_1 z_2 \ldots = A(y_1 y_2 \ldots)$, при $\tilde{u} \neq 0$, $\tilde{v} = 0$,

3) $|\tilde{\alpha}_{2i-1}| = |\tilde{z}_i|$, $|\tilde{\alpha}_{2i}| = |\tilde{y}_i|$, где $z_1 z_2 \ldots = A(x_1 x_2 \ldots)$, при $\tilde{u} = 0$, $\tilde{v} \neq 0$,

4) $|\tilde{\alpha}_i| = |\tilde{z}_i|$, где $z_1 z_2 \ldots = B(x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots)$, при $\tilde{u} = \tilde{v} = 0$.

Причем, A, B — R-преобразователи такие, что R-преобразователь A имеет макропродукции $q_0 0 \to 0 q_0$, $q_0 1 \to 10 q_0$, $q_0 \bar{1} \to 11 q_0$, а R-преобразователь B имеет макропродукции $q_0 0 \to 0 q_0$, $q_0 a \to a q_1$ $(a = 1, \bar{1})$, $q_1 0 b \to 0 b q_1$, $q_1 1 b \to 10 b q_1$, $q_1 \bar{1} b \to 11 b q_1$ $(b = 0, 1, \bar{1})$.

Положим $\bar{c}^1(x) = x$, $\bar{c}^2(x, y) = \bar{c}(x, y)$, $\bar{c}^{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \bar{c}^n(\bar{c}(x_1, x_2), x_3, \ldots, x_{n+1})$ при $n \geqslant 2$. Для любых $x_i \in C_d$, $x_i = x_{i1} x_{i2} \ldots$ $(x_{ij} \in \{0, 1\})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, полагаем $c'_n(x_1, \ldots, x_n) = w_1 w_2 \ldots$, где $w_j = x_{1j} \ldots x_{nj}$. Пусть $S \in \{D, C_d\}$. Частичную n-местную функцию g: $S^n \to S$ назовем *частично реальной* (соответственно *частичной Δ-функцией*), если существует частичная R-функция (частичная Δ-функция) f такая, что $g(x_1, \ldots, x_n) = f(h(x_1, \ldots, x_n))$, где $h = \bar{c}^n$ (соответственно $h = c'_n$). Функция U: $S^{n+1} \to S$ называется универсальной для совокупности $\mathfrak{B}$ функций вида $S^n \to S$, если $\mathfrak{B} = \{U_\beta \mid \beta \in S\}$, где $U_\beta(x_1, \ldots, x_n) = U(\beta, x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 4. *Для $n = 1, 2, \ldots$ существует частично реальная $(n+1)$-местная функция, универсальная для класса всех n-местных частично реальных функций.*

Теорема 4$_1$. *Для $n = 1, 2, \ldots$ существует частичная $(n+1)$-местная Δ-функция, универсальная для класса всех n-местных частичных Δ-функций.*

Указанное выше определение n-местной частично реальной функции косвенно. В частности, при таком определении функция $\bar{c}(x, y)$ просто объявлена реальной. Укажем прямое (операциональное) определение n-местной частично реальной функции. Для $n = 1, 2, \ldots$ R_n-преобразователем называется упорядоченная тройка $A = (K, H, q_0)$, где K — конечное или счетное множество, $q_0 \in K$, $H \subseteq K \times (\Sigma_0 \cup \{\varepsilon\})^n \times K \times \Sigma_0^*$, причем для любых $q \in K$, $\sigma \in (\Sigma_0 \cup \{\varepsilon\})^n$ существует единственная команда вида (q, σ, p, v).

R_n-преобразователь подобно R-преобразователю перерабатывает сверхслова в алфавите $(\Sigma_0 \cup \{\varepsilon\})^n$ в слова и сверхслова в алфавите Σ_0. Пусть $O_1(A) = \{(w, y) \mid R_n$-преобразователь A перерабатывает $w \in \{(\Sigma_0 \cup \{\varepsilon\})^n\}^\infty$ в $y \in \Sigma_0^* \cup \Sigma_0^\infty\}$. Для любых $x_j \in D$, $1 \leqslant j \leqslant n$, положим $s_n(x_1, \ldots, x_n) = v_1 v_2 \ldots$, где $v_i \in (\Sigma_0 \cup \{\varepsilon\})^n$, $v_i = (v_{i1}, \ldots, v_{in})$, $v_1 \neq (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$, $v_m = (\nabla, \ldots, \nabla)$ для некоторого m, и для каждого $1 \leqslant j \leqslant n$

существует k_j такое, что $x_j = v_{k_j j} v_{k_j+1 j} \ldots$ и $v_{ij} = \varepsilon$ равносильно $1 \leqslant \leqslant i < k_j$. Пусть $S_n = \{s_n(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in D,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Возьмем $O(A) = O_1(A) \cap (S_n \times (D' \cap \Sigma_0^\infty))$. Полагаем, что R_n-преобразователь A задает n-местную частично реальную функцию f_A^n: $D^n \to D$, где $f_A^n(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{y}$, если $((s_n(x_1, \ldots, x_n), y) \in O(A)$.

Лемма 3. *Для $n = 1, 2, \ldots$ функция $\bar{c}^n$ задается некоторым R_n-преобразователем.*

Следствие 2. *Два указанных выше определения n-местной частично реальной функции эквивалентны между собой.*

Следствие 2_1. *Для $n = 2, 3, \ldots$ существует взаимно однозначная реальная функция, отображающая множество D^n на множество D.*

Укажем второе определение n-местной частичной Δ-функции. Пусть A — R-преобразователь,

$$O_2(A) = O_1(A) \cap (C_d \times \{x \mid x \in 0 \triangledown \{0, 1, 2\}^\infty,\ \tilde{x} \leqslant 1\}).$$

Полагаем, что R-преобразователь A задает n-местную частичную Δ-функцию g_A^n: $(C_d)^n \to C_d$, где $g_A^n\ (x_1, \ldots x_n) = z$, если $(c_n'(x_1, \ldots, x_n), y) \in O_2(A)$, $\widetilde{y} = 0 \triangledown z$. Частичную функцию f: $D^n \to D$ (соответственно частичную функцию f: $(C_d)^n \to C_d$) назовем *строгой n-местной частично реальной функцией* (соответственно *строгой n-местной частичной Δ-функцией*), если она может быть задана R_n-преобразователем A так, что для любого w из $(w, y) \in O_1(A)$ следует $y \in \Sigma^* \cup \Sigma^\infty$, $\Sigma = \Sigma_0 \setminus \{2, \bar{2}\}$.

Каждой частичной n-местной функции f: $D^n \to D$ поставим в соответствие частичную функцию действительного переменного $\tilde{f}$ так, что $\tilde{f}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = \tilde{y}$, при $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, $x_j \in D \setminus K_0$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Функция f называется *функцией, представляющей функцию $\tilde{f}$*.

Лемма 4. *Не существует двухместной строгой реальной функции f, представляющей функцию $g(x, y) = x + y$.*

Можно получить такое обобщение теорем 2 и 3:

Лемма 4_1. *Для любой n-местной псевдонепрерывной функции g существует эквивалентная ей n-местная реальная функция f, и наоборот.*

Следствие 3. *Каждая n-местная непрерывная вещественная функция представима n-местной R-функцией.*

В силу теорем 1, 2 и леммы 1 имеем

Следствие 4. *Если $f(x)$ — R-функция, то функция $\tilde{f}$ интегрируема по Риману.*

Следствие 4 может быть параметризовано в виде аналога (для R-функций) такой леммы:

Лемма 4_2. *Существует частичная Δ-функция $\mathcal{I}(y, z, t)$ такая, что для любых $y, z, t \in C_d \setminus \{0, 1\}^* 0^\infty$, если ψ_y — Δ-функция, то* $\|\mathcal{I}(y, z, t)\| = \int_{\|t\|}^{\|z\|} \widetilde{\widetilde{\psi}}_y(x)\, dx$.

Это означает, что операция интегрирования по Риману имеет тип R (см. § 5).

Частичная R-функция f называется *частичной конечно реальной*, если она задана конечным R-преобразователем.

Лемма 4_3. *Существуют двухместные конечно реальные функции f, g, представляющие функции $x + y$, $x - y$.*

Лемма 4_4. *Существует конечно реальная функция $\varphi(x)$ такая, что $\tilde{\varphi}$ — непрерывная нигде не дифференцируемая функция, имеющая неограниченную вариацию в любой окрестности.*

Доказательство. Искомой будет конечно реальная функция φ, представляющая периодическую функцию f, где $f(x+1) = f(x)$, $f(x) = \lim \{f_i(x)\}$, на отрезке $[0, 1]$, причем f_i — ломаная с вершинами из множества M_i, при $M_0 = \{(0, 0), (1/2, 1), (1, 0)\}$. Далее $M_i \subseteq M_{i+1}$ и если $[z_1, z_2]$ — отрезок ломаной f_i, не содержащий точек из M_i кроме

$z_j = (x_j, y_j)$, $j = 1, 2$, то в M_{i+1} попадают точки $z_1' = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y_2\right)$, $z_2' = \left(\frac{x_1 + 3x_2}{4}, y_1\right)$ и средние точки отрезков $[z_1, z_1']$, $[z_1', z_2']$, $[z_2', z_2]$.

Аналогично, начиная с отрезка $[(0, 0), (1, 1/4)]$, строится непрерывная монотонная конечно реальная функция, не имеющая конечной производной ни в одной точке любого счетного множества L. При $L = \{m/2^n | m, n \in Z\}$ следует соответственно взять $M_0 = \{z | z = k(1, 1/4), k \in Z\}$ и $z_1' = z_1 + \frac{y_2 - y_1}{4}(1, 1)$, $z_2' = \frac{z_1 + z_2}{2}$, $z_3' = z_2' + z_1' - z_1$ при $k < 1$, и $z_1' = \left(\frac{3x_1 + x_2}{4}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, $z_2' = z_1' + \frac{x_2 - x_1}{8}(4, 1)$ при $k \geqslant 1$, где $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Конечным реалом может быть задана также функция Ван-дер-Вардена [14, с. 483]. Примеры непрерывных недифференцируемых функций обсуждаются в [2].

Лемма 4_5. *Пусть A — конечный R-преобразователь. Тогда $\|f_A(x)\|$ — рациональное число, если $\tilde{x}$ — рациональное число и $f_A(x)$ определено.*

Доказательство. Если $x = u \nabla v\gamma\gamma\ldots$, то для некоторых натуральных чисел $i < j$ преобразователь A после прочтения слов $u \nabla v(\gamma)^i$, $u \nabla v(\gamma)^j$ находится в одном и том же состоянии и имеет на выходной ленте соответственно слова $u_1 \nabla v_1$, $u_1 \nabla v_1\delta$. Тогда $f_A(x)$ не определено при $\delta = \varepsilon$, иначе $f_A(x) = u_1 \nabla v_1\{\delta\}^\infty$.

Следовательно, указанная функция Ван-дер-Вардена f в рациональных точках x принимает рациональные значения $f(x)$. По доказательству леммы 4_5 получаем ее обобщение на случай, когда A — машина Тьюринга, имеющая входную, выходную и n рабочих лент, причем для любого входного сверхслова x в процессе вычислений управляющая головка относительно каждой из рабочих лент совершает конечное число поворотов.

Из определения R_n-преобразователя A снятием требования, состоящего в том, что для любых q, σ существует единственная команда вида (q, σ, p, v), получим определение недетерминированного R_n-преобразователя A, перенося обозначения $O(A)$, f_A^n на общий случай. Тогда $f_A^n = \{(x_1, \ldots, x_n, \widehat{y}) | (s_n(x_1, \ldots, x_n), y) \in O(A)\}$ назовем *частичной (многозначной) n-местной V_0-функцией.* При условии, что отображение $O(A)$ однозначно, f_A^n назовем *частичной V-функцией.* По f_A^n определим частичные функции ${}_1f_A^n$ так, что ${}_1f_A^n(x_1, \ldots, x_n) = \widehat{y}$, если существует единственное $\widehat{y} \in D$ такое, что $(x_1, \ldots, x_n, \widehat{y}) \in f_A^n$, иначе ${}_1f_A^n(x_1, \ldots, x_n)$ не определено. Частичные функции вида ${}_1f_A^n$, определяемые недетерминированными R_n-преобразователями, назовем *частичными V_1-функциями.* При $T \in \{V_0, V, V_1\}$ понятия частичной T-функции и строгой частичной T-функции совпадают между собой. Класс V-функций равен классу V_1-функций.

Лемма 4_6. *F — частичная n-местная V_0-функция тогда и только тогда, когда существует частично реальная функция f: $D^{n+1} \to D$ такая, что для любых R-чисел $x_1, \ldots, x_n, y$ условие $(x_1, \ldots, x_n, y) \in F$ эквивалентно условию $\exists z(f(x_1, \ldots, x_n, z) = y)$.*

Отсюда по теореме 4 имеем

Следствие 5. *Для $T \in \{V_0, V_1\}$, $n \geqslant 1$ существует частичная $(n+1)$-местная T-функция, универсальная для класса всех n-местных частичных T-функций.*

Лемма 4_7. *Класс частичных V_1-функций замкнут относительно операции суперпозиции.*

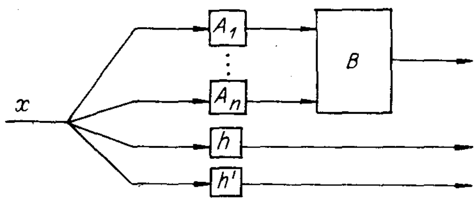
Доказательство. Необходимо по недетерминированным R_n-преобразователю B и R_m-преобразователям A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, задающим строгие частичные V_1-функции g_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, построить недетерминированный R_m-преобразователь C так, чтобы при всех $x \in D^m$ выполнялось равенство ${}_1f^m_C(x) = g_0(g_1(x), \ldots, g_n(x))$. Возьмем множество

$$L = \left\{x \mid x \in L^m \ \& \ \exists y_1 \exists y_2 \left(y_1 \neq y_2 \ \& \bigvee_{i=1}^{n} (\{(s_m(x), y_1), (s_m(x), y_2)\} \subseteq O(A_i)\right)\right\}.$$

Определим частичные V_1-функции h, h' так, что

$$h(x) = \begin{cases} 0' & \text{при} \quad x \in L, \\ \text{не определено в противном случае}, \end{cases}$$

$\|h'(x)\| = \|h(x)\| + 1$. Тогда искомый преобразователь C задается следующей схемой



Лемма 4$_8$. *Пусть U^{n+1} — универсальная функция для класса всех n-местных частичных V_1-функций. Тогда существует $(n+1)$-местная R-функция g такая, что*

$$U^{n+1}(z_0, U^{m+1}(z_1, x_1, \ldots, x_m), \ldots, U^{m+1}(z_n, x_1, \ldots, x_m)) =$$
$$= U^{m+1}(g(z_0, \ldots, z_n), x_1, \ldots, x_m)$$

для всех R-чисел z_i, x_j, $0 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Доказательство вытекает из доказательства леммы 4_7.

Лемма 4$_9$. *Класс функций классификации Бэра (содержащий непрерывные функции и замкнутый относительно операции поточечного предельного перехода) строго включается в класс вещественных функций, представимых V-функциями.*

Доказательство. Класс $\mathscr{K} = \{f \mid f$ — одноместная частичная V-функция$\}$ замкнут относительно операции поточечного предельного перехода. Диагонализацией строится функция из класса $\mathscr{K}$, не принадлежащая классификации Бэра.

Частичная R-функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *частично непрерывной*, если из $\tilde{x}_i = \tilde{y}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, следует $\|f(x_1, \ldots, x_n)\| = \|f(y_1, \ldots, y_n)\|$.

Теорема 4$_2$. *Существует двухместная частично непрерывная R-функция, универсальная для класса всех одноместных частично непрерывных R-функций.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x_0, x)$ — универсальная частичная R-функция и $a_1, a_2, \ldots$ — перечисление без повторений всех чисел вида $m/2^n$, m, $n \in \mathbf{Z}$. Любому R-числу $y = u \nabla \alpha_1\alpha_2\ldots$, где $\alpha_i \in \{0, 1, \bar{1}\}$, поставим в соответствие множество M_y так, что $\alpha_i = 0$ равносильно $a_i \in M_y$ для всех $i \in \mathbf{N}^+$. Любой частичной R-функции f соответствует множество $M^f \subseteq \mathbf{N}^+$ такое, что $\{a_i \mid i \in M^f\} = \{\tilde{x} \mid x \in F_0$, $f(x)$ определено и если $x_1 \in K_0$, $\tilde{x}_1 = x$, то $f(x_1) = f(x)\}$. Определим функцию $\psi(x_0, x)$ следующим образом. При $x_0 \notin \bar{c}^4(D^2 \times \{0'\} \times \{1'\})$ значение $\psi(x_0, x)$ не определено. (Отсюда $\psi(x_0, x)$ не определено при $x_0 \in F_0 \cup K_0$.) Если $x_0 = \bar{c}^4(z, y, 0', 1')$, то

$$\psi(x_0, x) = \begin{cases} \text{не определено при } \tilde{x} \notin M_y \ \& \ x_0 \in F_0 \cup K_0, \\ g(x_0, x) \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

где $g(x_0, x) = \varphi(z, x)$, когда $M_y \subseteq M^f$ для функции $f(x) = \varphi(z, x)$, иначе $g(x_0, x)$ не определено. Нетрудно построить R-преобразователь A, задающий частичную R-функцию g. Затем по R-преобразователю A строится R-преобразователь B, задающий частичную R-функцию ψ. Технику построения R-преобразователя B можно извлечь из доказательства леммы 13 (§ 4), аналогичной такому утверждению: выбрасывая из графика частичной R-функции счетное множество точек, получим снова график частичной R-функции. Кроме того, по построению функции ψ имеем $\psi(x_0, x)=\psi(t_0, t)$, при $\tilde{x}_0=\tilde{t}_0$, $\tilde{x}=\tilde{t}$, и, следовательно, ψ — искомая частично непрерывная функция.

Класс частично непрерывных функций замкнут относительно суперпозиции. Имеют место аналоги теорем 4, 4_1 для класса частично непрерывных функций и для классов (частичных строгих) R-функций и Δ-функций. Мы отождествляем частичные строгие Δ-функции с частично непрерывными операторами в канторовом пространстве.

Для любых $x\in C_d$, $n\in \mathbf{N}^+$ через ψ_x^n обозначим n-местную частичную Δ-функцию вида $\psi_x(c_n'(x_1, \ldots, x_n))$. Пусть $W_x^n=\{(y_1, \ldots, y_n)\mid y_i\in C_d,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ \psi_x^n(y_1, \ldots, y_n)$ определено$\}$. Множества вида W_x^n называются *множествами типа* 0, или 0-*множествами*. Обычно, если не оговорено противное, под 0-множеством подразумевается некоторое одномерное множество W_x^1.

При $H=F_0$, G_0, K_0 положим $H^1=\{x\mid x\in C_d,\ 0\nabla x\in H\}$. Далее ограничимся описанием теории Δ-функций, подразумевая, что получаемые результаты могут быть по аналогии перенесены в теорию реальных функций.

Лемма 5. *Имеют место следующие утверждения*:

(а) *если L, M — множества типа* 0, *то таковы же множества* $L\cup M$, $L\cap M$,

(б) *если M счетно, то $D\backslash M$ — множество типа* 0,

(в) G_0' — *множество типа* 0,

(г) F_0', K_0' — *не множества типа* 0 *),

(д) *множества K_i, $1\leqslant i\leqslant 3$, — множества типа* 0, *где* $K_1=\{x\mid\psi_x(x)$ *определено*$\}$, $K_2=\{x\mid\psi_x$ — Δ-*функция*$\}$, $K_3=\{x\mid\psi_x$ — *непрерывная* Δ-*функция*$\}$.

При доказательстве леммы 5 следует воспользоваться методом, аналогичным методу плотного перечисления теории рекурсивных функций [38]. Это же относится и к следующим двум теоремам. (В § 4 доказана лемма 13, аналогичная утверждению (д) леммы 5).

Для $n=1, 2, \ldots$ введем следующие классы функций:

$\mathfrak{B}_{0n}$ — класс частичных n-местных Δ-функций.

$\mathfrak{B}_{1n}$ — класс n-местных Δ-функций,

$\mathfrak{B}_{2n}$ — класс непрерывных n-местных Δ-функций,

$\mathfrak{B}_{in}'=\mathfrak{B}_{in}\cup\{\omega^n\}$, где ω^n — нигде не определенная частичная n-местная Δ-функция, $0\leqslant i\leqslant 2$.

Теорема 5. *Для $0\leqslant i\leqslant 2$, $n\in\mathbf{N}^+$ существует $(n+1)$-местная частичная Δ-функция f, универсальная для класса $\mathfrak{B}_{in}'$.*

Для Δ-функций f, g положим $|f-g|=\max\{\rho(\bar{f}(x), \bar{g}(x))\mid x\in D\}$. При $i=1, 2$ введем следующие множества:

$$K_{3+i}=\{x\mid\forall y\forall z(\psi_y=\psi_z\in\mathfrak{B}_{i1}\to\psi_x(y)=\psi_x(z)\},$$

$$K_{5+i}=\{x\mid x\in K_2\ \&\ \forall y\forall z(\psi_y=\psi_z\in\mathfrak{B}_{i1}\to\psi_{\psi_x(y)}=\psi_{\psi_x(z)}\in\mathfrak{B}_{i1}\},$$

$$K_{7+i}=\{x\mid x\in K_2\ \&\ \forall\varepsilon>0\forall y(y\in K_{i+1}\to\exists\delta>0\forall z((z\in K_{i+1}\ \&$$

$$\&\ |\psi_y-\psi_z|<\delta)\to\rho(\bar{\psi}_x(0\nabla y), \bar{\psi}_x(0\nabla z))<\varepsilon))\},$$

где x, y, $z\in C_d$.

Теорема 6. *Множества K_j, $4\leqslant j\leqslant 9$, — множества типа* 0.

---

*) Множества F_0', K_0' конечно автоматно определимы в смысле [34]. Сверхязыки, распознаваемые машинами Тьюринга (включая недетерминированные), рассматривались в [35] (см. также [36, 37] и библиографию к ним).

Следующие две теоремы аналогичны $(s-m-n)$-теореме и теореме Клини о неподвижной точке.

Теорема 7. *Для любых натуральных чисел m, n существует строгая Δ-функция s_n^m от $m+1$ переменных такая, что для любых z, $x_i \in C_d$, $1 \leqslant i \leqslant m$, выполняется равенство*

$$\psi_z^{m+n}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \psi^n_{s_n^m(z, x_1, \ldots, x_m)}(y_1, \ldots, y_n)$$

для всех $y_j \in C_d$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Теорема 8. *Для любой строгой Δ-функции $h(x_1, \ldots, x_{n+1})$ существует строгая Δ-функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $\psi_{g(x_1,\ldots,x_n)}$ есть $\psi_{h(x_1,\ldots,x_n,g(x_1,\ldots,x_n))}$ для всех $x_i \in C_d$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

В качестве доказательств теорем 7, 8 можно использовать доказательства теорем 1.7, 1.8 книги [39, с. 28, 29], заменив в них «машина Тьюринга» на «R_n-преобразователь», «рекурсивная функция» — на «Δ-функция». Известно, что указанное доказательство теоремы Клини о неподвижной точке в общем случае не дает наименьшей неподвижной точки [38, с. 253]. В целом вопрос о построении неподвижной точки для рекурсивных операторов освещен в [38, гл. 11]. Собственно, теорема 8 не может быть усилена в плане построения наименьшей неподвижной точки. Контрпримером может служить строгая Δ-функция

$$h(x) = \begin{cases} 1^\infty & \text{при} \quad (\Phi^{-1}(x))(\xi_1) = \bar{\varepsilon}, \\ aa\ldots & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $a = 10$. Этот пример указал В. Ю. Сазонов.

Следующая теорема (теорема о n-кратной рекурсии) обобщает теорему 8. Ее аналог — теорема Шмульяна [38, с. 246] о парной рекурсии.

Теорема 9. *Для любых строгих Δ-функций $h_i(\vec{x}, y_1, \ldots, y_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, существуют строгие Δ-функции $g_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, такие, что $\psi_{g_i(x)}$ есть $\psi_{h_i(\vec{x}, g_1(\vec{x}), \ldots, g_n(\vec{x}))}$ для всех $\vec{x} \in (C_d)^m$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

В § 3 доказывается утверждение γ_{13} — формальный аналог теоремы 9.

Лемма 6. *Не существует двухместной (тотальной) Δ-функции f, универсальной для класса всех (тотальных) Δ-функций.*

Доказательство. Допустив противное, возьмем $h(x) = g^1_{A\cdot B}(x)$, где A — R-преобразователь, задающий Δ-функцию $f(x, x)$, а B — R-преобразователь, имеющий макрокоманды $q_0 0 \nabla \to 0 \nabla q_1$, $q_1 0 \to 2q_2$, $q_1 a \to 0q_2$ $(a = 1, 2)$, $q_2 b \to 0q_2$ $(b = 0, 1, 2)$. Имеем $h(x) = f(x_0, x)$ для некоторого $x_0 \in C_d$. Но $h(x) \neq f(x, x)$ для всех x, и получаем противоречие.

По лемме 6, используя доказательство теоремы 1.6 [39] с заменой «рекурсивная функция» на «Δ-функция», получаем следующую лемму.

Лемма 6$_1$. *Не существует строгой Δ-функции, имеющей областью значений множество K_2.*

Лемма 6$_2$. *Каждое 0-множество есть область значений подходящей частичной строгой Δ-функции, тождественной на области определенности.*

Лемма 6$_3$. *F_0' — пример не 0-множества, которое есть область значений подходящей Δ-функции.*

Возьмем множества $L_0 = \{0, 1\}^+01110\{0, 1\}^\infty$, $L_1 = \{x | x \in C_d, \exists y(\tilde{y} = \tilde{x}, y \in L_0 \setminus F_0')\}$. Тогда L_1, $L_0 \cup L_1$ — не 0-множества, но существует Δ-функция f такая, что $L_1 = f^{-1}(L_0)$. Значит прообраз 0-множества относительно Δ-функции не обязательно есть 0-множество. Прообраз же 0-множества относительно строгой Δ-функции есть 0-множество (см. § 3, γ_6). Это равносильно такому факту: непрерывный прообраз Π_2^0-множества есть Π_2^0-множество [40, с. 29], где Π_2^0-множество есть 0-множество в силу [41, лемма 1].

Множество $M \subseteq C_d$ называется

τ_0-*множеством*, если существует Δ-функция f такая, что $M = \{x \mid f(x) = 0^\infty\}$,

τ_1-*множеством, если* $C_d \setminus M$ есть τ_0-множество (Σ_1^0-множество [40] — это τ_1-множество),

R_0-*множеством*, если оно может быть получено из τ_0-множеств конечным применением операций объединения, пересечения и дополнения.

Тогда класс 0-множеств шире класса R_0-множеств. Этот факт следует из леммы 7 и комментария к ней. Он отражает свойство иерархии борелевских множеств и имеет такой арифметический аналог: класс Π_2^A шире булевой алгебры, порожденной классом $\Sigma_1^A \cup \Pi_1^A$ [38, с. 408].

Лемма 7. *Пусть* L — R_0-*множество и функция* $g\colon C_d \to C_d$ *такова, что* $g(x) = 0^\infty$ *при* $x \in L$ *и* $g(x)$ *не определено в противном случае. Тогда* g — *частичная* Δ-*функция.*

Доказательство. Имеем $x \in L \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k_i} x \in L_{ij}$, где L_{ij} — τ_n-множества, $n \in \{0, 1\}$. Для $n = 0$, 1 пересечение τ_n-множеств есть τ_n-множество. Значит, $x \in L \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} x \in L_{i0} \mathbin{\&} x \in L_{i1}$, где L_{in} — τ_n-множество, $1 \leqslant i \leqslant m$, $n = 0$, 1. Отсюда получаем

$$x \in L \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} f_{i0}(x) = 0^\infty \mathbin{\&} f_{i1}(x) \neq 0^\infty,$$

где f_{in} — Δ-функция. Пусть A_{in} — реал, задающий функцию f_{in}. Конечное объединение множеств типа 0 есть множество типа 0, поэтому можно считать, что $m = 1$. Тогда R-преобразователь B, задающий функцию g, определяется так. Вначале к входному $x \in \{0, 1\}^\infty$ параллельно применяются реалы A_{10}, A_{11} до тех пор, пока будет обнаружено, что $f_{11}(x) \neq 0^\infty$ (при этом на выход преобразователя B ничего не выдается). Затем на выход преобразователя B выдаются символы 0, 0, ... так, что k-й 0 выдается в момент, когда A_{10} уже выдал k-й символ, если еще не обнаружено, что $f_{10}(x) \neq 0^\infty$.

Следствие 6. *Если* L — R_0-*множество, то* L — *множество типа* 0.

Как видно из доказательства леммы 7, произвольное R_0-множество имеет вид $L = \bigcup_{i=1}^{m} \left(C_d \Big\backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} C_d \right) \cap \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \beta_{ij} C_d \right)$, где $\alpha_{ij} \neq \beta_{ik}$ для всех i, j, k. Возьмем разметки μ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, так, что $\mu_i(\alpha_{ij}) = 0$, $\mu_i(\beta_{ij}) = 1$, $\mu_i(\xi) = \varepsilon$ в остальных случаях, $1 \leqslant i \leqslant m$. Пусть $a_i = \Phi(\mu_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $\eta = 0^m 1 c'_m(a_1, \ldots, a_m)$. Тогда положим, что $P_\eta = L$, $P_{0^\infty} = \varnothing$. Множества $M = \{x \mid x \in P_x,\ x \in C_d\}$, $C_d \setminus M$,— 0-множества, но не R_0-множества.

Лемма 8. *Пусть* $\mathfrak{S}$ — *непустое семейство частичных* Δ-*функций, содержащее нигде не определенную функцию* ω, *отличное от совокупности всех частичных* Δ-*функций и* $M = \{x \mid \psi_x \in \mathfrak{S},\ x \in C_d\}$. *Тогда множество* M *не может быть множеством типа* 0.

Доказательство. Допустим противное. Пусть A — R-преобразователь такой, что

$$f_A(x) = \begin{cases} 0^\infty & \text{при } x \in M, \\ \text{не определено при } x \notin M. \end{cases}$$

Для определенности будем считать, что $\mathfrak{S}$ не содержит частичную Δ-функцию q. Зафиксируем разметку μ_0, где $f_{\mu_0} = q$. Пусть R-преобразователь C перерабатывает входной элемент $x \in \{0, 1\}^\infty$ следующим образом. Вначале он выдает на выход $u_0 \in \{0, 1\}^4$ — подслово сверхслова $\Phi(\mu_0)$. Далее параллельно выполняются два процесса: применение преобразователя A к x, формирование выходного сверхслова преобразователем C. Если на i-м такте A выдал ε, то C пишет на выход 00. Если на i-м такте A выдал 0, то к слову δ, имевшемуся на выходе C, приписывается слово u_i так, что информация о функции q, заключенная в множестве пар $\{(\alpha, \mu_0(\alpha))|\alpha\in\{0, 1\}^*, |\alpha|\leqslant i\}$, совпадает с информацией о функции f_μ, $\mu=\Phi^{-1}(\delta u_i 0^\infty)$, заключенной в множестве $\{(\xi_i, \mu(\xi_i))|1\leqslant \leqslant i\leqslant |\delta u_i|/2\}$.

R-преобразователь C задает строгую Δ-функцию h, для которой выполняются такие условия: 1) если $x\in M$, то $\psi_{h(x)}=q$, 2) если $x\in C_d\backslash M$, то $\psi_{h(x)}=\omega$. По теореме 8 существует $a\in C_d$ такое, что $\psi_a=\psi_{h(a)}$. Тогда из $a\in M$ следует $h(a)\notin M$ и из $a\notin M$ следует $h(a)\in M$. Но a, $h(a)$ одновременно принадлежат или не принадлежат множеству M в силу условия $\psi_a=\psi_{h(a)}$; противоречие. Лемма 8 доказана.

Теорема 10. *Если $\mathfrak{S}$ — непустое семейство частичных Δ-функций, отличное от совокупности всех таких функций и $M=\{x|\psi_x\in\mathfrak{S}\}$, то*

(а) *множества M, $C_d\backslash M$ не могут оба быть множествами типа* 0,

(б) *множество M — не есть R_0-множество.*

Доказательство вытекает из лемм 7, 8.

Следствие 7. *Множество K_i не является R_0-множеством,* $1\leqslant i\leqslant 9$.

Пусть $\mathscr{L}^1$ — класс R_0-множеств, $\mathscr{L}^2_0$ — класс множеств типа 0, $\mathscr{L}^1_i$ — класс τ_i-множеств, $i=0, 1$. Класс $\mathscr{L}^2_0$ совпадает с классом счетных пересечений счетных объединений множеств вида $\alpha\{0, 1\}^\infty$, $\alpha\in\{0, 1\}^*$ (т. е. с классом G_δ-множеств). Это равносильно результату М. Дэвиса (см. [41, лемма 1]). Множество $W\subseteq C_d$ принадлежит $\mathscr{L}^2_0$ тогда и только тогда, когда оно функционально замкнуто [37].

В теоремах 7—10 проявляется аналогия теории Δ-функций и теории рекурсивных функций. Эта аналогия сохраняется, как показано ниже, и для определяемых на классе 0-множеств отношений, соответствующих отношениям m-сводимости и креативности [39, с. 42—48; 42, § 8; 38, гл. 7].

Для множеств L, $M\subseteq C_d$ полагаем, что L *m-сводимо к* M, если существует строгая Δ-функция f такая, что $x\in L$ эквивалентно $f(x)\in M$ для всех $x\in C_d$.

Лемма 9. *Пусть L m-сводимо к M. Тогда*

(а) *если $M\in\mathscr{L}^1_0$, то $L\in\mathscr{L}^1_0$,*

(б) *если $M\in\mathscr{L}^1_1$, то $L\in\mathscr{L}^1_1$,*

(в) *если $M\in\mathscr{L}^1$, то $L\in\mathscr{L}^1$,*

(г) *если $M\in\mathscr{L}^2_0$, то $L\in\mathscr{L}^2_0$.*

Множество L назовем *0-универсальным*, если L — 0-множество и к нему m-сводится любое 0-множество.

Лемма 10. *Множества* $C_d\diagdown F'_0$, $C_d\diagdown K'_0$, $\{c'_2(z, x)|\psi_z(x)$ определено$\}$ *0-универсальны.*

Лемма 11. *Пусть Δ-функция q и 0-множество L таковы, что для множеств $M_0=\{x|\psi_x=\omega\}$, $M_1=\{x|\psi_x=q\}$ выполняются условия $L\cap M_0=\varnothing$, $M_1\subseteq L$. Тогда L 0-универсально* (см. § 3, γ_5).

Следствие 8. *Множества K_1, K_2 0-универсальны.*

Множество $M\subseteq C_d$ назовем *0-продуктивным*, если существует такая строгая Δ-функция f, что для каждого $x\in C_d$ из $W_x\subseteq M$ следует $f(x)\in M\backslash W_x$. Множество $\overline{K}_1=\{x|x\notin W_x\}$ — пример 0-продуктивного множества. Назовем 0-множеством M 0-креативным, если его дополнение 0-продуктивно.

Лемма 12. *Если 0-продуктивное множество L m-сводится к множеству M, то M также 0-продуктивно.*

Теорема 11. *Множество L 0-креативно тогда и только тогда, когда оно 0-универсально.*

Доказательства леммы 12 и теоремы 11 аналогичны доказательствам теорем 1.19, 1.20 из книги [39] (где можно исключить второй абзац доказательства теоремы 1.20).

Следствие 9. *Счетное множество типа 0 не может быть 0-универсальным.*

Аналогично теории Δ-функций могут быть построены теория реальных функций и теория C-вычислимых функций. Введем понятие C-вычислимой функции.

R-преобразователь $A=(K, H, q_0)$ назовем *C-машиной*, если множество K не более чем счетно и существует алгоритм, который по любым состоянию $q\in K$ и символу $\sigma\in\Sigma_0$ определяет состояние $p\in K$ и слово $v\in\Sigma_0^*$, такие, что $(q, \sigma, p, v)\in H$. Частичная функция f_A: $D\to D$, задаваемая C-машиной A, называется *частичной C-вычислимой функцией*. Частичную Δ-функцию g_A^1, задаваемую C-машиной A, назовем *частичной $C\Delta$-функцией*. Соответственно вводятся понятия *n-местной* (*частичной*) *C-вычислимой функции*, *n-местной* (*частичной*) *$C\Delta$-функции* и понятие 0-*множества*. Некоторые из указанных выше результатов могут быть усилены заменой утверждений о существовании реальной функции, Δ-функции или 0-множества на соответствующие утверждения о существовании C-вычислимой функции, $C\Delta$-функции или C0-множества. Это относится к теоремам 4—7, леммам 4, 5 (д), 10 и следствиям 7, 8.

Вышеизложенное приводит к такому общему вопросу. Насколько широки части теории реальных функций (соответственно теории Δ-функций) и теории рекурсивных функций, которые аналогичны между собой? Прежде всего остановимся на одном пункте, где существенно проявляется неаналогичность двух этих теорий.

Для любой частично реальной функции f положим $\mathrm{Dom}(f)=\{x|f(x)$ определено, $x\in D\}$ и $\mathrm{Val}(f)=\{f(x)|x\in\mathrm{Dom}(f)\}$. Введем следующие классы множеств:

$\mathscr{L}^2=\{\mathrm{Dom}(f)|f$ — частично реальная функция$\}$,

$\mathscr{L}^3=\{\mathrm{Val}(f)|f$ — реальная функция$\}$,

$\mathscr{L}^4=\{\mathrm{Val}(f)|f$ — частично реальна и взаимно однозначна$\}$,

$\mathscr{L}^5=\{\mathrm{Val}(f)|f$ — частично реальная функция$\}$.

Классы подмножеств натурального ряда, соответствующие классам $\mathscr{L}^i$, $2\leqslant i\leqslant 5$, в теории рекурсивных функций совпадают между собой (совпадают с классом рекурсивно перечислимых множеств). Однако из аналогов лемм 6_1, 6_3 имеем $\mathscr{L}^2\not\subseteq\mathscr{L}^3$, $\mathscr{L}^3\subseteq\mathscr{L}^2$. Далее получаем $\mathscr{L}^3\not\subseteq\mathscr{L}^4$. Характеризация классов $\mathscr{L}^4$, $\mathscr{L}^5$ и отношение $\mathscr{L}^4\not\subseteq\mathscr{L}^5$ вытекают из теорем Лузина и Суслина [40, 43], причем класс $\mathscr{L}^4$ эквивалентен классу всех борелевских множеств, а класс $\mathscr{L}^5$ эквивалентен классу A-множеств. Эквивалентны следующие отношения $M\in\mathscr{L}^5$, M — область значений V-функций, M — область определения V-функции, $M=\{x|\exists y[\bar{c}^2(x, y)\in L]\}$, где $L\in\mathscr{L}^2$. Разность $M_1\backslash M_2$ двух множеств класса $\mathscr{L}^5$ есть область определения частичной V_1-функции. Пример A-множества, дополнение которого не A-множество, впервые указал Суслин (см. [40, с. 43; 43]). Пусть класс частичных строгих Δ-функций задан в виде $\{\psi_x'|x\in C_d\}$, где ψ_x' определяется аналогично ψ_x, и $M=\{0\nabla x|x\in\mathrm{Val}(\psi_x'), x\in C_d\}$. Тогда $M\in\mathscr{L}^5\backslash\mathscr{L}^4$, $D\backslash M\notin\mathscr{L}^5$. Следовательно, класс частичных V_1-функций шире класса частичных V-функций. Любая частичная V_1-функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ согласно лемме 4_6 определяется формулой вида $Q(f(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m)=0')$, где префикс Q есть $\exists z_1\ldots\exists z_m$, а f — частичная R-функция. Аналогично в общем случае, допуская, что Q — Σ_{2i-1}-префикс [38], получаем определение частичной V_i-функции. Тогда, используя схему доказательства леммы 4_7, получим, что для $i=2, 3, \ldots$ класс частичных V_i-функций замкнут относительно операции суперпозиции.

Можно сопоставить теорию реальных функций (и теорию Δ-функций) с теориями

строго реальных функций (T_1),

строгих Δ-функций (T_2),

строгих C-вычислимых функций (T_3), строгих $C\Delta$-функций (T_4),

непрерывных функций на множестве G_0 (T_5), непрерывных операторов в бэровском пространстве (T_6),

непрерывных функций на множестве всех иррациональных чисел (T_7),

вычислимых операторов в бэровском пространстве,

вычислимых функций на множестве G_0,

вычислимых функций на множестве всех иррациональных чисел,

вычислимых функций на множестве всех вычислимых чисел.

В теории реальных функций есть два основных объекта — универсум D, понятие частично реальной функции — и вспомогательное понятие строгой частично реальной функции. Остальные понятия (реальной функции, 0-множества и др.) являются производными.

В теории строго реальных функций — два основных объекта: тот же универсум D и понятие строгой частично реальной функции. Остальное возникают из основных таким же образом, как и в теории реальных функций (или в теории Δ-функций). То же касается понятий каждой из вышеперечисленных теорий T, в которых два основных понятия — универсум D_T и класс $\mathcal{F}_T$ частичных функций, определенных на D_T.

В теории T_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, переносятся аналоги теорем 4—10 и лемм 6—12. В теориях T_5, T_7 выполняется аналог леммы 6. Заметим также, что класс всех непрерывных вещественных функций вида $[0, 1] \to [0, 1]$ не может иметь универсальной функции. Пусть $\mathcal{I}$ — множество всех иррациональных чисел, R_c — множество всех вычислимых чисел. Не выполняется аналог леммы 1 для непрерывных функций следующих видов: $G_0 \to G_0$, $\mathcal{I} \to \mathcal{I}$, $R_c \to R_c$. Последнее известно из работ Г. С. Цейтина и И. Д. Заславского (см. [12]). Многие из обсуждаемых здесь результатов зависят не столько от самого универсума D_T, сколько от способа реализации (способа задания) класса частичных функций $\mathcal{F}_T$. Например, сузив универсум, можно говорить о классе C-вычислимых функций, определенных на множестве $\bar{R}_c = \{x | \tilde{x} \in R_c\}$, или о классе R-функций, определенных на множестве G_0. Получаемые классы функций можно сравнивать по степени операциональности.

Укажем связь способа задания класса Δ-функций (или класса реальных функций) с классом непрерывных функций в бэровском пространстве. Введем следующее понятие. *RN-преобразователем* называется тройка $A = (K, H, q_0)$, где K — счетное или конечное множество, $q_0 \in K$, $H \subseteq K \times \mathbf{N} \times K \times \mathbf{N}^*$, причем для любых $q \in K$, $\sigma \in \Sigma$ существует единственная четверка (q, σ, p, v), принадлежащая H. Возьмем множество $O(A) = (N^\infty \times N^\infty) \cap O_1(A)$, где $O_1(A)$ определено аналогично случаю R-преобразователя. По RN-преобразователю A определяется частичная функция f_A: $N^\infty \to N^\infty$, где $f_A(x) = y$, если $(x, y) \in O(A)$. Назовем функции, задаваемые указанным способом, *частичными BR-функциями*. В бэровском пространстве класс BR-функций совпадает с классом непрерывных функций. Это в других терминах показано в [44].

Заметим, что нельзя аналогичным образом задать реализацию непрерывных функций на пространстве цепных дробей с евклидовой метрикой: «для цепных дробей никаких практически приемлемых правил арифметических действий не существует. Уже задача отыскания цепной дроби для суммы чрезвычайно сложна и в счетной практике невыполнима» [14].

Указанный выше способ задания непрерывных и реальных функций естественно определяет их классификацию, связанную с классификацией R-преобразователей. Простейший выделяемый подкласс есть класс конечных R-преобразователей.

Теорема 12. *В классе функций, задаваемых конечными R-преобразователями, разрешима проблема тождества* [18, 19].

Установление разрешимости этой и ряда других проблем (быть непрерывной, быть реальной) в классе функций, задаваемых конечными R-преобразователями, нетрудно провести методом сведения к разрешимой проблеме непустоты для ΣTC-преобразователей [45]. Теорема 12 обобщает соответствующие результаты, полученные в [46] для автоматов Мили и обобщенных последовательностных машин, сохраняющих длину.

R-преобразователи могут служить средством задания не только реальных функций или Δ-функций, но и преобразований сложных видов. Это видно из следующего определения (частичного) Δ-оператора. Приведенная ниже схема определения понятий операторного типа и Δ-оператора, связанного с понятием Δ-функции, синтаксически подобна схеме определения понятий типа и класса частичных функционалов (над произвольным множеством S) работы [47]. Аналогично понятию Δ-оператора может быть определен класс строгих Δ-операторов, связанный с классом строгих Δ-функций, и класс B-операторов, связанный с классом непрерывных (частичных) операторов в бэровском пространстве (см. § 4), а также класс T-операторов, связанный с классом T-функций, $T \in \{R, V, V_i\}$, $i \in \mathbf{N}$.

Понятия операторного типа и Δ-оператора введем индуктивно. Пусть $\bar{1}$, $\bar{2}$, ...— различные символы. Полагаем

1) $\bar{1}$ — операторный тип,

2) для $n \in \mathbf{N}^+$, если $t_1, \ldots, t_n$ — операторные типы, то $\bar{n}(t_1, \ldots, t_n)$ — операторный тип,

3) других операторных типов нет.

Δ-оператор есть пара вида $Q = (x, t)$, $x \in C_d$, t — операторный тип, Q: $V \to W$, где

$V = \{(y, \bar{1}) \mid y \in C_d\}$, $Q(y, \bar{1}) = (x, \bar{1})$ при $t = \bar{1}$,

$V = C_d \times \{t_1\}$, $Q(y, t_1) = (x, 1)$ при $t = \bar{1}(t_1)$,

$V = \prod_{i=1}^{n-1} C_d \times \{t_i\}$ при $t = \bar{n}(t_1, \ldots, t_n)$, $n \geqslant 2$, и в этом случае $W = \{(y, t_n) \mid y \in C_d\}$, $Q((y_1, t_1), \ldots, (y_{n-1}, t_{n-1})) = (y_n, t_n)$, где $y_n = \psi_x(c'_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}))$.

§ 3. АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Здесь строится аппликативный язык $\mathfrak{L}$ и на его основе Δ-исчисление. Оно интерпретируется в теории частично непрерывных операторов в канторовом пространстве. Поэтому некоторые операции (кусочного задания, проектирования и др.), определенные в классах частично рекурсивных функций или рекурсивно перечислимых множеств, невыразимы в Δ-исчислении. Соответствующие им аксиомы невыводимы в Δ-исчислении. Таковы, например, аксиомы $ES(6)$ [26], $C4$ [27], $p_{10}(n)$ [28], $U.R.S$ (III) [30]. Аксиомы Δ-исчисления удовлетворяют требованию интерпретируемости в теориях 1) частичных строгих R-функций, 2) частично рекурсивных функций и др. (см. § 4). При этом в общее ядро различных теорий попадают, в частности, аналоги теорем Райса и Майхилла. В конце параграфа рассмотрены возможные расширения и модификации Δ-исчисления. Ориентация Δ-исчисления на теорию частичных строгих R-функций находит выражение в аксиоме аппроксимации.

Язык $\mathfrak{L}_1$. Алфавит: ∇, $\neg$, $\vee$, $\exists$, (,), запятая, $\triangle$, $=$, x_i, a'_i, $\mu_i \mid i \in \mathbf{N}^+$. Символ $\triangle$ назовем *символом неопределенности*. Далее индуктивно задаются понятия α-терма, α-формулы, δ-формулы *). Если T, $V_1, \ldots, V_n$ — α-термы, то α-формулу вида $T(V_1, \ldots, V_n) \neq \triangle$ будем записывать в виде $(V_1, \ldots, V_n) \in T$.

1.0. $\triangle$ есть α-терм.

1.1. μ_i есть α-терм, $i \in \mathbf{N}^+$.

1.2. x_i, a'_i — α-термы, где a'_i — символ константы, $i \in \mathbf{N}^+$.

---

*) Символы $\neq$, &, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$, $\forall$ и употребление скобок определяется обычными соглашениями [48].

1.3. Если T, $V_1, \ldots, V_n$ — α-термы и $V_1, \ldots, V_n$ не содержат символов μ_i, то $T(V_1, \ldots, V_n)$ — α-терм, $n \in \mathbf{N}^+$ *).

1.4. Если Φ — δ-формула, T — α-терм, то $\nabla(\Phi, T)$ есть α-терм (δ-формула есть частный случай α-формулы).

2.1. Если U, V — α-термы, не содержащие символов μ_i, то $U = V \& U \neq \triangle$ есть δ-формула.

2.2. Если U, V — α-термы, не содержащие символов μ_i, то $U \neq V \& \& U \neq \triangle \& V \neq \triangle$ есть δ-формула.

2.3. Если Φ, Ψ — δ-формулы, то $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \& \Psi)$ суть δ-формулы.

3.1. Если U, V — α-термы, то $U = V$ есть α-формула.

3.2. Если Φ, Ψ — α-формулы, то $\neg\Phi$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\exists x_i \Phi$ суть α-формулы, $i \in \mathbf{N}^+$. **)

Возможные расширения языка $\mathfrak{L}_1$ (языки $\mathfrak{L}_{10}$, $\mathfrak{L}_{11}$) получаются соответственно введением дополнительно к грамматике языка $\mathfrak{L}_1$ одного из правил:

2.4. Если Φ — δ-формула, то $Ax_i\Phi$ есть δ-формула, $i \in \mathbf{N}^+$.

2.5. Если Φ — δ-формула, то $Ex_i\Phi$ есть δ-формула, $i \in \mathbf{N}^+$.

Далее при рассмотрении Δ-исчисления под термом и формулой соответственно понимаются α-терм и α-формула.

Δ-исчисление. Язык Δ-исчисления — это язык $\mathfrak{L}_1$. Некоторым термам дадим специальные обозначения. Так, a'_{8i+91}, a'_{8i+92} обозначаются в виде q_i, p_i, а a'_{8i+93} — в виде s_n^m, если $i = c(m-1, n-1)$, $i \in \mathbf{N}$. Пронумеруем элементы множества $\mathfrak{T} = \{(T, \tau) \mid T$ — терм, не содержащий символов μ_i, τ — список его свободных переменных$\}$. Если (T, τ), $(V, \tau_1) \in \mathfrak{T}$ и длина T меньше длины V, то номер (T, τ) меньше номера (V, τ_1). Если длина T равна длине V и T лексикографически предшествует V относительно алфавита языка $\mathfrak{L}_1$, то номер (T, τ) меньше номера (V, τ_1). Если $T = V$ и список τ лексикографически предшествует списку τ_1, то номер (T, τ) меньше номера (V, τ_1). Элемент множества $\mathfrak{T}$ с номером i обозначается в виде $\left(T^i, \left\langle x_{j_1^i}, \ldots, x_{j_{n_i}^i} \right\rangle\right)$. Будем употреблять (возможно, с индексами) символы b, f, g, h, t, x y, z вместо x_i, символы u, v — для обозначения термов, полученных без применения правила 1.1, T, U, V, W — в общем случае, d — для обозначения термов, не содержащих символов переменных. Для любых формулы Φ и термов T, $V_1, \ldots, V_n$ для $F = T$, Φ через $F_{y_1,\ldots,y_n}[V_1, \ldots, V_n]$ обозначаются терм и формула, получаемые из F заменой каждого свободного вхождения y_k на V_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Следующие три формулы обозначаются соответственно через R^n, Π^n, O^n:

$$Ax_1 \ldots Ax_n Ex_{n+1}(x(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}),$$

$$R^n \& O^n \& AzEy_1 \ldots Ey_n(x(y_1 \ldots y_n) = z),$$

$$Ax_1Ay_1 \ldots Ax_nAy_n\left(x(x_1, \ldots, x_n) = x(y_1, \ldots, y_n) \to \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = y_i\right).$$

В Δ-исчислении имеются логические аксиомы — пропозициональные аксиомы вида $\neg\Phi \vee \Phi$; аксиомы подстановки вида $\Phi_x[v] \to \exists x\Phi$, аксиомы тождества вида $T = T$; аксиомы равенства трех видов:

$$x_1 = y_1 \to \ldots \to x_n = y_n \to U(x_1, \ldots, x_n) = U(y_1, \ldots, y_n),$$

$$U = V \to T_1 = T_2 \to U_x[T_1] = V_x[T_2],$$

$$U = V \to U = T_1 \to V = T_2 \to T_1 = T_2;$$

---

*) Можно считать, что $T(V_1, \ldots, V_n)$ — сокращение для $|_{n+1}(T, V_1, \ldots, V_n)$, где $|_n$, $n \geqslant 2$,— функциональные символы языка $\mathfrak{L}_1$.

**) Для любой α-формулы Φ записи $Ex\Phi$, $Ax\Phi$ — это сокращения для $\exists x(\Phi \& x \neq \Delta)$, $\forall x(x \neq \Delta \longrightarrow \Phi)$.

аксиомы неопределенности трех видов:

$$\alpha 0_1. \quad a_i' \neq \triangle,$$

$$\alpha 0_2. \quad \triangle(T_1, \ldots, T_n) = \triangle,$$

$$\alpha 0_3. \quad U(T_1, \ldots, T_n) = \triangle,$$

если $T_i = \triangle$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. В Δ-исчислении имеются правила вывода, общие для всех теорий первого порядка [48]. Перечислим нелогические аксиомы Δ-исчисления:

$$\alpha 1. \quad T^i = p_{n_i}\left(q_i, x_{j_1^i}, \ldots, x_{j_{n_i}^i}\right)$$

$$\alpha 2. \quad x_1(x_2, \ldots, x_{m+n}) = s_n^m(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \,\&\, \textstyle\prod_x^m [s_n^m],$$

$$\alpha 3. \quad (\Phi \,\&\, \nabla(\Phi, T) = T) \vee (\neg\Phi \,\&\, \nabla(\Phi, T) = \triangle).$$

В натуральной модели $\mathcal{N}$ (см. § 4, п. 1) интерпретация s_n^m есть взаимно однозначная рекурсивная m-местная функция такая, что $s_n^m(\mathbf{N}^m) = \mathbf{N}$. В частности, s_n^1 в $\mathcal{N}$ есть рекурсивная перестановка. Обычно [38, 39, 42] через s_n^m обозначают $(m+1)$-местную функцию. Указанные схемы аксиом называют соответственно *аксиома универсальности*, *аксиома сильной итерации*, *аксиома аппроксимации*. Формула

$$\alpha 2'. \quad v_1(v_2, \ldots, v_{m+n}) = s_n^m(v_1, \ldots, v_m)(v_{m+1}, \ldots, v_{m+n}) \,\&\, R_x^m [s_n^m]$$

есть следствие аксиомы $\alpha 2$. Формулы $\alpha 1$, $\alpha 2'$ соответствуют теореме об универсальной машине Тьюринга и теореме об итерации ($s - m - n$-теореме), положенным в основу аксиоматической теории сложности вычислений [49, 50] и рекурсивной теории программирования (см. [51, 52]).

Отметим еще, что рекурсивное перечисление всех частично рекурсивных функций задает (допустимую) гёделеву нумерацию тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет теореме об универсальной машине Тьюринга и теореме об итерации [53]. Свойства строгих Δ-функций, доказуемые в Δ-исчислении, также инвариантны относительно выбора допустимого именования ψ: $\{0, 1\}^\infty \to \mathfrak{V}$ строгих частичных Δ-функций ($S\Delta$-именования), где под *стандартным* $S\Delta$-*именованием* подразумевается такая функция:

$$\psi_0\colon \{0, 1\}^\infty \to \mathfrak{V}, \text{ что } \psi_0(x) = f_\mu \text{ при } x = \Phi_1(\mu),$$

$$\mu\colon \{0, 1\}^* \to \{0, 1, \bar{\varepsilon}\}, \text{ где } \Phi_1(\mu) = w_1 w_2 \ldots,$$

$$w_i = \begin{cases} 11 & \text{при} \quad \mu(\xi_i) = 0, \\ 10 & \text{при} \quad \mu(\xi_i) = 1, \\ 0 & \text{при} \quad \mu(\xi_i) = \bar{\varepsilon}. \end{cases}$$

Произвольное $S\Delta$-именование ψ называется *допустимым*, если существуют строгие Δ-функции g_1, g_2 такие, что $\psi(x) = \psi_0(g_1(x))$ и $\psi_0(x) = \psi(g_2(x))$ для любого $x \in \{0, 1\}^\infty$. Истинность аксиомы $\alpha 2$ в натуральной модели $\mathcal{N}$ связана со свойствами универсальных функций Клини (см. [42]). Аналогично (вместо канторовской функции c берется Δ-функция c_1^2) устанавливается истинность аксиомы $\alpha 2$ на классе частичных Δ-функций.

Введем некоторые обозначения. Через I обозначим терм $s_1^2(p_1, q)$, где $x_1 = p_1(q, x_1)$ — аксиома $\alpha 1$. Через ω^n обозначим терм $s_2^n(p_n, q^n)$, где $\nabla\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x_i, \triangle\right) = p_n(q^n, x_1, \ldots, x_n)$ — аксиома $\alpha 1$ *). Теоремы и мета-

*) Здесь и далее при употреблении правил 1.4, 2.1 δ-формула $U = V \,\&\, U \neq \Delta$ сокращается до $U = V$.

теоремы Δ-исчисления будем именовать в виде β_i, γ_i. Условимся, что для любой формулы Φ со свободными переменными $y_1, \ldots, y_n$ запись $\vdash\Phi$ означает, что в Δ-исчислении выводима формула $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} y_i \neq \triangle \to \Phi$. Далее в доказательствах правило 2.2 не используется.

β_1. $\vdash I(v) = v$.

Доказательство. $I(x_1) = x_1$ следует из $x_1 = p_1(q, x_1)$ и аксиомы $\alpha 2$. Тогда $I(v) = v$ по аксиоме равенства.

β_2. $\vdash \omega^n(v_1, \ldots, v_n) = \triangle$.

Доказательство. Равенство $\omega^n(x_1, \ldots, x_n) = \triangle$ следует из определения ω^n, аксиом $\alpha 2$, $\alpha 3$ и аксиомы тождества. Отсюда $\omega^n(v_1, \ldots$ $\ldots, v_n) = \triangle$ по аксиоме равенства.

Вместо ω^n будем писать сокращенно ω, подразумевая ω^n под ω в термах вида $\omega(v_1, \ldots, v_n)$ и ω^1 в остальных случаях.

β_3. $\vdash Ax_1 \ldots Ax_n(v \neq \triangle) \to \Phi_x[v] \to Ex\Phi$, если $x_1, \ldots, x_n$ — свободные переменные терма v.

Доказательство. Пусть v' есть $v_{x_1,\ldots,x_n}[a_1', \ldots, a_1']$. Имеем $a_1' \neq \triangle$ по аксиоме $\alpha 0_1$. Тогда $\{Ax_1 \ldots Ax_n(v \neq \triangle),\ \Phi_x[v]\} \vdash v' \neq \triangle \,\&$ $\& \,\Phi_x[v'] \vdash Ex\Phi$.

γ_1. Для любого терма U со свободными переменными $y_1, \ldots, y_{n+1}$, при $n > 0$, существует терм d вида $s_n^4\left(s_1^{n+3}, p_{n+2}, q_j, q_j\right)$ такой, что

$$\vdash U_{y_{n+1}}[d(y_1, \ldots, y_n)](z) = d(y_1, \ldots, y_n)(z) \,\&\, R_x^n[d] \,\&\, O_x^n[d].$$

Доказательство γ_1 следует из аксиом $\alpha 1$, $\alpha 2$.

Обозначим через Ω формулу

$$AxAy(At(x(t) = y(t)) \to (x \in z \leftrightarrow y \in z)).$$

Следующее утверждение соответствует лемме 8 и обобщению теоремы Райса. Оно подобно по форме теореме из [27, с. 432] *).

γ_2. $\vdash \neg(\Omega \,\&\, \omega \in z \,\&\, y \notin z)$.

Доказательство. Пусть U — терм $\nabla(x \in z,\ y)$. Имеем $U_x[d(y, z)](t) = d(y, z)(t)$ по γ_1. Предположим, что $\mathscr{A}$ — формула $\neg\Omega \vee \omega \notin z \vee y \in z$. Тогда $d(y, z) \in z \vdash U_x[d(y, z)] = y$ (по аксиоме $\alpha 3$) $\vdash y(t) = d(y, z)(t)$ (по аксиоме равенства) $\vdash \Omega \to y \in z \vdash \mathscr{A}$. Далее $d(y, z) \notin z \vdash U_x[d(y, z)] = \triangle$ (по аксиоме $\alpha 3$) $\vdash \triangle(t) = d(y, z)(t) \vdash \triangle =$ $= d(y, z)(t)$ (по аксиомам равенства и $\alpha 0_2$), $\vdash \omega(t) = d(y, z)(t)$ (по β_2) $\vdash \Omega \to \omega \notin z \vdash \mathscr{A}$. Следовательно, γ_2 доказано.

β_4. *Любая модель Δ-исчисления бесконечна.*

Доказательство. Используем прием из [27, с. 432]. Возьмем $d_0 = 1$. Для $n \geqslant 0$ имеем

$$\nabla\left(\bigwedge_{i=0}^{n} x \neq d_i, x\right) = p_1\left(q_n', x\right) = s_1^2\left(p_1, q_n'\right)(x) \equiv d_{n+1}(x).$$

Тогда $d_0, d_1, \ldots$ — последовательность без повторений в любой модели Δ-исчисления.

β_5. $\vdash EfAx(\nabla(x \in b_1 \vee x \in b_2,\ I) = f(x))$.

β_6. $\vdash EfAx(\nabla(x \in b_1 \,\&\, x \in b_2,\ I) = f(x))$.

β_7. $\vdash EfAx((x \in d_1 \vee x \in d_2) \leftrightarrow x \in f)$.

β_8. $\vdash EfAx((x \in d_1 \,\&\, x \in d_2) \leftrightarrow x \in f)$.

Теоремы β_5 — β_8 соответствуют лемме 5 (а). В их доказательстве используются аксиомы $\alpha 1$ — $\alpha 3$ и теоремы β_1, β_3.

Следующие две теоремы выражают в более сильной форме тот факт, что множество $\{x \mid x \in x\}$ 1-универсально.

γ_3. $\vdash EfAx(\nabla(x \in x,\ I) = f(x))$.

γ_4. $\vdash AbEhAx\left(R_x^2[h] \,\&\, O_x^2[h] \,\&\, (x \in b \leftrightarrow h(x, b) \in h(x, b))\right)$.

---

*) В [27] используется аксиома $C'4$, невыводимая в Δ-исчислении (поскольку проекция 0-множества не всегда есть 0-множество).

Доказательство. Пусть U — терм $\nabla(x\in b\,\&\,y\in I,\ I)$. Имеем $\vdash U_y[d(x,b)](z)=d(x,b)(z)\,\&\,R_x^2[d]\,\&\,O_x^2[d]$ по γ_1. Отсюда $\triangle\notin\{x,\ b\}\vdash d(x,\ b)\in I\,\&\,d(x,\ b)\neq\triangle$ (по β_1 и $R_x^2[d]$). Значит, $x\neq\triangle,\ x\in b\vdash U_y[d(x,\ b)]=I$ (по аксиоме α_3) $\vdash I(z)=d(x,\ b)(z)\vdash d(x,\ b)=d(x,\ b)(d(x,\ b))$ (по β_1) $\vdash d(x,\ b)\in d(x,\ b)$ (по $R_x^2[d]$). Далее, $x\notin b\vdash U_y[d(x,\ b)]=\triangle$ (по аксиоме α_3) $\vdash\triangle(z)=d(x,\ b)(z)\vdash\triangle=d(x,\ b)(d(x,\ b))$ (по аксиоме $\alpha 0_2$) $\vdash x\neq\triangle\rightarrow d(x,\ b)\notin d(x,\ b)$. Для навешивания префикса $AbEhAx$ воспользуемся β_3. Таким образом, γ_4 доказана.

Следующая теорема дает усиление леммы 11 и выражает в более сильной форме тот факт, что каждое перечислимое свойство частично рекурсивных функций 1-универсально. Пусть M — любой терм вида μ_i.

γ_5 (теорема 1-универсальности). $\vdash a_1\in M\,\&\,\omega\notin M\,\&\,\Omega_z[M]\rightarrow\rightarrow AbEhAx\left(R_x^2[h]\,\&\,O_x^2[h]\,\&\,(x\in b\leftrightarrow h(x,b)\in M)\right)$.

Доказательство. Пусть U — терм $\nabla(x\in b\,\&\,y\in I,\ a_1)$. Имеем $\vdash U_y\ [d(x,b)](z)=d(x,b)(z)\,\&\,R_x^2[d]\,\&\,O_x^2\ [d]$ по γ_1. Тогда аналогично доказательству γ_4 получаем $a_1\in M,\ \ \omega\notin M,\ \ \Omega_z[M],\ \ x\neq\triangle\vdash x\in b\leftrightarrow\leftrightarrow d(x,\ b)\in M$.

Теорема γ_6 выражает тот факт, что прообраз 0-множества относительно строгой частичной Δ-функции есть 0-множество.

γ_6. $\vdash EfAx(h(x)\in b\leftrightarrow x\in f)$.

Доказательство. Имеем $b(h(x))=p_3(q',\ b,\ h,\ x)=s_1^4(p_3,\ q',\ b,\ h)(x)$.

Теорема γ_7 утверждает, что $\{x|x\notin x\}$ — 0-продуктивное множество.

γ_7. $\vdash R^1(I)\,\&\,Ab(Ax(x\in b\rightarrow x\notin x)\rightarrow I(b)\notin I(b)\,\&\,I(b)\notin b)$.

Доказательство. $\vdash R^1(I)$ по β_1. Пусть Φ есть $b=\triangle\vee x\neq\triangle\,\&\,\&\,x\in b\,\&\,x\in x\vee b\notin b$. Имеем $\vdash\Phi_x[b]\vdash\exists x\Phi\vdash b\neq\triangle\rightarrow Ax(x\in b\rightarrow x\notin\notin x)\rightarrow b\notin b$. Остается применить β_1.

Для любых L, M вида μ_i, x_i, a_i и терма v введем следующие сокращенные записи:

$$L\subseteq M - Ax(x\in L\rightarrow x\in M),\quad v\in L\setminus M - v\in L\,\&\,v\notin M,$$

$$C(L,\ M,\ v) - R_x^1[v]\,\&\,Ax(x\in L\leftrightarrow v(x)\in M),$$

$$\Pi(M,\ v) - R_x^1\ [v]\,\&\,Ax(x\subseteq M\rightarrow v(x)\in M\setminus x).$$

Соответственно для любых формул Φ, Ψ с одной свободной переменной x и терма v введем такие сокращения:

$$C(\Phi,\ \psi,\ v) - R_x^1\ [v]\,\&\,Ax(\Phi\leftrightarrow\Psi_x\ [v(x)]),$$

$$\Pi(\Phi,\ v) - R_x^1\ [v]\,\&\,Ax(Ay(y\in x\rightarrow\Phi_x\ [y])\rightarrow\Phi_x\ [v(x)]\,\&\,v(x)\notin x),$$

$$\mathfrak{A}(\Phi) - Ab\exists fAx\left(R_x^1[f]\,\&\,x\in b\leftrightarrow\Phi_x\ [f(x)]\right).$$

Из теоремы γ_7 вытекает

γ_8. $\vdash\Pi(x\notin x,\ I)$.

Следующая теорема соответствует лемме 12.

γ_9. $\vdash\Pi(L,\ f)\,\&\,C(L,\ M,\ g)\rightarrow\exists h(\Pi(M,\ h))$.

Доказательство. Имеем $x(g(y))=T(y)$ по аксиомам $\alpha 1$, $\alpha 2$, где $T=s_1^4(p_3,\ q',\ g,\ x)$. Отсюда $g(f(T))=v(x)$ по аксиомам $\alpha 1$, $\alpha 2$, где $v=s_1^4\ (p_3,\ q'',\ g,\ f)$. Тогда по аксиоме равенства получаем $R_x^1\ [f]\,\&\,\&R_x^1\,[g]\vdash R_x^1[v]$. Далее, $\triangle\notin\{x,\ y\}$, $x\subseteq M\vdash y\in T\rightarrow(g(y)\in x\,\&\,g(y)\in\in M\,\&\,y\in L)$ в силу $x(g(y))=T(y)$ при $C(L,\ M,\ g)$. Значит, $C(L,\ M,\ g)$, $x\neq\triangle,\ x\subseteq M\vdash T\subseteq L$. Отсюда $\Pi(L,\ f)\vdash f(T)\in L\setminus T$. Пусть b есть $f(T)$. Тогда $C(L,\ M,\ g)\vdash g(b)\in M,\ b\notin T$, и по $x(g(y))=T(y)$ имеем $g(b)\notin x$. Получаем $x\neq\triangle,\ x\subseteq M\vdash v(x)\in M\setminus x$. Таким образом γ_9 доказано.

γ_{10}. $\vdash\Pi(\Phi,\ f)\,\&\,C(\Phi,\ \Psi,\ g)\rightarrow\exists h(\Pi(\Psi,\ h))$,
где Φ, Ψ — *любые формулы.*

Доказательство аналогично доказательству γ_9.

Следующие два утверждения соответствуют теореме 11 и теореме Майхилла.

γ_{11}. $\vdash \mathfrak{A}(x \in a) \to \exists h(\Pi(x \notin a, h))$.

Доказательство вытекает из теорем γ_8, γ_{10}.

γ_{12}. $\vdash \Pi(x \notin a, f) \to \mathfrak{A}(x \in a)$.

Доказательство. Пусть T — терм $\nabla(y \in b \,\&\, x = f(z), I)$. В силу γ_1 и аксиом $\alpha 1$, $\alpha 2$ имеем $T_z[d(y)](x) = d(y)(x) \,\&\, R^1_x[d]$. Тогда по β_1, $\alpha 3$, $\alpha 0_3$ получаем $\vdash x \in d(y) \leftrightarrow \Delta \notin \{x, y\} \,\&\, y \in b \,\&\, x = f(d(y))$. Пусть $f(d(y)) = p_2(q'', f, y) = v(y)$ по аксиомам $\alpha 1$, $\alpha 2$, где $v = s^3_1(p_2, q'', f)$. Остается доказать, что $\Pi(x \notin a, f) \vdash C(y \in b, y \in a, v)$. Имеем $R^1_x[v]$, так как $v(y) = f(d(y))$, $R^1_x[d]$, $R^1_x[f]$. Далее, $y \neq \Delta$, $y \notin b \vdash$ $\vdash Ax(d(y)(x) = \Delta)$ (в силу $T_z[d(y)](x) = d(y)(x)$ и аксиомы $\alpha 3$) $\vdash \Psi$ вида $f(d(y)) \notin a \,\&\, f(d(y)) \notin d(y)$, поскольку $\Pi(x \notin a, f)$. Кроме того, $y \in b$, $f(d(y)) \notin a \vdash x \in d(y) \leftrightarrow x = f(d(y)) \vdash Ax(x \in d(y) \to x \notin a) \vdash \Psi$ в силу $\Pi(x \notin a, f)$ и $\vdash f(d(y)) \in d(y)$. Отсюда $y \in b \vdash f(d(y)) \in a$. Следовательно, $\vdash y \in b \leftrightarrow f(d(y)) \in a$. Значит, $\Pi(x \notin a, f) \vdash C(y \in b, y \in a, v)$.

Возьмем формулу $\mathfrak{a}$ вида

$$AgAb(\Psi_z[g] \to EtAx(x \in t \leftrightarrow x \in g \,\&\, x \notin b)),$$

где Ψ есть $EfEx(\Phi \,\&\, Az_1(\Phi_z[z_1] \to z \subseteq z_1)$, а Φ — это $R^1_x[f] \,\&\, x \in$ $\in z \,\&\, Ay(y \in z \to f(y) \in z)$. В силу лемм 5(б), 13 (см. § 4) формула $\mathfrak{a}$ истинна в теории строгих частичных Δ-функций. Формула $\mathfrak{a}$ ложна в теории частично рекурсивных функций, поскольку можно указать рекурсивно перечислимое множество B и рекурсивно перечислимый нерекурсивный сплинтер C так, что $B \backslash C$ не рекурсивно перечислимо [38]. Отсюда следует неполнота Δ-исчисления.

Следующее утверждение соответствует теореме 9.

γ_{13}. *Для любых термов U^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, со свободными переменными $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ существуют термы d_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, такие, что*

$$\vdash U^i_{y_1,\ldots,y_n}[d_1(\vec{x}), \ldots, d_n(\vec{x})](z) = d_i(\vec{x})(z) \,\&\, R^m_x[d_i] \,\&\, O^m_x[d_i]$$

для всех чисел $1 \leqslant i \leqslant n$, где $\vec{x}$ есть $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$.

Доказательство. Пусть $\vec{t}$ есть $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$, v^i — терм $s^{n+3}_m\left(s^{m+n+2}_1, p_{m+n+1}, t_i, \vec{t}\right)$ и V_i — терм $v^i(\vec{x})$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Используя аксиомы $\alpha 1$, $\alpha 2$, получаем

$$U^i_{y_1,\ldots,y_n}[V_1, \ldots, V_n](z) = p_{m+n+1}(q_i, \vec{t}, \vec{x}, z) =$$

$$= s^{m+n+2}_1(p_{m+n+1}, q_i, \vec{t}, \vec{x})(z) = s^{m+3}_m\left(s^{m+n+2}_1, p_{m+n+1}, q_i, \vec{t}\right)(\vec{x})(z).$$

Тогда $v^i_{t_1,\ldots,t_n}[q_1, \ldots, q_n]$, $1 \leqslant i \leqslant n$,— искомые термы.

Укажем некоторые аксиоматические теории, близкие к Δ-исчислению. Заметим, что при интерпретации Δ-исчисления в теории строгих частичных T-функций, $T \in \{\Delta, R, V_i \mid i \in \mathrm{N}\}$, любая δ-формула Φ областью истинности имеет область определенности некоторой частичной T-функции.

Δ_0-исчисление отличается от Δ-исчисления отсутствием обозначений вида p_i и вместо аксиомы $\alpha 1$ имеет такую:

$\alpha 1'$. $T^i = q_i\left(x_{j^i_1}, \ldots, x_{j^i_{n_i}}\right)$.

Теоремы, доказанные выше в Δ-исчислении, аналогично доказываются в Δ_0-исчислении. На самом деле, это эквивалентные исчисления, так как в Δ-исчислении имеем

$$T^i = s^2_{n_i}(p_{n_i}, q_i)\left(x_{j^i_1}, \ldots, x_{j^i_{n_i}}\right)$$

по аксиомам $\alpha 1$, $\alpha 2$, а в Δ_0-исчислении из

$$z(x_1, \ldots, x_{n_i}) = p_{n_i}(z, x_1, \ldots, x_{n_i}), \quad T^i = q_i\left(x_{j_1^i}, \ldots, x_{j_{n_i}^i}\right)$$

выводится $T^i = p_{n_i}\left(q_i, x_{j_1^i}, \ldots, x_{j_{n_i}^i}\right)$.

Δ'-исчисление возникает из Δ-исчисления добавлением правила 2.4, интерпретируется в теориях строгих частичных R-функций, Δ-функций, CR-функций, $C\Delta$-функций.

V-исчисление возникает из Δ_0-исчисления добавлением правила 2.5, интерпретируется в теории частично рекурсивных функций.

V_1-исчисление имеет язык $\mathfrak{L}_1$, в котором конструкция $\nabla(\Phi, T)$ заменяется на $\nabla(\Phi, T, U)$. Соответственно аксиома $\alpha 3$ в V_1-исчислении заменяется такой:

$\alpha 3'$. $(\Phi \,\&\, \nabla(\Phi, T, U) = T) \vee (\neg\Phi \,\&\, \nabla(\Phi, T, U) = U)$.

V_1-исчисление для любого $i = 1, 2, \ldots$ интерпретируется в теории частичных V_i-функций. Конструкция $\nabla(\Phi, T, U)$ не может быть интерпретирована в теориях строгих частичных F-функций, $F = R$, Δ, V, поскольку класс CA-множеств и класс G_δ-множеств не замкнуты относительно операции дополнения. Следовательно, и третья аксиома Вагнера [30] (о кусочном задании функции) не интерпретируется в этих трех теориях.

Δ_1-исчисление отличается от Δ_0-исчисления тем, что вместо аксиом $\alpha 1'$, $\alpha 2$ имеет одну аксиому (теорему Δ-исчисления):

γ_1'. $T^i_{y_1}[q_i(y_2, \ldots, y_{n+1})] = q_i(y_2, \ldots, y_{n+1})(y_{n+2}) \,\&\, R^n_x[q_i] \,\&\, O^n_x[q_i]$,

где $n = n_i - 2$, $y_k = x_{j_k^i}$, $1 \leqslant k \leqslant n_i$, при $n_i \geqslant 2$.

Нетрудно проверить, что для доказательства теорем видов β_i, γ_i, полученных выше в Δ-исчислении, достаточно средств Δ_1-исчисления. Операция нахождения неподвижной точки играет центральную роль в построении обычной и обобщенной теории рекурсивных функций [54—56]. В работе [20] для абстрактного описания класса частично рекурсивных функций используются операции композиции, неподвижной точки, кусочного задания функций и комбинаторы $I(f) = f$, $K(f, g) = f$, $S(f, g, h) = f(h)(g(h))$. Аксиоматизация этих средств все же не позволяет осуществлять доказательства, отражающие метод приоритета. Дальнейшее расширение средств аксиоматического описания теории рекурсивных функций можно проводить, исходя из V_1-исчисления. В теории V_0-функций аналогом рекурсивно перечислимых множеств служат A-множества. Последним в аналитической иерархии соответствуют Σ^1_1-множества. Более естественна аналогия между рекурсивно перечисленными множествами и Π^1_1-множествами [57; 38, § 16.5]. Абстрактное индуктивное описание рекурсии в высших типах, в частности относительно объектов типа 2, изложено в [58]. Δ_1-исчисление нельзя считать более удобным, чем Δ-исчисление, так как проверка аксиомы γ_1' на моделях требует обычно больших усилий, чем проверка аксиом $\alpha 1$, $\alpha 2$.

Δ_2-исчисление отличается от Δ-исчисления наличием символов p, s, выполняющих роли всех символов p_i, s^m_n. Это соответствует тому, что один R-преобразователь A задает бесконечно много функций вида g^n_A.

Δ_3-исчисление отличается от Δ_2-исчисления тем, что вместо аксиомы $\alpha 1$ имеет аксиому $\alpha 1'$, где T^i содержит только подтермы, полученные не более чем однократным применением правила 1.3.

Можно было бы положить $n = 1$ в правиле 1.3 как в бестиповом λ-исчислении и получить модификации вышеуказанных исчислений*),

---

*) В этом случае в Δ_1-исчислении выводимы $\alpha 1'$ и $\alpha 2$ без сюрьективности для s^m_n.

но, изменяя таким образом форму записи термов, мы не перестаем оперировать с понятием многоместной функции (см. § 4).

Δ_4-исчисление возникает из Δ-исчисления добавлением такой аксиомы:

$\alpha 4.\quad AxEuEw(Az(z \in u \leftrightarrow z \notin w) \& Az\ (z \in x \leftrightarrow Ey((z,\ y) \in u)))$.

Это — модификация аксиомы $A4$ [27]. Δ_4-исчисление интерпретируется в теории строгих частичных Δ-функций и в теории частично рекурсивных функций. Аксиомы $A2$ (точнее, варианты $C4$, $C'4$) и $A3b$ из [27] неверны в теории строгих частичных Δ-функций. Аксиоматическая теория [27] ориентирована в основном на описание теории рекурсивно перечислимых множеств. Покажем, что аксиома $A3b$, которую можно понимать как утверждение об определимости функции, при условии определимости ее графика неверна в теории BR-функций. Действительно, возьмем биективную BR-функцию f так, что $f(0^\infty) = 0^\infty$, $f(0^m\overline{n}\alpha) = 0^m\overline{1}\alpha$, $f(\overline{2n}\alpha) = 0^n\overline{n+1}\alpha$, $f(\overline{2n-1}\alpha) = \overline{n}\alpha$, при m, $n \in N^+$, $\alpha \in N^\infty$. Обратная к ней функция f^{-1} не может быть задана RN-преобразователем (уже в точке 0^∞).

§ 4. ИНТЕРПРЕТАЦИИ Δ-ИСЧИСЛЕНИЯ

Аксиомам Δ-исчисления удовлетворяют класс частичных BR-функций, класс частичных строгих Δ-функций и другие классы частичных функций. Ниже строго описаны две интерпретации Δ-исчисления (п. 1.2). Затем указываются те теории частичных T-функций, в которых аналогично Δ-исчисление может быть интерпретировано. Этим утверждается наличие в соответствующем классе частичных T-функций универсальной функции, замкнутость класса относительно операции суперпозиции и выполнимость в нем аксиом $\alpha 2$, $\alpha 3$ так, что область истинности любой δ-формулы есть область определенности некоторой частичной T-функции. При этом используются некоторые результаты из § 2. В заключение рассмотрено понятие $D\Sigma$-системы, дающее интерпретацию Δ-исчисления в теории частично непрерывных преобразований над размеченными бесконечными деревьями, и исследуется аксиоматика Δ_0-исчисления.

1. Натуральная модель $\mathcal{N}$ определяет интерпретацию Δ-исчисления в теории частично рекурсивных функций. Здесь элементы вида a_i', q_i, p_i, s_n^m интерпретируются как натуральные числа, причем элементы q_i заполняют все множество $\mathbf{N}$; $\triangle$ интерпретируется как неопределенное (бесконечное) число или как всюду неопределенная функция; μ_i интерпретируется как переменная, пробегающая множество всех частичных функций вида $\mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$, а x_i — как переменная, пробегающая множество $\mathbf{N}$; при a, $b_j \in \mathbf{N} \cup \{\triangle\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, под выражением вида $a(b_1,\ \ldots,\ b_n)$ подразумевается $\triangle$, если $\triangle \in \{a,\ b_1,\ \ldots,\ b_n\}$, иначе $\varphi_a^n(b_1,\ \ldots,\ b_n)$, где $\varphi_a^n\ (a \in \mathbf{N})$ — гёделево перечисление всех n-местных частично рекурсивных функций. Тогда каждому α-терму, не содержащему символов μ_i, соответствует некоторая частично рекурсивная функция.

2. В теории строгих частичных Δ-функций элементы вида a_i', q_i, p_i, s_n^m интерпретируются как элементы из множества $\{0,\ 1\}^\infty$, причем элементы q_i заполняют все множество $\{0,\ 1\}^\infty$ *); μ_i — как переменная, пробегающая множество всех частичных функций вида $(\{0,\ 1\}^\infty)^n \to \{0,\ 1\}^\infty$; x_i — как переменная, пробегающая множество $\{0,\ 1\}^\infty$, под выражением вида $a(b_1,\ \ldots,\ b_n)$, где a, $b \in \{0,\ 1\}^\infty \cup \{\triangle\}$, подразумевается $\triangle$, если $\triangle \in \{a,\ b_1,\ \ldots,\ b_n\}$, иначе $(\psi_0^n(a))(b_1,\ \ldots,\ b_n)$, где $\psi_0^n(a)\ (a \in \{0,\ 1\}^\infty)$ — допустимое $S\Delta$-именование всех строгих n-местных частичных Δ-функций. Здесь каждому α-терму, не содержащему символов μ_i, соответствует подходящая строгая частичная Δ-функция.

---

*) Это требование, строго говоря, подразумевает соответствующее расширение алфавита языка $\mathfrak{L}_1$ (при условии, что множество C_d не считается счетным).

3. Δ-исчисление можно аналогично интерпретировать в теориях (строгих частичных) реальных функций, C-вычислимых функций, $C\Delta$-функций, частичных BR-функций.

4. Δ-исчисление можно интерпретировать в теориях частичных V_1-функций, CV_1-функций, Δ_1-функций, $C\Delta_1$-функций, где частичные Δ_1-функции вида $(C_d)^n \to C_d$ задаются подобно частичным V_1-функциям, а частичные CV_1-функции и частичные $C\Delta_1$-функции задаются недетерминированными C-машинами, или недетерминированными R_n-преобразователями, у которых для любых $q \in K$, $\sigma \in (\Sigma_0 \cup \{\varepsilon\})^n \cup \{\varepsilon\}$ множество $H \cap (\{q\} \times \{\sigma\} \times K \times \Sigma_0^*)$ конечно и эффективно вычислимо по q, σ.

5. Δ-исчисление можно интерпретировать в теории частично непрерывных функций и в теориях частичных V_i-функций, $i \in \mathbf{N}$.

6. Δ-исчисление интерпретируется в теории частичных метареальных функций, получаемых из частичных R-функций конечным применением операции суперпозиции.

Введем общее понятие $D\Sigma$-системы так, что каждая $D\Sigma$-система будет моделью Δ-исчисления. Для любых множеств Σ, Δ произвольная функция вида f: $\Delta^* \to \Sigma$ называется (Σ, Δ)-*разметкой*, или (Σ, Δ)-размеченным деревом. Пусть 1^i есть слово в алфавите $\{1\}$ длины i, причем 1^0 есть ε. Считаем, что Σ, Δ — счетные или конечные множества, а $\mathfrak{M}(\Sigma, \Delta)$ — топологическое пространство, состоящее из всех (Σ, Δ)-разметок с топологией, порожденной системой множеств вида $V_{\alpha, \sigma}$, где $\alpha \in \Delta^*$, $\sigma \in \Sigma$ и $V_{\alpha, \sigma}$ — множество всех (Σ, Δ)-разметок μ таких, что $\mu(\alpha) = \sigma$. Пусть $\mathfrak{M}_1(\Sigma)$ есть $\mathfrak{M}(\Sigma, \{1\})$, а $\mathfrak{M}_2(\Sigma)$ есть $\mathfrak{M}(\Sigma \cup \{\varepsilon\}, \Sigma)$, где $\varepsilon \notin \Sigma$. Элемент $a \in \mathfrak{M}_1(\Sigma)$ при $a(1^i) = \sigma_i$, $i \in \mathbf{N}$, будем отождествлять с последовательностью $\sigma_0\sigma_1\ldots$. Тогда $\mathfrak{M}_1(\mathbf{N})$ — бэровское пространство. $\mathfrak{M}_1(\{0, 1\})$ — канторово пространство. Для любых $f \in \mathfrak{M}_2(\Sigma)$, $a \in \mathfrak{M}_1(\Sigma)$, $a = \sigma_0\sigma_1\ldots$, полагаем, что $(a)f = f(\sigma_0)f(\sigma_0\sigma_1)\ldots$ Далее $(a)f'$ получается из $(a)f$ вычеркиванием всех символов ε, $\overline{f}(a) = (a)f'$, при $(a)f' \in \mathfrak{M}_1(\Sigma)$, иначе $\overline{f}(a)$ не определено. Назовем $\mathfrak{M}_3(\Sigma) = \{\overline{f} | f \in \mathfrak{M}_2(\Sigma)\}$ ***множеством непрерывных частичных операторов в топологическом пространстве*** $\mathfrak{M}_1(\Sigma)$. В частности, $\mathfrak{M}_3(\mathbf{N})$, $\mathfrak{M}_3(\{0, 1\})$ суть множества непрерывных частичных операторов в бэровском пространстве и в канторовом пространстве.

$D\Sigma$-системой называется набор $\langle A, B, p, c^1, c^2, \ldots\rangle$, где $A \subseteq \mathfrak{M}_1(\Sigma)$, $B \subseteq \mathfrak{M}_2(\Sigma)$ $\forall f \in B(\overline{f}(A) \subseteq A)$, p — взаимно однозначный непрерывный оператор, отображающий A на B, c^n — взаимно однозначный непрерывный n-местный оператор, отображающий A^n на A. Пусть $\triangle \notin A$ и $A' = A \cup \{\triangle\}$. Для любых элементов $b_i \in A'$, $0 \leqslant i \leqslant n$, положим

$$b_0(b_1, \ldots, b_n) = \begin{cases} a, \text{ если } a = \overline{p(b_0)}(b_1, \ldots, b_n) \text{ определено}, \\ \triangle \text{ в противном случае}. \end{cases}$$

Тогда $\varphi(x_0, x) = \overline{p(x_0)}(x)$ — универсальная функция для класса $\{\overline{f} | f \in B\}$.

Следствие 10. *Пусть* Q: $\mathfrak{M}_2(\Sigma) \to \mathfrak{M}_2(\Sigma)$ — *непрерывный оператор. Тогда существует* $f \in \mathfrak{M}_2(\Sigma)$ *такое, что* $\overline{f} = \overline{Q(f)}$.

Доказательство вытекает из γ_1, так как любая $D\Sigma$-система есть модель Δ-исчисления.

Размеченное дерево $f \in \mathfrak{M}_2(\Sigma)$ назовем *макропреобразователем* и будем говорить, что *макропреобразователь f задает непрерывный частичный оператор* $\overline{f}$. Любому непрерывному оператору Q_1: $\mathfrak{M}_1(\Sigma) \to \mathfrak{M}_1(\Sigma)$ можно поставить в соответствие макропреобразователь q так, что $\overline{q}$ есть Q_1. Пусть Q: $\mathfrak{M}_2(\Sigma) \to \mathfrak{M}_2(\Sigma)$ — непрерывный оператор. Возьмем непрерывный оператор Q_1: $\mathfrak{M}_1(\Sigma) \to \mathfrak{M}_1(\Sigma)$ так, что для любых a, $b \in \mathfrak{M}_2(\Sigma)$ условие $Q(a) = b$ равносильно условию $Q_1(p^{-1}(a)) = p^{-1}(b)$, где p: $\mathfrak{M}_1(\Sigma) \leftrightarrow \mathfrak{M}_2(\Sigma)$ — взаимно однозначный непрерывный оператор. Пусть

$q\in\mathfrak{M}_2(\Sigma)$ и $\overline{q}$ есть Q_1. Полагаем, что макропреобразователь q задает оператор Q. В случае, когда $\overline{q}$ — непрерывный частичный оператор, макропреобразователь q задает, по определению, непрерывный частичный оператор Q. В последующем множество всех таких непрерывных частичных операторов Q обозначается в виде $[\mathfrak{M}_2(\Sigma)\to\mathfrak{M}_2(\Sigma)]$.

Утверждение 1. *Оператор* Q: $\mathfrak{M}_2(\Sigma)\to\mathfrak{M}_2(\Sigma)$ *непрерывен тогда и только тогда, когда он задается некоторым макропреобразователем.*

Оператор Q: $\mathfrak{M}_2(\Sigma)\to\mathfrak{M}_2(\Sigma)$ назовем *корректным*, если для любых f, $g\in\mathfrak{M}_2(\Sigma)$ из $\overline{f}=\overline{g}$ следует $\overline{Q(f)}=\overline{Q(g)}$. Каждому корректному оператору Q поставим в соответствие оператор $\overline{\overline{Q}}$: $\mathfrak{M}_3(\Sigma)\to\mathfrak{M}_3(\Sigma)$ так, что $Q(\overline{f})=\overline{Q(f)}$ для любого $f\in\mathfrak{M}_2(\Sigma)$. Оператор $\overline{\overline{Q}}$ назовем *непрерывным*, если он соответствует корректному непрерывному оператору Q.

Следствие 11. *Пусть* $\overline{\overline{Q}}$: $\mathfrak{M}_3(\Sigma)\to\mathfrak{M}_3(\Sigma)$ — *непрерывный оператор. Тогда существует* $f\in\mathfrak{M}_3(\Sigma)$ *такое, что* $\overline{\overline{Q}}(f)=f$.

Этот результат следует сравнить с теоремой Кнастера — Тарского о неподвижной точке для непрерывных операторов на полных решетках и соответственно с теоремой 1.2.17 [6], а введенное выше понятие непрерывного оператора на $\mathfrak{M}_3(\Sigma)$ — с понятием непрерывного оператора в топологии Скотта (см. [6]). $(\mathfrak{M}_3(\Sigma), \subseteq)$ есть частично упорядоченное множество, имеющее наименьший элемент. Следуя Скотту [6], определяем понятие направленного подмножества $X\subseteq\mathfrak{M}_3(\Sigma)$.

Лемма 13. *Для любых элемента* $f\in\mathfrak{M}_2(\Sigma)$ *и счетного множества* $P\subseteq\mathfrak{M}_1(\Sigma)$ *существует* $g\in\mathfrak{M}_2(\Sigma)$ *такой, что* $\overline{g}(x)=\overline{f}(x)$, *при* $x\in\mathfrak{M}_1(\Sigma)\setminus P$ *и* $\overline{g}(x)$ *не определено, при* $x\in P$ *).

Доказательство. Пусть $P=\{p_1, p_2, \ldots\}$. Положим, что $g(\varepsilon)=\varepsilon$. Для любого $w\in\Sigma^+$ определим $g(w)$. Пусть $w=\sigma_0\ldots\sigma_k$, где $\sigma_i\in\Sigma$. Считаем, что $\alpha_i=f(u_i)$, $\beta_i=g(u_i)$, при $u_i\preccurlyeq w$, $|u_i|=i$, $0\leqslant i\leqslant k$. Если выполнены условия

1) в последовательности $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$ есть всего $i-1$ символов, отличных от ε,

2) в последовательности $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ есть символ $\alpha_{j(i)}$ — i-й слева направо, отличный от ε символ.

3) $w\Sigma^\infty\cap\{p_1, \ldots, p_i\}=\varnothing$,

то $\beta_k=\alpha_{j(i)}$. Если же не выполнено, по крайней мере, одно из условий 2, 3, то $\beta_k=\varepsilon$. Получена искомая разметка g.

Лемма 14. *Существует направленное множество* $X\subseteq\mathfrak{M}_3(\Sigma)$, *не имеющее точной верхней грани* $\sqcup X\in\mathfrak{M}_3(\Sigma)$.

Доказательство. Пусть $\Sigma=\{0, 1\}$ и $F=\{0, 1\}^*0^\infty=\{a_i|i\in\mathbf{N}\}$, $F_i=\{a_0, \ldots, a_i\}$, $i\in\mathbf{N}$. Возьмем функции f_i так, что $f_i(x)=0^\infty$, при $x\in F_i$ и $f_i(x)$ не определено в остальных случаях. Направленное множество $X=\{f_i|i\in\mathbf{N}\}$ не имеет точной верхней грани. Действительно допустим противное. Пусть $\overline{f}=\sqcup X$, где $f\in\mathfrak{M}_2(\Sigma)$. Возьмем $b=v_0v_1\ldots$, так что $v_0=\varepsilon$, $v_{i+1}=v_i0^{k_i}1$, где $f\left(v_i0^{k_i}\right)=0$. Тогда $\overline{f}(b)=0^\infty$. Однако по лемме 13 можно построить $g\in\mathfrak{M}_2(\Sigma)$ так, что $g(a_i)=0^\infty$, $i\in\mathbf{N}$ и $\overline{g}(b)$ не определено; противоречие. Для произвольного множества Σ доказательство аналогично.

Следовательно, частично упорядоченное множество $\mathfrak{M}_3(\Sigma)$ не является полным. Топологию Скотта на $\mathfrak{M}_3(\Sigma)$ определим следующим образом. Множество $O\subseteq\mathfrak{M}_3(\Sigma)$ считается *открытым*, если

1) для любых f, g из $\mathfrak{M}_3(\Sigma)$, если $f\in O$, $f\subseteq g$, то $g\in O$;

2) если $X\subseteq\mathfrak{M}_3(\Sigma)$ — направленное множество, имеющее точную верхнюю грань $\sqcup X\in O$, то множество $X\cap O$ непусто.

---

*) В этой и следующей лемме считается, что $|\Sigma|\geqslant 2$.

Теорема 13. *Существует корректный непрерывный оператор Q: $\mathfrak{M}_2(\Sigma)\to\mathfrak{M}_2(\Sigma)$ такой, что оператор $\overline{\overline{Q}}$ не является непрерывным в топологии Скотта.*

Доказательство. При $\Sigma=\{0,\ 1\}$ искомый оператор Q может быть задан макропреобразователем A так, что $\overline{Q(x)}(\{0,\ 1\}^\infty)\subseteq\{0\}^\infty$ и значение $\overline{Q(x)}(0^\infty)$ определено тогда и только тогда, когда $\overline{x}(1^i0^\infty)=0^\infty$ для всех $i\in\mathbf{N}$. Пусть $V=\{f|f\in\mathfrak{M}_3(\Sigma),\ f(0^\infty)=0^\infty\}$ и W — прообраз множества V относительно оператора $\overline{\overline{Q}}$. Остается показать, что множество V открыто, а W — нет. Первое очевидно. Второе следует из рассмотрения $f_i\in\mathfrak{M}_3(\Sigma)$, $i\in\mathbf{N}$, таких, что $f_i(x)=0^\infty$ при $x\in\{1^j0^\infty|0\leqslant j\leqslant i\}$ и $f_i(x)$ не определено в остальных случаях. Тогда $X=\{f_i|i\in\mathbf{N}\}$ — направленное множество, имеющее точную верхнюю грань $\sqcup X\in W$, но $X\cap W=\varnothing$.

Укажем пример оператора Q: $\mathfrak{M}_3(\Sigma)\to\mathfrak{M}_3(\Sigma)$, непрерывного в топологии Скотта, но не являющегося непрерывным в нашем смысле. Пусть $\Sigma=\{0,\ 1\}$, $V\subseteq\mathfrak{M}_3(\Sigma)$, $V=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}V$, где $V_i=\{f|f(1^i0^\infty)=0^\infty\}$. Возьмем функции ω, $g\in\mathfrak{M}_3(\Sigma)$ так, что ω нигде не определена, а $g(x)=0^\infty$ при $x=0^\infty$ и $g(x)$ не определено в остальных случаях. Пусть

$$Q(f)=\begin{cases} g \text{ при } f\in V,\\ w \text{ при } f\notin V.\end{cases}$$

Оператор Q непрерывен в топологии Скотта. Нетрудно показать, что Q не может быть задан макропреобразователем, поэтому в силу утверждения 1 он не непрерывен в нашем смысле.

Таким образом, следствие 11 и теорема Кнастера — Тарского (теорема 1.2.17 [6]) логически независимы. При построении математических моделей λ-исчисления Д. Скоттом [59], Ю. Л. Ершовым [47, 60], Г. Плоткиным [61] (см. также [6]) были получены решения рекурсивного уравнения $D\cong[D\to D]$. Из изложенного выше следует, что выполняется соотношение $\mathfrak{M}_2(\Sigma)\cong[\mathfrak{M}_2(\Sigma)\to\mathfrak{M}_2(\Sigma)]$, где непрерывные частичные операторы Q: $\mathfrak{M}_2(\Sigma)\to\mathfrak{M}_2(\Sigma)$ задаются неоднозначно посредством макропреобразователей из $\mathfrak{M}_2(\Sigma)$. Все же для любого $f\in\mathfrak{M}_2(\Sigma)$ существует единственный $f_0\in\mathfrak{M}_2(\Sigma)$ такой, что $\overline{f_0}=f$ и для любых $f_1\in\mathfrak{M}_2(\Sigma)$, $\overline{f_1}=\overline{f_0}$, $a=\sigma_0\sigma_1\ldots$ $(\sigma_i\in\Sigma)$ и числа n в последовательности β_{0n} символов ε не больше, чем в последовательности β_{1n}, где $\beta_{in}=f_i(\sigma_0)f_i(\sigma_0\sigma_1)\ldots f_i(\sigma_0\ldots\sigma_n)$. Элементы $f_0\in\mathfrak{M}_2(\Sigma)$, определяемые указанным образом, называются *оптимальными макропреобразователями.*

Укажем Δ_5-исчисление более слабое, чем Δ-исчисление, но позволяющее в тех же или несколько иных формах вывести аналоги утверждений, полученных выше в Δ-исчислении, исключая теоремы β_4, γ_{12}. Рассматриваемые ниже модели Δ_5-исчисления имеют некоторую отдаленную аналогию с моделью Энгелера для λ-исчисления [6, с. 118], в которой операция аппликации задается подобно сводимости по перечислимости [38, с. 191]. Попутно при рассмотрении моделей Δ_5-исчисления упростим аксиоматику Δ_0-исчисления.

Δ_5-исчисление в сравнении с Δ_0-исчислением имеет более слабые средства построения δ-формул. Именно в языке Δ_5-исчисления не участвует правило 2.2, а участвует ослабленный вариант правила 2.1, в котором α-термы U, V совпадают между собой. Кроме того, в аксиоме $\alpha2$ подформула $\Pi_x^m[s_n^m]$ заменяется на $\exists x_1\ldots\exists x_n(s_n^m(x_1,\ \ldots,\ x_m)\neq\triangle)$. Полученную модификацию аксиомы $\alpha2$ обозначим через $\alpha2''$. Аксиомы $q_i\neq\triangle$ (точнее, $a'_{8i+91}\neq\triangle$), $i\in\mathbf{N}$, в список аксиом Δ_5-исчисления не включаются. Этим устраняются варианты схемы аксиом $\alpha0_1$, связанные с аксиомой $\alpha1'$.

Построим $\mathfrak{M}$ — абстрактную модель Δ_5-исчисления и две конкретные модели P_1, P_2 — частные случаи модели $\mathfrak{M}$. Элементы модели $\mathfrak{M}$ составляют подмножество булеана абстрактного множества $\mathscr{M}$. В частности, P_1 — множество всех рекурсивно перечислимых множеств, P_2 — множество областей значений непрерывных частичных операторов Q: $\mathfrak{M}_2(\Sigma) \to \mathfrak{M}_2(\Sigma)$, заданных макропреобразователями. В определении модели $\mathfrak{M}$ участвует биекция c: $\mathscr{M} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$. По ней определяются биективные функции c^n: $\mathscr{M}^n \to \mathscr{M}$, $n \geqslant 2$, подобно канторовским нумерационным функциям. Для модели $\mathfrak{M}$ должны выполняться такие требования. Для любого правильного функционального выражения T, использующего бинарный функциональный символ c и символы переменных $x_1, \ldots, x_n$, для любых чисел $1 \leqslant \alpha_i \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant n$, множество $\{T_{x_1}, \ldots, {}_{x_n}[a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_n}] \mid a_{\alpha_i} \in \mathscr{M}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ принадлежит модели $\mathfrak{M}$. Символ $\triangle$ интерпретируется в $\mathfrak{M}$ как пустое множество. Для $n \in \mathbf{N}^+$ $(n+1)$-арная операция аппликации, по определению, любым F, $G_1, \ldots, G_n$ из $\mathfrak{M}$ ставит в соответствие $F(G_1, \ldots, G_n) = \left\{d \mid \exists a_1 \ldots \exists a_n \exists b) \bigwedge\limits_{i=1}^{n} a_i \in G_i \,\&\, b \in F \,\&\, b = \right.$ $\left. = c^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, d))\right\}$

Нетрудно проверить, что в $\mathfrak{M}$ верны равенство

(I) $$(x(z))(y(z)) = S_0(x, y, z)$$

и аксиома $\alpha 2''$, где $S_0 = \{c^4(c[a_1, c(b, a_2)], c(a_1, b), a_1, a_2) \mid a_1, a_2, b \in \mathscr{M}\}$, $s_n^m = \{c^{m+1}(c^{m+n}(a_1, \ldots, a_{m+n}), a_1, \ldots, a_{m-1}, c^{n+1}(a_m, \ldots, a_{m+n})) \mid a_i \in \mathscr{M}, 1 \leqslant i \leqslant m+n\}$. Согласно аксиоме α_3 интерпретируем в $\mathfrak{M}$ термы, построенные применением правила 1.4. Тогда имеем равенства

(II) $\nabla(y \neq \triangle, x) = K^1(x, y)$,

(III) $\nabla(y_1 \neq \triangle \vee y_2 \neq \triangle, x) = K^2(x, y_1, y_2)$,

где $K^n = \{c^{n+2}(a, b_1, \ldots, b_n, a) \mid a, b_i \in \mathscr{M}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Используя $n+1$ раз аксиому $\alpha 2''$, получаем

(IV) $f(x_1, \ldots, x_n) = s_1^n(s_1^n, \ldots, s_1^n)(f)(x_1) \ldots (x_n)$.

В частности, $S_0(x, y, z) = S(x)(y)(z)$, $K^1(x, y) = K(x)(y)$, где $S = s_1^3(s_1^3, s_1^3, S_0)$, $K = s_1^2(s_1^2, K^1)$. Таким образом, в $\mathfrak{M}$ имеются комбинаторы S, K, которых, как известно, достаточно для построения бестиповой комбинаторной алгебры [6].

Индукцией по высоте терма T^i можно показать, что из (I)—(III), аксиом (V) вида $y(x_1) \ldots (x_n) = q_n'(y, x_1, \ldots, x_n)$ и аксиом $\alpha 2''$, $\alpha 3$ выводим любой другой вариант аксиомы $\alpha 1'$. Действительно, используя (IV) и полноту системы комбинаторов S, K, для $\alpha = s_1^n(s_1^n, \ldots, s_1^n)$, $\beta = s_1^m(s_1^m, \ldots, s_1^m)$ и подходящего терма Q, построенного из S, K конечным применением правила 1.3 при $n = 1$, имеем $f_0(\vec{x})(f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x})) = Q(x_1) \ldots (x_m) = q_n'(Q_1, \vec{x}) = s_m^2(q_n', Q_1)(\vec{x})$, где $\vec{x} = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$, $Q_1 = Q(f_0) \ldots (f_n)(\alpha)(\beta)$. Следует еще учесть, что по аксиоме $\alpha 3$ выполняются равенства

(VI) $$\nabla\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \Phi_i, T\right) = \nabla\left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} \Phi_i, \nabla(\Phi_n, T)\right),$$

(VII) $$\nabla\left(\bigvee_{i=1}^{n} y_i \neq \triangle, x\right) = \nabla\left(\nabla\left(\bigvee_{i=1}^{n-1} y_i \neq \triangle, x\right) \neq \triangle \vee y_n \neq \triangle, x\right).$$

В $\mathfrak{M}$ при наличии в операндах аппликации пустого множества результат будет пустое множество. Значит, в $\mathfrak{M}$ выполняются аксиомы $\alpha 0_2$, $\alpha 0_3$. Этим доказано, что $\mathfrak{M}$ — модель Δ_5-исчисления.

Из приведенных выше рассуждений видно, что и в Δ_0-исчислении можно ограничить схему аксиом $\alpha 1'$. Достаточно оставить аксиомы

(I—III), (V) и аксиому $\alpha 1'$, в которой терм T^i имеет один из четырех вариантов $\nabla(x_1 \square x_2,\ x_4)$, $\nabla(x_1 \square x_2 \vee x_3 \neq \triangle,\ x_4)$, где $x_1 \square x_2$ есть δ-формула $x_1 = x_2 \,\&\, x_1 \neq \triangle$ или δ-формула $x_1 \neq x_2 \,\&\, x_1 \neq \triangle \,\&\, x_2 \neq \triangle$.

Частным случаем модели $\mathfrak{M}$ служит также модель P_3 — множество областей значений частично реальных функций, которое суть множество всех A-множеств (см. § 2). Интересно, что в модели $\mathfrak{M}$ универсальное множество B, определяемое равенством $x(y) = B(x,\ y)$, устроено просто: $B = \{c^3(c(a,\ b),\ a,\ b) \mid a,\ b \in \mathscr{M}\}$. Кроме того, в модели $\mathfrak{M}$ и ее частных вариантах выполняется аксиома экстенсиональности $\forall x(f(x) = g(x)) \to \to f = g$, при условии, что $\{a\} \in \mathfrak{M}$ для всех $a \in \mathscr{M}$. Это дает также возможности построения λ-моделей на основе рекурсивного соотношения $\mathfrak{M} \cong [\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}]$, где $[\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}]$ есть $\{\lambda x.f(x) \mid f \in \mathfrak{M}\}$ — множество функций из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$, заданных элементами из $\mathfrak{M}$.

Следующие вопросы остаются открытыми.

1. Интерпретируется ли Δ-исчисление в теории частичных V-функций? В частности, существует ли универсальная функция в классе частичных V-функций?

2. Существует ли наименьшая неподвижная точка для любого (заданного макропреобразователем) непрерывного оператора $\overline{\overline{Q}}$ в пространстве $\mathfrak{M}_3(\Sigma)$?

§ 5. ТИПЫ ФУНКЦИЙ И ОПЕРАЦИЙ

Интуитивные представления о сложности математических функций и операций могут уточняться на основе их классификации. Представляет интерес классификация функций и операций, основанная на классификации преобразователей. Этим способом выше были выделены классы конечно реальных функций, строгих R-функций, реальных функций и V-функций. Далее для функций и операций выделяется четыре основных типа: R_0, R, Z, V — расположенные в порядке возрастания общности. Это дает основание, например, для того, чтобы сложение, умножение, нахождение корней полиномов, максимальных и минимальных значений для непрерывной на отрезке функции, интегрирование на $C[a,\ b]$ считать операциями типа R (леммы 4_2, 4_3), дифференцирование — операцией типа Z, а нахождение корня уравнения $f(x) = 0$ для непрерывной на отрезке знакопеременной функции — операцией типа V, но не типа R. Последнее соответствует, например, следующей теореме.

Теорема 14. *Не существует частичной R-функции g такой, что для любого $x \in \{0,\ 1\}^\infty$, если ψ_x — непрерывная R-функция, $\|\overline{\psi}_x(0')\| < 1/2$, $\|\psi_x(1')\| > 1/2$, то $g(0 \nabla x)$ — одно из решений уравнения $\|\overline{\psi}_x(t)\| = 1/2$ на отрезке $0' \preccurlyeq t \preccurlyeq 1'$.*

Общее понятие частично непрерывной функции вводится ниже на основе понятия частичной операции типа R. Определим базовые функции типов R_0, Z, V. Их область определения и область значений есть канторово пространство C_d. Частичная n-местная функция $f\colon (C_d)^n \to C_d$ типа T задается преобразователем A с n входными и одной выходной лентами. На входных лентах располагаются элементы из C_d (сверхслова), читаемые параллельно слева направо. Будем говорить, что *функция f имеет тип $R_0(Z,\ V)$*, если A есть машина Тьюринга с оракулом (осциллирующая машина Тьюринга с оракулом, недетерминированная машина Тьюринга с оракулом). В случае типов R_0, V преобразователь A последовательно слева направо на выходной ленте формирует результат. В случае типов R_0, Z преобразователь A детерминирован. В случае типа V подразумевается функциональность задаваемого им отображения. В случае типа Z допускается двустороннее движение по выходной ленте и изменение записанных на ней символов. Тогда считаем, что результат определен, если для любого i, начиная с некоторого момента j, не происходит попадания управляющей головки преобразователя A на

i-ю ячейку выходной ленты. Понятно, что есть всего континуум различных базовых функций типов R_0, Z, V. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ — соответственно классы базовых функций типов R_0, Z, V. Именование (кодирование) ψ: $C_d \to \mathfrak{F}_i$ назовем *допустимым*, если существует машина Тьюринга A с двумя входными и одной выходной лентами (осциллирующая машина Тьюринга в случае $i=2$) такая, что $f_A(x, y) = (\psi(x))(y)$ для любых $x, y \in C_d$, где f_A — функция, задаваемая машиной A. Каждый из классов $\mathfrak{F}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, имеет допустимое именование. Выполняются строгие включения $\mathfrak{F}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{F}_2 \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{F}_3$. Так, если ψ_i — допустимое именование класса $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$, то $f_i \in \mathfrak{F}_{i+1} \setminus \mathfrak{F}_i$, где

$$f_i(x) = \begin{cases} 1^\infty & \text{при } (\psi_i(x))(x) = 0^\infty, \\ 0^\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Расширение класса $\mathfrak{F}_3$ не произойдет, если расширить класс определяющих $\mathfrak{F}_3$ преобразователей до класса осциллирующих недетерминированных машин Тьюринга с оракулом. Имеет место следующий результат: класс непрерывных операторов в канторовом пространстве совпадает с классом базовых функций типа R_0. В классах базовых функций типов R_0, Z, V выделяются подклассы функций типов CR_0, CZ, CV, задаваемых соответственно машинами Тьюринга (без оракулов), осциллирующими машинами Тьюринга, недетерминированными машинами Тьюринга. Считаем, что *вещественная функция* $f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ *имеет тип* $T \in \{CR_0, CZ, CV\}$, если существует базовая функция g типа T такая, что $f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = \tilde{x}_{n+1}$, где $x_{n+1} = p^{-1}(g(p(x_1), \ldots, p(x_n)))$, x_i — представление числа $\tilde{x}_i$ в двоичной системе счисления, p — взаимно однозначная, задаваемая конечным автоматом A, функция из множества всех двоичных разложений в множество C_d. Классы $\mathfrak{R}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, вещественных функций соответственно типов CR_0, CZ, CV рассматривались (в иной терминологии) в [62], где доказаны строгие включения $\mathfrak{R}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{R}_2 \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{R}_3$. Функции класса $\mathfrak{R}_1$, задаваемые конечными автоматами Мили и обобщенными последовательностными машинами, изучались в [46]. Класс C-вычислимых функций содержит в себе класс $\mathfrak{R}_1$ и включается в класс $\mathfrak{R}_2$.

Пусть $\mathfrak{M}_2$ — топологическое пространство $\mathfrak{M}(\{0, 1, 2, \bar{\varepsilon}\}, \{0, 1\})$ (см. § 4), элементы которого суть разметки (полные бинарные размеченные деревья с множеством меток $\{0, 1, 2, \bar{\varepsilon}\}$). Разметке μ соответствует частичная Δ-функция f_μ. Ниже на основе понятия Δ-оператора (см. § 2) вводится понятие частично непрерывной функции в произвольном топологическом пространстве $\mathcal{M}_1$. Отметим, в частности, что любая непрерывная вещественная функция g, определенная на отрезке $[a, b]$ $(g \in C[a, b])$, задается в виде

$$g(x) = k\left(\tilde{f}_\mu\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - \frac{1}{2}\right),$$

где $k \in \mathbb{N}^+$ и f_μ — подходящая Δ-функция. Затем любая непрерывная вещественная функция g_1 задается в виде $g_1(x) = p^{-1}(g(p(x)))$, где $p(x) = x/\sqrt{1+x^2}$, $g \in C[-1, 1]$, $|g(y)| < 1$, для всех $-1 < y < 1$. Непрерывные функции в любом T_0-пространстве $\mathcal{M}$ со счетной базой $\{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ представляются непрерывными функциями в бэровском пространстве [63, с. 48] так, что точка $x \in \mathcal{M}$ представляется элементом $p(x) = i_1 i_2 \ldots$ бэровского пространства, где $\{i | x \in U_i, i \in \mathbb{N}\} = \{i_j | j \in \mathbb{N}^+\}$, $i_j \leqslant i_{j+1}$, а $i_j = i_{j+1}$ влечет $i_{j+1} = i_{j+2}$.

Пусть $\mathfrak{L}$ — множество всех (одноместных) частичных Δ-функций. Считаем, что *частичный n-местный оператор Q на $\mathfrak{L}$ имеет тип* $T \in \{R_0, Z, V\}$, если он может быть задан в виде $Q(x_1, \ldots, x_n) = f_\mu$, где $\mu = p^{-1}(Q'(p(\mu_1), \ldots, p(\mu_n)))$, $f\mu_i = x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, p: $\mathfrak{M}_2 \to C_d$ — непрерывная взаимно однозначная функция и Q' — базовая функция типа T. Определение μ_i по x_i будет однозначно, если считать, что μ_i — оптимальный макропреобразователь (см. § 4). *Частичный n-местный оператор Q на $\mathfrak{L}$ имеет тип R*, если он может быть задан в виде Δ-оператора: $Q = (x, t)$, где $x \in C_d$, $t = \overline{n+1}(\overline{2}(\overline{1}, \overline{1}), \ldots, \overline{2}(\overline{1}, \overline{1}))$. В общем случае для произвольных топологических пространств $\mathcal{M}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, (*частичная*) *$n$-местная функция* (*операция*) G: $\mathcal{M}_1 \times \ldots \times \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n+1}$ *имеет тип T*, если она может быть представлена в виде $G(x_1, \ldots, x_n) = p_{n+1}(Q(p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n)))$, где p_i: $\mathcal{M}_i \to \mathfrak{L}$ — непрерывная взаимно однозначная функция, $1 \leqslant i \leqslant n$, Q — (частичный) оператор на $\mathfrak{L}$ типа T, p_{n+1}: $\mathfrak{L} \to \mathcal{M}_{n+1}$ — непрерывная функция, а топология на $\mathfrak{L}$ определяется системой окрестностей вида $\left\{f \mid \max\limits_{x \in [0,1]} |\tilde{\tilde{f}}(x) - \tilde{\tilde{g}}(x)| < \varepsilon\right\}$. В частности, если $\mathcal{M}_1$ — бэровское пространство, то функцию p_1 можно определить так, что $p_1(i_1 i_2 \ldots) = f$, где f — частичная Δ-функция, имеющая график $\Gamma = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma_k$, $\Gamma_k = \{(x, y) \mid x_k < \tilde{x} < x_{k+1},\ y \in F_0',\ \tilde{y} = 1/2^k\}$, $x_0 = 0$, $x_k = \frac{1}{2^k} \times \left(1 - \frac{1}{i_k+1}\right) + \sum\limits_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j}$ при $k \geqslant 1$.

Под *частично непрерывной функцией* подразумевается частичная n-местная операция $f: \mathcal{M}_1^n \to \mathcal{M}_1$ типа R, непрерывная в точках, где она определена. Возникает необходимость сравнить такие классы одноместных частичных функций действительного переменного: $\mathfrak{A}_1$ — класс функций, непрерывных в каждой точке из области определенности, $\mathfrak{A}_2$ — класс функций, каждая из которых есть предел (поточечно) сходящейся последовательности непрерывных функций, $\mathfrak{A}_3$ — класс функций типа V, $\mathfrak{A}_4$ — класс функций типа Z, $\mathfrak{A}_5$ — класс функций из $\mathfrak{A}_1$, представляемых R-функциями. Имеют место следующие соотношения: $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_2 \subsetneqq \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_5 \subsetneqq \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1 \not\subseteq \mathfrak{A}_3$. Последнее отношение следует из классических теоретико-множественных соображений, $\mathfrak{A}_2 \subsetneqq \mathfrak{A}_3$ следует из леммы 4_9 (каждая функция классификации Бэра есть V-функция), а функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \text{ рациональное}, \\ \text{не определено в противном случае} \end{cases}$$

принадлежит $\mathfrak{A}_2 \backslash \mathfrak{A}_5$.

Отметим, что функция Дирихле имеет тип V, но не тип R. Тип функции сохраняется при выбрасывании в ее графике счетного числа точек (см. лемму 13). Так, вещественная функция f, равная нулю на невычислимых числах и не определенная в противном случае, имеет тип R. Определение типа вещественной функции g, равной нулю на вычислимых числах и не определенной в противном случае, зависит от того, какое принимается соглашение о мощности канторова пространства.

Широкий подход к описанию частичных непрерывных функционалов развит в работе Ю. Л. Ершова [47]. Этот подход дает альтернативу расширения основных множеств C_d, D, $\mathfrak{M}(\Sigma)$ данной работы за счет введения предэлементов, которые есть левые подслова элементов из множеств C_d, D, $\mathfrak{M}_1(\Sigma)$. В таком случае R-преобразователи естественно определяют Δ-функции, R-функции, частичные непрерывные операторы на расширенных множествах C_d'', D'', $\mathfrak{M}_1''(\Sigma)$. Например, множество $C_d'' = C_d \cup \{0, 1\}^*$ с базисными окрестностями вида $\alpha C_d''$, $\alpha \in \{0, 1\}^*$, будет полным f_0-пространством [47]. В соответствии с теоремой 3 [47] класс непрерывных функционалов типа $(0|0)$ на f_0-пространстве может быть описан операционально посредством R-преобразователей подобно классу базовых функций типа R_0.

В заключение отметим, что в [64], согласно доказательству леммы 4_4, построен конечный R-преобразователь, задающий непрерывную нигде не дифференцируемую функцию. Там же определяются системы уравнений для задания непрерывных конечно реальных и C-вычислимых функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Очерки по истории математики.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. **Медведев Ф. А.** Очерки истории теории функций действительного переменного.— М.: Наука, 1975.
3. **Гудстейн Р. Л.** Рекурсивный математический анализ.— М.: Наука, 1970.
4. **Крейн С. Г., Петунин Ю. И.** Шкалы банаховых пространств // Успехи мат. наук.— 1966.— Т. 21, № 2.— С. 85—159.
5. **Мартин-Леф П.** Очерки по конструктивной математике.— М.: Мир, 1975.
6. **Барендрегт Х.** Ламбда-исчисление, его синтаксис и семантика.— М.: Мир, 1985.
7. **Голдблатт Р.** Топосы: Категорный анализ логики.— М.: Мир, 1983.
8. **Goodman R.** Review on [41] // Bull. Amer. Math. Soc.— 1983.— Vol. 8, N 3.— P. 505—507.
9. **Folland G. B., Stein E. M.** Hardy spaces on homogeneous groups // Math. Notes.— Princeton, N. Y.: Princeton Univ. Press, 1982.
10. **Hausdorff F.** Grundzüge der Mengenlehre.— Leipzig: Veit, 1914.
11. **Мостовский А.** Современное состояние исследований по основаниям математики // Успехи мат. наук.— 1954.— Т. 9, № 3.— С. 3—38.
12. **Проблемы** конструктивного направления в математике.— М.: Изд-во АН СССР, 1962. (Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 67).
13. **Рудин У.** Основы математического анализа.— М.: Мир, 1976.
14. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2.— М.: Физматгиз, 1962.
15. **Bishop E., Bridges D.** Constructive analysis.— Berlin: Sprin.-Verl., 1985.
16. **Дзядык В. К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.
17. **Шанин Н. А.** Понятие функции в смысле Эйлера как основа финитизации математического анализа // Тез. докл. 8-й Всесоюз. конф. по матем. логике.— М.: МГПИ, 1986.— С. 213.
18. **Лисовик Л. П.** Алгоритмические преобразования над вещественными числами // Всесоюз. конф. по прикладной логике.— Новосибирск: НГУ, 1985.— С. 128—130.
19. **Лисовик Л. П.** Алгоритмические вопросы для реальных функций/Кибернетика.— 1987.— № 1.— С. 12—17.
20. **Fenstad J. E.** Is nonstandard analysis relevant for the philosophy of mathematics? // Synthese.— 1985.— V. 62, N 2.— P. 289—301.
21. **Клини С. К.** Алгоритмы в различных смыслах // Алгоритмы в современной математике и ее приложениях. Ч. 2. (Материалы международного симпозиума. Ургенч. сент., 1979 г.).— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982.— С. 139—146.
22. **Кушнер Б. А.** Лекции по конструктивному математическому анализу.— М.: Наука, 1973.
23. **Логическая** тетрадь. (Нерешенные впоросы математической логики).— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986.
24. **Лисовик Л. Г.** К асиоматической теории Вагнера // Логика и системные методы анализа научного знания. (К 9-му Всесоюз. совещ. по логике, методологии и философии науки. Харьков, секция 1—5).— М.: Ин-т философии АН СССР, 1986.— С. 30—31.
25. **Fenstad J. E.** On the foundation of general recursion theory: computation versus inductive definability // General recursion theory. II.— Amsterdam, North — Holland, 1978.— P. 99—110.
26. **Friedman H. M.** Axiomatic recursive function theory // Logic colloquium'69.— Amsterdam, North — Holland, 1971.— P. 113—137.
27. **Grzeegorczyk A.** Axiomatic theory of enumeration // Generalized recursion theory.— Amsterdam, North-Holland, 1974.— P. 429—436.
28. **Moschovakis Y. N.** Axioms for computation theories.— First draft // Logic colloquium'69.— Amsterdam, North-Holland, 1971.— P. 199—255.
29. **Strong H. R.** Algebraically generalized recursive function theory // IBN J. Research and Development.— 1968.— Vol. 12.— P. 465—475.
30. **Wagner E. G.** Uniformly reflexive structures: on the nature of gödelizations and relative computability // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— Vol. 144.— P. 1—41.
31. **Ершов А. П.** Вычислимость в произвольных областях и базисах // Семиотика и информатика.— 1982.— № 19.— С. 3—58.
32. **Turing A. M.** On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem // Proc. London Math. Soc.— 1936.— Vol. 42.— P. 230—265.
33. **Turing A. M.** A correction // Proc. London Math. Soc.— 1937.— V. 43.— P. 544—546.
34. **Büchi J. R.** On a decision method in restricted second order arithmetic // Proc. Internat. Congr. Logic, Method. and Philos. Sci., 1960.— Stanford, California, Stanford Univ. Press.— 1962.— P. 1—11.

35. **Cohen R. S., Gold A. Y.** ω-Computations on Turing machines // Theor. Comput. Sci.— 1978.— Vol. 6, N 1.— P. 1—23.
36. **Lindsay P. A.** Alternation and ω-type Turing acceptors // Theor. Comput. Sci.— 1986.— Vol. 43, N 1.— P. 107—115.
37. **Redziejowski R. R.** Infinite-word languages and continuous mappings // Theor. Comput. Sci.— 1986.— Vol. 43, N 1.— P. 59—79.
38. **Роджерс X.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.— М.: Мир, 1972.
39. **Лисовик Л. П., Редько В. Н.** Алгоритмы и формальные системы.— Киев: КГУ, 1981.
40. **Moschovakis Y. N.** Descriptive set theory.— Amsterdam, North-Holland, 1980.
41. **Staiger L.** Projection lemmas for ω-languages // Theor. Comput. Sci.— 1984.— Vol. 32, N 3.— P. 331—337.
42. **Мальцев А. И.** Алгоритмы и рекурсивные функции.— М.: Наука, 1965.
43. **Лузин Н. Н.** Лекции об аналитических множествах и их приложениях.— М.: Гостехиздат, 1953.
44. **Weihrauch K.** Type 2 recursion theory // Theor. Comput. Sci.— 1985.— Vol. 38, N 1.— P. 17—33.
45. **Лисовик Л. П.** К проблеме эквивалентности для преобразователей над Σ-деревьями с конечноповоротными счетчиками // Кибернетика.— 1984.— № 5.— С. 19—24.
46. **Eilenberg S.** Automata, languages and machines, vol. A.— N. Y.: Acad. Press, 1974.
47. **Ершов Ю. Л.** Вычислимые функционалы конечных типов // Алгебра и логика.— 1972.— Т. 11, № 4.— С. 367—437.
48. **Шенфилд Дж.** Математическая логика.— М.: Наука, 1975.
49. **Блюм М.** Об объеме машин // Проблема математической логики.— М.: Мир, 1970.— С. 423—431.
50. **Blum M.** A machine independent theory of the complexity of recursive functions // J. Assoc. Comp. Mach.— 1967.— Vol. 14, N 2.— P. 322—336.
51. **Machtey M., Young P.** An introduction to the general theory of algorithms.— N. Y., North-Holland, 1978.
52. **Smith C. H.** Applications of classical recursion theory to computer science // Recursion theory: its generalisations and applications, Logic colloquium'79.— Cambridge Univ. Press, 1980.— P. 236—247.
53. **Rogers H.** Gödel numberings of partial recursive functions // J. Symb. Logic.— 1958.— Vol. 23.— P. 331—341.
54. **Kleene S. C.** Recursive functionals and quantifiers of finite types. II // Trans. Amer. Math. Soc.— 1963.— Vol. 108.— P. 106—142.
55. **Kleene S. C.** Recursive functionals and quantifiers of finite types revisited. I // Generalized recursion theory. II.— Amsterdam, North-Holland, 1978.
56. **Platek R. A.** Foundations of recursion theory: Dissertation.— Stanford Univ., 1966.
57. **Kreisel G.** Set theoretic problems suggested by the notation of potential totality // Infinitistic methods.— Oxford: Pergamon Press, 1961.— P. 103—140.
58. **Кекрис А. С., Московакис Я. Н.** Рекурсия в высших типах // Справочная книга по математической логике. Ч. 3.— М.: Наука, 1982.— С. 166—223.
59. **Скотт Д.** Набросок математической теории вычислений // Кибер. сб.— М.: Мир, 1977.— С. 107—121.
60. **Ершов Ю. Л.** Теория A-пространств // Алгебра и логика.— 1973.— Т. 12, № 4.— С. 369—416.
61. **Plotkin G. D.** A set-theoretical definition of application. School of artificial intelligence, Memo MIP-R-95.— Edinburgh Univ., 1972.
62. **Freund R.** Real functions and numbers defined by Turing machines // Theor. Comput. Sci.— 1983.— Vol. 23, N 3.— P. 287—304.
63. **Weihrauch K., Kreitz C.** Theory of representations // Ibid.— 1985.— Vol. 38, N 1.— P. 35—53.
64. **Лисовик Л. П.** Конечные преобразователи над вещественными числами // 2-я Всесоюз. конф. по прикл. логике.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.— С. 137—139.

Л. Л. МАКСИМОВА

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ БЕСКОНЕЧНОГО СЛОЯ, СОДЕРЖАЩИХ ЛОГИКУ K4

Интерполяционная теорема, доказанная Крейгом для классической логики предикатов в 1957 г., оказала большое влияние на развитие математической логики и явилась истоком большого числа исследований по проблеме интерполяции в различных логических теориях. Имеется много работ, посвященных интерполяционному свойству в различных модаль-