12. **Birkhoff G.** Sobre los grupos de automorphismos // Revista Union Math. Argent. Assoc. Argent.— 1946.— Vol. 11.— P. 155—157.
13. **Vaught R. L.** Non recursive enumerability of the set sentences true in all constructive models // Bull. Amer. Math. Soc.— 1957.— N 63.— P. 230.
14. **Морозов А. С.** Перестановки натурального ряда и неявная определимость // Алгебра и логика.— 1988.— Т. 27, № 1.— С. 19—36.
15. **Морозов А. С.** О вычислимых группах автоморфизмов моделей // Там же.— 1986.— Т. 25, № 4.— С. 415—424.

А. Ю. МУРАВИЦКИЙ

СООТВЕТСТВИЕ РАСШИРЕНИЙ ДОКАЗУЕМОСТНО-ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ РАСШИРЕНИЯМ ЛОГИКИ ДОКАЗУЕМОСТИ

Данная работа является подробным изложением и развитием результатов, впервые анонсированных в [1] и уточненных в [2]. Рассматриваются пропозициональные логики I^Δ и G, известные своими доказуемостными интерпретациями и заданные одноименными исчислениями, получающимися из интуиционистского исчисления высказываний с постулированным правилом подстановки путем добавления одноместной связки Δ, и следующих постулатов: аксиом $(p \supset \Delta p)$, $((\Delta p \supset p) \supset p)$, $(\Delta p \supset (q \vee (q \supset p)))$ — для I^Δ и аксиом $(\neg\neg p \supset p)$, $(\Delta(p \supset q) \supset \supset (\Delta p \supset \Delta q))$, $(\Delta(\Delta p \supset p) \supset \Delta p)$ и правила вывода $a/\Delta a$ — для G. Нормальное расширение логики L ($=I^\Delta$ или G) — это совокупность формул, содержащая все аксиомы исчисления L и замкнутая относительно всех его правил вывода. Показывается, что решетка $\mathscr{L}I^\Delta$ расширений логики I^Δ и решетка $\mathscr{L}G$ расширений логики G имеют единственный (общий) коатом — логику $I^\Delta + (\neg\neg p \supset p)$, которая равна замкнутому объединению $I^\Delta + G$. Основной результат: существует решеточный изоморфизм τ решетки $\mathscr{L}I^\Delta$ на $\mathscr{L}G$ такой, что для любого расширения L логики I^Δ

а) L таблично (предтаблично, финитно аппроксимируемо, конечно аксиоматизируемо, моделируемо) тогда и только тогда, когда таково τL,

б) правило $\Delta a/a$ допустимо в L тогда и только тогда, когда оно допустимо в τL.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Исследование пропозициональных логик в последние годы, начиная с систематического изучения промежуточных логик (см. обзор [3]), устойчиво склонялось к выделению некоторой совокупности логик, являющейся совокупностью расширений какой-либо одной известной логики, чтобы рассмотреть в этой совокупности «отношения между логиками или некоторые структуры», выявленные в ней [3]. При этом логика, т. е. элемент такой совокупности, понимается как «алгебраическая система, имеющая некоторое структурное сходство с логикой в обычном смысле и... не является логикой, на основе которой может или должна быть построена некоторого рода математика» [3]. Развитие этой точки зрения на примерах изучения совокупностей расширений интуиционистского пропозиционального исчисления I и нормальных расширений исчисления строгой импликации Льюиса $S4$ привело к сравнительному их исследованию, начатому в [4] и систематически проведенному в [5]. Именно в [5] было установлено, что существует гомоморфное отображение решетки $\mathscr{L}S4$·нормальных расширений логики исчисления $S4$ на решетку $\mathscr{L}I$ расширений логики исчисления I и изоморфное вложение $\mathscr{L}I$ в $\mathscr{L}S4$.

Оставаясь в рамках этой традиции, мы рассмотрим две пропозициональные логики — логику доказуемости G и доказуемостно-интуиционистскую логику I^Δ — вместе с их нормальными расширениями. Исходный язык включает множество пропозициональных переменных, из которых обычным образом на основе сигнатуры

$$\& \vee \supset \neg \Delta \tag{1}$$

строятся формулы. Напомним, что в (1) знак Δ означает унарную пропозициональную связку. Произвольные формулы в сигнатуре (1) обозначаем буквами a, b, c, ... (может быть, с индексами или штрихом).

Логика G (та же, что и $Д^-$ из [6], и отличается от одноименной логики из [7, 8] и от K. 4W из [9] только сигнатурой) задается одноименным исчислением, аксиомами которого являются аксиомы классического исчисления высказываний и две формулы

$$(\Delta(p \supset q) \supset (\Delta p \supset \Delta q)), \quad (\Delta(\Delta p \supset p) \supset \Delta p),$$

а правилами вывода — подстановка, modus ponens и усиление, позволяющее переходить от формулы a к формуле Δa. Добавляя к постулатам исчисления G правило $\Delta a/a$, получаем исчисление Д (см. [6]), равнообъемное, но не равносильное исчислению G из [6] (исчисления $И_1$ и $И_2$ равнообъемны, если $И_1 \vdash a$ эквивалентно $И_2 \vdash a$, для любой формулы a, и равносильны, если $И_1 + a \vdash b$ эквивалентно $И_2 + a \vdash b$ для любых формул a и b, ср. [6]). Очевидно, в логике G допустимо правило $(a \sim b)/$ $/(\Delta a \sim \Delta b)$ и, следовательно, в G справедлив принцип эквивалентной замены (см. [10]).

Логика I^Δ (равнообъемная доказуемостно-интуиционистской логике из [11]) задается одноименным исчислением, аксиомами которого являются аксиомы интуиционистского исчисления высказываний и три формулы

$$(p \supset \Delta p), \quad ((\Delta p \supset p) \supset p), \quad (\Delta p \supset (q \vee (q \supset p))), \tag{2}$$

а правилами — подстановка и modus ponens. Заметим, что, заменяя в (2) последнюю аксиому на формулу $(((p \supset q) \supset p) \supset (\Delta q \supset p))$, получаем, как заметил А. В. Кузнецов, исчисление $^{\Delta'}$, равносильное данному. Добавляя же к I^Δ правило $\Delta a/a$, получаем исчисление ID, равнообъемное, но не равносильное исчислению I^Δ (см. [11]). Заметим также, что логики G и I^Δ попарно несравнимы, так как в исчислении G невыводима формула $((\Delta p \supset p) \supset p)$, а в исчислении I^Δ — формула $(p \vee \neg p)$.

Фиксируя исчисления G и I^Δ, будем называть (*нормальным*) *расширением* соответствующей каждому из них логики такую совокупность формул сигнатуры (1), которая содержит все аксиомы задающего эту логику исчисления и замкнута относительно всех его правил вывода. Таким образом, если логика задана исчислением И ($=G$ или I^Δ), то всякое расширение этой логики может быть представлено в виде $И + \mathscr{D}$, где $\mathscr{D}$ — некоторое (возможно, пустое) множество формул, а знак $+$ означает замкнутое относительно правил вывода исчисления И объединение формул рассматриваемой логики с формулами множества $\mathscr{D}$. Вводя обычное понятие вывода (см., например, [10, 12]), можно отождествлять $И + \mathscr{D}$ с множеством всех формул, выводимых средствами исчисления И, из гипотез, принадлежащих множеству $\mathscr{D}$. Учитывая это, будем обозначать символически через $И + \mathscr{D} \vdash a$ тот факт, что формула a принадлежит расширению $И + \mathscr{D}$. Заметим, что понятие расширения логики зависит от того исчисления, которым она задана. Так, например, всякое расширение логики I^Δ останется им, если эту логику задать исчислением $I^{\Delta'}$, и может перестать им быть, если та же логика задана исчислением $I\mathscr{D}$. Принцип замены эквивалентных, очевидно, справедлив в любом расширении $G + \mathscr{D}$.

Легко видеть, что совокупности $\mathscr{L}G$ и $\mathscr{L}I^\Delta$ расширений логик G и I^Δ являются полными решетками (структурами), частично упорядоченными отношением $\subseteq$, с общим наибольшим элементом (абсолютно противоречивая логика). Кроме того, решетки $\mathscr{L}G$ и $\mathscr{L}I^\Delta$ имеют единственный (общий) коатом — логику $\mathrm{Cl}^\Delta \leftrightharpoons I^\Delta + (\neg\neg p \supset p)$; причем всякое непротиворечивое расширение логики G или расширение логики I^Δ включено в Cl^Δ.

Действительно, рассмотрим произвольное расширение $I^\Delta+\mathscr{D}$, и пусть a — произвольная формула из $\mathscr{D}$. Заметим сначала, что поскольку в исчислении I^Δ выводима [11] формула $((p\sim q)\supset(\Delta p\sim\Delta q))$, где $(b\sim c)$ означает $((b\supset c)\&(c\supset b))$, то в I^Δ верен принцип эквивалентной замены в сильной форме:

$$I^\Delta\vdash((b\sim c)\supset(d[\pi/b]\sim d[\pi/c])), \tag{3}$$

где $d[\pi/b]$, $d[\pi/c]$ — результаты подстановок формул b и c в формулу d вместо переменной π соответственно. Напомним, что в Cl^Δ выводима [13] формула $(\Delta p\sim(p\supset p))$ и, следовательно, формула $(\Delta b\sim(b\supset b))$. Поэтому для любой формулы b

$$\mathrm{Cl}^\Delta\vdash(\Delta b\sim(p\supset p)). \tag{4}$$

Заменяя на $(p\supset p)$, всякую подформулу вида Δb формулы a, которая не встречается под знаком Δ, получаем формулу a'. Пользуясь (3) и (4), заключаем, что

$$\mathrm{Cl}^\Delta\vdash(a\sim a'). \tag{5}$$

Заметим далее, что для исчислений I^Δ и Cl^Δ верен аналог теоремы Гливенко (см. [10, 14]), т. е. $\mathrm{Cl}^\Delta\vdash b$ эквивалентно $I^\Delta\vdash\neg\neg b$ для любой формулы b. Откуда как следствие получаем

$$I^\Delta\vdash\neg b\Leftrightarrow\mathrm{Cl}^\Delta\vdash\neg b. \tag{6}$$

Теперь заметим, что формула a' не содержит знака Δ. Поэтому если a' является классической тавтологией, то из (5) следует $\mathrm{Cl}^\Delta\vdash a$. Если же a' не является классической тавтологией, то некоторая подстановка переводит формулу a' в формулу a'' такую, что $\neg a''$ является классической тавтологией. Предположим, та же подстановка переводит формулу a в формулу a^*. Из (5) получаем $\mathrm{Cl}^\Delta\vdash(a^*\sim a'')$ и, следовательно, используя (3), $\mathrm{Cl}^\Delta\vdash(\neg a^*\sim\neg a'')$. Отсюда $\mathrm{Cl}^\Delta\vdash\neg a^*$. В силу (6) $I^\Delta\vdash\neg a^*$. Однако согласно выбору формулы a имеем $I^\Delta+\mathscr{D}\vdash a^*$. Поэтому расширение $I^\Delta+\mathscr{D}$ абсолютно противоречиво. Таким образом, или $I^\Delta+\mathscr{D}\subseteq\mathrm{Cl}^\Delta$, или $I^\Delta+\mathscr{D}$ абсолютно противоречивы. Ниже мы покажем, что если расширение $G+\mathscr{D}$ не является противоречивым, то $G+\mathscr{D}\subseteq\mathrm{Cl}^\Delta$, а сама логика Cl^Δ противоречивой не является.

Логики G и I^Δ известны прежде всего своими доказуемостными интерпретациями (см. о них для G и I^Δ в [7, 8, 11] соответственно), а также топологическими интерпретациями (см. о них для G и I^Δ в [15, 16] соответственно). Алгебраической интерпретацией для логики G и ее расширений являются магариевы [6] (или диагонализируемые [17, 18]) алгебры, т. е. алгебры вида

$$\langle\mathscr{B};\ \&,\ \vee,\ \to,\ -,\ \Delta\rangle, \tag{7}$$

которые относительно первых четырех операций являются булевыми алгебрами, причем справедливы тождества:

$$\text{а) } \Delta 1=1,\qquad \text{б) } \Delta(x\,\&\,y)=\Delta x\,\&\,\Delta y,\qquad \text{в) } \Delta(\Delta x\to x)=\Delta x, \tag{8}$$

где 1 (единица алгебры) является наибольшим элементом алгебры. Заметим, что на всякой магариевой алгебре верно [17, 6] тождество

$$\Delta x=\Delta x\,\&\,\Delta\Delta x. \tag{9}$$

Очевидно, что $G+\mathscr{D}\vdash a$ тогда и только тогда, когда формула a верна, т. е. тождественно равна единице, на всякой магариевой алгебре, на которой верны все формулы из $\mathscr{D}$. Алгебраической интерпретацией для логики I^Δ и ее расширений являются Δ-псевдобулевы [11, 6] алгебры, т. е. алгебры вида

$$\langle\mathscr{A};\ \&,\ \vee,\ \supset,\ \neg,\ \Delta\rangle, \tag{10}$$

которые относительно $\&$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$ являются псевдобулевыми алгебрами, причем справедливы тождества

$$\text{а)}\ x \leqslant \Delta x, \qquad \text{б)}\ \Delta x \supset x = x, \qquad \text{в)}\ \Delta x \leqslant y \vee (y \supset x), \tag{11}$$

где неравенство $x \leqslant y$ означает $x \& y = x$. Заметим, что тождество (8) б справедливо [16] (ср. [6]) на всякой Δ-псевдобулевой алгебре, а квазитождество

$$x \leqslant y \Rightarrow \Delta x \leqslant \Delta y \tag{12}$$

верно как на всякой магариевой, так и на всякой Δ-псевдобулевой алгебре, поскольку

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \& y = x \Rightarrow \Delta(x \& y) = \Delta x \Leftrightarrow \Delta x \& \Delta y = \Delta x \Leftrightarrow \Delta x \leqslant \Delta y.$$

Также очевидно, что $I^\Delta + \mathscr{D} \vdash a$ тогда и только тогда, когда a верна на всякой Δ-псевдобулевой алгебре, на которой верны все формулы из $\mathscr{D}$.

Простейшим примером нетривиальной магариевой и одновременно Δ-псевдобулевой алгебры является двухэлементная булева алгебра, сигнатуру которой обогащаем операцией Δ, полагая Δx тождественно равным 1. *Логикой алгебры* $\mathfrak{C}$ (магариевой или Δ-псевдобулевой) называем множество формул $L\mathfrak{C}$ сигнатуры (1), верных на $\mathfrak{C}$. Если $a \notin L\mathfrak{C}$, то говорим, что *a опровержима на* $\mathfrak{C}$. Легко видеть, что логика любой магариевой алгебры является расширением логики G, а логика любой Δ-псевдобулевой алгебры — расширением логики I^Δ. Заметим, что логика Cl^Δ включена в логику двухэлементной Δ-псевдобулевой алгебры и, следовательно, непротиворечива. Обратно, пусть формула a верна на двухэлементной Δ-псевдобулевой алгебре. Заменяя в a все внешние вхождения формул вида Δb на формулу $(p \supset p)$, получаем классическую тавтологию a'. Следовательно, $\mathrm{Cl}^\Delta \vdash a'$. Поскольку справедливо (5), то заключаем $\mathrm{Cl}^\Delta \vdash a$. Таким образом, логика двухэлементной Δ-псевдобулевой (или магариевой) алгебры совпадает с логикой Cl^Δ. Рассмотрим теперь расширение $G + \mathscr{D}$ и предположим, что $G + \mathscr{D} \vdash \neg\Delta(p \& \neg p)$. Отсюда заключаем, последовательно используя аксиомы и правила исчисления G, что в $G + \mathscr{D}$ выводимы формулы

$$(\Delta(p \& \neg p) \supset (p \& \neg p)), \quad \Delta(\Delta(p \& \neg p) \supset (p \& \neg p)), \quad \Delta(p \& \neg p),$$

т. е. расширение $G + \mathscr{D}$ противоречиво. Таким образом, или расширение $G + \mathscr{D}$ противоречиво, или неверно $G + \mathscr{D} \vdash \neg\Delta(p \& \neg p)$ и тогда по теореме 2 из [19], $G + \mathscr{D} \subseteq \mathrm{Cl}^\Delta$. И наконец, отметим, что $G + I^\Delta = \mathrm{Cl}^\Delta$, так как $\mathrm{Cl}^\Delta \subseteq I^\Delta + G = G + I^\Delta \subseteq \mathrm{Cl}^\Delta$.

Нашей ближайшей целью является установление изоморфизма между решетками $\mathscr{L}G$ и $\mathscr{L}I^\Delta$.

§ 2. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА

Известно [20, 6], что от произвольной магариевой алгебры $\mathfrak{B}$ (вида (7)) можно перейти к топобулевой [6] (или топологической булевой [14]) алгебре $\mathfrak{B}^\top$, заменяя в сигнатуре алгебры (7) операцию Δ на операцию $\Box$, вводя, по определению,

$$\Box x = x \& \Delta x, \quad x \in \mathfrak{B}. \tag{13}$$

Как известно [14], на $\mathfrak{B}^\top$ справедливы тождества

$$\text{а)}\ \Box 1 = 1, \quad \text{б)}\ \Box(x \& y) = \Box x \& \Box y, \quad \text{в)}\ \Box x \leqslant x, \quad \text{г)}\ \Box\Box x = \Box x. \tag{14}$$

Из (14)б следует [14] справедливость квазитождества

$$x \leqslant y \Rightarrow \Box x \leqslant \Box y, \tag{15}$$

а также тождества

$$\Box(x \to y) \leqslant \Box x \to \Box y. \tag{16}$$

Алгебра $\mathfrak{B}^{\top}$ будет также гжегорчиковой [6, 20], т. е. такой топобулевой алгеброй, на которой верно тождество

$$\Box(\Box(x \to \Box x) \to \Box x) = \Box x. \tag{17}$$

Рассматривая в $\mathfrak{B}^{\top}$ (как и в любой топобулевой алгебре) ее открытые элементы, т. е. такие элементы $x \in \mathscr{B}$, что $\Box x = x$, мы можем перейти [14] к псевдобулевой алгебре $\mathfrak{B}^{\circ}$, обогащая множество открытых элементов алгебры $\mathfrak{B}^{\top}$ сигнатурой $\&$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$, в которой операции $\&$ и $\vee$ остаются прежними, а $\supset$ и $\neg$ определяются следующим образом: $x \supset y \leftrightharpoons \Box(x \to y)$, $\neg x \leftrightharpoons \Box - x$. Эта псевдобулева алгебра называется [21] *трафаретом* исходной топобулевой алгебры. Заметим, что элемент Δx алгебры $\mathfrak{B}^{\top}$ является (ввиду (9)) открытым, так как

$$\Box \Delta x = \Delta x \,\&\, \Delta\Delta x = \Delta x. \tag{18}$$

Поэтому сигнатуру алгебры $\mathfrak{B}^{\circ}$ можно обогатить операцией Δ. При этом мы получим [6, 11] Δ-псевдобулеву алгебру $\mathfrak{B}^{\Delta}$. В дальнейшем мы воспользуемся тождествами

$$\Box \Delta x = \Delta x = \Delta \Box x, \tag{19}$$

справедливыми на любой магариевой алгебре. Они следуют из определения (13) и тождеств (8)б, (18).

Для произвольной магариевой алгебры $\mathfrak{B}$ обозначим символом $[\mathfrak{B}^{\circ}]_B$ такую ее булеву подалгебру, которая порождается открытыми элементами алгебры $\mathfrak{B}^{\top}$ (т. е. всеми элементами алгебры $\mathfrak{B}^{\circ}$) с помощью операций $\&$, $\vee$, $\to$ и $-$. Поскольку элемент Δx алгебры $\mathfrak{B}^{\top}$ всегда открыт, то алгебру $[\mathfrak{B}^{\circ}]_B$ мы будем рассматривать как магариеву подалгебру алгебры $\mathfrak{B}$. Говорим, что *подрешетка $\mathfrak{B}^{\circ}$ магариевой алгебры B-порождает ее*, а саму эту алгебру называем *B-порожденной*, если $[\mathfrak{B}^{\circ}]_B = \mathfrak{B}$. Заметим, во-первых, что магариева алгебра $\mathfrak{B}$ является B-порожденной тогда и только тогда, когда топобулева алгебра $\mathfrak{B}^{\top}$ является трафаретной [21] (или специальной [22], или открыто порожденной [6]), т. е. порождается своими открытыми элементами как системой образующих; во-вторых, учитывая, что всякая булева алгебра $\langle \mathscr{B}; \&, \vee, -\rangle$ может быть представлена как булево кольцо $\langle \mathscr{B}; +, \cdot\rangle$, и наоборот [23, 24], причем

$$x + y = (x \,\&\, -y) \vee (y \,\&\, -x),\ x \cdot y = x \,\&\, y,\ x \vee y = x + y + x \cdot y,\ -x = 1 + x,$$

заключаем, что магариева алгебра $\mathfrak{B}$ является B-порожденной тогда и только тогда, когда она R-порождается [25] своей подрешеткой $\mathfrak{B}^{\circ}$ (т. е. когда $\mathfrak{B}$ порождается элементами из $\mathfrak{B}^{\circ}$ с помощью кольцевых операций $+$ и $\cdot$).

Лемма 1. *Две B-порожденные магариевы алгебры $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны Δ-псевдобулевы алгебры $\mathfrak{B}^{\Delta}_1$ и $\mathfrak{B}^{\Delta}_2$.*

Доказательство. Для обоснования нетривиальной части утверждения леммы предположим, что существует Δ-псевдобулев изоморфизм φ: $\mathfrak{B}_1^{\Delta} \to \mathfrak{B}_2^{\Delta}$. Ввиду сделанного выше замечания, по теореме 11.4.6 из [25] φ может быть продолжен до булева изоморфизма $\bar{\varphi}$ алгебры $\mathfrak{B}_1$ на $\mathfrak{B}_2$. Напомним [14, теорема II.2.2], что каждый элемент $x \in \mathfrak{B}_1$ представим в виде $\underset{i}{\&} (x_i \to y_i)$, $x_i, y_i \in \mathfrak{B}_1^0$. Поэтому, учитывая, что алгебра $\mathfrak{B}_1^{\top}$ топобулева, получаем

$$\bar{\varphi}(\Box x) = \bar{\varphi}\Big(\Box \underset{i}{\&} (x_i \to y_i)\Big) = \bar{\varphi}\Big(\underset{i}{\&} \Box (x_i \to y_i)\Big) = \varphi\Big(\underset{i}{\&} (x_i \supset y_i\Big) =$$
$$= \underset{i}{\&} (\varphi(x_i) \supset \varphi(y_i)) = \underset{i}{\&} \Box (\varphi(x_i) \to \varphi(y_i)) = \Box\, \bar{\varphi}\Big(\underset{i}{\&} (x_i \to y_i)\Big) = \Box \bar{\varphi}(x),$$

т. е. $\bar{\varphi}$ — топобулев изоморфизм алгебры $\mathfrak{B}_1^{\top}$ на $\mathfrak{B}_2^{\top}$. Наконец, используя (19), и то, что φ и $\bar{\varphi}$ — Δ-псевдобулев и топобулев гомоморфизмы соответственно, заключаем

$$\overline{\varphi}(\Delta x)=\overline{\varphi}(\Delta\Box x)=\varphi(\Delta\Box x)=\Delta\varphi(\Box x)=\Delta\overline{\varphi}(\Box x)=\Delta\Box\overline{\varphi}(x).$$

Лемма 2 (ср. [6]). *Для всякой Δ-псевдобулевой алгебры $\mathfrak{A}$ существует B-порожденная магариева алгебра $\mathfrak{B}$ такая, что $\mathfrak{B}^{\Delta}=\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра (10) и $\mathfrak{A}_1$ — псевдобулева алгебра, полученная из (10) обеднением ее сигнатуры. По теореме IV. 3.1 из [14], существует такая трафаретная алгебра $\mathfrak{B}_1=\langle\mathscr{B};\ \&,\ \vee,\ \to,\ -,\ \Box\rangle$, трафарет которой совпадает с $\mathfrak{A}_1$; причем каждый элемент из $\mathscr{B}$ является булевой комбинацией элементов из $\mathscr{A}$. Определим $\blacktriangle x\leftrightharpoons\Delta\Box x$, $\blacksquare x\leftrightharpoons\leftrightharpoons x\ \&\ \blacktriangle x$, $x\in\mathscr{B}$. Заметим прежде всего, что алгебра $\mathfrak{B}=\langle\mathscr{B};\ \&,\ \vee,\ \to,\ -,\ \blacktriangle\rangle$ является магариевой. В самом деле, пользуясь тождествами (14) б и (8) б (причем последнее применяется на Δ-псевдобулевой алгебре; справедливость этого отмечена выше), получаем

$$\blacktriangle(x\ \&\ y)=\Delta\Box(x\ \&\ y)=\Delta(\Box x\ \&\ \Box y)=\Delta\Box x\ \&\ \Delta\Box y=\blacktriangle x\ \&\ \blacktriangle y.$$

Далее, используя законы булевой алгебры, дважды (15) и (12), (14) г, (16) и тот факт, что $\Delta\Box x\in\mathscr{A}$ (т. е. является открытым элементом алгебры $\mathfrak{B}_1$), а также тождество (11) б выводим:

$$\blacktriangle x\leqslant\blacktriangle(\blacktriangle x\to x)=\Delta\Box(\blacktriangle x\to x)=\Delta\Box\Box(\blacktriangle x\to x)\leqslant\Delta\Box(\Box\blacktriangle x\to\Box x)=$$
$$=\Delta(\Box\blacktriangle x\supset\Box x)=\Delta(\Delta\Box x\supset\Box x)=\Delta\Box x=\Box x.$$

Наконец, из тождеств (14) а и (11) а следует $\blacktriangle 1=\Delta\Box 1=\Delta 1=1$.

Теперь покажем, что для всякого элемента $x\in\mathscr{B}$ справедливо равенство $\Box x=\blacksquare x$. Действительно, используя определения, законы булевой алгебры, а также тождества (11) а, трижды (14) в, (11) в и (17), получаем

$$\Box x=\Box x\ \&\ \Delta\Box x\leqslant x\ \&\ \blacktriangle x=\blacksquare x=x\ \&\ \Delta\Box x\leqslant x\ \&\ (\Box(x\to\Box x)\vee$$
$$\vee(\Box(x\to\Box x)\supset\Box x))=x\ \&\ (\Box(x\to\Box x)\vee\Box(\Box(x\to\Box x)\to(\Box x))\leqslant$$
$$\leqslant x\ \&\ ((x\to\Box x)\vee\Box x)=x\ \&\ (x\to\Box x)=x\ \&\ \Box x=\Box x.$$

Следовательно, $\mathfrak{B}^{\top}=\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}^{\circ}=\mathfrak{A}_1$. Остается заметить, что для произвольного элемента $x\in\mathscr{A}$

$$\blacktriangle x=\Delta\Box x=\Delta x,$$

т. е. $\mathfrak{B}^{\Delta}=\mathfrak{A}$.

Леммы 1 и 2 позволяют с каждой Δ-псевдобулевой алгеброй $\mathfrak{A}$ связывать ее магариеву оболочку, т. е. такую единственную (с точностью до изоморфизма) B-порожденную магариеву алгебру $\mathfrak{A}^{\mu}$, что $\mathfrak{A}^{\mu\Delta}=\mathfrak{A}$.

Лемма 3. *Для всякой магариевой алгебры $\mathfrak{B}$ существует изоморфное вложение алгебры $\mathfrak{B}^{\Delta\mu}$ в $\mathfrak{B}$. Следовательно, $L\mathfrak{B}\subseteq L\mathfrak{B}^{\Delta\mu}$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{B}^{\Delta\mu\Delta}=\mathfrak{B}^{\Delta}$. С другой стороны, $[\mathfrak{B}_0]_B^{\Delta}=\mathfrak{B}^{\Delta}$. Сопоставляя последние два равенства, в силу леммы 1 заключаем, что алгебры $[\mathfrak{B}^{\circ}]_B$ и $\mathfrak{B}^{\Delta\mu}$ изоморфны. Остается вспомнить, что $[\mathfrak{B}^{\circ}]_B$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$.

Уточняет заключение леммы 3 следующая

Лемма 4. *Если $\mathfrak{B}$ — магариева алгебра с конечным числом образующих, то $L\mathfrak{B}=L\mathfrak{B}^{\Delta\mu}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}_1$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$ вида (7) — является образом алгебры $\mathfrak{B}^{\Delta\mu}$ при вложении, существующем по лемме 3. Понятно, что все открытые элементы гжегорчиковой алгебры $\mathfrak{B}^{\top}$ содержатся в ее подалгебре $\mathfrak{B}_1^{\top}$ и алгебра $\mathfrak{B}^{\top}$ является счетной. Тогда, по лемме 7.6 из [26] и теореме 6.4 из [27], существует изоморфное вложение φ алгебры $\mathfrak{B}^{\top}$ в некоторую ультрастепень [27—29] $(\mathfrak{B}_1^{\top})_{\mathscr{D}}^{I}$ ($\mathscr{D}$ — ультрафильтр на множестве индексов I) алгебры $\mathfrak{B}_1^{\top}$, которое является продолжением естественного (элементарного [27, теорема 4.7; 29, теорема 40.1]) вложения алгебры $\mathfrak{B}_1^{\top}$, определенного как $d\colon x \mapsto \bar{x}_{\mathscr{D}}$, где $\bar{x}\colon I \to \mathfrak{B}_1^{\top}$ — константная функция со значением x. Рассмотрим ультрастепень $(\mathfrak{B}_1)_{\mathscr{D}}^I$ и покажем, что φ является магариевым вложением в нее алгебры $\mathfrak{B}$. Очевидно, что φ является булевым вложением алгебры $\mathfrak{B}$ в $(\mathfrak{B}_1)_{\mathscr{D}}^I$. Остается доказать, что для каждого элемента $x \in \mathscr{B}$ справедливо равенство

$$\varphi(\Delta x) = \Delta\varphi(x). \tag{20}$$

Проверим сначала равенство (20) для случая, когда элемент является открытым в алгебре $\mathfrak{B}^{\top}$. Тогда, поскольку все открытые элементы алгебры $\mathfrak{B}^{\top}$ содержатся в ее подалгебре $\mathfrak{B}_1^{\top}$ и элемент Δx является открытым (см. выше), $\varphi(\Delta x) = d(\Delta x) = \overline{\Delta x}_{\mathscr{D}}$ и $\Delta\varphi(x) = \Delta d(x) = \Delta(\bar{x}_{\mathscr{D}})$. Замечая, что $\{i \mid (\overline{\Delta x})_i = \Delta(\bar{x})_i\} = I \in \mathscr{D}$, получаем $\overline{\Delta x}_{\mathscr{D}} = \Delta(\bar{x}_{\mathscr{D}})$ (здесь $(\varepsilon)_i$ есть результат проектирования на i-ю компоненту элемента $\varepsilon \in (\mathfrak{B}_1)^I$). Теперь покажем, что имеет место равенство

$$(\mathfrak{B}_1)_{\mathscr{D}}^{I\top} = (\mathfrak{B}_1^{\top})_{\mathscr{D}}^I. \tag{21}$$

Действительно, легко видеть, что справедливо равенство $(\mathfrak{B}_1)^{I\top} = (\mathfrak{B}_1^{\top})^I$, так как для $(x_i) \in (\mathfrak{B}_1)^I$

$$(x_i) \mathbin{\&} \Delta(x_i) = (x_i) \mathbin{\&} (\Delta x_i) = (x_i \mathbin{\&} \Delta x_i).$$

Теперь напомним [28, 29], что отображение $\varepsilon \mapsto \varepsilon_{\mathscr{D}}$, $\varepsilon \in (\mathfrak{B}_1)^I$, является магариевым гомоморфизмом. Поэтому $\varepsilon_{\mathscr{D}} \mathbin{\&} \Delta(\varepsilon_{\mathscr{D}}) = \varepsilon_{\mathscr{D}} \mathbin{\&} (\Delta\varepsilon)_{\mathscr{D}} = (\varepsilon \mathbin{\&} \Delta\varepsilon)_{\mathscr{D}}$, что вместе с только что доказанным дает (21). Наконец, используя справедливость (20) для открытых элементов алгебры $\mathfrak{B}_1$, равенства (19) и (21), а также то, что ультрастепень магариевой алгебры является магариевой алгеброй, получаем

$$\varphi(\Delta x) = \varphi(\Delta \Box x) = \Delta\varphi(\Box x) = \Delta \Box \varphi(x) = \Delta\varphi(x).$$

Это показывает, что φ является изоморфным вложением алгебры $\mathfrak{B}$ в $(\mathfrak{B}_1)_{\mathscr{D}}^I$.

§ 3. ИЗОМОРФИЗМ РЕШЕТОК $\mathscr{L}G$ и $\mathscr{L}I^{\Delta}$

Введем операцию на множестве всех формул, ставящую в соответствие всякой формуле a формулу $a^{\Box}$ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$\pi^{\Box} = (\pi \mathbin{\&} \Delta\pi), \quad \text{если } \pi \text{ — пропозициональная переменная,}$$
$$(b \mathbin{\&} c)^{\Box} = (b^{\Box} \mathbin{\&} c^{\Box}), \ (b \vee c)^{\Box} = (b^{\Box} \vee c^{\Box}), \ (\Delta b)^{\Box} = \Delta b^{\Box},$$
$$(b \supset c)^{\Box} = ((b^{\Box} \supset c^{\Box}) \mathbin{\&} \Delta(b^{\Box} \supset c^{\Box})), \ (\neg b)^{\Box} = (\neg b^{\Box} \mathbin{\&} \Delta\neg b^{\Box}).$$

Вводя сокращение

$$\Box a \leftrightharpoons (a \mathbin{\&} \Delta a), \tag{22}$$

мы можем написать, например, $(b \supset c)^{\Box} = \Box(b^{\Box} \supset c^{\Box})$. Поскольку на любой магариевой алгебре при любой оценке переменных значение формулы $a^{\Box}$ всегда является открытым элементом, то с учетом расшифровки (22) формула $(a^{\Box} \sim \Box a^{\Box})$ на этой алгебре верна. Следовательно,

$$G \vdash (a^{\Box} \sim \Box a^{\Box}). \tag{23}$$

Для множества $\mathscr{D}$ формул символом $\mathscr{D}^{\Box}$ будем обозначать множество

$\{a^{\Box} \mid a \in \mathscr{D}\}$. Отметим, что, записывая пропозициональную формулу α с помощью знаков $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\Box$ и понимая ее, учитывая расшифровку (22), как формулу сигнатуры (1) можно утверждать [6; ср. 30, 31], что

$$G \vdash \alpha \Leftrightarrow \mathrm{Grz} \vdash \alpha, \tag{24}$$

где Grz — логика Гжегорчика есть нормальное расширение логики $S4$ (см. [32]), получаемое (см. [9]) как $S4 + (\Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p) \subset p)$.

Лемма 5. *Для всякой магариевой алгебры* $\mathfrak{B}$ *произвольная формула* a *верна на алгебре* $\mathfrak{B}^{\Delta}$ *тогда и только тогда, когда формула* $a^{\Box}$ *верна на* $\mathfrak{B}$.

Доказательство проводится индукцией по построению формулы a с использованием соответствующих определений.

Связывая невыводимость формула a в некотором расширении $\text{И} + \mathscr{D}$ с алгебраической интерпретацией, говорим, что алгебра $\mathfrak{C}$ (сигнатуры исчисления И) отделяет формулу a от множества формул $\mathscr{D}$, если все формулы из $\mathscr{D}$ верны на $\mathfrak{C}$, а формула a неверна (об общем понятии отделяющих средств см. в [33]).

Теорема 1. *Для произвольного множества* $\mathscr{D}$ *формул и всякой формулы* a *имеет место следующая эквивалентность*: $I^{\Delta} + \mathscr{D} \vdash a \Leftrightarrow G + \mathscr{D}^{\Box} \vdash a^{\Box}$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Предположим противное: неверно $G + \mathscr{D}^{\Box} \vdash a^{\Box}$. Тогда, как отмечено выше, существует магариева алгебра $\mathfrak{B}$, отделяющая формулу $a^{\Box}$ от множества формул $\mathscr{D}^{\Box}$. В силу леммы 5 следует, что Δ-псевдобулева алгебра $\mathfrak{B}^{\Delta}$ отделяет формулу a от множества формул $\mathscr{D}$, откуда неверно $I^{\Delta} + \mathscr{D} \vdash a$.

$\Leftarrow$ Пусть теперь неверно $I^{\Delta} + \mathscr{D} \vdash a$ и Δ-псевдобулева алгебра $\mathfrak{A}$ отделяет a от $\mathscr{D}$. Поскольку $\mathfrak{A}^{\mu\Delta} = \mathfrak{A}$, то также по лемме 5 магариева оболочка $\mathfrak{A}^{\mu}$ отделяет $a^{\Box}$ от $\mathscr{D}^{\Box}$, откуда неверно $G + \mathscr{D}^{\Box} \vdash a^{\Box}$.

Определим два отображения: ρ — из решетки $\mathscr{L}G$ расширений логики G в решетку $\mathscr{L}I^{\Delta}$ расширений логики I^{Δ} и τ — из решетки $\mathscr{L}I^{\Delta}$ в решетку $\mathscr{L}G$:

$$\rho(G + \mathscr{D}) \leftrightharpoons \{a \mid G + \mathscr{D} \vdash a^{\Box}\}, \quad \tau(I^{\Delta} + \mathscr{D}) \leftrightharpoons G + \mathscr{D}^{\Box}.$$

Покажем прежде всего, что эти отображения корректны как отображения соответствующих решеток.

Лемма 6. *Для произвольного множества* $\mathscr{D}$ *формул множество* $\rho(G + \mathscr{D})$ *является нормальным расширением логики* I^{Δ}, *а множество* $\tau(I^{\Delta} + \mathscr{D})$ — *нормальным расширением логики* G.

Доказательство. По теореме 1 $I^{\Delta} = \rho G \subseteq \rho(G + \mathscr{D})$. Пусть теперь формулы $a^{\Box}$ и $(a \supset b)^{\Box}$ выводимы в $G + \mathscr{D}$. Тогда по определению $G + \mathscr{D} \vdash (a^{\Box} \supset b^{\Box})$. Следовательно, $G + \mathscr{D} \vdash b^{\Box}$. Наконец, пусть $G + \mathscr{D} \vdash a^{\Box}$ и $a[\pi_1/b_1, \pi_2/b_2, \ldots]$ есть результат подстановки в формулу a формул b_1, b_2, ... вместо переменных π_1, π_2, ... соответственно. Учитывая сокращение (22), отметим, что

$$a[\pi_1/b_1, \pi_2/b_2, \ldots]^{\Box} \mathrel{\overset{\circ}{=}} a^{\Box}[\Box\pi_1/b_1^{\Box}, \Box\pi_2/b_2^{\Box}, \ldots],$$

где последняя формула есть результат замены в $a^{\Box}$ ее подформул вида $\Box\pi_i$ на $b_i^{\Box}$ соответственно. Учитывая (23) и пользуясь принципом эквивалентной замены в G, заключаем

$$G \vdash (a^{\Box}[\Box\pi_1/b_1^{\Box}, \Box\pi_2/b_2^{\Box}, \ldots] \sim a^{\Box}[\pi_1/b_1^{\Box}, \pi_2/b_2^{\Box}, \ldots]).$$

Следовательно, $a[\pi_1/b_1, \pi_2/b_2, \ldots] \in \rho(G + \mathscr{D})$. Из определения отображения τ вытекает, что $\tau(I^{\Delta} + \mathscr{D})$ — нормальное расширение логики G. Лемма доказана.

Теперь мы приступим к доказательству того, что отображения ρ и τ взаимно обратны.

Лемма 7. *Отображения* ρ, τ *монотонны и, следовательно, корректны как отображения соответствующих решеток.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}_1$ — два произвольных множества формул. Если $G+\mathscr{D}\subseteq G+\mathscr{D}_1$, то, очевидно, $\rho(G+\mathscr{D})\subseteq\rho(G+\mathscr{D}_1)$. Предположим теперь, что $I^\Delta+\mathscr{D}\subseteq I^\Delta+\mathscr{D}_1$ и $a\in\tau(I^\Delta+\mathscr{D})$, т. е. $G+\mathscr{D}^\square\vdash a$. Докажем, что $a\in\tau(I^\Delta+\mathscr{D}_1)$, т. е. $G+\mathscr{D}_1^\square\vdash a$. Предположим противное: некоторая магариева алгебра $\mathfrak{B}$ отделяет формулу a от множества формул $\mathscr{D}_1^\square$. По лемме 5 все формулы из $\mathscr{D}_1$ верны на Δ-псевдобулевой алгебре $\mathfrak{B}^\Delta$. Согласно первому предположению то же верно для формул из $\mathscr{D}$. Снова по лемме 5 все формулы множества $\mathscr{D}^\square$ верны на алгебре $\mathfrak{B}$. Из второго предположения вытекает, что формула a верна на $\mathfrak{B}$; противоречие.

Ввиду монотонности отображений ρ и τ результат их применения к соответствующим расширениям не зависит от аксиоматизации этих расширений.

Лемма 8. *Для произвольного множества* $\mathscr{D}$ *формул справедливо равенство* $\rho\tau(I^\Delta+\mathscr{D})=I^\Delta+\mathscr{D}$.

Доказательство. Из определений и теоремы 1 следует, что для произвольной формулы a имеют место следующие эквивалентности: $a\in\rho\tau\left(I^\Delta+\mathscr{D}\right)\Leftrightarrow G+\mathscr{D}^\square\vdash a^\square\Leftrightarrow I^\Delta+\mathscr{D}\vdash a$.

Для завершения доказательства изоморфизма решеток $\mathscr{L}G$ и $\mathscr{L}I^\Delta$ достаточно показать справедливость равенства $\tau\rho(G+\mathscr{D})=G+\mathscr{D}$. Предварительно докажем ряд лемм.

Лемма 9. *Предположим, что формула* a *может быть представлена* (с учетом (22)) *в виде* $\square b[\square\pi_1, \square\pi_2, \ldots]$, *где* $\pi_1, \pi_2, \ldots$ — *список всех переменных формулы* a, *или в виде* $\square\pi$. *Тогда существует формула* c, *содержащая те же переменные, что и* a, *и такая, что* $G\vdash\left(a\sim c^\square\right)$.

Доказательство. Случай $a\doteq\square\pi$ очевиден. Доказательство другого случая проводим индукцией по построению формулы b.

База: $a\doteq\square\square\pi_i$. Тогда, согласно (24), $G\vdash(a\sim\square\pi_i)$.

Шаг. Рассмотрим случай, когда $a\doteq\square\Delta d[\square\pi_1, \square\pi_2, \ldots]$. Ввиду тождеств (19) в G выводима формула

$$(\square\Delta d[\square\pi_1, \square\pi_2, \ldots]\sim\Delta\square d[\square\pi_1, \square\pi_2, \ldots]).$$

По индуктивному предположению существует такая формула e, что $G\vdash\left(a\sim\Delta e^\square\right)$. Пусть теперь

$$a\doteq\square A[\Delta b_1, \ldots, \Delta b_k, \pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_m}][\square\pi_1, \square\pi_2, \ldots],$$

где A — пропозициональная формула сигнатуры $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, отличная от пропозициональной переменной. Согласно тождествам (19) и принципу эквивалентной замены, формула a в G эквивалентна формуле

$$\square A[\Delta\square b_1, \ldots, \Delta\square b_k, \pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_m}][\square\pi_1, \square\pi_2, \ldots],$$

По индуктивному предположению последняя эквивалентна в G формуле

$$\square A[c_1^\square, \ldots, c_{k+m}^\square], \tag{25}$$

причем эта формула содержит те же переменные, что и a. Приводя средствами классической логики формулу A к совершенной конъюнктивно-импликативной нормальной форме и пользуясь снова принципом эквивалентной замены в логике G, получаем, что (25) эквивалентна формуле $\square\,\&\left(\underset{i}{\&}\,c_i^\square\supset\underset{j}{\bigvee}\,c_j^\square\right)$. Согласно (24), эта формула эквивалентна в G формуле $\&\,\square\left(\underset{i}{\&}\,c_i^\square\supset\underset{j}{\bigvee}\,c_j^\square\right)$. Полагая $c\leftrightharpoons\&\left(\underset{i}{\&}\,c_i\supset\underset{j}{\bigvee}\,c_j\right)$, имеем $G\vdash\left(a\sim c^\square\right)$.

Пусть $\mathscr{D}$ — некоторое множество формул. Символы $\mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$ и $\mathfrak{N}_{\mathscr{D}}$ будут в дальнейшем обозначать совокупность всех магариевых и соответственно Δ-псевдобулевых алгебр, на которых верны все формулы из $\mathscr{D}$. Если $\mathfrak{M}$ — непустой класс магариевых алгебр, то определим $\Delta\mathfrak{M} \rightleftharpoons \{\mathfrak{B}^\Delta | \mathfrak{B} \in \mathfrak{M}\}$.

Лемма 10. *Для произвольного множества $\mathscr{D}$ формул справедливо равенство* $\mathfrak{R}_{\rho(G+\mathscr{D})} = \Delta\mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} \in \mathfrak{R}_{\rho(G+\mathscr{D})}$. Покажем, что $\mathfrak{A}^\mu \in \mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$. Предположим противное, т. е. некоторая формула a из $\mathscr{D}$ опровержима на $\mathfrak{A}^\mu$. Поскольку алгебра $\mathfrak{A}^\mu$ является B-порожденной, то некоторый подстановочный пример формулы a вида $b[\Box\pi_1, \Box\pi_2, \ldots]$ опровержим (с учетом расшифровки (22)) на алгебре $\mathfrak{A}^\mu$. Формула $\Box b[\Box\pi_1, \Box\pi_2, \ldots]$, очевидно, также опровержима на $\mathfrak{A}^\mu$. Согласно лемме 9 существует формула c такая, что формула $c^\Box$ в G эквивалентна формуле $\Box b[\Box\pi_1, \Box\pi_2, \ldots]$. Следовательно, формула $c^\Box$ опровержима на алгебре $\mathfrak{A}^\mu$, и, значит, по лемме 5 c опровержима на $\mathfrak{A}$ (напомним: $\mathfrak{A}^{\mu\Delta} = \mathfrak{A}$). С другой стороны, $G + \mathscr{D} \vdash \Box b[\Box\pi_1, \Box\pi_2, \ldots]$, и поэтому $G + \mathscr{D} \vdash c^\Box$, т. е. $c \in \rho(G + \mathscr{D})$; противоречие. Таким образом, $\mathfrak{A}^\mu \in \mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$, откуда $\mathfrak{A} \in \Delta\mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$. Обратно, пусть $\mathfrak{A} \in \Delta\mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$, т. е. $\mathfrak{B}^\Delta = \mathfrak{A}$ для некоторой магариевой алгебры $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$. По лемме 3 алгебра $\mathfrak{A}^\mu$ изоморфно вложима в $\mathfrak{B}$. Следовательно, $\mathfrak{A}^\mu \in \mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$. Далее, если $a \in \rho(G + \mathscr{D})$, т. е. $G + \mathscr{D} \vdash a^\Box$, то формула $a^\Box$ верна на $\mathfrak{A}^\mu$. Отсюда, по лемме 5, учитывая равенство $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mu\Delta}$, видим, что формула a верна на $\mathfrak{A}$.

Лемма 11. *Для произвольного множества $\mathscr{D}$ формул справедливо равенство* $\tau\rho(G + \mathscr{D}) = G + \mathscr{D}$.

Доказательство. Заметим, что по лемме 6 справедливо равенство $\rho(G + \mathscr{D}) = I^\Delta + \rho(G + \mathscr{D})$. Следовательно, $\tau\rho(G + \mathscr{D}) = \tau\,(I^\Delta + \rho(G + \mathscr{D})) = G\,(\rho\,(G + \mathscr{D}))^\Box = G + \{a^\Box | G + \mathscr{D} \vdash a^\Box\} \subseteq G + \mathscr{D}$.

Теперь докажем обратное включение: $G + \mathscr{D} \subseteq G + \{a^\Box | G + \mathscr{D} \vdash a^\Box\}$. Точнее, докажем, что для произвольно магариевой алгебры $\mathfrak{B}$ с конечным числом образующих, если на ней верны все формулы из множества $\{a^\Box | G + \mathscr{D} \vdash a^\Box\}$, то $\mathfrak{B} \in \mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$. Итак, пусть $\mathfrak{B}$ имеет конечное число образующих и $\mathfrak{B} \in \mathfrak{M}_{(\rho(G+\mathscr{D}))^\Box}$. По лемме 5 $\mathfrak{B}^\Delta \in \mathfrak{R}_{\rho(G+\mathscr{D})}$. С помощью леммы 10 заключаем, что существует магариева алгебра $\mathfrak{B}_1$ из $\mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$ такая, что $\mathfrak{B}^\Delta = \mathfrak{B}_1^\Delta$. Согласно лемме 3 $\mathfrak{B}_1^{\Delta\mu} \in \mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$, так как $\mathscr{D} \subseteq L\mathfrak{B}_1 \subseteq L\mathfrak{B}_1^{\Delta\mu}$, а ввиду леммы 4 $L\mathfrak{B} = L\mathfrak{B}^{\Delta\mu}$. Остается заметить, что $\mathfrak{B}_1^{\Delta\mu} = \mathfrak{B}^{\Delta\mu}$ и, следовательно, $\mathfrak{B} \in \mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$.

Теорема 2. *Решетки нормальных расширений логик G и I^Δ изоморфны.*

Доказательство. Согласно леммам 7, 8 и 11 заключаем, что отображения τ: $\mathscr{L}I^\Delta \to \mathscr{L}G$ и ρ: $\mathscr{L}G \to \mathscr{L}I^\Delta$ являются взаимно обратными решеточными изоморфизмами.

Таким образом, $\rho^{-1} = \tau$ и $\tau^{-1} = \rho$. Поэтому все наши нижеследующие утверждения относительно ρ относятся к τ^{-1}, а также, как будет видно из контекста, и к τ.

Следствие 1. *Расширение $G + \mathscr{D}$ является конечно аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда конечно аксиоматизируемо расширение* $\rho(G + \mathscr{D})$.

Доказательство. Из определения отображения τ вытекает, что если расширение $I^\Delta + \mathscr{D}$ конечно аксиоматизируемо, т. е. $I^\Delta + \mathscr{D} = I^\Delta + \mathscr{D}_1$ для некоторого конечного множества $\mathscr{D}_1$, то конечно аксиоматизируемо и $\tau(I^\Delta + \mathscr{D})$, равное ввиду монотонности отображения τ расширению $G + \mathscr{D}_1^\Box$. Обратно, если $I^\Delta + \mathscr{D}$ не является конечно аксиоматизируемым, то по известной теореме (см., например, [34, теорема 1]) в решетке $\mathscr{L}I^\Delta$ имеется возрастающая бесконечная цепь, супремум элементов которой является $I^\Delta + \mathscr{D}$. Ввиду теоремы 2 τ-образы этой цепи составляют бесконечную возрастающую цепь в решетке $\mathscr{L}G$; причем супремум элементов этой цепи есть $\tau(I^\Delta + \mathscr{D})$. Таким образом, $\tau(I^\Delta + \mathscr{D})$ не является конечно аксиоматизируемым расширением.

§ 4. ДРУГИЕ СВОЙСТВА ИЗОМОРФИЗМА ρ

Напомним, что каждому расширению L логики G (или логики I^Δ) соответствует многообразие [28] $\mathfrak{M}_L$ магариевых (или многообразие $\mathfrak{R}_L$ Δ-псевдобулевых) алгебр; причем эти соответствия взаимно однозначны. Заметим, что если $\mathfrak{M}$ — произвольное многообразие магариевых алгебр, то ввиду леммы 10 совокупность $\Delta\mathfrak{M}$ является некоторым многообразием Δ-псевдобулевых алгебр; причем если $\mathfrak{M}$ соответствует расширению $G+\mathscr{D}$, то $\Delta\mathfrak{M}$ соответствует расширению $\rho(G+\mathscr{D})$. Таким образом, отображение Δ: $\mathscr{M}G \to \mathscr{M}I^\Delta$ решетки $\mathscr{M}G$ всех многообразий магариевых алгебр на решетку $\mathscr{M}I^\Delta$ всех многообразий Δ-псевдобулевых алгебр является решеточным изоморфизмом. Исследуем Δ как операцию на классах магариевых алгебр более детально.

Пусть для произвольного класса $\mathscr{K}$ однотипных алгебр символы $H\mathscr{K}$, $S\mathscr{K}$ и $P\mathscr{K}$ обозначают, как обычно, соответственно класс всех гомоморфных образов, класс всех подалгебр и класс всех декартовых произведений алгебр из $\mathscr{K}$. Заметим, что если класс $\mathfrak{M}$ магариевых алгебр является абстрактным [28], то будет абстрактным также класс $\Delta\mathfrak{M}$. Ниже, чтобы подчеркнуть, что операция $\circ$ сигнатуры (1) выполняется в алгебре $\mathfrak{C}$, будем писать $\underset{\mathfrak{C}}{\circ}$; тот же смысл имеет и символ $\underset{\mathfrak{C}}{\leqslant}$.

Лемма 12. *Для любого класса $\mathfrak{M}$ магариевых алгебр справедливо равенство $\Delta H\mathfrak{M} = H\Delta\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Аналогично существованию взаимно однозначного соответствия между конгруэнциями и фильтрами любой псевдобулевой (в частности, булевой) алгебры (см. теоремы II.3.1 и IV.6.3 в [35]), существует и взаимно однозначное соответствие между конгруэнциями и Δ-фильтрами (или τ-фильтрами [17]) любой магариевой (или Δ-псевдобулевой) алгебры (при этом подмножество F алгебры называется *Δ-фильтром*, если оно — фильтр [14], и дополнительно выполняется условие: $x \in F$ влечет $\Delta x \in F$). Это соответствие вытекает, с одной стороны, из (8)а (для магариевых алгебр) и (11)а (для Δ-псевдобулевых алгебр), и, с другой стороны, из того, что на обоих видах алгебр соответственно верны тождества $\Delta(x \to y) \leqslant \Delta x \to \Delta y$, $\Delta(x \supset y) \leqslant \Delta x \supset \Delta y$, которые следуют из законов псевдобулевой (в частности, булевой) алгебры и (8)б. Отметим, что ввиду тождества (11)а всякий фильтр Δ-псевдобулевой алгебры как решетки является ее Δ-фильтром. Пусть F — Δ-фильтр некоторой магариевой алгебры $\mathfrak{B}$ (к примеру, $\mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$) и $\mathscr{B}^\circ$ — множество открытых элементов алгебры $\mathfrak{B}^\tau$. Определяя

$$F^\Delta \leftrightharpoons F \cap \mathscr{B}^\circ, \tag{26}$$

легко проверить, что F^Δ — фильтр алгебры $\mathfrak{B}^\Delta$. Обозначая символами $\underset{F}{\equiv}$ и $\underset{F^\Delta}{\equiv}$ конгруэнции, соответствующие Δ-фильтрам F и F^Δ, напомним (ср. [14, 35]), что для x, $y \in \mathscr{B}$

$$x \underset{F}{\equiv} y \Leftrightarrow x \leftrightarrow y \in F, \quad \Box x \underset{F^\Delta}{\equiv} \Box y \Leftrightarrow \Box x \sim \Box y \in F^\Delta, \tag{27}$$

где $x \leftrightarrow y$ означает $(x \to y) \& (y \to x)$. Далее, заметим, что для x, $y \in \mathscr{B}^\circ$ справедлива эквивалентность

$$x \underset{F}{\equiv} y \Leftrightarrow x \underset{F^\Delta}{\equiv} = y. \tag{28}$$

В самом деле, учитывая (26), (27), (8)б и сокращение (13), получаем

$$x \underset{F}{\equiv} y \Leftrightarrow x \leftrightarrow y \in F \Leftrightarrow \Box(x \leftrightarrow y) \in F \Leftrightarrow x \sim y \in F^\Delta \Leftrightarrow x \underset{F^\Delta}{\equiv} y.$$

Рассмотрим алгебры $(\mathfrak{B}/_F)^\Delta$ и $\mathfrak{B}^\Delta\,/_{F^\Delta}$, где $\mathfrak{C}/_\Phi$ означает фактор-алгебру $\mathfrak{C}$ по Δ-фильтру Φ, и покажем, что они изоморфны. Для этого проверим, что отображение $\varphi\colon \Box\,({}^x/_F) \mapsto {}^{\Box x}/_{F^\Delta}$ — изоморфизм. Сначала покажем, что φ корректно определено и является биекцией. В самом деле, учитывая, что каноническое отображение есть гомоморфизм, а также (28), получаем

$$\Box({}^x/_F) = \Box\,({}^y/_F) \Leftrightarrow {}^{\Box x}/_F = {}^{\Box y}/_F \Leftrightarrow \Box x \underset{F}{\equiv} \Box y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Box x \underset{F^\Delta}{\equiv} \Box\, y \Leftrightarrow {}^{\Box x}/_{F^\Delta} = {}^{\Box y}/_{F^\Delta}.$$

Остается проверить перестановочность отображения φ с операциями сигнатуры (1). Ниже мы используем тождество (19) и то, что отображения $x \mapsto {}^x\big/_{F(x\in\mathscr{B})}$ и ${}^{x\to x}\big|_{F^\Delta(x\in\mathscr{B}^0)}$ — гомоморфизмы:

$$\varphi(\neg\Box\,({}^x/_F)) = \varphi(\Box-\Box\,({}^x/_F)) = \varphi(\Box\,({}^{-\Box x}/_F)) = {}^{\Box-\Box x}/_{F^\Delta} = {}^{\neg\Box x}/_{F^\Delta} =$$

$$= \neg\,({}^{\Box x}/_{F^\Delta}) = \neg\varphi(\Box\,({}^x/_F));$$

$$\varphi\Big(\underset{(\mathfrak{B}/F)^\Delta}{\Delta}\Box\,({}^x/_F)\Big) = \varphi\Big(\underset{\mathfrak{B}/F}{\Delta}\Box\,({}^x/_F)\Big) = \varphi\Big({}^{\underset{\mathfrak{B}}{\Delta}\Box x}\Big/_F\Big) = \varphi\Big({}^{\Box\underset{\mathfrak{B}}{\Delta} x}\Big/_F\Big) =$$

$$= \varphi\Big(\Box\Big({}^{\underset{\mathfrak{B}}{\Delta} x}\Big/_F\Big)\Big) = {}^{\Box\underset{\mathfrak{B}}{\Delta}x}\Big/_{F^\Delta} = {}^{\underset{\mathfrak{B}}{\Delta}\Box x}\Big/_{F^\Delta} = {}^{\underset{\mathfrak{B}^\Delta}{\Delta}\Box x}\Big/_{F^\Delta} =$$

$$= \underset{\mathfrak{B}^\Delta/_{F^\Delta}}{\Delta}({}^{\Box x}/_{F^\Delta}) = \underset{\mathfrak{B}^\Delta/_{F^\Delta}}{\Delta}\varphi(\Box\,({}^x/_F)).$$

Пусть теперь $\circ \in \{\&, \vee\}$. Тогда

$$\varphi\big(\Box\,({}^x/_F)\underset{(\mathfrak{B}/F)^\Delta}{\circ}\Box\,({}^y/_{F^\Delta})\big) = \varphi\big(\Box\,({}^x/_F)\underset{\mathfrak{B}/F}{\circ}\Box\,({}^y/_F)\big) = \varphi\Big({}^{\Box x\underset{\mathfrak{B}}{\circ}\Box y}\Big/_F\Big) =$$

$$= \varphi\Big({}^{\Box(\Box x\underset{\mathfrak{B}}{\circ}\Box y)}\Big/_F\Big) = \varphi\Big(\Box\Big({}^{\Box x\underset{\mathfrak{B}}{\circ}\Box y}\Big/_F\Big)\Big) = {}^{\Box(\Box x\underset{\mathfrak{B}}{\circ}\Box y)}\Big/_{F^\Delta} = {}^{\Box x\underset{\mathfrak{B}^\Delta}{\circ}\Box y}\Big|_{F^\Delta} =$$

$$= {}^{\Box x}/_{F^\Delta}\underset{\mathfrak{B}^\Delta/F^\Delta}{\circ}{}^{\Box y}/_{F^\Delta} = \varphi(\Box\,({}^x/_F))\underset{\mathfrak{B}^\Delta/F^\Delta}{\circ}\varphi(\Box\,({}^y/_F)).$$

Наконец, последний случай:

$$\varphi\Big(\Box\,({}^x/_F)\underset{(\mathfrak{B}/F)^\Delta}{\supset}\Box\,({}^y/_F)\Big) = \varphi\Big(\Box\,(\Box\,({}^x/_F)\underset{\mathfrak{B}/F}{\longrightarrow}\Box\,({}^y/_F)\Big) =$$

$$= \varphi\Big(\Box\Big(\Box\, x\underset{\mathfrak{B}}{\to}{}^{\Box y}/_F\Big)\Big) = \Box\Big({}^{\Box x\underset{\mathfrak{B}}{\to}\Box y}\Big)\Big/_{F^\Delta} = \Box\, x\underset{\mathfrak{B}^\Delta}{\supset}{}^{\Box y}/_{F^\Delta} =$$

$$= {}^{\Box x}/_{F^\Delta}\underset{\mathfrak{B}^\Delta/F^\Delta}{\supset}{}^{\Box y}/_{F^\Delta} = \varphi\Big(\Box\,({}^x/_F)\Big)\underset{\mathfrak{B}^\Delta/F^\Delta}{\supset}\varphi\Big(\Box\,({}^y/_F)\Big).$$

Итак, поскольку φ — изоморфизм, то имеет место включение $\Delta H\mathfrak{M} \subseteq H\Delta\mathfrak{M}$.

Прежде чем доказывать обратное включение, заметим, что справедливо следующее свойство:

(A) Пусть Φ — произвольный фильтр алгебры $\mathfrak{B}^\Delta$ и F — фильтр алгебры $\mathfrak{B}$, порожденный множеством Φ. Тогда F является Δ-фильтром и $\Phi = F^\Delta$.

В самом деле, пользуясь теоремой 1.8.1 из [14], заключаем, что $F = \{x \in \mathscr{B} \mid (\exists y \in \Phi)\,(y \leqslant x)\}$. Пусть $x \in F$, т. е. $y \leqslant x$ для некоторого $y \in \Phi \subseteq \mathscr{B}^\circ$. Ввиду тождества (11)а и квазитождества (12)

$$y \underset{\mathfrak{B}^\Delta}{\leqslant} \Delta y \underset{\mathfrak{B}}{\leqslant} \Delta x.$$

Следовательно, $\Delta x \in F$. Далее, ясно, что $\Phi \subseteq F \cap \mathscr{B}^\circ = F^\Delta$. Если же $x \in F^\Delta = F \cap \mathscr{B}^\circ$, то $y \leqslant x$ для некоторого $y \in \Phi$. Так как Φ — фильтр и $x \in \mathscr{B}^\circ$, то $x \in \Phi$.

Наконец, пусть $\mathfrak{B}^\Delta \in \Delta\mathfrak{M}$ и Φ — фильтр алгебры $\mathfrak{B}^\Delta$. Согласно (А) существует Δ-фильтр F алгебры $\mathfrak{B}$, причем $F^\Delta = \Phi$. Таким образом, $\mathfrak{B}^\Delta /_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{L}^\Delta |_{F^\Delta}$ и алгебры $\mathfrak{B}^\Delta / _{F^\Delta}$ и $\left(\mathfrak{B} / _F\right)^\Delta$, как было доказано выше, изоморфны. Однако выше было замечено, что класс $\Delta H\mathfrak{M}$ абстрактный. Следовательно, $\mathfrak{B}^\Delta/\Phi \in \Delta H\mathfrak{M}$.

Лемма 13. *Для любого класса $\mathfrak{M}$ магариевых алгебр справедливо равенство $\Delta S\mathfrak{M} = S\Delta\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Если магариева алгебра $\mathfrak{B}$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}_1$, то $\mathfrak{B}^\Delta$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{B}_1^\Delta$. Это доказывает включение $\Delta S\mathfrak{M} \subseteq S\Delta\mathfrak{M}$.

Обратно, предположим, Δ-псевдобулева алгебра $\mathfrak{A}$ вида (10) является подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}^\Delta$, и пусть $\mathfrak{B}_1$ есть булева подалгебра магариевой алгебры $\mathfrak{B}$, порожденная множеством $\mathscr{A}$. Покажем, что на $\mathfrak{B}_1$ можно ввести операцию Δ так, чтобы $\mathfrak{B}_1$ стала магариевой подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$, причем $\mathfrak{B}_1^\Delta = \mathfrak{A}$. Напомним, что каждый элемент x алгебры $\mathfrak{B}_1$ по теореме II.2.2 из [14] представим в виде $\underset{i}{\&} (x_i \rightarrow y_i)$ $(x_i,\ y_i \in \mathscr{A})$. Поэтому, используя тождества (19), (8)б и (14)б, получаем

$$\Delta x = \Delta \underset{i}{\&} (x_i \rightarrow y_i) = \Delta \,\Box \underset{i}{\&} (x_i \rightarrow y_i) = \Delta \underset{i}{\&} \Box (x_i \rightarrow y_i) =$$
$$= \Delta \underset{i}{\&} (x_i \supset y_i) = \underset{i}{\&} \Delta (x_i \supset y_i),$$

т. е. $\Delta x \in \mathscr{A}$. Далее, если x — элемент алгебры $\mathfrak{B}_1$, то, учитывая (14)б и то, что $\mathfrak{A}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{B}^\Delta$, имеем

$$\Box\, x = \Box \underset{i}{\&} (x_i \rightarrow y_i) = \underset{i}{\&} \Box (x_i \rightarrow y_i) = \underset{i}{\&} (x_i \supset y_i).$$

Следовательно, $\mathfrak{B}_1^\Delta = \mathfrak{A}$. Таким образом, справедливо включение $S\Delta\mathfrak{M} \subseteq \Delta S\mathfrak{M}$.

Лемма 14. *Для любого класса $\mathfrak{M}$ магариевых алгебр справедливо равенство $\Delta P\mathfrak{M} = P\Delta\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что справедливо равенство $(\prod \mathfrak{B}_i)^\Delta = \prod \mathfrak{B}_i^\Delta$, где символ $\prod \mathfrak{C}_i$ обозначает декартово произведение всех алгебр множества $\{\mathfrak{C}_i\}_{i\in I}$. При этом считаем, что алгебры $\mathfrak{B}_i$ являются магариевыми. Расшифровывая $\Box$ по (13), рассмотрим отображение $\Box\, x \mapsto (\Box\, x_i)$ для всякого элемента $x = (x_i)$ алгебры $\prod \mathfrak{B}_i$. Это отображение корректно определено, сюръективно и тождественно, так как

$$\Box\, x = \Box\,(x_i) = (x_i) \underset{\Pi\mathfrak{B}_i}{\&} \Delta (x_i) = (x_i) \underset{\Pi\mathfrak{B}_i}{\&} (\Delta x_i) = \left(x_i \underset{\mathfrak{B}_i}{\&} \Delta x_i\right) = (\Box x_i).$$

Кроме того, оно является гомоморфизмом. В самом деле, пусть операция $\circ \in \{\&, \vee\}$. Тогда для x, $y \in \prod \mathfrak{B}_i$, используя то, что алгебра $\prod \mathfrak{B}_i^\Delta$ является подрешеткой алгебры $\prod \mathfrak{B}_i$, получаем

$$\Box x \underset{(\Pi\mathfrak{B}_i)^\Delta}{\bigcirc} \Box\, y = \Box\, x \underset{\Pi\mathfrak{B}_i}{\bigcirc} \Box\, y = \Box\,(x_i) \underset{\Pi\mathfrak{B}_i}{\bigcirc} \Box\,(y_i) = (\Box x_i) \underset{\Pi\mathfrak{B}_i^\Delta}{\bigcirc} (\Box y_i),$$

$$\urcorner\Box x = \Box - \Box x = \Box - \Box(x_i) = (\Box - \Box x_i) = (\urcorner\Box x_i) = \urcorner(\Box x_i),$$

$$\underset{(\Pi\mathfrak{B}_i)^\Delta}{\Delta} \Box\, x = \underset{\Pi\mathfrak{B}_i}{\Delta} \Box\, x = \left(\underset{\mathfrak{B}_i}{\Delta} \Box\, x_i\right) = \left(\underset{\mathfrak{B}_i^\Delta}{\Delta} \Box\, x_i\right) = \underset{\Pi\mathfrak{B}_i^\Delta}{\Delta} (\Box\, x_i).$$

Известно [28, 29], что для произвольного класса $\mathscr{K}$ алгебр класс $HSP\mathscr{K}$ является наименьшим многообразием, содержащим класс $\mathscr{K}$. Причем соответствующая данному многообразию логика совпадает с теоретико-множественным пересечением логик алгебры из $\mathscr{K}$. Логика называется [6, 33] *табличной*, если она является логикой некоторой конечной алгебры,— *предтабличной*, если она не таблична, но всякое ее расширение (отличное от нее самой) уже таблично; и, наконец, логика называется [6, 33] *финитно аппроксимируемой*, если она представима в виде пересечения некоторой последовательности табличных логик, или, иначе, если ей соответствует многообразие $HSP\mathscr{K}$ для некоторого класса $\mathscr{K}$ конечных алгебр.

Теорема 3. *Пусть L — произвольное нормальное расширение логики G. Логика L таблична тогда и только тогда, когда таблична логика ρL. Логика L предтаблична тогда и только тогда, когда предтаблична логика ρL. Логика L финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда финитно аппроксимируема логика ρL.*

Доказательство. Логика L таблична тогда и только тогда, когда соответствующее ей многообразие $\mathfrak{M}_L = HSP\{\mathfrak{B}\}$ для некоторой конечной магариевой алгебры $\mathfrak{B}$. Согласно леммам 10, 12—14 $\mathfrak{N}_{\rho L} = \Delta\mathfrak{M}_L = HSP\{\mathfrak{B}^\Delta\}$, т. е. логика ρL таблична, если таблична L. Обратно, для всякой Δ-псевдобулевой алгебры $\mathfrak{A}$ из лемм 12, 13 и 14 следует $\Delta HSP\{\mathfrak{A}^\mu\} = HSP\{\mathfrak{A}^{\mu\Delta}\} = HSP\{\mathfrak{A}\}$. Если логика ρL является логикой алгебры $\mathfrak{A}$, то, используя лемму 10, получаем $\Delta\mathfrak{M}_L = \mathfrak{N}_{\rho L} = HSP\{\mathfrak{A}\} = \Delta HSP\{\mathfrak{A}^\mu\}$. Ввиду одно-однозначности отображения Δ приходим к заключению, что L является логикой алгебры $\mathfrak{A}^\mu$. Теперь если $\mathfrak{A}$ — конечная алгебра, то алгебра $\mathfrak{A}^\mu$, будучи B-порожденной, тоже является конечной по теореме II.2.3 из [14].

Из предыдущего и того факта, что отображение ρ является решеточным изоморфизмом, следует справедливость остальных утверждений теоремы.

Поскольку известно [36], что существует ровно счетное множество предтабличных расширений логики G, то из теоремы 3 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Существует ровно счетное множество предтабличных нормальных расширений логики I^Δ.*

Продолжая изучение свойств изоморфизма ρ, перейдем к рассмотрению двух видов расширений логик G и I^Δ: моделируемых логик и тех, в которых допустимо правило $\Delta a/a$ (ослабление). Напомним, что *шкалой* называется пара вида $\langle W, R\rangle$, где W — непустое множество, а R — бинарное отношение на нем. По любой шкале можно построить алгебру

$$\langle W, R\rangle^+ \leftrightharpoons \langle \mathscr{P}(W);\ \cap,\ \cup,\ -,\ \Delta\rangle, \tag{29}$$

являющуюся булевой алгеброй всех подмножеств множества W с дополнительной операцией Δ, которая определена так:

$$\Delta X \leftrightharpoons \{x \mid \forall y\,(xRy \Rightarrow y \in X)\}$$

для всякого $X \subseteq W$. Известно [8], что логика алгебры $\langle W, R\rangle^+$ тогда и только тогда является расширением логики G, когда R — транзитивное иррефлексивное отношение, причем в шкале $\langle W, R\rangle$ нет бесконечных возрастающих R-цепей (т. е. отношение R^{-1} фундированно). Всякое расширение логики G, являющееся логикой алгебры вида (29), называем *моделируемым*. Заметим, что сама логика G является [7, 18] моделируемой (ср. с моделируемостью логики K4.W в [9]).

Рассмотрим теперь шкалу $\langle W, R\rangle$, в которой R — частичный порядок (т. е. рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение), и свяжем с ней алгебру

$$\langle W, R\rangle^* \leftrightharpoons \langle R(W);\ \cap,\ \cup,\ \urcorner,\ \Delta\rangle,$$

элементы которой суть подмножества множества W, замкнутые по увеличению в смысле порядка R, операции $\cap$ и $\cup$ — обычные теоретико-множественные, а остальные определены так:

$$X \supset Y \rightleftharpoons \{x \mid \forall y((xRy,\ y \in X) \Rightarrow y \in Y\}, \quad \neg X \rightleftharpoons X \supset \varnothing,$$
$$\Delta X \rightleftharpoons \{x \mid \forall y((xRy,\ x \neq y) \Rightarrow y \in X)\}.$$

Известно [37], что логика алгебры $\langle W, R\rangle^*$ тогда и только тогда является расширением логики I^Δ, когда в $\langle W, R\rangle$ нет бесконечных возрастающих R-цепей. Расширение логики I^Δ называем *моделируемым*, если оно есть логика алгебры $\langle W, R\rangle^*$ для некоторого частично упорядоченного множества $\langle W, R\rangle$. В [37] показано, что логика I^Δ моделируема.

Пусть R — бинарное отношение на W. Обозначим $R^- \rightleftharpoons R \setminus \{\langle x, x\rangle \mid x \in W\}$ и $R^+ \rightleftharpoons R \cup \{\langle x, x\rangle \mid x \in W\}$. Напомним (см. [24, гл. I лемма 1] или [25, упражнения 1.1.1 и 1.1.2]), что если R — частично упорядоченное отношение, то R^- иррефлексивно и транзитивно, причем $R^{-+} = R$, и если R иррефлексивно и транзитивно, то R^+ — отношение частичного порядка, причем $R^{+-} = R$.

Лемма 15. *Пусть $\langle W, R\rangle$ — произвольная транзитивная иррефлексивная шкала без бесконечных возрастающих R-цепей. Тогда имеет место равенство $\langle W, R\rangle^{+\Delta} = \langle W, R^+\rangle^*$.*

Доказательство. Покажем сначала, что для $X \subseteq W$

$$X \in R^+(W) \Leftrightarrow \Box X = X.$$

В самом деле, если $X \in R^+(W)$ и $x \in X$, то для любого y такого, что xRy, $y \in X$. Поэтому $x \in \Delta X$ и, следовательно, $\Box X \subseteq X \subseteq X \cap \Delta X = \Box X$. С другой стороны, если $\Box X = X$, $x \in X$ и xRy, то $y \in X$, поскольку $x \in \Delta X$.

Теперь проверим для любых $X, Y \in R^+(W)$ равенство $\Box(-X \cup Y) = X \supset Y$. Легко видеть, что $x \in \Box(-X \cup Y) \Leftrightarrow x \in (-X \cup Y) \cap \Delta(-X \cup Y) \Leftrightarrow x \in (-X \cup Y)$ и $\forall y(xRy \Rightarrow y \in -X \cup Y) \Leftrightarrow \forall y(xR^+y \Rightarrow y \in -X \cup Y) \Leftrightarrow x \in X \supset Y$. Остается для любого $X \in R^+(W)$ проверить равенство

$$\underset{\langle W,R\rangle^{+\Delta}}{\Delta} X = \underset{\langle W,R^+\rangle^*}{\Delta} X.$$

Действительно, ввиду равенства $R^{+-} = R$, имеем

$$\underset{\langle W,R\rangle^{+\Delta}}{\Delta} X = \underset{\langle W,R\rangle^{+}}{\Delta} X = \{x \mid \forall y(xRy \Rightarrow y \in X)\} =$$
$$= \{x \mid \forall y(xR^{+-}y \Rightarrow y \in X)\} = \underset{\langle W,R^+\rangle^*}{\Delta} X.$$

Теорема 4. *Пусть L — произвольное нормальное расширение логики G. Логика L моделируема тогда и только тогда, когда моделируема логика ρL.*

Доказательство. Предположим, L является логикой алгебры $\langle W, R\rangle^+$. Согласно леммам 10, 12—14 заключаем, что ρL является логикой алгебры $\langle W, R\rangle^{+\Delta}$. Из леммы 15 следует, что ρL — логика алгебры $\langle W, R^+\rangle^*$, т. е. моделируема. Обратно, пусть ρL — логика алгебры $\langle W, T\rangle^*$. Тогда, используя леммы 12—15, получаем

$$\mathfrak{N}_{\rho L} = HSP\{\langle W, T\rangle^*\} = HSP\{\langle W, T^-\rangle^{+\Delta}\} = \Delta HSP\{\langle W, T^-\rangle^+\}.$$

Следовательно, L является логикой алгебры $\langle W, T^-\rangle^+$.

В [37] показано, что существует немоделируемое конечно аксиоматизируемое расширение логики I^Δ. Отсюда с применением следствия 1 и теоремы 4 вытекает

Следствие 3. *Существует немоделируемое конечно аксиоматизируемое расширение логики G.*

Теперь перейдем к сравнению расширений логик G и I^Δ, замкнутых относительно правила ослабления. Таковы, например, логика G из [17, 6], логика I^Δ из [11] и логика $Д^* \rightleftharpoons G + (\Delta(\Box p \supset q) \vee \Delta(\Box q \supset p))$ — наибольшее непротиворечивое расширение логики G, в котором допустимо ослабление [6] (ср. эту логику с $K4.3W$ из [9]).

Лемма 16. *Для произвольной магариевой алгебры* $\mathfrak{B}$ *в логике* $L\mathfrak{B}^{\Delta}$ *допустимо ослабление, если оно допустимо в логике* $L\mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть в логике $L\mathfrak{B}$ допустимо ослабление и формула Δa верна на алгебре $\mathfrak{B}^{\Delta}$. Тогда по лемме 5 формула $(\Delta a)^{\Box}$ верна на алгебре $\mathfrak{B}$, т. е. $\Delta a^{\Box} \in L\mathfrak{B}$. Отсюда следует, что $a^{\Box} \in L\mathfrak{B}$ и снова по лемме 5 формула a верна на $\mathfrak{B}^{\Delta}$.

Лемма 17. *Для произвольной* Δ*-псевдобулевой алгебры* $\mathfrak{A}$ *в логике* $L\mathfrak{A}^{\mu}$ *допустимо ослабление, если оно допустимо в логике* $L\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть в логике $L\mathfrak{A}$ допустимо ослабление и формула Δa верна на магариевой оболочке $\mathfrak{A}^{\mu}$. Предположим противное: формула a опровержима на $\mathfrak{A}^{\mu}$. Ввиду того, что алгебра $\mathfrak{A}^{\mu}$ B-порождается элементами алгебры $\mathfrak{A}$, существует подстановочный пример формулы a вида $b[\Box\pi_1, \Box\pi_2, \ldots]$, который опровержим на $\mathfrak{A}^{\mu}$. Заметим, что формула $\Delta b[\Box\pi_1, \Box\pi_2, \ldots]$ верна на $\mathfrak{A}^{\mu}$ и ввиду (19)

$$G \vdash (\Delta b[\Box\pi_1, \Box\pi_2, \ldots] \sim \Delta \Box b[\Box\pi_1, \Box\pi_2, \ldots]).$$

По лемме 9 существует формула c такая, что

$$G \vdash (\Box b[\Box \pi_1, \Box \pi_2, \ldots] \sim c^{\Box}). \tag{30}$$

Очевидно, $G \vdash (\Delta b[\Box \pi_1, \Box \pi_2, \ldots] \sim \Delta c^{\Box})$. Отсюда заключаем, что $(\Delta c)^{\Box}$ верна на $\mathfrak{A}^{\mu}$. По лемме 5 $\Delta c \in L\mathfrak{A}$ и, следовательно, формула c верна на $\mathfrak{A}$. Снова, используя лемму 5, получаем, что $c^{\Box}$ верна на $\mathfrak{A}^{\mu}$. Согласно (30) и учитывая (22), заключаем, что формула $b[\Box\pi_1, \Box\pi_2, \ldots]$ верна на $\mathfrak{A}^{\mu}$; противоречие.

Теорема 5. *Пусть* L *— произвольное нормальное расширение логики* G. *В логике* L *допустимо ослабление тогда и только тогда, когда оно допустимо в логике* ρL.

Доказательство. Прежде всего заметим, что каждое расширение логики G или I^{Δ} является логикой своей алгебры Линденбаума [14]. Отсюда если в L допустимо ослабление, то по леммам 12—14, 16 оно допустимо в ρL. Обратно, если в ρL допустимо ослабление и $\rho L = L\mathfrak{A}$ для некоторой (например, линденбаумовой) Δ-псевдобулевой алгебры $\mathfrak{A}$, то, как следует из доказательства теоремы 3, $L = L\mathfrak{A}^{\mu}$. Используя лемму 17, заключаем, что в логике L допустимо ослабление.

Поскольку, как доказано в [38], существует континуум расширений логики G, в которых допустимо ослабление, то с помощью теоремы 5 получаем

Следствие 4. *Существует континуум расширений логики* I^{Δ}, *в которых допустимо ослабление.*

Наконец, напомним, что логика Д*(=K4.3W) является [9] логикой алгебры $\langle \mathbf{N}, > \rangle^{+}$, где $\mathbf{N} \rightleftharpoons \{0, 1, 2, \ldots\}$. Кроме того, эта логика может быть задана исчислением $G + ((p \supset q) \vee (q \supset p))^{\Box}$ (ср. [6, примечание на с. 223]). Поэтому, учитывая теоремы 1, 5 получаем

Следствие 5. *Логика алгебры* $\langle N, \geqslant \rangle^{*}$ *является наибольшим непротиворечивым расширением логики* I^{Δ}, *в котором допустимо ослабление, и может быть задана исчислением* $I^{\Delta} + ((p \supset q) \vee (q \supset p))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Муравицкий А. Ю.** О расширениях логики I^{Δ} // Летняя школа по мат. логике и ее приложениям.— София, 1983.— С. 9—12.
2. **Муравицкий А. Ю.** Соответствие расширений доказуемостно-интуиционистской логики расширениям логики доказуемости // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 218, № 4.— С. 789—794.
3. **Hosoi T., Ono H.** Intermediate propositional logics: a survey // J. Tsuda College.— 1973.— Vol. 5.— P. 67—82.
4. **Dummet M. A., Lemmon E. J.** Modal logics between S4 and S5 // Z. math. Log. und Grundlag. Math.— 1959.— Vol. 5.— P. 250—264.
5. **Максимова Л. Л., Рыбаков В. В.** О решетке нормальных модальных логик // Алгебра и логика.— 1974.— Т. 13, № 2.— С. 188—216.

6. **Кузнецов А. В., Муравицкий А. Ю.** Доказуемость как модальность // Актуальные проблемы логики и методологии науки.— Киев: Наук. думка, 1980.— С. 193—230.
7. **Solovay R. M.** Provability interpretation of modal logic // Isr. J. math.— 1976.— Vol. 25.— P. 287—304.
8. **Boolos G.** The unprovability of consistency.— Cambridge, 1979.
9. **Segerberg K.** An essay in classical modal logic: filosofiska studier.— Uppsala, 1971.
10. **Клини С. К.** Введение в математику.— М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
11. **Кузнецов А. В.** Доказуемостно-интуиционистская логика // Модальные и интенсиональные логики.— М., 1978.— С. 75—79.
12. **Мендельсон Э.** Введение в математическую логику.— М.: Наука, 1976.
13. **Муравицкий А. Ю.** Сильная эквивалентность на интуиционистской модели Крипке и ассерторически равнообъемные логики // Алгебра и логика.— 1981.— С. 20, № 2.— С. 165—189.
14. **Расёва Е., Сикорский Р.** Математика матаматематики.— М.: Наука, 1972.
15. **Эсакия Л. Л.** Диагональные конструкции, формула Лёба и разреженные пространства Кантора // Логико-семантические исследования.— Тбилиси: Мецниереба, 1981.— С. 128—143.
16. **Кузнецов А. В.** Об алгебрах открытых множеств // Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям.— Кишинев: Штиинца, 1979.— С. 72—75.
17. **Magari R.** The diagonalizable algebras // Boll. Unione mat. ital.— 1975.— Vol. 12, N 5.— P. 117—125.
18. **Bernardi C.** On the equational class of diagonalizable algebras // Stud. log.— 1975.— Vol. 34, N 4.— P. 321—331.
19. **Makinson D.** Some embedding theorems for modal logic // Notre Dame J. form. log.— 1971.— Vol. 12, N 2.— P. 252—254.
20. **Кузнецов А. В., Муравицкий А. Ю.** Магариевы алгебры // 14-я Всесоюз. алгебр. конф. Ч. 2.— Новосибирск, 1977.— С. 105—106.
21. **Эсакиа Л. Л.** О многообразиях алгебр Гжегорчика // Исследования по неклассическим логикам и теории множеств.— М.: Наука, 1979.— С. 257—287.
22. **Максимова Л. Л.** Модальные логики конечных слоев // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 3.— С. 304—314.
23. **Сикорский Р.** Булевы алгебры.— М.: Мир, 1969.
24. **Биркгоф Г.** Теория решеток.— М.: Наука, 1984.
25. **Гретцер Г.** Общая теория решеток.— М.: Мир, 1982.
26. **Blok W. J.** Varieties of interior algebras: Dissertation.— University of Amsterdam, 1976.
27. **Эклоф П.** Теория ультрапроизведений для алгебраистов // Справочная книга по математической логике. Т. 1. Теория моделей.— М.: Наука, 1982.— С. 109—140.
28. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы— М.: Наука, 1970.
29. **Grätzer G.** Universal algebras.— New York, 1979.
30. **Goldblatt R.** Arithmetical necessity, provability and intuitionistic logic // Theoria.— 1978.— Vol. 54, N 1.— P. 38—46.
31. **Boolos G.** Provability in arithmetic and schema of Grzegorcyk // Fund. math.— 1980.— Vol. 106, N 1.— P. 41—45.
32. **Lemmon E. J.** (in collaboration with D. Scott) An introduction to modal logic.— Oxford, 1977.
33. **Кузнецов А. В.** О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод.— М.: Наука, 1979.— С. 5—33.
34. **Lemmon E. J.** Some results of finite axiomatizability in modal logic // Notre Dame J. form. log.— 1965.— Vol. 6, N 4.— P. 301—308.
35. **Rasiowa H.** An algebraic approach to non-classical logics.— Warszawa, 1974.
36. **Blok W. J.** Pretabular varieties of modal algebras // Stud. log.— 1980.— Vol. 39, N 2/3.— P. 101—124.
37. **Муравицкий А. Ю.** О финитной аппроксимируемости исчисления I^{Δ} и немоделируемости некоторого его расширения // Мат. заметки.— 1981.— Т. 29, № 6.— С. 907—916.
38. **Муравицкий А. Ю.** О расширениях логики доказуемости // Там же.— 1983.— Т. 33, № 6.— С. 915—927.

В. В. РЫБАКОВ

О ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА В МОДАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ G

Модальная система G (под именем K4W) введена в [1] по чисто семантическим соображениям: как логика конечных транзитивных иррефлексивных шкал. Она расширяет модальную систему K4 и несовместима с логикой S4 — дает в объединении с S4 абсолютно противоречи-