АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. С. БОРИСОВ

В работе получены оценки типа Берри — Эссена близости распределений гладких по Фреше функционалов от сумм независимых разнораспределенных случайных элементов (с. э.) и соответствующих гауссовских с. э. в произвольном банаховом пространстве. При этом не предполагается выполнение центральной предельной теоремы для исходной последовательности с. э. (требуется лишь предгауссовость их распределений). В качестве приложений рассматривается принцип инвариантности для эмпирических полей, а также классический принцип инвариантности Донскера — Прохорова.

Всюду в дальнейшем символами C, C_k обозначаются абсолютные (т. е. не зависящие от параметров задачи) положительные постоянные. При этом индексы будут использоваться лишь при необходимости подчеркнуть различие постоянных. Зависимость постоянных от тех или иных параметров задачи будет обозначаться функциональной записью вида $C(\cdot)$ или буквами, отличными от C (в случае, когда аргумент у $C(\cdot)$ слишком неудобен для записи). Нумерация теорем, лемм и формул своя в каждом параграфе. При ссылках на леммы или формулы из другого параграфа используется двойная нумерация. Первая цифра — номер параграфа.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\{\xi_{ni};\ i \leqslant n\}$, $n \geqslant 1$,— последовательность серий независимых в каждой серии случайных элементов (с. э.) в произвольном банаховом пространстве $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$. Предполагается, что при любых i, n распределение с. э. ξ_{ni} имеет в $\mathfrak{X}$ сепарабельный носитель, $\mathbf{E}\xi_{ni}=0$, $\sigma_{ni}^2 = \mathbf{E}\|\xi_{ni}\|^2 < \infty$ и, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{i\leqslant n} \sigma_{ni} = 0$, $\sum\limits_{i\leqslant n} \sigma_{ni}^2 = 1$. Предположим также, что распределение каждого с. э. ξ_{ni} предгауссово. Соответствующие гауссовские с. э. обозначим через γ_{ni}.

Рассмотрим с. э. $S_n = \sum\limits_{i\leqslant n} \xi_{ni}$, $W_n = \sum\limits_{i\leqslant n} \gamma_{ni}$. В качестве меры близости распределений с. э. S_n и W_n выберем метрику

$$d_F(S_n, W_n) = \sup_{z\in R} |\mathbf{P}(F(S_n) < z) - \mathbf{P}(F(W_n) < z)|,$$

где F — некоторый непрерывный функционал. Запись $F \in \mathscr{C}(m, \beta, \alpha)$, где $m = 0, 1, \ldots$, $\beta \in [0, 1]$, $\alpha \geqslant 0$, будет означать, что

$$\begin{aligned} &\|F^{(k)}(x)\|^* \leqslant C_0(F) \exp\{\alpha\|x\|\}, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \\ &\|F^{(m)}(x) - F^{(m)}(y)\|^* \leqslant C_0(F) \exp\{\alpha\|x\| + \alpha\|y\|\} \|x-y\|^\beta, \end{aligned} \tag{1}$$

где $F^{(k)}(x)[\cdot]$ — k-я производная Фреше функционала F, $\|\cdot\|^*$ — стандартная норма полилинейного функционала.

Введем дополнительные ограничения на последовательности $\{\xi_{ni}\}$ и $\{\gamma_{ni}\}$, а также на F. Пусть для любого подмножества $N \subseteq \{1, \ldots, n\}$ выполнено

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi_{ni}\right\|^2 \leqslant A\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2,$$
$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|^2 \leqslant A\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2, \tag{2}$$

где постоянная A не зависит от n и N, но может зависеть от $\mathfrak{X}$ и тех или иных вероятностных характеристик $\{\xi_{ni}\}$ и $\{\gamma_{ni}\}$. Например, если $\mathfrak{X}$ — пространство типа 2, то (2) выполнено и $A = A(\mathfrak{X})$. Но (2) может иметь место и в других банаховых пространствах. Скажем, пусть

$$\xi_{ni} = \frac{\xi_i}{(n\mathbf{E}\|\xi_1\|^2)^{1/2}}, \tag{3}$$

где $\{\xi_{ni}\}$ — независимые одинаково распределенные с. э. Если последовательность $\{\xi_i\}$ удовлетворяет центральной предельной теореме в $\mathfrak{X}$, то (2) выполнено и $A = \sup\limits_n \mathbf{E}\|S_n\|^2$.

В самом деле, если с. э. S_n слабо сходится к гауссовскому с. э. γ, то, как показано в [1],

$$A = \sup_n \mathbf{E}\|S_n\|^2 < \infty, \qquad \mathbf{E}\|\gamma\|^2 \leqslant A.$$

Стало быть,

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi_{ni}\right\|^2 = \frac{\mathrm{Card}\,(N)}{n}\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi_i\,(\mathrm{Card}\,(N)\,\mathbf{E}\|\xi_1\|^2)^{-1/2}\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant An^{-1}\,\mathrm{Card}\,(N) = A\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2,$$
$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|^2 = \frac{\mathrm{Card}\,(N)}{n}\mathbf{E}\|\gamma\|^2 \leqslant A\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2,$$

что и требовалось доказать.

Отметим также, что в общих банаховых пространствах каждое из соотношений (2) не следует из другого.

Известно, что с помощью одних лишь условий (1) и (2) нельзя получить удовлетворительные оценки для $d_F(S_n, W_n)$ (см. [2]). Следуя Ф. Гётце (см. [3, 4]), мы добавим еще своеобразное условие стохастической отделимости от нуля первой производной Фреше функционала F: для любого n существует такое подмножество индексов $N(\delta, n)$, что $\sum\limits_{i\in N(\delta,n)}\sigma_{ni}^2 \geqslant \delta$ и для всех подмножеств $N \subseteq N(\delta, n)$, удовлетворяющих требованию

$$\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2 \geqslant \varepsilon(n) \equiv \sum_{i\leqslant n}\mathbf{E}\min\{\|\xi_{ni}\|^3, \|\xi_{ni}\|^2\}, \tag{4}$$

выполнено

$$\sup_{z>0} z^{-M}\mathbf{P}\left(\sum_{i\in N}D_{ni}(W_n) < z\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right) \leqslant B, \tag{5}$$

где постоянные $\delta \in (0, 1)$ и B не зависят от n и N; $M = \max\{(5+\beta)/\beta,\ 25\}$,

$$D_{ni}(x) = \mathbf{E}(F^{(1)}(x)[\overline{\xi}_{ni}])^2 =$$
$$= (\mathbf{E}F^{(1)}(x)[\xi_{ni}I(\|\xi_{ni}\| \leqslant Q\widehat{\sigma}_{ni})])^2/\mathbf{P}(\|\xi_{ni}\| \leqslant Q\widehat{\sigma}_{ni}) -$$
$$-(\mathbf{E}F^{(1)}(x)[\xi_{in}I(\|\xi_{ni}\| \leqslant Q\widehat{\sigma}_{ni})])^2/\mathbf{P}^2(\|\xi_{ni}\| \leqslant Q\widehat{\sigma}_{ni}),$$

$I(\cdot)$ — индикатор события, $Q \geqslant 2$ — некоторая постоянная, $\widehat{\sigma}_{ni} = \sigma_{ni} + \varepsilon(n)$.

Отметим, что при выполнении (3) требование (4) излишне, а (5), по существу, совпадает с условием регулярности Ф. Гётце (см. [3, 4]).

Теорема 1. *Пусть* $F \in \mathscr{C}(4, \beta, \alpha)$, $\beta > 0$, *и выполнены условия* (2) *и* (5). *Тогда*

$$d_F(S_n, W_n) \leqslant C(F, A, B, \delta, Q) \sum_{i \leqslant n} \mathbf{E} \min\{\|\xi_{ni}\|^3, \|\xi_{ni}\|^2\}, \tag{6}$$

где $C(F, A, B, \delta, Q)$ — *постоянная, зависящая только от* $C_0(F)$ *и* α *в* (1), *а также* A, Q, B *и* δ.

Замечание. Приведенная теорема позволяет получать достаточно хорошие оценки и в случае, когда последовательность серий с. э. $\{\xi_{ni}; i \leqslant n\}$ не удовлетворяет центральной предельной теореме в $\mathfrak{X}$ (т. е. когда в $\mathfrak{X}$ не существует слабого гауссовского предела последовательности с. э. $\{S_n\}$).

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы* 1 *с. э.* $\{\xi_{ni}\}$ *определены в* (3) *и* $\mathbf{E}\|\xi_1\|^3 < \infty$. *Тогда*

$$d_F(S_n, W_n) \leqslant C(F, A, B, \delta, Q) \frac{\mathbf{E}\|\xi_1\|^3}{(\mathbf{E}\|\xi_1\|^2)^{3/2} n^{1/2}}, \tag{7}$$

где $\gamma \overset{d}{=} W_n$ — *гауссовский с. э. с той же ковариацией, что и с. э.* ξ_1.

Неулучшаемые оценки (6) и (7) в известной степени усиливают и обобщают результаты [3 — 5]. Отметим также, что для неодинаково распределенных с. э. $\{\xi_{ni}\}$ ранее были получены оценки лишь для $F(x) = (Dx, x)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$, где D — положительный линейный оператор (см. [5, 6]).

Особый интерес теорема 1 представляет для принципа инвариантности. Наряду с $\{\xi_{ni}\}$ и $\{\gamma_{ni}\}$ рассмотрим следующие с. э. в $B_{\mathfrak{X}}[0, 1]$ (пространство ограниченных $\mathfrak{X}$-значных функций на $[0, 1]$ с равномерной нормой):

$$\begin{aligned} X_{ni} &\equiv X_{ni}(t) = \xi_i I_{i/n}(t), \\ Y_{ni} &\equiv Y_{ni}(t) = \gamma_{ni} I_{i/n}(t), \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \tag{8}$$

где $I_z(t) = 0$, если $t < z$, и $I_z(t) = 1$ в противном случае. Тогда $S_n = \sum_{i \leqslant n} X_{ni} \equiv \sum_{i \leqslant nt} \xi_{ni}$ — так называемая случайная ломаная или «процесс накопления сумм», $W_n = \sum_{i \leqslant n} Y_{ni} \equiv \sum_{i \leqslant nt} \gamma_{ni}$ — аналогичная ломаная, построенная по гауссовским с. э. $\{\gamma_{ni}\}$.

Следствие 2. *Пусть* F: $B_{\mathfrak{X}}[0, 1] \to \mathbf{R}$ *и* $F \in C(4, \beta, \alpha)$, $\beta > 0$. *Пусть* $\{\xi_{ni}\}$ *и* $\{\gamma_{ni}\}$ *удовлетворяют* (2), *и для последовательностей* $\{X_{ni}\}$, $\{Y_{ni}\}$, *введенных в* (8), *выполнено* (5). *Тогда имеет место оценка* (6).

В качестве примера рассмотрим принцип инвариантности для эмпирических полей. Обозначим через $G_n(z_1, \ldots, z_k)$ эмпирическую функцию распределения, построенную по выборке объема n с функцией распределения $G(z_1, \ldots, z_k)$ в $\mathbf{R}^k$. Рассмотрим случайное поле

$$S_n^{(k)}(t, z_1, \ldots, z_k) = \frac{[nt]}{\sqrt{n}} (G_{[nt]}(z_1, \ldots, z_k) - G(z_1, \ldots, z_k)).$$

Пусть $W_n^{(k)}(t, z_1, \ldots, z_k)$ — центрированное гауссовское поле с той же ковариацией, что и $S_n^{(k)}(\cdot)$. Будем рассматривать $S_n^{(k)}(\cdot)$ и $W_n^{(k)}(\cdot)$ как элементы гильбертова пространства $L_2([0, 1] \times \mathbf{R}^k, \lambda)$, где $\lambda(\cdot)$ — произвольная конечная мера на $[0, 1] \times R^k$. Введем класс функционалов на $L_2([0, 1] \times \mathbf{R}^k, \lambda)$, определяемых формулами

$$F(X) = \int_0^1 \int_{R^k} f(X(t, z_1, \ldots, z_k), t, z_1, \ldots, z_k) \lambda(dt, dz_1, \ldots, dz_k).$$

Следствие 3. *Пусть функции* $f(x, t, \bar{z})$, $G(\bar{z})$ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$\inf_x \frac{\partial}{\partial x} f(x, t, \bar{z}) \geqslant g(t, \bar{z}) \geqslant 0, \tag{9}$$

$$\inf_{\bar{a} \leqslant \bar{z}, \bar{z}' \leqslant \bar{b}} \{G(\bar{z} \wedge \bar{z}') - G(\bar{z}) G(\bar{z}')\} > 0, \quad \int_{1/2}^{1} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} g(t, \bar{z}) \lambda(dt, d\bar{z}) > 0$$

(*или* (9) *имеет место для* $-f$), *где* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{z}$, $\bar{z}' \in \mathbf{R}^k$ *и для* $\frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x, t, \bar{z})$ *выполнено* (1) *равномерно по всем* $t \in [0, 1]$, $\bar{z} \in \mathbf{R}^k$. *Тогда*

$$d_F(S_n^{(k)}, W_n^{(k)}) \leqslant C(f, \lambda) n^{-1/2}.$$

В случае $\mathfrak{X} = \mathbf{R}^k$ следствие 2 позволяет также в известной степени усилить результаты [7].

Теперь подробней остановимся на классическом принципе инвариантности Донскера — Прохорова. В этом случае $\mathfrak{X} = \mathbf{R}$ и случайную ломаную $S_n(t)$ удобно определять по формуле

$$S_n(t) = \sum_{i: t_{ni} \leqslant t} \xi_{ni}, \tag{10}$$

где $t_{ni} = \sum_{k \leqslant i} \sigma_{nk}^2$ (напомним, что $\sum_{k \leqslant n} \sigma_{nk}^2 = 1$). В качестве аппроксимирующего гауссовского процесса здесь фигурирует стандартный винеровский процесс $W(t)$ (а не гауссовская случайная ломаная). Будем рассматривать случайные процессы $S_n(t)$ и $W(t)$ как элементы гильбертова пространства $L_2([0, 1], \lambda)$, где λ — произвольная конечная мера на $[0, 1]$. Доказательство приводимой ниже теоремы 2 существенно опирается на теорему 1.

Теорема 2. *Пусть функционал* $F: L_2([0, 1], \lambda) \to \mathbf{R}$ *удовлетворяет следующим условиям:* $F \in \mathscr{C}(4, \beta, \alpha)$, $\beta > 0$, *и для некоторых* v, $\Delta \in (0, 1)$

$$\sup_{z > 0} z^{-M} \mathbf{P}\left(\inf_{s \in [v, v+\Delta]} |F^{(1)}(W)[I_s]| < z\right) \leqslant C(F), \tag{11}$$

где $M = 2 \max\{(5 + \beta)/\beta, 25\}$. *Тогда, если* $\mathbf{E}|\xi_{ni}|^s < \infty$, $S \in (2, 3]$, *для всех* i, n, *то*

$$d_F(S_n, W) \leqslant C(F)(\delta(n) + L_{ns}), \tag{12}$$

где $\delta(n) = \sum_{i \leqslant n} \sigma_{ni}^2 \lambda((t_{ni-1}, t_{ni}])^{1/2}$, $L_{ns} = \sum_{i \leqslant n} \mathbf{E}|\xi_{ni}|^s$.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы* 2 *с. в.* ξ_{ni} *определены в* (3). *Тогда*

$$d_F(S_n, W) \leqslant C(F, \lambda) \frac{\mathbf{E}|\xi_1|^s}{(\mathbf{E}\xi_1^2)^{s/2}} \cdot n^{(2-s)/2}, \tag{13}$$

где $s \in (2, 3]$.

Оценка (13) является следствием (12) и неравенства Коши — Буняковского, в силу которого

$$\delta(n) \leqslant \left(\sum_{i \leqslant n} \sigma_{ni}^2 \lambda((t_{ni-1}, t_{ni}])\right)^{1/2} \leqslant (\lambda([0, 1]))^{1/2} \max_{i \leqslant n} \sigma_{ni}.$$

Замечание. Оценка (13) имеет место при замене условия (11) более слабым

$$\sup_n \sup_{n^{1/2} \leqslant m \leqslant \delta n} \sup_{z > 0} z^{-M/2} \mathbf{P}\left(\frac{1}{m} \sum_{i \leqslant m} (F^{(1)}(W)[I_{i/n}])^2 < z\right) \leqslant B, \tag{14}$$

где $\delta \in (0, 1/2)$.

Следствие 2. *Если λ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и имеет ограниченную плотность, то*

$$d_F(S_n, W) \leqslant C(F, \lambda) L_{ns}. \tag{15}$$

Оценка (15) в известной мере усиливает результаты в [8].

Следствие 3. *Пусть функционал F определен по формуле*

$$F(X) = \int_0^1 f(X(t))\,dt.$$

Тогда если $f \in \mathscr{C}(4, \beta, \alpha)$, $\beta > 0$, f монотонна и при всех $x \in \mathbf{R}$

$$|f'(x)| \geqslant \min\{c, |x|^r\}, \quad c, r > 0,$$

то имеют место оценки (12)—(14).

Отметим, что оценки (13) и (14) в рассматриваемой общности неулучшаемы. Однако без каких-либо ограничений на $\lambda(\cdot)$ оценка (14) неверна.

Теорема 3. *Существуют такие с. в. $\{\xi_{ni};\ i \leqslant n\}$, мера $\lambda(\cdot)$ и функционал F, удовлетворяющие условиям теоремы 2, что*

$$\begin{gathered} \delta(n) \leqslant L_{ns}^{2/s}, \\ C_1 L_{ns}^{2/s} \leqslant d_F(S_n, W) \leqslant C_2 L_{ns}^{2/s}. \end{gathered} \tag{16}$$

Соотношения (13)—(16) показывают, что оценка (12) не только неулучшаема, но и достаточно универсальна.

З а м е ч а н и е. Теоремы 2, 3, а также следствие 2 теоремы 1 могут быть легко переформулированы и для более общих, чем (10), случайных процесов вида

$$S_n'(t) = \sum_{i:\,t_{ni} < t} \xi_{ni} \cdot l_{ni}(t),$$

где $l_{ni}(t)$ — неслучайные функции. Скажем, если $l_{ni}(t) = I_{i/n}(t)$, то $S_n'(t) = S_n(t)$. Если же

$$l_{ni}(t) = \max\{0, \min\{(t - t_{ni-1})\sigma_{ni}^{-2}, 1\}\},$$

то $S_n'(t)$ представляет из себя непрерывную случайную ломаную.

§ 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем в рассмотрение с. э. $\{\xi_{ni}'\}$, $\{\xi_{ni}^{(1)}\}$, $\{\xi_{ni}^{(2)}\}$, определяемые по формулам

$$\xi_{ni}' = \xi_{ni} I(\|\xi_{ni}\| \leqslant c^*/\alpha), \tag{1}$$

где c^* будет выбрано позднее;

$$\begin{gathered} \mathbf{P}(\xi_{ni}^{(1)} \in A) = \mathbf{P}(\xi_{ni}' \in A \,|\, \|\xi_{ni}'\| \leqslant Q\sigma_{ni}), \quad Q \geqslant 2, \\ \mathbf{P}(\xi_{ni}^{(2)} \in A) = 2\mathbf{P}(\xi_{ni}' \in A) - \mathbf{P}(\xi_{ni}^{(1)} \in A). \end{gathered}$$

Отметим, что распределение с. э. $\xi_{ni}^{(2)}$ определено корректно, так как правая часть последнего равенства неотрицательна в силу оценки

$$\mathbf{P}(\|\xi_{ni}'\| \leqslant Q\sigma_{ni}) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{E}\|\xi_{ni}'\|^2}{Q^2\sigma_{ni}^2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Пусть $\{\nu_i\}$ — последовательность независимых с. в., распределенных по закону Бернулли ($\nu_i = 0$ или 1 с вероятностью 1/2). Всюду в дальнейшем предполагается, что последовательности $\{\xi_{ni}\}$, $\{\xi_{ni}'\}$, $\{\xi_{ni}^{(1)}\}$, $\{\xi_{ni}^{(2)}\}$ и $\{\nu_i\}$ независимы в совокупности. В этом случае

$$\xi_{ni}' \overset{d}{=} \xi_{ni}^{(1)}\nu_i + \xi_{ni}^{(2)}(1 - \nu_i). \tag{2}$$

Это соотношение неоднократно будет использоваться при доказательстве теоремы 1 (см. также [9—11]).

Лемма 1. *Для любого подмножества* $N \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и $r \leqslant \alpha(8c^*)^{-1}$

$$\mathbf{E}\exp\left\{r\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right\}\leqslant 3\exp\{\alpha r/c^* + rA^{1/2} + 8r^2\} \tag{3}$$

и для любого $s \geqslant 1$

$$\mathbf{E}\exp\left\{s\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|\right\}\leqslant (1+2s(2\pi A)^{1/2})\exp\{s^2A^2/2 + sA^{1/2}\}. \tag{4}$$

Доказательство. С помощью неравенства (4) из [12] имеем

$$\mathbf{E}\exp\left\{r\left|\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|-\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right|\right\}=$$

$$=1+r\int_0^\infty e^{rz}\mathbf{P}\left(\left|\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|-\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right|\geqslant z\right)dz\leqslant$$

$$\leqslant 1+2r\int_0^\infty \exp\left\{rz-\frac{z^2}{2(1+z/(8r))}\right\}dz\leqslant$$

$$\leqslant 1+2r\left\{\int_0^{8r}+\int_{8r}^\infty\right\}\leqslant 1+2(\exp\{8r^2\}-1)+$$

$$+2r\int_{8r}^\infty \exp\left\{rz-\frac{z^2}{2(1+z/(8r))}\right\}dz. \tag{5}$$

Так как для $z\in(8r, \infty)$

$$\frac{z^2}{2(1+z/(8r))}\geqslant 2rz,$$

то из (5) окончательно получаем

$$\mathbf{E}\exp\left\{r\left|\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|-\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right|\right\}\leqslant 3\exp\{8r^2\}. \tag{6}$$

Теперь отметим, что из (1.2) вытекает оценка

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\leqslant\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi_{ni}\right\|+\sum_{i\in N}\mathbf{E}\|\xi_{ni}\|I(\|\xi_{ni}\|>c^*/\alpha)\leqslant A^{1/2}+\alpha/c^*. \tag{7}$$

Неравенство (3) следует из (6), (7) и соотношения

$$\mathbf{E}\exp\left\{r\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right\}\leqslant\mathbf{E}\exp\left\{r\left|\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|-\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right|\right\}\exp\left\{r\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right\}.$$

Для доказательства (4) воспользуемся неравенством (см. [12])

$$\mathbf{P}(|\|\gamma\|-\mathbf{E}\|\gamma\||>z)\leqslant 2\exp\left\{-\frac{z^2}{2\mathbf{E}\|\gamma\|^2}\right\}. \tag{8}$$

где γ — произвольный гауссовский с. э. в $\mathfrak{X}$ с нулевым средним. Далее, аналогично выводу (5), получаем

$$\mathbf{E}\exp\left\{s\left|\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|-\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|\right|\right\}=$$

$$=1+s\int_0^\infty e^{sz}\mathbf{P}\left(\left|\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|-\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|\right|\geqslant z\right)dz\leqslant$$

$$\leqslant 1+2s\int_0^\infty\exp\left\{sz-\frac{z^2}{2\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|^2}\right\}dz\leqslant 1+(2\pi\mathbf{E}\|\cdot\|)^{1/2}\exp\left\{\frac{(s\mathbf{E}\|\cdot\|)^2}{2}\right\}2s.$$

Отсюда и из (12) следует (4). Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем символом $\mathbf{E}_\zeta$ обозначается условное математическое ожидание при фиксированном с. э. ζ или фиксированной последовательности с. э. $\{\zeta_i\}$, если таковая рассматривается.

Лемма 2. *Пусть Ψ — произвольная выпуклая четная функция на $\mathfrak{X}$. Тогда для любого $N \subseteq \{1, \ldots, n\}$*

$$\mathbf{E}\Psi\left(\sum_{i\in N}\left(\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}\right)\nu_i\right)\leqslant \mathbf{E}\Psi\left(2\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right),$$

$$\mathbf{E}\Psi\left(\sum_{i\in N}\left(\xi_{ni}^{(2)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)(1-\nu_i)\right)\leqslant \mathbf{E}\Psi\left(2\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right),$$

$$\mathbf{E}\Psi\left(\sum_{i\in N}\left(\nu_i\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}+(1-\nu_i)\,\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)\right)\leqslant \mathbf{E}\Psi\left(\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right).$$

Доказательство. Обозначим через $\{\eta_{ni}^{(k)}\}$, $k=1,\ 2$, независимые копии $\{\xi_{ni}^{(k)}\}$, $k=1,\ 2$. Тогда с помощью неравенства Йенсена (см. [1]) можем записать

$$\mathbf{E}_\nu\Psi\left(\sum_{i\in N}\left(\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}\right)\nu_i\right)\leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E}_\nu\Psi\left(\sum_{i\in N}\left(\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}\right)\nu_i+\sum_{i\in N}\left(\xi_{ni}^{(2)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)(1-\nu_i)\right)\leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E}_\nu\Psi\left(\sum_{i\in N}\left(\xi_{ni}^{(1)}\nu_i+\xi_{ni}^{(2)}(1-\nu_i)\right)-\sum_{i\in N}\left(\eta_{ni}^{(1)}\nu_i+\eta_{ni}^{(2)}(1-\nu_i)\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E}_\nu\Psi\left(2\sum_{i\in N}\left(\xi_{ni}^{(1)}\nu_i+\xi_{ni}^{(2)}(1-\nu_i)\right)\right).$$

Имея в виду представление (2), получаем первое утверждение леммы. Второе неравенство доказывается совершенно аналогично. Третье следует из соотношения

$$\Psi\left(\sum_{i\in N}\left(\nu_i\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}+(1-\nu_i)\,\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)\right)\leqslant \mathbf{E}_\nu\Psi\left(\sum_{i\in N}\left(\xi_{ni}^{(1)}\nu_i+\xi_{ni}^{(2)}(1-\nu_i)\right)\right),$$

которое, в свою очередь, вытекает из неравенства Йенсена и (2). Лемма доказана.

Лемма 2 будет использована в доказательстве основной теоремы в случаях, когда $\Psi(x)=\|x\|^{1+c}$, $\Psi(x)=\exp\{c\|x\|\}$.

Лемма 3. *Для любого $r\geqslant 1$ при выполнении* (1.4)

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\left(\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}\right)\nu_i\right\|^r\leqslant C(A, r, \alpha, Q)\left(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)^{r/2}, \tag{9}$$

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\left(\left(\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)\nu_i+\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)\right\|^r\leqslant C(A, r, \alpha)\left(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)^{r/2}. \tag{10}$$

Доказательство. В [13] доказано, что для любых независимых с. э. $y_1, \ldots, y_m$ с конечными моментами порядка $r\geqslant 1$ нормы справедливо неравенство

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\leqslant m}y_i\right\|^r\leqslant C(r)\max\left\{\left(\mathbf{E}\left\|\sum_{i\leqslant m}y_i\right\|\right)^r, \left(\sum_{i\leqslant m}\mathbf{E}\|y_i\|^2\right)^{r/2}, \sum_{i\leqslant m}\mathbf{E}\|y_i\|^r\right\}. \tag{11}$$

Положим $y_i=\left(\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}\right)\nu_i$. Тогда из леммы 2 и (1.2) следует

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}y_i\right\|\leqslant 2\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\leqslant 2\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi_{ni}\right\|+2\sum_{i\in N}\mathbf{E}\|\xi_{ni}\|I(\|\xi_{ni}\|>c^*/\alpha)\leqslant$$

$$\leqslant C(A, \alpha)\left(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)^{r/2}.$$

Кроме того, $\mathbf{E}\|y_i\|^p\leqslant C(Q, p)\,\sigma_{ni}^2\widehat{\sigma}_{ni}^{p-2}$ для любого $p\geqslant 2$. Поэтому при выполнении (1.4)

$$\sum_{i\in N}\mathbf{E}\|y_i\|^r \leqslant C(r,Q)\left(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^r+\varepsilon(n)^{r-2}\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant C(r,Q)\left\{\left(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)^{r/2}+\left(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)^{r-1}\right\}\leqslant C_1(r,Q)\left(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)^{r/2}$$

для любого $r\geqslant 2$. В случае $1\leqslant r<2$ для доказательства (9) мы должны использовать неравенство Гельдера, которое позволяет свести оценку $\mathbf{E}\left\|\sum y_i\right\|^r$ к рассмотренному ранее случаю.

Неравенство (10) доказывается аналогично. Заметим только, что

$$\|\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\|^r\leqslant\left(\int_{\mathfrak{X}}\|z\|\,\mathbf{P}(\xi_{ni}^{(2)}\in dz)\right)^r\leqslant 2^r\left(\int_{\mathfrak{X}}\|z\|\,\mathbf{P}(\xi'_{ni}\in dz)\right)^r\leqslant 2^r\sigma_{ni}^r.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любого центрированного гауссовского с. э. $\gamma\in\mathfrak{X}$ и произвольного $r\geqslant 1$*

$$\mathbf{E}\|\gamma\|^r\leqslant 2^{r-1}(r2^{r/2}\Gamma(r/2)+1)(\mathbf{E}\|\gamma\|^2)^{r/2}, \tag{12}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Доказательство. Так же как и при выводе (4) с помощью (8) получаем

$$\mathbf{E}\left|\|\gamma\|-\mathbf{E}\|\gamma\|\right|^r=r\int_0^\infty z^{r-1}\mathbf{P}(\left|\|\gamma\|-\mathbf{E}\|\gamma\|\right|\geqslant z)\,dz\leqslant$$

$$\leqslant 2r\int_0^\infty z^{r-1}\exp\left\{-\frac{z^2}{2\mathbf{E}\|\gamma\|^2}\right\}dz=2^{r/2}r\Gamma(r/2)(\mathbf{E}\|\gamma\|^2)^{r/2}.$$

Остается только воспользоваться элементарным неравенством

$$\mathbf{E}\|\gamma\|^r\leqslant 2^{r-1}(\mathrm{E}(\|\gamma\|-\mathbf{E}\|\gamma\|)^r+(\mathbf{E}\|\gamma\|^2)^{r/2}).$$

Лемма доказана.

В силу очевидного неравенства $\mathbf{E}(l(\xi_{ni}^{(2)}))^2\leqslant 2\mathbf{E}(l(\xi_{ni}))^2$, $l\in\mathfrak{X}^*$, можно утверждать (см. подробнее [14]), что распределение с. э. $\xi_{ni}^{(2)}$, как и ξ_{ni}, будет предгауссовым. Обозначим через $\gamma_{ni}^{(2)}$ центрированный гауссовский с. э., имеющий ту же ковариацию, что и $\xi_{ni}^{(2)}$.

Лемма 5. *Для любого подмножества $N\subseteq\{1,\ldots,n\}$*

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}^{(2)}\right\|\leqslant 2\sqrt{2}\,\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть ζ — произвольный предгауссовский с. э. в $\mathfrak{X}$, P — распределение с. э. ζ. В основе наших рассуждений лежит представление гауссовского с. э. γ, имеющего ту же ковариацию, что и ζ, в виде стохастического интеграла (см. [15])

$$\gamma=\int_{\mathfrak{X}}xW_P(dx), \tag{14}$$

где $W_p(\cdot)$ — центрированная гауссовская случайная мера (поле) с ковариацией

$$\mathrm{E}W_P(A)W_P(B)=P(A\cap B). \tag{15}$$

Интеграл в (14) понимается как предел по вероятности последовательности интегральных сумм

$$\gamma_m=\sum_{i\leqslant m}y_{mi}W_P(B_{mi}),$$

где $\{B_{mi}\}$ — конечное разбиение $\mathfrak{X}$ на измеримые подмножества, $\{y_{mi}\}$ выбраны так, что

$$\zeta=\operatorname*{Pr\text{-}Lim}_{m\to\infty}\sum_{i\leqslant m}y_{mi}I(\zeta\in B_{mi}). \tag{16}$$

Обозначим через $P_{ni}(\cdot)$ и $P_{ni}^{(2)}(\cdot)$ распределения с. э. ξ_{ni} и $\xi_{ni}^{(2)}$ соответственно. Для каждой фиксированной пары i, n определим последовательности серий $\{B_{mj}(i, n)\}$ и $\{y_{mj}(i, n)\}$, $j \leqslant m$, $m = 1, 2, \ldots$, так, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

$$\operatorname*{Lim}_{m\to\infty} P_{ni}\left(y \in \mathfrak{X}: \left\| \sum_{j\leqslant m} y_{mj}(\cdot) I(y \in B_{mj}(\cdot)) - y \right\| > \varepsilon\right) = 0. \tag{17}$$

В силу очевидного неравенства $P_{ni}^{(2)}(A) \leqslant 2P_{ni}(A)$ соотношение (17) будет иметь место и при замене P_{ni} на $P_{ni}^{(2)}$. Далее, используя определение стохастического интеграла, независимость с. в. $\{W_P(B_{mj}(\cdot))\,;\ j \leqslant m\}$, а также так называемые теоремы сравнения (см. [1, с. 108]), получаем

$$\mathbf{E}\left\| \sum_{i\in N} \gamma_{ni}^{(2)} \right\| = \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} \mathbf{E}\left\| \sum_{i\in N} \sum_{j\leqslant m} y_{mj}(n, i)\, W_{P_{ni}^{(2)}}^{(i)}(B_{mj}(n, i)) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} \max_{i,j:\, i\leqslant n,\, j\leqslant m} \left(\frac{P_{ni}^{(2)}(B_{mj}(n, i))}{P_{ni}(B_{mj}(n, i))} \right)^{1/2} \times$$

$$\times\, \mathbf{E}\left\| \sum_{i\in N} \sum_{j\leqslant m} y_{mj}(n, i)\, W_{P_{ni}}^{(i)}(B_{mj}(n, i)) \right\| \leqslant 2\sqrt{2}\, \mathbf{E}\left\| \sum_{i\in N} \gamma_{ni} \right\|,$$

где с. п. $\left\{W_{P_{ni}}^{(i)}(\cdot)\right\}$, $\left\{W_{P_{ni}^{(2)}}(\cdot)\right\}$ определены в (15) и независимы. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть ζ — произвольный предгауссовский центрированный с. э. в $\mathfrak{X}$, γ — соответствующий гауссовский с. э. Тогда для любой непрерывной билинейной формы $L(x, y)$, заданной на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, справедливо соотношение*

$$\mathbf{E}L(\zeta, \zeta) = \mathbf{E}L(\gamma, \gamma). \tag{18}$$

Доказательство. Вновь воспользуемся представлением (14). Поскольку $\mathbf{E}\|\zeta\|^2 < \infty$, из определения стохастического интеграла в (14) следует

$$\mathbf{E}L(\gamma, \gamma) = \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} \mathbf{E}L\left(\sum_{j\leqslant m} y_{mj} W_P(B_{mj}),\ \sum_{j\leqslant m} y_{mj} W_P(B_{mj}) \right) =$$

$$= \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} \sum_{i,j\leqslant m} P(B_{mi} \cap B_{mj})\, L(y_{mi}, y_{mj}) =$$

$$= \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} \sum_{i,j\leqslant m} \mathbf{E}L(I(\zeta \in B_{mi})\, y_{mi},\ I(\zeta \in B_{mj})\, y_{mj}) = \mathbf{E}L(\zeta, \zeta);$$

здесь $\{y_{mi}\}$, $\{B_{mi}\}$ определены в (16). Лемма доказана.

Замечание. В работе [16] соотношение (18) доказано при более жестких ограничениях, когда распределение с. э. ζ удовлетворяет центральной предельной теореме. Отметим также, что для $L(x, y) = l_1(x) l_2(y)$, $l_j \in \mathfrak{X}^*$, соотношение (18) следует из определения предгауссовости с. э. ζ.

Пусть $\{y_i\}$ — последовательность независимых ограниченных центрированных с. э. в $\mathfrak{X}$. Пусть $N = \bigcup_{j\leqslant m+1} N_j$ — некоторое конечное подмножество натуральных чисел, где $\{N_j\}$ — попарно несовместные подмножества. Обозначим $S(N_k) = \sum_{i\in N_k} y_i$ и для любого $L \in \mathfrak{X}^*$

$$\mu_m(L, N) = \sum_{j\leqslant m+1} \sum_{i\in N_j} \mathbf{E}\,|L(y_i)|^3 \left(\mathbf{E}(L(S(N_j)))^2\right)^{-1}. \tag{19}$$

Некоторые из приводимых далее утверждений усиливают соответствующие результаты в [3].

Лемма 7. *Пусть L и L_m — непрерывные линейный и m-линейный функционалы, заданные на $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^m$ соответственно. Если $\mu_m(L, N)\,|t| \leqslant 1/4$, то*

$$|\mathbf{E}L_m(S(N), \ldots, S(N)) \exp\{itL(S(N))\}| \leqslant$$

$$\leqslant m^m \|L_m\|^* \left(\sum_{j\leqslant m+1} \mathbf{E}\|S(N_j)\|^m \right) \sum_{j\leqslant m+1} \exp\left\{ -\frac{t^2}{3} \mathbf{D}L(S(N_j)) \right\}. \tag{20}$$

Доказательство. Обозначим через J левую часть (20). Тогда имеем

$$J=\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{m+1}\mathbf{E}L_m\left(S\left(N_{i_1}\right),\ \ldots,\ S\left(N_{i_m}\right)\right)\exp\left\{it\sum_{j\leqslant m+1}L\left(S\left(N_j\right)\right)\right\}\right|.$$

В сумме $\sum\limits_{j\leqslant m+1}L(S(N_j))$ найдется по крайней мере одно слагаемое $L(S(N_{j^*}))$, где $j^*=j^*(i_1,\ \ldots,\ i_m)$, которое не зависит от $S\left(N_{i_1}\right),\ \ldots$ $\ldots,\ S\left(N_{i_m}\right)$. Поэтому

$$J\leqslant\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{m+1}\mathbf{E}\left|L_m\left(S\left(N_{i_1}\right),\ \ldots,\ S\left(N_{i_m}\right)\right)\right|\left|\mathbf{E}\exp\left\{itL\left(S\left(N_{j^*}\right)\right)\right\}\right|. \quad (21)$$

Хорошо известно (см. [17]), что если

$$|t|\sum_{k\in N_{j^*}}\mathbf{E}\left|L\left(y_k\right)\right|^3\left(\mathbf{E}L\left(S\left(N_{j^*}\right)\right)^2\right)^{-1}\leqslant 1/4,$$

то

$$\left|\mathbf{E}\exp\left\{itL\left(S\left(N_{j^*}\right)\right)\right\}\right|\leqslant\exp\left\{-\frac{t^2}{3}\mathbf{D}L\left(S\left(N_{j^*}\right)\right)\right\}. \quad (22)$$

Так как для каждого $j\leqslant m+1$

$$\sum_{k\in N_j}\mathbf{E}\left|L\left(y_k\right)\right|^3\left(\mathbf{E}L\left(S\left(N_{j^*}\right)\right)^2\right)^{-1}\leqslant\mu_m(L,\ N),$$

то из (21) и (22) легко следует (20). Лемма доказана.

Лемма 8. *Для любых положительных чисел* $\{u_i;\ i\leqslant m\}$ *и* $\{v_i;\ i\leqslant m\}$ *справедливо двойное неравенство*

$$\min_{i\leqslant n}\frac{u_i}{v_i}\leqslant\frac{\sum\limits_{i\leqslant m}u_i}{\sum\limits_{i\leqslant m}v_i}\leqslant\max_{i\leqslant m}\frac{u_i}{v_i}. \quad (23)$$

Доказательство следует из очевидного тождества

$$\frac{\sum\limits_{i\leqslant m}u_i}{\sum\limits_{i\leqslant m}v_i}=\frac{\sum\limits_{i\leqslant m}\left(\frac{u_i}{v_i}\right)v_i}{\sum\limits_{i\leqslant m}v_i}.$$

Следствие. *Неравенство* (20) *имеет место, если*

$$\|L\|^*\,|t|\max_{k\in N}\operatorname{ess\,sup}|y_k|\leqslant 1/4.$$

Утверждение следует из (19) и (23).

Замечание. Если $\{y_i\}$ — центрированные гауссовские с.э. в $\mathfrak{X}$, то (20) имеет место для всех $t\in\mathbf{R}$.

Для любого подмножества $N\subseteq\{1,\ \ldots,\ n\}$ введем следующие обозначения:

$$S_{nk}(N)=\sum_{i<k,i\notin N}\xi'_{ni}+\sum_{i>k,i\notin N}\gamma_{ni}+\sum_{i<k,i\in N}\left(\xi_{ni}^{(2)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)(1-\nu_i)+$$
$$+\sum_{i<k,i\in N}\left\{\left(\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)\nu_i+\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right\},$$

$$\delta_{nk}(N)=\sum_{i<k,i\in N}\left(\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}\right)\nu_i+\sum_{i>k,i\in N}\gamma_{ni},\quad \Delta_n(N)=\left(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)^{1/2}. \quad (24)$$

Лемма 9. *Пусть* $F\in\mathscr{C}(m,\ \beta,\ \alpha)$. *Тогда для любого натурального* $r\leqslant$ $\leqslant m$ *при выполнении* (1.4)

$$\mathbf{E}|F^{(r)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)^r]|\leqslant C(F,\ A,\ r,\ Q)\Delta_n(N)^r.$$

Доказательство. Из лемм 1—4 и неравенства Гёльдера следует

$$\mathbf{E}|F^{(r)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)^r]| \leqslant C_0(F)\mathbf{E}^{1/2}\|\delta_{nk}(N)\|^{2r}\mathbf{E}^{1/2}\exp\{2\alpha\|S_{nk}(N)\|\} \leqslant$$
$$\leqslant C(F,\ A,\ r,\ Q)\mathbf{E}^{1/2}\exp\{2\alpha(\|\Sigma_1\|+\|\Sigma_2\|+\|\Sigma_3\|+\|\Sigma_4\|)\}\Delta_n(N)^r,$$

где Σ_j — частичные суммы в правой части формулы для $S_{nk}(N)$ в (24) в порядке их следования. Еще дважды применяя неравенство Гёльдера, окончательно получаем

$$\mathbf{E}^{1/2}\exp\{2\alpha(\|\Sigma_1\|+\|\Sigma_2\|+\|\Sigma_3\|+\|\Sigma_4\|)\}\leqslant\prod_{j=1}^{4}\mathbf{E}^{1/8}\exp\{8\alpha\|\Sigma_j\|\}.$$

В силу лемм 1 и 2 величины $\mathbf{E}\exp\{8\alpha\|\Sigma_j\|\}$ при достаточно малом c^* в (1) ограничены равномерно по n. Лемма доказана.

Обозначим

$$S_{nk}=\sum_{i<k}\xi'_{ni}+\sum_{i>k}\gamma_{ni},\quad \sigma_n(N)=\max_{i\in N}\widehat{\sigma}_{ni}. \tag{25}$$

Лемма 10. *Пусть* $H\in\mathscr{C}(m,\ \beta,\ \alpha)$, $F\in\mathscr{C}(r,\ \beta,\ \alpha)$, $m\geqslant 1$, $r\geqslant 2$, *и пусть* $\{N_j;\ j\leqslant 4r+m+1\}$ — *попарно несовместные подмножества натуральных чисел, для которых* $N=\bigcup_j N_j\subset\{1,\ \ldots,\ n\}$. *Если* $\Delta_n^2(N)|t|\leqslant 1$ *и* $QC_0(F)\sigma_n(N)^{1-v}|t|\leqslant 1/8$ *для некоторого* $v\in(0,\ 1)$, *то для любого* $p>1$ *при выполнении* (1.4)

$$|\mathbf{E}H(S_{nk})\exp\{itF(S_{nk})\}|\leqslant$$
$$\leqslant C(F,H,A,v,m,r,Q)\Big\{\Delta_n(N)^{m+\beta}+|t|\Delta_n(N)^{r+\beta}+|t|^5\Delta_n(N)^{10}+$$
$$+\max_{j\leqslant 4r+m+1}\mathbf{E}^{1/p}\exp\Big\{-\frac{t^2p}{3}\mathbf{E}_{S_{nk}(N),v}\big(F^{(1)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N_j)]\big)^2\Big\}\Big\}. \tag{26}$$

Доказательство. Используя формулу Тейлора, получаем

$$|\mathbf{E}H(S_{nk})\exp\{itF(S_{nk})\}|\leqslant\Big|E\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}H^{(l)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)^l]\times$$
$$\times\exp\Big\{it\Big\{F(S_{nk}(N))+\sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s!}F^{(s)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)^s]\Big\}\Big\}\Big|+$$
$$+C(H,Q)\Delta_n(N)^{m+\beta}+C(H,F,Q)|t|\Delta_n(N)^{r+\beta}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{l=0}^{m}\mathbf{E}\Big|\mathbf{E}_{S_{nk}(\cdot),v}\frac{1}{l!}H^{(l)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)^l]\exp\{itF^{(1)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)]\}\times$$
$$\times\Big\{1+\sum_{d=1}^{4}\frac{1}{d!}\Big(it\sum_{s=2}^{r}\frac{1}{s!}F^{(s)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)^s]\Big)^d\Big\}\Big|+$$
$$+C(H,F,Q)\{\Delta_n(N)^{m+\beta}+|t|\Delta_n(N)^{r+\beta}+|t|^5\Delta_n(N)^{10}\}. \tag{27}$$

Теперь рассмотрим условное математическое ожидание $\mathbf{E}_{S_{nk}(\cdot),v}$ в правой части (27) соответственно на множествах $\Omega_1=\{\|S_{nk}(N)\|\leqslant v\alpha^{-1}|\log\sigma_n(N)|\}$ и $\Omega_2=\{\|S_{nk}(N)\|>v\alpha^{-1}|\log\sigma_n(N)|\}$. Это математическое ожидание оценивается на множестве Ω_1 с помощью лемм 7 и 9, поскольку правая часть (27), по существу, содержит выражения вида

$$\big|\mathbf{E}_{S_{nk}(N),v}L_l(\delta_{nk}(N)^l)\exp\{itL(\delta_{nk}(N))\}\big|,$$

где $l\leqslant 4r+m$,

$$\|L\|^*\leqslant C_0(F)\exp\{\alpha\|S_{nk}(N)\|\},$$
$$\|L_l\|^*\leqslant C_0(F)\exp\{(4r+m)\alpha\|S_{nk}\|\}.$$

Кроме того, надо учесть, что на Ω_1

$$\|L\|^* \max_{i\in N} \operatorname{ess\,sup} \left| \left(\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}\right) \nu_i \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2Q\sigma_n(N) \| F^{(1)}(S_{nk}(N)) \|^* \leqslant 2QC_0(F)\, \sigma_n(N)^{1-v}.$$

Следовательно, в условиях леммы

$$\left| \mathbf{E}_{S_{nk}(N),\nu} L_l\left(\delta_{nk}(N)^l\right) \exp\{itL(\delta_{nk}(N))\} \right| \leqslant$$
$$\leqslant C(F, H, m, r, Q) \exp\{(4r+m)\alpha \| S_{nk}(N) \|\} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{j=1}^{4r+m+1} \mathbf{E}_\nu \| \delta_{nk}(N_j) \|^l \sum_{j=1}^{4r+m+1} \exp\left\{ -\frac{t^2}{3} \mathbf{E}_{S_{nk}(N),\nu} \left(F^{(1)}(S_{nk}(N))\,[\delta_{nk}(N_j)]\right)^2 \right\} + \right.$$
$$\left. + I\left(\| S_{nk}(N) \| > v\alpha^{-1} \right) \right\}. \tag{28}$$

Оценим вероятность события Ω_2. Используя неравенства Гёльдера и Йенсена, а также леммы 1 и 2, получаем

$$\mathbf{P}(\Omega_2) \leqslant \mathbf{E}^{1/2} \exp\left\{ \frac{\alpha}{8c^*} \| S_{n,n+1} \| \right\} \times$$
$$\times\, \mathbf{E}^{1/2} \exp\left\{ \frac{\alpha}{8c^*} \| W_n \| \right\} \exp\left\{ -\frac{v}{16c^*} |\log \sigma_n(N)| \right\} \leqslant C(A, \alpha)\, \sigma_n(N)^{v/(16c^*)}. \tag{29}$$

Далее, усредняя обе части неравенства (28), применяя снова неравенство Гёльдера и ранее доказанные леммы, окончательно получаем из (27) оценку (26).

Лемма 11. *Пусть* $|t|\Delta_n(N) \geqslant 1$, $t^2\Delta_n(N)^3 \leqslant 1$ *и* $|t\Delta_n(N)|^6 \varepsilon(n) \leqslant 1$. *Тогда если* N *удовлетворяет* (1.4), *то*

$$\mathbf{E} \exp\left\{ -t^2 \mathbf{E}_{S_{nk}(N),\nu} \left(F^{(1)}(S_{nk}(N))\,[\delta_{nk}(N_j)]\right)^2 \right\} \leqslant$$
$$\leqslant C(F, A, Q) \left\{ \mathbf{E}^{3/4} \exp\left\{ -t^2 \mathbf{E}_{W_n,\nu} \left(F^{(1)}(W_n)\,[\delta_{nk}(N_j)]\right)^2 \right\} + \right.$$
$$\left. + \{(t^2\Delta_n(N)^3)^6 + (|t\Delta_n(N)|^6 \varepsilon(n))^{7/2}\} \right..$$

Доказательство. Обозначим

$$\Phi_{kj}(x) = \mathbf{E}_\nu \left(F^{(1)}(x)\,[\delta_{nk}(N_j)]\right)^2,$$
$$e_{nk}(N) = \sum_{i<k,\, i\in N} \left(\left(\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right) \nu_i + \mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)} \right), \tag{30}$$
$$S_{nkr}(N) = \sum_{i<r,\, i\in N} \left(\xi_{ni}^{(2)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)(1-\nu_i) + \sum_{i<r,\, i\notin N} \xi'_{ni} +$$
$$+ \sum_{r<i\leqslant k,\, i\in N} \gamma_{ni}^{(2)}(1-\nu_i) + \sum_{i>r,\, i\notin N} \gamma_{ni}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем, конечно, предполагается, что последовательности $\{\xi'_{ni}\}$, $\{\xi_{ni}^{(2)}\}$, $\{\gamma_{ni}\}$, $\{\gamma_{ni}^{(2)}\}$ и $\{\nu_i\}$ независимы в совокупности.

Теперь воспользуемся методом композиций (операторный метод Линдеберга) доказательства центральной предельной теоремы (см. [3]). Нам понадобится следующий вариант формулы Тейлора:

$$\exp\{-t^2\Phi_{kj}(x+\delta)\} = \exp\{-t^2\Phi_{kj}(x)\} \times$$
$$\times \left\{ 1 - t^2\Phi_{kj}^{(1)}(x)[\delta] + \frac{t^4}{2}\left(\Phi_{kj}^{(1)}(x)[\delta]\right)^2 - \frac{t^2}{2}\Phi_{kj}^{(2)}(x)[\delta^2] \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\theta)^2\, \Psi(x+\theta\delta, t) \exp\{-t^2\Phi_{kj}(x+\theta\delta)\}\, d\theta, \tag{31}$$

где

$$\Psi(x, t) = t^6 \left(\Phi_{kj}^{(1)}(x)[\delta]\right)^3 - 3t^4 \Phi_{kj}^{(1)}(x)[\delta]\, \Phi_{kj}^{(2)}(x)[\delta^2] + t^2 \Phi_{kj}^{(3)}(x)[\delta^3].$$

Отметим, что если $F \in \mathscr{C}(4, \beta, \alpha)$ то $\Phi_{kj} \in \mathscr{C}(3, \beta, \alpha)$. Далее имеем

$$\begin{aligned} &|\mathbf{E} \exp\{-t^2 \Phi_{kj}(S_{nk}(N))\} - \mathbf{E} \exp\{-t^2 \Phi_{kj}(W_n)\}| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{r<k} \mathbf{E}\,|\mathbf{E}_\nu \exp\{-t^2 \Phi_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \tilde{\xi}_{nr})\} - \\ &- \mathbf{E}_\nu \exp\{-t^2 \Phi_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \tilde{\gamma}_{nr})\}| + \\ &+ |\mathbf{E} \exp\{-t^2 \Phi_{kj}(S_{nko}(N) + e_{nk}(N))\} - \mathbf{E} \exp\{-t^2 \Phi_{kj}(W_n)\}|, \end{aligned} \tag{32}$$

где $\tilde{\xi}_{nr} = \xi'_{nr}$, $\tilde{\gamma}_{nr} = \gamma_{nr}$, если $r \notin N$ и $\tilde{\xi}_{nr} = (\xi_{nr}^{(2)} - E\xi_{nr}^{(2)})(1 - \nu_r)$, $\tilde{\gamma}_{nr} = \gamma_{nr}^{(2)}(1 - \nu_r)$, если $r \in N$. Теперь применим формулу (31) для каждого члена разности, стоящей под знаком суммы в правой части (32), соответственно при $x = S_{nkr}(N) + e_{nk}(N)$, $\delta = \tilde{\xi}_{nr}$ или $\delta = \tilde{\gamma}_{nr}$. Заметим, что при фиксированных с. в. $\{\nu_i\}$ $S_{nkr}(N)$ состоит из независимых с. э. и из условий теоремы следуют соотношения

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_\nu \Phi_{kj}^{(1)}(x)[\xi'_{nr}] = \mathbf{E}_\nu \Phi_{kj}^{(1)}(x)[\xi_{nr} I(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha)], \\ &|\mathbf{E}_{\nu,x} L_2(x)[\xi'^2_{nr}] - E_{\nu,x} L_2(x)[\gamma^2_{nr}]| = |E_{\nu,x} L_2(x)[\xi'^2_{nr}] - \mathbf{E}_{\nu,x} L_2(x)[\xi^2_{nr}]| \leqslant \\ &\leqslant 2\|L_2(x)\|^* \mathbf{E}\|\xi_{nr}\|^2 I(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha), \\ &\mathbf{E}_\nu L_2(x)[(\xi_{nr}^{(2)} - E\xi_{nr}^{(2)})^2] = \mathbf{E}_\nu L_2(x)[(\gamma_{nr}^{(2)})^2], \end{aligned} \tag{33}$$

где $L_2(x)$ — произвольный билинейный непрерывный функционал. Например, $L_2(x)[z, y] = \Phi_{kj}^{(2)}(x)[z, y]$ или $L_2(x)[z, y] = \Phi_{kj}^{(1)}(x)[z]\, \Phi_{kj}^{(1)}(x)[y]$ (см. лемму 6).

Таким образом, с помощью (31) и (33) можем оценить

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\,|\mathbf{E}_\nu \exp\{-t^2 \Phi_{kj}(x + \tilde{\xi}_{nr})\} - \mathbf{E}_\nu \exp\{-t^2 \Phi_{kj}(x + \tilde{\gamma}_{nr})\}| \leqslant \\ &\leqslant C(F, Q)\,|t\Delta_n(N)|^4\, \mathbf{E}\|\xi_{nr}\|^2 I(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha) \times \\ &\times \mathbf{E}^{(q-1)/q} \exp\left\{\frac{4q\alpha}{q-1}(\|S_{nkr}(N)\| + \|e_{nk}(N)\|)\right\} \mathbf{E}^{1/q} \exp\{-qt^2 \Phi_{kj}(x)\} + \\ &+ C(F, Q)\,|t\Delta_n(N)|^6\, \mathbf{E}^{(q-1)/q} \exp\left\{\frac{6\alpha q}{q-1}(\|S_{nkr}(N)\| + \|e_{nk}(N)\| + 2c^*/\alpha)\right\} \times \\ &\times \sup_{\theta \in [0,1]} \mathbf{E}\|\tilde{\xi}_{nr}\|^3\, \mathbf{E}^{1/q}_{\tilde{\xi}_{nr}} \exp\{-qt^2 \Phi_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\tilde{\xi}_{nr})\} + \\ &+ C(F, Q)\, \mathbf{E}^{(q-1)/q} \|\tilde{\gamma}_{nr}\|^{3q/(q-1)} \exp\left\{\frac{6\alpha q}{q-1}\|\tilde{\gamma}_{nr}\|\right\} \times \\ &\times \mathbf{E}^{(q-1)/q} \exp\left\{\frac{6\alpha q}{q-1}(\|S_{nkr}(N)\| + \|e_{nk}(N)\|)\right\} \times \\ &\times \sup_{\theta \in [0,1]} \mathbf{E}^{1/q} \exp\{-qt^2 \Phi_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\tilde{\xi}_{nr})\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Используя леммы 1—5 и (1.2), получаем

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}^{(q-1)/q} \|\tilde{\gamma}_{nr}\|^{3q/(q-1)} \exp\left\{\frac{6\alpha q}{q-1}\|\tilde{\gamma}_{nr}\|\right\} \leqslant \mathbf{E}^{(q-1)/2q} \|\tilde{\gamma}_{nr}\|^{6q/(q-1)}\, \mathbf{E}^{(q-1)/2q} \times \\ &\times \exp\left\{\frac{12\alpha q}{q-1}\|\tilde{\gamma}_{nr}\|\right\} \leqslant C(q, A)\,\sigma^3_{nr} \leqslant C_1(q, A)\,\{(\mathbf{E}\|\xi_{nr}\|^2 I(\|\xi_{nr}\| \leqslant c^*/\alpha))^{3/2} + \\ &+ (\mathbf{E}\|\xi_{nr}\|^2 I(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha))^{3/2}\} \leqslant C_1(q, A)\,\{\mathbf{E}\|\xi'_{ni}\|^3 + \mathbf{E}\|\xi_{nr}\|^2 I(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha)\}. \end{aligned}$$

Таким образом, из (34) вытекает оценка первой суммы в правой части (32):

$$\sum_{r<k} \leqslant C(F, A, q, Q) \,|\, t\Delta_n(N)|^6 \times$$
$$\times \Big\{\varepsilon(n) \sup_{\theta\in[0,1], r<k} \mathbf{E}^{1/q} \exp\{-qt^2\Phi_{kj}(S_{nkr}(N)+e_{nk}(N)+\theta\tilde{\gamma}_{nr})\} +$$
$$+ \sum_{r<k} \sup_{\theta\in[0,1]} \mathbf{E}\|\tilde{\xi}_{nr}\|^3 E^{1/q} \exp\{-qt^2\Phi_{kj}(S_{nkr}(N)+e_{nk}(N)+\theta\tilde{\xi}_{nr})\}\Big\}. \quad (35)$$

Здесь, конечно, предполагается, что c^* в (1) достаточно мало. Выбором c^* обеспечивается существование величины

$$\sup_{r,k,n} \exp\{C\|S_{nkr}(N)\|\}$$

для любого наперед заданного C.

Для оценки второго слагаемого правой части (32) нам понадобится следующее простое неравенство

$$|\mathrm{e}^{-x} - e^{-y}| \leqslant \mathrm{e}^{-y} \sum_{j\leqslant m} \frac{1}{j!}|x-y|^j + \frac{|x-y|^{m+1}}{(m+1)!}, \quad (36)$$

где m — произвольное натуральное число, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Тогда с помощью лемм 1—5, условия (1.2) и неравенства Гёльдера получаем

$$|\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(S_{nko}(N)+e_{nk}(N))\} - \mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\}| \leqslant$$
$$\leqslant C(F, m)\,\mathbf{E}^{1/q}\exp\{-qt^2\Phi_{kj}(W_n)\}\,\mathbf{E}^{(q-1)/q}\Big\{\sum_{l\leqslant m}\mathbf{E}_\nu\|\delta_{nk}(N_j)\|^{2l}|t|^{2l}\times$$
$$\times\Big(\|e_{nk}(N)\|^l + \mathbf{E}_\nu\Big\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}^{(2)}(1-\nu_i)\Big\|^l + \mathbf{E}\Big\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\Big\|^l\Big)\Big\}^{q/(q-1)}\times$$
$$\times\exp\Big\{\frac{2lq}{q-1}(\|S_{nko}(N)\| + \|e_{nk}(N)\| + \|W_n\|)\Big\} +$$
$$+ C(F, m)|t|^{2(m+1)}\mathbf{E}^{1/2}\exp\{4(m+1)(\|S_{nko}(N)\| + \|e_{nk}(N)\| + \|W_n\|)\}\times$$
$$\times\mathbf{E}^{1/2}\Big(\|e_{nk}(N)\|^{m+1} + \Big\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}^{(2)}(1-\nu_i)\Big\|^{m+1} + \Big\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\Big\|^{m+1}\Big)\times$$
$$\times\mathbf{E}_\nu\|\delta_{nk}(N_j)\|^{4(m+1)} \leqslant C(F, A, m, q, Q)\{E^{1/q}\exp\{-qt^2\Phi_{kj}(W_n)\} +$$
$$+ |t\Delta_n(N)|^{2(m+1)}\Delta_n(N)^{m+1}\}. \quad (37)$$

Из (32)—(37) следует

$$E\exp\{-t^2\Phi_{kj}(S_{nk}(N))\} \leqslant C(F, A, m, q, Q)\{\mathbf{E}^{1/q}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\} +$$
$$+ |t\Delta_n(N)|^6\Big\{\varepsilon(n)\sup_{\theta\in[0,1], r<k} E^{1/q}\exp\{-qt^2\Phi_{kj}(S_{nkr}(N)+e_{nk}(N)+\theta\tilde{\gamma}_{nr})\} +$$
$$+ \sum_{r<k}\sup_{\theta\in[0,1]}\mathbf{E}\|\tilde{\xi}_{nr}\|^3\mathbf{E}^{1/q}_{\tilde{\xi}_{nr}}\exp\{-qt^2\Phi_{kj}(S_{nkr}(N)+e_{nk}(N)+\theta\tilde{\xi}_{nr})\}\Big\} +$$
$$+ \{|t\Delta_n(N)|^{2(m+1)}\Delta_n(N)^{m+1}\}. \quad (38)$$

Неравенство (38), по существу, рекуррентное, потому что с. э. $S_{nkr}(N)$ и $S_{nkr}(N)+\theta\tilde{\gamma}_{nr}$ при фиксированных $\{\nu_i\}$ и θ состоят из независимых с. э. Следовательно, для каждого из математических ожиданий правой части (38), где имеется с. э. $S_{nkr}(N)$, справедлива оценка (37) (равномерная по $\theta\in[0, 1]$). Применяя данное рекуррентное неравенство трижды, имеет

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(S_{nk}(N))\} \leqslant C(F, A, m, q, Q)\Big\{\mathbf{E}^{1/q^4}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\} +$$
$$+ (t^2\Delta_n(N)^3)^{(m+1)/q^3} + (|t\Delta_n(N)|^6\varepsilon(n))^{1+1/q+1/q^2+1/q^3}\Big\}.$$

Полагая $q = (4/3)^{1/4}$, $m = 7$, получаем требуемое. Лемма доказана.

Лемма 12. *Если* $QC_0(F)|t|\sigma_n(N)^{1-v}\leqslant 1/8$, *то при достаточно большом* n *и выполнении* (1.4)

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\}\leqslant \mathbf{E}\exp\left\{-\frac{3t^2}{8}\Phi^*_{kj}(W_n)\right\}+C(A,\alpha,v)\sigma_n(N)^4,$$

где $\Phi^*_{kj}(x)=\mathbf{E}\left(F^{(1)}(x)\left[\sum_{i\in N_j,i<k}(\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni})+\sum_{i\in N_i,i>k}\gamma_{ni}\right]\right)^2.$

Доказательство. Обозначим $W'_n=W_nI\left(\|W_n\|\leqslant\frac{v}{\alpha}|\log\sigma_n(N)|\right)$. Тогда

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\}\leqslant\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W'_n)\}+\mathbf{P}\left(\|W_n\|>\frac{v}{\alpha}|\log\sigma_n(N)|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{E}\exp\left\{-t^2\mathbf{E}_{W_n}\left(F^{(1)}(W_n)\left[\sum_{i\in N_j,i<k}\gamma_{ni}\right]\right)^2\right\}\times$$

$$\times\prod_{i\in N_j,i>k}\left\{1-\frac{1}{2}\left(1-\exp\left\{-t^2\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(W'_u)[\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}])^2\right\}\right)\right\}+$$

$$+\mathbf{P}\left(\|W_n\|>\frac{v}{\alpha}|\log\sigma_n(N)|\right).$$

С помощью простых неравенств

$$1-e^{-x}\geqslant x-x^2/2,\quad \prod_{i\in N}\{1-y_i\}\leqslant\exp\left\{-\sum_{i\in N}y_i\right\}$$

получаем

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\}\leqslant\mathbf{E}\exp\left\{-t^2\mathbf{E}_{W_n}\left(F^{(1)}(W_n)\left[\sum_{i\in N_j,i>k}\gamma_{ni}\right]\right)^2\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\sum_{i\in N_j,i<k}\mathbf{E}_{W_N}(F^{(1)}(W'_n)[\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}])^2+\right.$$

$$\left.+\frac{t^4}{4}\sum_{i\in N_j,i<k}\left(\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(W'_n)[\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}])^2\right)^2\right\}+\mathbf{P}\left(\|W_n\|>\frac{v}{\alpha}|\log\sigma_n(N)|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{E}\exp\{-t^2\mathbf{E}_{W_n}(\ldots)^2\}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}(1-2C_0(F)^2t^2\sigma_n(N)^{2(1-v)}Q^2)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{i\in N_j,i<k}\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(W_n)[\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}])^2\right\}+2\mathbf{P}\left(\|W_n\|>\frac{v}{\alpha}|\log\sigma_n(N)|\right).\tag{39}$$

Последний член правой части (39) оценивается с помощью неравенства (8) и условия (1.2): если $v\log\sigma_n(N)>2\alpha A^{1/2}$ (постоянная A определена в (1.2)), то

$$\mathbf{P}\left(\|W_n\|>\frac{v}{\alpha}|\log\sigma_n(N)|\right)\leqslant\exp\left\{-\frac{(v\alpha^{-1}|\log\sigma_n(N)|-\mathbf{E}\|W_n\|)^2}{2\mathbf{E}\|W_n\|^2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{-\frac{(v\alpha^{-1}|\log\sigma_n(N)|-A^{1/2})^2}{2A}\right\}\leqslant(\sigma_n(N))^{\frac{v}{8A\alpha}|\log\sigma_n(N)|}.$$

Выбором достаточно большого n показатель степени правой части этого неравенства может быть сделан сколь угодно большим. Лемма доказана.

Следствие. *В условиях лемм* 11, 12 *и при выполнении неравенства* $\inf_{k,j}\Delta_n(N_j\setminus\{k\})\geqslant C\Delta_n(N)$ *имеет место оценка*

$$\max_{k,j}\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(S_{nk}(N))\}\leqslant C(F,A,B,Q)\{|t\Delta_n(N)|^{-3M/2}+$$

$$+(t^2\Delta_n(N)^3)^6+(\varepsilon(n)(t\Delta_n(N))^6)^{7/2}\}.\tag{40}$$

Доказательство. Из равенства ковариаций с. э. ξ_{ni} и γ_{ni} следует

$$\Phi^*_{kj}(W_n) = \mathbf{E}_{W_n}\Big(F^{(1)}(W_n)\Big[\sum_{i\in N_j, i<k}\big(\xi^{(1)}_{ni} - \mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}\big)\Big]\Big)^2 + \\ + \sum_{i\in N_j, i>k} \mathbf{E}_{W_n}\big(F^{(1)}(W_n)[\xi^{(1)}_{ni}\nu_i + \xi^{(2)}_{ni}(1-\nu_i)]\big)^2 \equiv J.$$

Используя простое соотношение $\mathbf{E}(\zeta + c)^2 \geqslant \mathbf{E}(\zeta - \mathbf{E}\zeta)^2$ и неравенство Йенсена, получаем

$$J \geqslant \sum_{i\in N_j, i<k} \mathbf{E}_{W_n}\big(F^{(1)}(W_n)[\xi^{(1)}_{ni} - \mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}]\big)^2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i\in N_j, i>k} \mathbf{E}_{W_n}\big(F^{(1)}(W_n)[\xi^{(1)}_{ni} - \mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}]\big)^2 \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i\in N_j\setminus\{k\}} \mathbf{D}_{ni}(W_n). \tag{41}$$

Неравенство (40) следует из (41), лемм 10, 12 и оценки

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2\zeta\} = t^2\int_0^\infty \mathbf{P}(\zeta < x)\exp\{-t^2 x\}\,dx \leqslant \\ \leqslant e^{-t^2} + Bt^2\int_0^1 x^M \exp\{-t^2 x\}\,dx \leqslant C(B)\,|t|^{-2M}, \tag{42}$$

где $\zeta = \sum_{i\in N} \mathbf{D}_{ni}(W_n)\,\Delta_n^{-2}(N)$.

Лемма 13. *Пусть H и F удовлетворяют условия леммы 10. Тогда ция, имеющая 12 ограниченных производных. Тогда при выполнении* (1.4)

$$\mathbf{E}G\big(\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(S_{nk}(N))\big) \leqslant C(F, A, Q)\sup_{z\in\mathbf{R}, s\leqslant 12}\left|\frac{d^s}{dz^s}G(z)\right| \times \\ \times \{\mathbf{E}G(\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(W_n))^{3/4} + \Delta_n(N)^6 + \varepsilon(n)^{7/2}\}. \tag{43}$$

Доказательство, по существу, повторяет рассуждения леммы 11, в которых вместо $\exp\{-t^2 z\}$ нужно рассматривать $G(t^2 z)$ и положить затем $t = \Delta_n(N)^{-1}$.

Лемма 14. *Пусть H и F удовлетворяют условиям леммы 10. Тогда для любого $t\in\mathbf{R}$ при выполнении* (1.5)

$$|\mathbf{E}H(W_n)\exp\{itF(W_n)\}| \leqslant C(F, H, A, B)\,|t|^{-\mu},$$

где $\mu \equiv \mu(v, \beta, r, m) = \min\{m, r\} + \beta/4$.

Доказательство. В силу безграничной делимости с. э. W_n можно представить как

$$W_n \overset{d}{=} W_n^{(0)}(1 - |t|^{2(v-1)})^{1/2} + (m+1)^{-1/2}|t|^{v-1}\sum_{j=1}^{m+1} W_n^{(j)},$$

где $\{W_n^{(j)};\ j = 0, 1, \ldots\}$ — независимые в совокупности копии с. э. W_n, $|t| \geqslant 2$, $v \in (0, 1)$. Положим $v = \beta(2\min\{m, r\})^{-1}$. Точно так же, как и при доказательстве леммы 10, получаем (см. также лемму 7)

$$|\mathbf{E}H(W_n)\exp\{itF(W_n)\}| \leqslant \sum_{l=0}^{m}\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_{W_n^0}\frac{b^l_{v,m}(t)}{l!}\times\right. \\ \times H^{(l)}(a_v(t)W_n^{(0)})\left[\left(\sum_{j=1}^{m+1}W_n^{(j)}\right)^l\right]\exp\left\{itF^{(1)}(a_v(t)W_n^{(0)})\left[\sum_{j=1}^{m+1}W_n^{(j)}\right]\right\}\times \\ \times\left.\left\{1 + \sum_{d=1}^{R(m,r)-1}\frac{(it)^d}{d!}\left(\sum_{s=2}^{r}\frac{b^s_{v,m}(t)}{s!}\cdot F^{(s)}(a_v(t)W_n^{(0)})\left[\left(\sum W_n^{(j)}\right)^s\right]\right)^d\right\}\right| +$$

$$+C(\cdot)\{b_{v,m}(t)^{m+\beta}+|t|\,b_{v,m}(t)^{r+\beta}+(|t|\,b_{v,m}^2(t))^{R(m,r)}\}\leqslant$$
$$\leqslant C_1(\cdot)\,\mathbf{E}\exp\left\{-C_2t^2E_{W_n^{(0)}}(F^{(1)}(a_v(t)\,W_n^{(0)})\,[W_n^{(1)}])^2\right\}+$$
$$+C_1(\cdot)\{b_{v,m}^{m+\beta}(t)+|t|\,b_{v,m}^{r+\beta}(t)+(|t|\,b_{v,m}^2(t))^{R(m,r)}\},\qquad(44)$$

где $a_v(t)=(1-|t|^{2(v-1)})^{1/2}$, $b_{v,m}(t)=|t|^{v-1}(m+1)^{-1/2}$, $R(m,r)=m+r+3$. Используя неравенства $x^2\geqslant 1/2y^2-(x-y)^2$, $\mathbf{E}(\zeta+c)^2\geqslant\mathbf{E}(\zeta-\mathbf{E}\zeta)^2$, а также равенство ковариаций с. э. ξ_{ni} и γ_{ni}, получаем

$$\mathbf{E}_{W_n^{(0)}}(F^{(1)}(a_v(t)\,W_n^{(0)})\,[W_n^{(1)}])^2\geqslant\frac{1}{2}E_{W_n^{(0)}}\left(F^{(1)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\leqslant n}\xi_{ni}\right]\right)^2-$$
$$-C(A,F)\,|t|^{4(v-1)}\|W_n^{(0)}\|^2\exp\{2\alpha\|W_n^{(0)}\|\}=$$
$$=\frac{1}{2}E_{W_n^{(0)}}\left(F^{(1)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\leqslant n}(\xi_{ni}^{(1)}\nu_i+\xi_{ni}^{(2)}(1-\nu_i))\right]\right)^2-\ldots$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\mathbf{E}_{W_n^{(0)}}\mathbf{E}_{W_n^{(0)},\xi^{(2)},\nu}\left(F^{(1)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\leqslant n}(\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)})\,\nu_i\right]\right)^2-\ldots$$
$$=\frac{1}{4}\mathbf{E}_{W_n^{(0)}}\left(F^{(1)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\leqslant n}(\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)})\right]\right)^2-\ldots=$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{i\leqslant n}\mathbf{D}_{ni}(W_n^{(0)})-C(A,F)\,|t|^{4(v-1)}\|W_n^{(0)}\|^2\exp\{2\alpha\|W_n^{(0)}\|\}.\qquad(45)$$

Теперь как и при доказательстве (40), окончательно получаем

$$|\mathbf{E}H(W_n)\exp\{itF(W_n)\}|\leqslant C(\cdot)\,\mathbf{E}\exp\left\{-Ct^2\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(a_v(t)\,W_n)[\cdot])^2\right\}\times$$
$$\times I\left(\|W_n\|\leqslant\frac{v}{\alpha}\log|t|\right)+C(\cdot)\,\mathbf{P}\left(\|W_n\|>\frac{v}{\alpha}\log|t|\right)+C(\cdot)\,|t|^{-\mu(\cdot)}\leqslant$$
$$\leqslant C_1(\cdot)\,\mathbf{E}\exp\left\{-C_1t^2\sum_{i\leqslant n}\mathbf{D}_{ni}(W_n)\right\}+C_2(\cdot)\exp\left\{-\frac{v^2}{2\alpha^2A}(\log|t|)^2\right\}+$$
$$+C(\cdot)\,|t|^{-\mu(\cdot)}\leqslant C_3(\cdot)\,|t|^{-\mu(\cdot)}$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если $F\in\mathscr{C}(1,\beta,\alpha)$ то при выполнении* (1.5)

$$|\mathbf{E}\exp\{itF(W_n)\}|\leqslant C(\cdot)\,|t|^{-1-\beta/4}.$$

Отсюда, в частности, следует существование ограниченной равномерно по n плотности распределения с. в. $F(W_n)$.

Лемма 15. *Для любых $z>0$ и $v\in(0,1)$*

$$\mathbf{P}(\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(S_{nk}(N))<z)\leqslant C(F,A,B,v,Q)\,z^{-12}\times$$
$$\times\{z^{3M/4}+(\Delta_n(N)^2\sigma_n(N)^{v-2})^{-3M/4}+\Delta_n(N)^6+\varepsilon(n)^{7/2}\},$$

где M и $\Phi_{kj}(x)$ определены соответственно в (1.5) *и* (30), $\min\limits_{k,j}\Delta_n(N_i\setminus\setminus\{k\})\geqslant C\Delta_n(N)$.

Доказательство. Пусть неотрицательная функция $G(z)$ удовлетворяет условиям леммы 13 и

$$G(z)\geqslant C_0,\ \text{если}\ |z|\leqslant 1,$$
$$G(z)=0,\ \text{если}\ |z|\geqslant 2.$$

Тогда из (43) следует

$$\mathbf{P}(\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(S_{nk}(N))<z)\leqslant C_0^{-1}G(z^{-1}\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(S_{nk}(N)))\leqslant$$
$$\leqslant C(F,G,A,Q)\,z^{-12}\{\mathbf{P}^{3/4}(\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(W_n)<2z)+\Delta_n(N)^6+\varepsilon(n)^{7/2}\}.$$

Обозначим $W_n' = W_n I\left(\|W_n\| \leqslant \frac{v}{2\alpha}|\log \sigma_n(N)|\right)$. Имеем

$$\mathbf{P}\left(\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(W_n) < 2z\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\Phi_{kj}(W_n) - \frac{1}{2}\mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W_n) < 0\right) +$$
$$+ \mathbf{P}\left(\frac{1}{4}\sum_{i \in N_j \setminus \{k\}} \mathbf{D}_{ni}(W_n) < 2z\Delta_n(N)^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left(\Phi_{kj}(W_n') - \frac{1}{2}\mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W_n') < 0\right) + C(B, \alpha, v)\{z^M + \sigma_n(N)^8\}. \quad (46)$$

Для оценки первого слагаемого правой части (46) воспользуемся неравенством Бернштейна и (42):

$$\mathbf{P}\left(\Phi_{kj}(W_n^1) - \frac{1}{2}\mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W_n') < 0\right) =$$
$$= \mathbf{E}\mathbf{P}_{W_n}\left(-\Phi_{kj}(W_n') + \mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W_n') > \frac{1}{2}\mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W_n')\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}\exp\left\{-\frac{C(Q)\left(E_{W_n}\Phi_{kj}(W_n')\right)^2}{\sum_{i \in N_j}\left(\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(W_n')[\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}])^2\right)^2 + \sigma_n^2(N)\|F^{(1)}(W_n')\|^{*2}\mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W_n')}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}\exp\left\{-\sigma_n(N)^{v-2}C(F, Q)\mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W_n')\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C(F, B, Q)\{(\Delta_n(N)^2\sigma_n(N)^{v-2})^{-M} + \sigma_n(N)^8\}.$$

Лемма доказана.

Обозначим

$$\mu_{nm}(x, N, \nu) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\sum_{i \in N_j} \mathbf{E}_\nu |F^{(1)}(x)[\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}]\nu_i|^3}{\sum_{i \in N_j} \mathbf{E}_\nu (F^{(1)}(x)[\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}]\nu_i)^2}, \quad (47)$$

где $N = \bigcup_{j \leqslant m} N_j$, $N_k \cap N_j = \varnothing$.

Лемма 16. *Для любой фиксированной числовой последовательности* $\{\nu_i\}$, *удовлетворяющей условию* $\sum_{i \in N_j} \nu_i > 0$, $j \leqslant m$, *функционал* $\mu_{nm}(x, N, \nu)$ *имеет две непрерывные производные Фреше, причем вторая производная удовлетворяет условию Липшица. Кроме того,*

$$\mu_{nm}(x, N, \nu) \leqslant C(F, Q)\sigma_n(N)\exp\{\alpha\|x\|\}, \quad (48)$$

$$\|\mu_{nm}^{(1)}(x, N, \nu)\|^* \leqslant C(F, Q)\exp\{3\alpha\|x\|\}\sigma_n(N)\left\{1 + \sum_{j=1}^{m}\Delta_n(N_j)^2(\Phi_{n+1,j}(x)^{-1}\right\}, \quad (49)$$

$$\|\mu_{nm}^{(2)}(x, N, \nu)\|^* \leqslant C(F, Q)\exp\{5\alpha\|x\|\}\sigma_n(N) \times$$
$$\times\left\{1 + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{m}\Delta_n(N_j)^{2k}(\Phi_{n+1,j}(x))^{-k}\right\}, \quad (50)$$

$$\|\mu_{nm}^{(2)}(x + h, N, \nu) - \mu_{nm}^{(2)}(x, N, \nu)\|^* \leqslant C(F, Q)\|h\| \times$$
$$\times \exp\{7\alpha\|x\|\}\sigma_n(N)\left\{1 + \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{m}\Delta_n(N_j)^{2k}(\Phi_{n+1,j}(x))^{-k}\right\}. \quad (51)$$

Доказательство. Существование у функции $\mu_n(x, N, \nu)$ второй производной Фреше, удовлетворяющей условию Липшица, сразу следует из (47) (отметим, что функция $|z|^3$ дважды непрерывно дифференцируема и вторая производная удовлетворяет условию Липшица). Для получения оценок (48) — (51) нам понадобится неравенство (23). Имеем

$$\mu_{nm}(x, N, \nu) \leqslant \max_{j\leqslant m, i\in N_j} \frac{m\mathrm{E}_\nu \left| F^{(1)}(x)\left[\xi_{ni}^{(1)} - \mathrm{E}\xi_{ni}^{(1)}\right]\right|^3}{\mathrm{E}_\nu \left(F^{(1)}(x)\left[\xi_{ni}^{(1)} - \mathrm{E}\xi_{ni}^{(1)}\right]\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant C(F, Q)\,\sigma_n(N)\exp\{\alpha\|x\|\}. \qquad (52)$$

При выводе (52) использовалось также неравенство $\left|\xi_{ni}^{(1)}\right| \leqslant C(Q)\,\sigma_n(N)$. Оценим $\mu_{nm}^{(1)}(x, \cdot)$. Имеем

$$\mu_{nm}^{(1)}(x, N, \nu)[h] = \sum_{j=1}^{m} \frac{3\sum\limits_{i\in N_j} \nu_i \mathrm{E}\left\{(F^{(1)}(x)[\cdot])^2 \operatorname{sgn}(F^{(1)}(x)[\cdot])\,F^{(2)}(x)[\cdot, h]\right\}}{\sum\limits_{i\in N_j} \nu_i \mathrm{E}\,(F^{(1)}(x)[\cdot])^2} -$$

$$-\sum_{j=1}^{m} \frac{\sum\limits_{i\in N_j} \nu_i \mathrm{E}\left|F^{(1)}(x)[\cdot]\right|^3 2\sum\limits_{i\in N_j} \nu_i \mathrm{E}\,(F^{(1)}(x)[\cdot]\,F^{(2)}(x)[\cdot, h])}{\left(\sum\limits_{i\in N_j} \nu_i \mathrm{E}\,(F^{(1)}(x)[\cdot])^2\right)^2}. \qquad (53)$$

Обозначим первую и вторую суммы правой части (53) соответственно R_1 и R_2. Далее, с помощью (23) получаем

$$|R_1| \leqslant 3m\cdot \max_{j\leqslant m, i\in N_j} \frac{\mathrm{E}\,(F^{(1)}(x)[\cdot])^2\left|F^{(2)}(x)[\cdot, h]\right|}{\mathrm{E}\,(F^{(1)}(x)[\cdot])^2} \leqslant C(Q)\,m\,\|F^{(2)}(x)\|^*\,\|h\|\,\sigma_n(N).$$

Для R_2 справедлива оценка

$$R_2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{C(Q)\,\sigma_n(N_j)\,\|F^{(1)}(x)\|^{*2}\,\|F^{(2)}(x)\|^*\,\|h\|\,\Delta_n^2(N_j)}{\sum\limits_{i\in N_j} \nu_i \mathrm{E}\,(F^{(1)}(x)[\cdot])^2} \leqslant$$

$$\leqslant C(F, Q)\,\sigma_n(N)\exp\{3\alpha\|x\|\}\sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_n^2(N_j)}{\Phi_{n+1,j}(x)}.$$

Вывод (50) и (51) проводится совершенно аналогично. Лемма доказана.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Обозначим через $N^* = \{j(n, k);\ k = 1, \ldots, k(n)\}$ — подмножество индексов, определяемое условиями

$$m_{nj(n,1)} \equiv \left(\mathrm{E}\|\xi'_{nj(n,1)}\|^3 + \mathrm{E}\|\xi_{nj(n,1)}\|^2 I(\|\xi_{nj(n,1)}\| < c^*/\alpha)\right)\sigma_{nj(n,1)}^{-2} = \max_{j<n} m_{nj},$$

$$m_{nj(n,k)} = \max_{j\leqslant n;\, j\notin\{j(n,1),\ldots,j(n,k-1)\}} m_{nj}, \quad k \geqslant 2,$$

$$\delta/4 \leqslant \Delta_n^2(N^*) \leqslant \delta/2.$$

Пусть N^0 такое подмножество $N(\delta, n)\setminus N^*$, что

$$\left|\Delta_n^2(N^0) - \varepsilon(n)^{1,88}\right| \leqslant C\sigma_n^2(N^0),$$

где $\varepsilon(n)$ определено в (1.4), а $\Delta_n(N)$, $\sigma_n(N)$ — соответственно в (2.24) и (2.25). Обозначим

$$S_n^0 = \sum_{i\leqslant n, i\notin N^0} \xi'_{ni} + \sum_{i\in N^0} \left(\xi_{ni}^{(2)} - \mathrm{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)(1 - \nu_i) + e_{n,n+1}(N^0),$$

$$\tilde{\mu}_n(x) = \varepsilon(n) + \mu_{n,20}(x, N^0, \nu).$$

В дальнейшем предполагается, что $N^0 = \bigcup\limits_{j\leqslant 20} N_j^0$, где $\{N_j^0\}$ попарно несовместны и

$$\left|\Delta_n(N_j^0)^2 - \varepsilon(n)^{1,88}/20\right| \leqslant C\sigma_n^2(N^0).$$

Кроме того, в леммах 2.10—2.16 множества N и $\{N_j\}$ таковы, что $N \subseteq N(\delta, n) \setminus \{N^0 \cup N^*\}$ и

$$|\Delta_n^2(N_j) - \Delta_n^2(N)\, m^{-1}| \leqslant C\sigma_n^2(N), \quad N = \bigcup_{j \leqslant m} N_j.$$

Обозначим через τ с. в. с плотностью распределения

$$\frac{d}{dx} K(x) = Cx^{-10} (\sin(x/40))^{10}.$$

Отметим, что $\mathbf{E}\tau^8 < \infty$ и, кроме того,

$$\widehat{K}(t) = \int_{\mathbf{R}} \exp\{itx\}\, dK(x) = \begin{cases} \geqslant C, & \text{если } |t| \leqslant 1/8, \\ 0, & \text{если } |t| \geqslant 1/4. \end{cases}$$

Предполагается, что с. в. τ не зависит от ранее введенных с. э.

Дальнейшие рассуждения в известной степени аналогичны доказательству основной теоремы в [3]. Имеем

$$d_F(S_n, W_n) \leqslant \sup_{x \in \mathbf{R}} |\mathbf{P}(F(S_{n,n+1}) + \tau\tilde{\mu}_n(S_n^0) < x) - $$
$$- \mathbf{P}(F(W_n) < x)| + \sup_{x \in \mathbf{R}} |\mathbf{P}(F(S_{n,n+1}) + \tau\tilde{\mu}_n(S_n^0) < x) -$$
$$- \mathbf{P}(F(S_{n,n+1}) < x)| + \sum_{i \leqslant n} \mathbf{P}(\|\xi_{ni}\| > c^*/\alpha). \qquad (1)$$

Обозначим через I_1, I_2 соответственно первое и второе слагаемое правой части (1), а через $f_{n1}(t)$, $f_{n2}(t)$ и $f_{n3}(t)$ — характеристические функции с. в. $F(S_{n,n+1})$, $F(S_{n,n+1}) + \tau\tilde{\mu}_n(S_n^0)$, $F(W_n)$.

На основании формулы Бэрри (см. [17]) и леммы 2.14 получаем

$$I_1 \leqslant \int_{|t| \leqslant b\varepsilon(n)^{-1}} |t|^{-1} |f_{n2}(t) - f_{n3}(t)|\, dt + C(F, A, B)\, \varepsilon(n). \qquad (2)$$

Введем следующие обозначения:

$$I_1^{(1)} = \int_{|t| \leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}} |t|^{-1} |f_{n1}(t) - f_{n3}(t)|\, dt, \quad b = (56QC_0(F))^{-1}\delta,$$

$$I_1^{(2)} = \int_{|t| \leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}} |t|^{-1} |f_{n2}(t) - f_{n1}(t)|\, dt,$$

$$I_1^{(3)} = \int_{b\varepsilon(n)^{v-1} \leqslant |t| \leqslant b\varepsilon(n)^{-1}} |t|^{-1} |f_{n2}(t)|\, dt,$$

$$I_1^{(4)} = \int_{b\varepsilon(n)^{v-1} \leqslant |t| \leqslant b\varepsilon(n)^{-1}} |t|^{-1} |f_{n3}(t)|\, dt,$$

где v далее будет выбрано. Из (2) следует, что

$$I_1 \leqslant \sum_{k \leqslant 4} I_1^{(k)} + C(A, B, F)\, \varepsilon(n). \qquad (3)$$

Оценка $I_1^{(4)} \leqslant C(F, A, B)\, \varepsilon(n)$ сразу следует из леммы 2.14.

Лемма 1. *Для любого подмножества* $N \subseteq N(\delta, n) \setminus N^*$

$$\sigma_n(N) \leqslant (1 + 4\delta^{-1}\sqrt{2})\, \varepsilon(n).$$

Доказательство. Из определения N^* следует

$$\sigma_n(N)=\varepsilon(n)+\max_{i\in N}\frac{\sigma_{ni}^3}{\sigma_{ni}^2}\leqslant\min_{i\in N^*}\frac{\sqrt{2}\left(\mathbf{E}\|\xi'_{ni}\|^3+\mathbf{E}\|\xi_{ni}\|^2 I\left(\|\xi_{ni}\|>\frac{c^*}{\alpha}\right)\right)}{\sigma_{ni}^2}+$$

$$+\varepsilon(n)\leqslant\frac{\sqrt{2}\sum\limits_{i\in N^*}\left(\mathbf{E}\|\xi'_{ni}\|^3+\mathbf{E}\|\xi_{ni}\|^2 I(\ldots)\right)}{\sum\limits_{i\in N^*}\sigma_{ni}^2}+\varepsilon(n)\leqslant\left(1+4\sqrt{2}/\delta\right)\varepsilon(n);$$

здесь было использовано неравенство (2.23). Лемма доказана.

Лемма 2.

$$I_1^{(1)}\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)\,\varepsilon(n).$$

Доказательство. Методом композиции (операторный метод Линдеберга, см. доказательство леммы 2.11) получаем

$$|f_{n1}(t)-f_{n3}(t)|\leqslant\sum_{k<n}\{|\mathbf{E}\varphi_t^{(1)}(S_{nk})[\xi'_{nk}]|+$$

$$+\frac{1}{2}|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[\xi'^2_{nk}]-\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[\gamma_{nk}^2]|+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1(1-\theta)^2|\mathbf{E}\varphi_t^{(3)}(S_{nk}+\theta\xi'_{nk})[\xi'^2_{nk}]|\,d\theta+\frac{1}{2}\int_0^1(1-\theta)^2|\mathbf{E}\varphi_t^{(3)}(S_{nk}+\theta\gamma_{nk})[\gamma_{nk}^3]|\,d\theta,\tag{4}$$

где $\varphi_t(x)=\exp\{itF(x)\}$. С помощью (2.40) и лемм 1, 2.10, 2.11, где мы полагаем $\Delta_n(N)\sim|t|^{v_1-1}$, легко получаем при $|t|\leqslant(56QC_0(F))^{-1}\times\times\varepsilon(n)^{v-1}\cdot\delta$

$$|\mathbf{E}\varphi_t^{(1)}(S_{nk})[\xi'_{nk}]|=|E\varphi_t^{(1)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk}]|\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(1)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk}]\exp\{itF(S_{nk})\}\right||t|\leqslant$$

$$\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)\,|t|\,g(t)\,\mathbf{E}\|\xi_{nk}\|I(\|\xi_{nk}\|>c^*/\alpha),$$

где

$$g(t)=|t|^{-3v_1M/(2p)}+|t|^{v_1-(1-v_1)(3+\beta)}+\left(|t|^{21v_1}\varepsilon(n)^{7/2}\right)^{1/p},\qquad p\in(1,2).$$

Как и при доказательстве леммы 2.11 мы имеем

$$|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[\xi'^2_{nk}]-\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[\gamma_{nk}^2]|\leqslant2|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk},\xi_{nk}]|\leqslant$$

$$\leqslant2|t|\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(2)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk},\xi_{nk}]\exp\{itF(S_{nk})\}\right|+$$

$$+2t^2\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(1)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk}]F^{(1)}(S_{nk})[\xi_{nk}]\exp\{itF(S_{nk})\}\right.$$

и с помощью (2.40) получаем

$$\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(2)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk},\xi_{nk}]\exp\{itF(S_{nk})\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)\left(g(t)+|t|^{-(1-v_1)(2+\beta)}\right)\mathbf{E}\|\xi_{nk}\|^2 I(\|\xi_{nk}\|>c^*/\alpha),$$

$$\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(1)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk}]F^{(1)}(S_{nk})[\xi_{nk}]\exp\{itF(S_{nk})\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C(F,A,B,\delta,Q))\,g(t)\,\mathbf{E}\|\xi_{nk}\|^2 I(\|\xi_{nk}\|>c^*/\alpha).$$

Оценка $\varphi_t^{(3)}(\cdot)[\cdot]$ в (4) аналогична рассмотренной выше:

$$|\mathbf{E}\varphi_t^{(3)}(S_{nk}+\theta\xi'_{nk})[\xi'^3_{nk}]|\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)|t|\left(g(t)+|t|^{-(1-v_1)(1+\beta)}\right)\mathbf{E}\|\xi'_{nk}\|^3,$$

$$|\mathbf{E}\varphi_t^{(3)}(S_{nk}+\theta\gamma_{nk})[\gamma_{nk}^3]|\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)|t|\left(g(t)+|t|^{-(1-v_1)(1+\beta)}\right)\mathbf{E}\|\gamma_{nk}\|^3.$$

Заметим, что на основании (1.2) и леммы 2.4 имеет место следующее неравенство:

$$\mathbf{E}\|\gamma_{nk}\|^3 \leqslant C(A)\,\sigma_{nk}^3 \leqslant C_1(A)\left(\mathbf{E}\|\xi_{nk}'\|^3 + \mathbf{E}\|\xi_{nk}\|^2 I(\|\xi_{nk}\| > c^*/\alpha)\right).$$

Таким образом, если $|t| \leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}$ и $p = 16/15$, $v_1 = \min\left\{\frac{2\beta}{3(4+\beta)}, \frac{1}{15}\right\}$,

$$M > \frac{2p}{3v_1} = \max\left\{\frac{16(4+\beta)}{15\beta}, \frac{32}{3}\right\}, \tag{5}$$

то

$$|f_{n1}(t) - f_{n3}(t)| \leqslant C(F, A, B, \delta, Q)\,|t|^{-\mu}\varepsilon(n).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.

$$I_1^{(2)} \leqslant C(F, A, B, \delta, Q)\,\varepsilon(n).$$

Доказательство. Имеем

$$I_1^{(2)} = \int\limits_{|t|\leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}} |t|^{-1}\left|\mathbf{E}\exp\{itF(S_{n,n+1})\}\{\widehat{K}(t\widetilde{\mu}_n(S_n^0)) - 1\}\right| dt. \tag{6}$$

Используя формулу Тейлора для $\widehat{K}(\cdot)$

$$\widehat{K}(t\widetilde{\mu}_n(S_n^0)) = 1 + t\int_0^1 d\theta \int_R \exp\{i\theta ut\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\}\,u\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\,dK(u),$$

получаем из (6) с переменным теоремы Фубини

$$I_1^{(2)} \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}} dt \int_{\mathbf{R}} |u|\,dK(u) \times$$

$$\times\int_0^1 d\theta\left|\mathbf{E}_{\delta_{n,n+1}(N^0)}\exp\{it\{F(S_n^0 + \delta_{n,n+1}(N^0)) + \theta u\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\}\}\times\right.$$

$$\left.\times\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\,I\left\{\mathbf{E}_{S_n^0,\nu}\left(F^{(1)}(S_n^0)[\delta_{n,n+1}(N^0)]\right)^2 > |t|^{-v_2}\Delta_n(N^0)^2\right\}\right| +$$

$$+\,C(F, A)\,\mathbf{E}^{1/26}\widetilde{\mu}_n(S_n^0)^{26}\int\limits_{|t|\leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}}\mathbf{P}^{25/26}\left(\mathbf{E}_{S_n^0,\nu}\left(F^{(1)}(S_n^0)[\delta_{n,n+1}(N^0)]\right)^2 \leqslant\right.$$

$$\left.\leqslant |t|^{-v_2}\Delta_n(N^0)^2\right). \tag{7}$$

Из леммы 2.16 следует

$$\|\widetilde{\mu}_n^{(k)}(x)\|^* \leqslant C(F, \delta)\,|t|^{kv_2}\varepsilon(n)\exp\{(2k+1)\alpha\|x\|\},$$

если только $\mathbf{E}_\nu\left(F^{(1)}(x)[\delta_{n,n+1}(N^0)]\right)^2 > |t|^{-v_2}\Delta_n(N^0)^2$, где $k = 1, 2, 3$ (для $k=3$ величина $\widetilde{\mu}_n^{(3)}(\cdot)$ обозначает постоянную в локальном условии Липшица). Следовательно, для любых фиксированных t, θ, u, y функции $\varepsilon(n)^{-1}\widetilde{\mu}_n(x)$ и $\psi_{\theta,u,y}(x) = F(x+y) - \theta u\widetilde{\mu}_n(x)$ принадлежат $\mathscr{C}(2, 1, 7\alpha)$ с константами типа $C(F, \delta)$ θ $|u|\,|t|^{3v_2}\exp\{\alpha\|y\|\}$. Поэтому в случае $|t| \leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}$ из леммы 2.11 получаем ($\widetilde{S}_n^0 = S_n^0 - \delta_{n,n+1}(N)$, $N \subseteq N(\delta, n)\setminus\{N^* \cup N^0\}$)

$$J(t) \equiv \left|\mathbf{E}_{\delta_{n,n+1}(N^0)}\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\exp\left\{it\psi_{\theta,u,\delta_{n,n+1}(N^0)}(S_n^0)\right\}\times\right.$$

$$\left.\times I\left\{\mathbf{E}_{S_n^0,\nu}\left(F^{(1)}(S_n^0)[\delta_{n,n+1}(N^0)]\right)^2 \leqslant |t|^{-v_2}\Delta_n(N^0)^2\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C(\cdot)\,\varepsilon(n)(1 + |u|^5)\,|t|^{3v_2}\exp\{\alpha\|\delta_{n,n+1}(N^0)\|\}\times$$

$$\times\left\{\max_{j\leqslant 12}\mathbf{E}^{1/p}_{\delta_{n,n+1}(N^0)}\exp\left\{-\frac{t^2}{3}\mathbf{E}_{\widetilde{S}^0_n,\nu}\left(\psi^{(1)}_{\theta,u,\delta_{n,n+1}(N^0)}(\widetilde{S}^0_n)[\delta_{n,n+1}(N_j)]\right)^2\right\}\times\right.$$

$$\times I\left\{\mathbf{E}_{S^0_n,\nu}(F^{(1)}(S^0_n)[\delta_{n,n+1}(N^0)])^2\leqslant|t|^{-v_2}\Delta_n(N^0)^2\right\}+|t|\Delta_n(N)^3+$$

$$\left.+|t|^5\Delta_n(N)^{10}\right\}\leqslant C(\cdot)\varepsilon(n)(1+|u|^5)|t|^{3v_2}\exp\{\alpha\|\delta_{n,n+1}(N^0)\|\}\times$$

$$\times\left\{\max_{j\leqslant 12}\mathbf{E}^{1/p}_{\delta_{n,n+1}(N^0)}\exp\left\{-\frac{t^2}{3}\mathbf{E}_{\widetilde{S}^0_n,\nu}(F^{(1)}(\widetilde{S}^0_n)[\delta_{n,n+1}(N_j)+\delta_{n,n+1}(N^0)])^2\right\}+\right.$$

$$\left.+|t|\Delta_n(N)^3+\left(|t|^{1+v_2}\Delta_n(N)\varepsilon(n)\right)^{2/p}+|t|^5\Delta_n(N)^{10}\right\}. \tag{8}$$

Так как

$$\mathbf{E}_{\widetilde{S}^0_n,\nu,\delta_{n,n+1}(N^0)}(F^{(1)}(\widetilde{S}^0_n)[\delta_{n,n+1}(N_j)+\delta_{n,n+1}(N^0)])^2\geqslant$$

$$\geqslant\mathbf{E}_{\widetilde{S}^0_n,\nu}(F^{(1)}(\widetilde{S}^0_n)[\delta_{n,n+1}(N_j)])^2,$$

то, полагая $\Delta_n(N)\sim|t|^{v_3-1}$, окончательно получаем из (8)

$$J(t)\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)\varepsilon(n)(1+|u|^5)|t|^{3v_2}\exp\{\alpha\|\delta_{n,n+1}(N^0)\|\}\times$$

$$\times\left\{|t|^{-3v_3M/2p}+|t|^{3v_3-2}+\left(|t|^{v_2+v_3}\varepsilon(n)\right)^{2/p}\right\},$$

где M удовлетворяет условию (5) и, кроме того,

$$\begin{gathered}5v_2+2v_3\leqslant(1+v)(1-v)^{-1},\\ v_2+v_3<1/3,\\ 3v_3M/2p-3v_2>1.\end{gathered}\tag{9}$$

Таким образом, первое слагаемое в правой части (8) оценивается величиной $C(A,\ B,\ F,\ \delta,\ Q)\varepsilon(n)$. Для оценки второго слагаемого воспользуемся леммами 2.15 и 1

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{E}_{S^0_n,\nu}(F^{(1)}(S^0_n)[\sigma_{n,n+1}(N^0)])^2\leqslant|t|^{-v_2}\Delta_n(N^0)^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant C(F,A,B,\delta,a,Q)\left\{|t|^{-3v_2M/4}+\varepsilon(n)^{3(2v_3-a)M/4}+\varepsilon(n)^{7/2}+|t|^{-9(1-v_3)/2}\right\}|t|^{12v_2}. \tag{10}$$

Положим $v_2=1/6$, $v_3=5v=1/10$, $a=1/10$, $p=16/15$, $M\geqslant 25$. Тогда выполнены соотношения (9) и, кроме того,

$$3v_2M/4-12v_2\geqslant 25/24,\quad 3(2v_3-a)M/4-12v_2\geqslant 5/4. \tag{11}$$

Утверждение леммы следует из (6)—(11). Отметим, что для оценки второго слагаемого правой части (7) мы должны предполагать в (2.1), что $c^*\leqslant 1/52$ (для того чтобы существовали соответствующие экспоненциальные моменты с. в. $\|S_{nk}\|$).

Лемма 4.

$$I^{(3)}\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)\,\varepsilon(n).$$

Доказательство. Из определения функции $\widehat{K}(t)$ следует

$$I^{(3)}_1=\int\limits_{b\varepsilon(n)^{v-1}\leqslant|t|\leqslant b\varepsilon(n)^{-1}}|t|^{-1}\left|\mathbf{E}\exp\{itF(S_{n,n+1})\}\widehat{K}(t\widetilde{\mu}_n(S^0_n))\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{E}\int\limits_{\substack{b\varepsilon(n)^{-0,98}\leqslant|t|\leqslant b\varepsilon(n)^{-1}\\ |t|\widetilde{\mu}_n(S^0_n)\leqslant 1/4}}|t|^{-1}\int\limits_R dK(u)\left|\mathbf{E}_{S^0_n}\exp\{itF(S_{n,n+1})\}\right|dt.$$

На основании лемм 2.7—2.12 имеем для $|t|\tilde{\mu}_n(S_n^0)\leqslant 1/4$

$$\left|\mathbf{E}_{S_n^0}\exp\{itF(S_{n,n+1})\}\right|\leqslant C(F,A,B,\ \delta,\ Q)\exp\{5\alpha\|S_n^0\|\}\times$$
$$\times\{|t|\,\Delta_n(N^0)^4+|t|^5\,\Delta_n(N^0)^{10}+\left(\Delta_n(N^0)\,\varepsilon(n)^{-0,98}\right)^{-3M/2p}+$$
$$+(t^2\Delta_n(N^0)^3)^6+(\varepsilon(n)\,t^6\Delta_n(N^0)^6)^{7/2p}.$$

Полагая $\Delta_n(N^0)=\varepsilon(n)^{0,94}$, $M\geqslant 25$, $p=16/15$, легко получаем утверждение леммы.

Далее, оценим I_2. Обозначим $r(u)=\max\{1,\ |u|\}$. Почти дословно повторяя доказательство соответствующего утверждения из [3], получаем

$$I_2\leqslant\sup_{z\in\mathbf{R}}\mathbf{P}\left(|F(S_{n,n+1})-z|\leqslant r(\tau)\,\tilde{\mu}_n(S_n^0)\right)=\sup_{z\in\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\mathbf{P}\left(|F(S_{n,n+1})-z|\leqslant\right.$$
$$\left.\leqslant r(u)\,\tilde{\mu}_n(S_n^0)\right)dK(u)\leqslant C\sup_{z\in\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}K\left(\frac{F(S_{n,n+1})-z}{r(u)\,\tilde{\mu}_n(S_n^0)}\right)dK(u)=$$
$$=C_1\sup_{z\in\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}dK(u)\,\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}}\exp\left\{-\frac{it\,(F(S_{n,n+1})-z)}{r(u)\,\tilde{\mu}_n(S_n^0)}\right\}\widehat{K}(t)\,dt=$$
$$=C_1\sup_{z\in\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}dK(u)\,\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}}\exp\{-iy(F(S_{n,n+1})-z)\}\widehat{K}\left(r(u)\,y\tilde{\mu}_n(S_n^0)\right)r(u)\,\tilde{\mu}_n(S_n^0)\times$$
$$\times dy\leqslant C_1\sup_{z\in\mathbf{R}}\left|\mathbf{E}\iiint\limits_{r(u)|y|\,\tilde{\mu}_n(S_n^0)\leqslant 1/4}r(u)\,dy\,dK(u)\,dK(s)\,\tilde{\mu}_n(S_n^0)\times\right.$$
$$\left.\times\exp\{-iyF(S_{n,n+1})+r(u)\,sy\tilde{\mu}_n(S_n^0)\}\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_1\left\{\iiint\limits_{|y|\leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}}r(u)\,dy\,dK(u)\,dK(s)\left|E\tilde{\mu}_n(S_n^0)\exp\{\cdots\}\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\mathbf{E}\iiint\limits_{|y|\,\tilde{\mu}_n(S_n^0)\leqslant 1/4,\,|y|>b\varepsilon(n)^{v-1}}r(u)\,dy\,dK(u)\,dK(s)\,\tilde{\mu}_n(S_n^0)\exp\{\ldots\}\right|\right\}.\qquad(12)$$

Оценка типа $C(A,\ B,\ F,\ \delta,\ Q)\,\varepsilon(n)$ для каждого из двух интегралов в правой части (12), по существу, содержится в леммах 3 и 4.

Теорема доказана.

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРИНЦИПУ ИНВАРИАНТНОСТИ ДОНСКЕРА — ПРОХОРОВА

Доказательство теоремы 2. Введем в рассмотрение следующие с. э. в пространстве $L_2([0,\ 1],\ \lambda)$:

$$\gamma_{n,k}\equiv\gamma_{n,k}(t)=(W(t_{n,k})-W(t_{n,k-1}))\,I_{t_{n,k}}(t),$$
$$w_{n,k}\equiv w_{n,k}(t)=W((t\vee t_{n,k-1})\wedge t_{n,k})-W(t_{n,k-1}),$$
$$w_{n,k}^0\equiv w_{n,k}^0(t)=(W(t)-W(t_{n,k-1}))\left(I_{t_{n,k-1}}(t)-I_{t_{n,k}}(t)\right),$$

где, как и прежде, $I_z(t)=1$ при $t\geqslant z$, $I_z(t)=0$ в противном случае; $W(t)$ — стандартный винеровский процесс на [0, 1]. Очевидно, $W(t)=\sum\limits_{i\leqslant n}w_{ni}(t)$.

Положим $W_n(t)=\sum\limits_{i\leqslant n}\gamma_{ni}(t)$. Тогда легко видеть, что

$$W(t)-W_n(t)=\sum_{i\leqslant n}w_{ni}^0(t).$$

Предположим сначала, что выполнено условие (1.5). Применительно к нашей схеме соотношение (1.5) имеет вид

$$\sup_{z>0} z^{-M}\mathbf{P}\left(\sum_{i\in N}(\mathbf{D}\bar{\xi}_{ni})\left(F^{(1)}(W_n)[I_{t_{ni}}]\right)^2 < z\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)\leqslant B \tag{1}$$

равномерно по всем подмножествам $N\subseteq N(\delta, n)$, удовлетворяющим условию

$$\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\geqslant L_{ns}, \tag{2}$$

где с. в. $\{\bar{\xi}_{ni}\}$ определены так же, как и в (1.5). Несколько позже будет показано, что условие (1.11) влечет за собой (1). Отметим также, что в условиях теоремы 2 имеет место неравенство $\varepsilon(n)\leqslant 2L_{ns}\lambda^s([0,\ 1])$. Так что, если выполнены (1) и (2), то в качестве следствия теоремы 1 получаем оценку

$$d_F(S_n,\ W_n)\leqslant C(F,\ \lambda)L_{ns}, \tag{3}$$

при этом, правда, необходимо иметь в виду, что в норме пространства $L_2([0,\ 1],\ \lambda)$ для с. э. $\{X_{ni}\}$ и $\{Y_{ni}\}$ в (1.8), вообще говоря, не выполнено условие нормировки:

$$\sum_{i\leqslant n}\sigma_{ni}^2=\sum_{i\leqslant n}\lambda([t_{ni},1])\,\mathbf{E}\xi_{ni}^2\neq\ . \tag{4}$$

Однако при получении (3) важно, чтобы равномерно по всем n

$$C_1\leqslant\sum_{i\leqslant n}\sigma_{ni}^2\leqslant C_2, \tag{5}$$

что как раз и имеет место в (4). При выполнении (5) задача легко сводится к уже рассмотренной заменой функционала $F(x)$ на $F_n(x)\equiv\equiv F\left(x\left(\sum_{i\leqslant n}\sigma_{ni}^2\right)^{1/2}\right)$, причем $F_n\in\mathscr{C}(m,\ \beta,\ \alpha)$ равномерно по всем n, а константы вида $C(F,\cdot)$ в теореме 1 зависят от F только через постоянные α и $C_0(F)$ в (1.1). Приведенное замечание в равной степени относится и к принципу инвариантности для эмпирических полей (см. § 1).

Таким образом, для доказательства теоремы 2 необходимо оценить величину $d_F(W_n,\ W)$. Эта задача во многом схожа с уже рассмотренной в § 2, и ее решение в значительной степени повторяет ход доказательства теоремы 1. Однако рассуждения при этом сильно упрощаются, поскольку в рассмотрении участвуют лишь гауссовские с. э.

Из формулы Берри (см. [17]) и леммы 2.14 следует

$$\begin{aligned} d_F(W_n,W)&\leqslant C\int\limits_{|t|<\varepsilon(n)^{-1}}|t|^{-1}|f_n(t)-f(t)|\,dt+C\varepsilon(n)\leqslant\\ &\leqslant C\int\limits_{|t|<\varepsilon(n)^{v-1}}|t|^{-1}|f_n(t)-f(t)|\,dt+C\int\limits_{\varepsilon(n)^{v-1}\leqslant|t|<\varepsilon(n)^{-1}}|f_n(t)|\,|t|^{-1}dt+\\ &\quad+C\int\limits_{\varepsilon(n)^{v-1}\leqslant|t|<\varepsilon(n)^{-1}}|f(t)|\,|t|^{-1}dt+C\varepsilon(n), \end{aligned}\tag{6}$$

где $f_n(t)$ и $f(t)$ — характеристические функции с. в. $F(W_n)$ и $F(W)$ соответственно, $\varepsilon(n)$ введено в (1.4). Так же как и при доказательстве теоремы 1, воспользуемся методом композиций для оценки величины $|f_n(t)-f(t)|$. Аналогично выводу (3.4) получаем

$$\begin{aligned} |f_n(t)-f(t)|&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k\leqslant n}\left|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[Y_{nk}^2]-\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk}^2]\right|+\\ &+\frac{1}{2}\sum_{k\leqslant n}\left\{\int_0^1(1-\theta)^2\left|\mathbf{E}\varphi_t^{(3)}(S_{nk}+\theta Y_{nk})[Y_{nk}^3]\right|d\theta+\right.\\ &\left.+\int_0^1(1-\theta)^2\left|\mathbf{E}\varphi_t^{(3)}(S_{nk}+\theta w_{nk})[w_{nk}^3]\right|d\theta\right\}, \end{aligned}\tag{7}$$

где $S_{nk}=\sum_{j<k} w_{nj}+\sum_{j>k} Y_{nj}$, $\varphi_t(x)=\exp\{itF(x)\}$. Здесь использованы соотношения

$$\mathbf{E}\varphi_t^{(1)}(S_{nk})[Y_{nk}]=\mathbf{E}\varphi_t^{(1)}(S_{nk})[w_{nk}]=0.$$

Для оценки первой суммы правой части (7) прежде всего отметим, что $w_{nk}=Y_{nk}+w_{nk}^0$. Поэтому

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk}^2]-\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[Y_{nk}^2]|\leqslant|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk}^2]-\\ -\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk},Y_{nk}]|+|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[Y_{nk}^2]-\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk},Y_{nk}]|=\\ =|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk},w_{nk}^0]|+|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk}^0,Y_{nk}]|.\end{aligned}\tag{8}$$

Анализ $\mathbf{E}_{w_{nk}}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[\cdot]$ проводится по схеме доказательства леммы 2.14. Причем необходимо иметь в виду следующую оценку показателя экспоненты в (1.41):

$$\begin{aligned}t^2\mathbf{E}\Big(F^{(1)}(x)\Big[\sum_{k\in N} w_{nk}\Big]\Big)^2\geqslant\frac{t^2}{2}\mathbf{E}\Big(F^{(1)}(x)\Big[\sum_{k\in N}Y_{nk}\Big]\Big)^2-t^2\mathbf{E}\Big(F^{(1)}(x)\Big[\sum_{k\in N}w_{nk}^0\Big]\Big)^2\geqslant\\ \geqslant\frac{t^2}{2}\mathbf{E}\Big(F^{(1)}(x)\Big[\sum_{k\in N}Y_{nk}\Big]\Big)^2-t^2\|F^{(1)}(x)\|^{*2}\sum_{k\in N}\mathbf{E}\|w_{nk}^0\|^2\equiv\\ \equiv\frac{t^2}{2}\sum_{k\in N}\sigma_{nk}^2\Big(F^{(1)}(x)\,[I_{t_{nk}}]\Big)^2-R(x,t).\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь использовано элементарное неравенство $(x+y)^2\geqslant x^2/2-y^2$, а символом $\|\cdot\|$ обозначается обычная норма в $L_2([0,1]\ \lambda)$. Тогда при $N\cap N^*=\varnothing$ (см. лемму 3.1), $\|x\|\leqslant\frac{v}{2\alpha}|\log\varepsilon(n)|$ и $|t|\leqslant\varepsilon(n)^{v-1}$ имеем

$$\begin{aligned}R(x,t)\leqslant C_0^2(F)\,t^2\exp\{2\alpha\|x\|\}\sum_{k\in N}\sigma_{nk}^2\lambda((t_{n,k-1},t_{nk}])\leqslant\\ \leqslant C_0^2(F)\,\varepsilon(n)^{v-2}\lambda([0,1])\max_{k\in N}\sigma_{nk}^2\leqslant C(F)\,\delta^{-1}\varepsilon(n)^v\lambda([0,1]).\end{aligned}\tag{10}$$

Далее используем срезки с. в. $\|S_{nk}\|$ так же, как и при доказательстве леммы 2. Это позволяет свести оценки соответствующих характеристических функций к оценке величины

$$\mathbf{E}\exp\Big\{-Ct^2\sum_{l\in N}\sigma_{nl}^2\,(F^{(1)}(S_{nk})\,[t_{nl}])^2\Big\},$$

что уже, по существу, проделано в леммах 2.9—2.14. Опуская малосущественные детали, так или иначе обсуждавшиеся в процессе доказательства теоремы 1, получаем из (7)—(10) в зоне $|t|\leqslant\varepsilon(n)^{v-1}$

$$\begin{aligned}|f_n(t)-f(t)|\leqslant C(F,\ B)\,|t|^{-v_0}\Big\{\sum_{k\leqslant n}(\mathbf{E}\|w_{nk}^0\|^2\,\mathbf{E}\|w_{nk}\|^2)^{1/2}+\sum_{k\leqslant n}\mathbf{E}\|w_{nk}\|^3\Big\}\leqslant\\ \leqslant C_1(F,B,\lambda)\,|t|^{-v_0}\Big\{\sum_{k\leqslant n}\sigma_{nk}^2(\lambda((t_{n,k-1},t_{nk}]))^{1/2}+\sum_{k\leqslant n}\sigma_{nk}\Big\}\leqslant\\ \leqslant C_1(F,B,\lambda)\,|t|^{-v_0}(\delta(n)+L_{ns}).\end{aligned}\tag{11}$$

Оценка вида $C(\cdot)\varepsilon(n)$ второго интеграла правой части (6), по существу, содержится в лемме 2.14. Последнее слагаемое в (6) оценивается почти так же, за исключением оценки подынтегральных функций вида

$$\psi(t)=\mathbf{E}\exp\Big\{-Ct^2\mathbf{E}\Big(F^{(1)}(\cdot)\Big|\sum_{k\in N}w_{nk}\Big]\Big)^2\Big\},$$

где с. э. w_{nk} так же, как и в (9), необходимо заменить на с. э. Y_{nk} для того, чтобы можно было воспользоваться условием (1). Прежде отметим, что

$$\sup_{\varepsilon(n)^{v-1}\leqslant|t|\leqslant\varepsilon(n)^{-1}} \psi(t) \leqslant \mathbf{E}\exp\left\{-C\varepsilon(n)^{2(v-1)}\mathbf{E}\left(F^{(1)}(\cdot)\left[\sum_{k\in N} w_{nk}\right]\right)^2\right\},$$

а затем применим неравенство (9), в котором полагаем $t=\varepsilon(n)^{v-1}$. Тем самым задача практически будет сведена к уже рассмотренной (см. доказательство леммы 2.14).

Далее отметим, что утверждение леммы 2.11 в условиях теоремы 2 останется в силе, если вместо с. п. $W_n(t)$ подставить $W(t)$, а вместо $\varepsilon(n)$ — величину $\varepsilon_0(n)=\varepsilon(n)+\sum_{k\leqslant n}\sigma_{nk}^2(\lambda((t_{nk-1},t_{nk}]))^{1/2}$ (см. вывод (11)). Так что условие (1) в этом случае можно заменить требованием

$$\sup_{z>0} z^{-M}\mathbf{P}\left\{\sum_{k\in N}(\mathbf{D}\bar{\xi}_{ni})\left(F^{(1)}(W)\left[I_{t_{nk}}\right]\right)^2<\Delta_n^2(N)z\right\}\leqslant B \tag{12}$$

для любого $N\subseteq N(\delta,n)$. Так же как и при доказательстве основной теоремы, считаем, что $N\cap N^*=\varnothing$ (N^* определено в § 3). Поэтому с помощью леммы 2.8 получаем для любого $k\in N(\delta,n)$

$$\sigma_{ni}^{-2}\left(\mathbf{E}|\xi'_{ni}|^3+\mathbf{E}\{\xi_{ni}^2 I(|\xi_{ni}|>c^*/\alpha)\}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{i\in N^*}\sigma_{ni}^2\right)^{-1}\sum_{i\in N^*}\left(\mathbf{E}|\xi'_{ni}|^3+\mathbf{E}\{\xi_{ni}^2 I(|\xi_{ni}|>c^*/\alpha)\}\right)\leqslant\frac{4}{\delta}\varepsilon(n).$$

Иными словами, для любого $i\in N(\delta,n)$

$$\frac{\mathbf{E}|\xi'_{ni}|^3}{\varepsilon(n)}\leqslant\frac{4}{\delta}\sigma_{ni}^2. \tag{13}$$

Отсюда следует нижняя оценка

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\bar{\xi}_{ni}&=\mathbf{E}(\xi_{ni}^{(1)})^2-(\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)})^2=p^{-1}\mathbf{E}(\xi'_{ni})^2 I(|\xi'_{ni}|\leqslant\\&\leqslant Q\hat{\sigma}_{ni})-p^{-2}(\mathbf{E}\xi'_{ni}I(|\xi'_{ni}|\leqslant Q\hat{\sigma}_{ni}))^2\geqslant p^{-1}\mathbf{E}(\xi'_{ni})^2-p^{-1}(Q\varepsilon(n))^{-1}\mathbf{E}|\xi'_{ni}|^3-\\&-2p^{-2}\{(\mathbf{E}\xi_{ni}I(|\xi_{ni}|>c^*/\alpha))^2+(\mathbf{E}\xi'_{ni}I(|\xi'_{ni}|>Q\hat{\sigma}_{ni}))^2\}\geqslant p^{-1}\sigma_{ni}^2-\\&-p^{-1}\mathbf{E}\xi_{ni}I(|\xi_{ni}|>c^*/\alpha)-p^{-1}(Q\varepsilon(n))^{-1}\mathbf{E}|\xi'_{ni}|-\\&-2p^{-2}\{\alpha^2\sigma_{ni}^4(c^*)^{-2}+(Q\varepsilon(n))^{-1}\mathbf{E}|\xi'_{ni}|^3\},\end{aligned} \tag{14}$$

где $p=\mathbf{P}(|\xi_{ni}|\leqslant Q\hat{\sigma}_{ni})\geqslant 3/4$ (см. § 2).

Таким образом, из (13) и (14) получаем для достаточно большого Q и любого $N\subseteq N(\delta,n)$, удовлетворяющего неравенству $\Delta_n^2(N)\geqslant\varepsilon(n)$, выполнено

$$\sum_{i\in N}\mathbf{D}\bar{\xi}_{ni}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2=\frac{1}{2}\Delta_n^2(N).$$

Так что условие (1.11) для $N\subseteq N(\delta,n)$ и $\Delta_n^2(N)\geqslant\varepsilon(n)$, влечет за собой (12). Теорема 2 доказана.

Теперь приведем пояснения к условию (1.14). Прежде всего отметим, что если требовать выполнение (1.5) не для всех $N\subseteq N(\delta,n)$, удовлетворяющих (1.4), а лишь для конкретного набора подмножеств $N_{nk}\subseteq N(\delta,n)$; $k\leqslant\operatorname{Card}(N(\delta,n))$, где N_{nk} — некоторое k-элементное подмножество $N(\delta,n)$, удовлетворяющее неравенству $\Delta_n(N_{nk})\geqslant C\varepsilon(n)$, то, как следует из доказательства теоремы 1 (см. леммы 2.7—2.16), оценка для величины $d_F(\cdot)$ в (1.6) будет иметь вид $C(\cdot)\left(\varepsilon(n)+\max_{k\in N(\delta,n)}\sigma_{nk}\right)$. Эта оценка, вообще говоря, слабее (1.6). Однако при выполнении (1.3) она, по существу, совпадает с оценкой Берри — Эссеена. Кроме того, в этом случае $t_{nk}=k/n$, $\mathbf{D}\bar{\xi}_{ni}\geqslant C/n$. Поэтому под знаком вероятности в (12) на самом деле будет стоять сумма вида

$$\sum_{k\in N_{ni}} \frac{1}{n}\left(F^{(1)}(W)[I_{k/n}]\right)^2.$$

Легко проверить, что в этом случае (1.5) будет следовать из (1.14).

Доказательство теоремы 3, по существу, содержится в [8], где рассмотрен случай линейного непрерывного функционала

$$F(X)=X(1/2). \tag{15}$$

Будем предполагать, что F задан на $L_2([0,\ 1],\ \delta_{1/2})$, где $\delta_{1/2}(A)=I(1/2\in A)$. Очевидно, $F\in\mathscr{C}(m,\ \alpha,\ \beta)$ при любом m. Правда, необходимо отметить, что в [8] рассматриваются только непрерывные ломаные $S_n(t)$. Но в [8] все останется в силе и для ломаных (1.10). Поскольку для функционалов вида (15) справедливо соотношение $F^{(1)}(X)[h]\equiv F(h)$, то

$$\inf_{t\in[0,1/4]}\left|F^{(1)}(X)[I_t]\right|\equiv 1,$$

т. е. условие (1.11) выполнено. Стало быть, имеет место оценка (1.12). Для специально подобранной в [8] последовательности серий $\{\xi_{ni}\}$ имеем

$$\delta(n)\leqslant\max_{i\leqslant n}\sigma_{ni}^2\leqslant L_{ns}^{2/s},\quad s\in(2,3].$$

Такой же порядок имеет и нижняя оценка для $d_F(S_n,\ W)$ (см. [8]).

§ 5. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ОТ НУЛЯ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Сначала покажем, что условие (1.9) обеспечивает выполнение (1.5) в принципе инвариантности для эмпирических мер. В самом деле, для интегральных функционалов

$$F(X)=\int_0^1\int_{R^k} f(X(t,\bar z),t,\bar z)\,\lambda(dt,d\bar z),\quad t\in[0,1],\ \bar z\in\mathbf{R}^k, \tag{1}$$

k-я производная Фреше в пространстве $L_2([0,\ 1]\times\mathbf{R}^k,\ \lambda)$ имеет вид

$$F^{(k)}(X)[h_1,\ldots,h_k]=\int_0^1\int_{\mathbf{R}^k}\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(X(t,\bar z),t,\bar z)\prod_{j\leqslant k}h(t,\bar z)\,\lambda(dt,d\bar z). \tag{2}$$

Так что если $f(x,\ t,\ \bar z)$, $x\in\mathbf{R}$, удовлетворяет по x условиям (1.1) (равномерно по $t,\ \bar z$), то легко видеть, что и $F(X)$ будет удовлетворять аналогичным требованиям. Далее, так как в рассматриваемом случае $\xi_{ni}(\bar z)=\{I(\zeta_{11}<z_1,\ \ldots,\ \zeta_{1k}<z_k)-G(z_1,\ \ldots,\ z_k)\}I_{i/n}(t)n^{-1/2}$ (здесь $G(\cdot)$ — функция распределения вектора $(\zeta_{11},\ \ldots,\ \zeta_{1k})$), то срезки $\bar\xi_{ni}(\cdot)$ в (1.5) при достаточно большом Q совпадут с $\xi_{ni}(\cdot)$. Учитывая это, а также (2) и (1.9), получаем

$$\sum_{i\leqslant m}\mathbf{E}_{W_n^{(k)}}\left(F^{(1)}(W_n^{(k)})[\xi_{ni}]\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i\leqslant m}\int_{i/n}^1\int_{i/n}^1\int_{\mathbf{R}^k}\int_{\mathbf{R}^k}\frac{\partial}{\partial x}f(W_n^{(k)}(t,\bar z),t,\bar z)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}f(W_n^{(k)}(t',\bar z'),t',\bar z')\mathbf{E}\xi_{ni}(\bar z)\xi_{ni}(\bar z')\,\lambda(dt,d\bar z)\,\lambda(dt',d\bar z')=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i\leqslant m}\int_{i/n}^1\int_{i/n}^1\int_{\mathbf{R}^k}\int_{\mathbf{R}^k}\frac{\partial}{\partial x}f(W_n^{(k)}(t,\bar z),t,\bar z)\frac{\partial}{\partial x}f(W_n^{(k)}(t',\bar z'),t',\bar z')\times$$

$$(G(\min\{\bar z, \bar z'\}) - G(\bar z)G(\bar z'))\lambda(dt, d\bar z)\lambda(dt', d\bar z') \geqslant \frac{m}{n}\int\limits_{m/n}^{1}\int\limits_{m/n}^{1}\iint\limits_{\substack{\bar a \leqslant \bar z \leqslant \bar b \\ \bar a \leqslant \bar z' \leqslant \bar b}} g(t, \bar z)\times$$

$$\times g(t', \bar z')(G(\min\{\bar z, \bar z'\}) - G(\bar z)G(\bar z'))\lambda(dt, d\bar z)\lambda(dt', d\bar z') \leqslant C(\cdot)\, m/n, \qquad (3)$$

если только $m \leqslant n/2$. Таким образом, условие (1.5) (ослабленный вариант) выполнено (см. пояснения в § 4 к условию (1.14)). Принимая во внимание конкретный вид $\xi_{ni}(\cdot)$, из теоремы 1 получаем

$$d_F\left(S_n^{(k)}, W_n^{(k)}\right) \leqslant C(f, k, \lambda)\, n^{-1/2}. \qquad (4)$$

Рассмотрим отдельно случай, когда $k=1$ и $G(z) \equiv z$ — функция равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$. В этом случае гауссовское поле $W_n^{(1)}(t, z)$ (поле Кифера) имеет ковариацию

$$\mathbf{E}W_n^{(1)}(t, z)\, W_n^{(1)}(t', z') = \min\left\{\frac{[nt]}{n}, \frac{[nt']}{n}\right\}\{\min\{z, z'\} - zz'\}, \qquad (5)$$

при $t, t', z, z' \in [0, 1]$, и может быть представлено в виде

$$W_n^{(1)}(t, z) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i \leqslant nt} W_i^0(z), \qquad (6)$$

где $\{W_i^0(\cdot), i \geqslant 1\}$ — независимые «броуновские мосты», т. е. центрированные гауссовские процессы с ковариацией

$$\mathbf{E}W_i^0(z)\, W_i^0(z') = \min\{z, z'\} - zz'.$$

Предположим, что мера $\lambda(\cdot)$ в (1) абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в $\mathbf{R}^2$ и

$$\inf_{\substack{0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 \leqslant z \leqslant 1}} \frac{\lambda(dt, dz)}{dt\, dz} = \nu > 0, \qquad (7)$$

а функция $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t, z)$ неотрицательна и, кроме того, удовлетворяет неравенству

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, t, z) \geqslant C\,|x|^r \qquad (8)$$

при всех $t \in [0, \delta]$, $x, z \in [-\delta, \delta]$ и некоторых $C, r > 0$, $\delta \in (0, 1/2)$ (или сформулированное условие имеет место для функции $-f$).

Лемма 1. *При выполнении* (7) *и* (8) *имеет место ослабленный вариант условия* (1.5), *и, стало быть, справедлива оценка* (4).

Доказательство. Аналогично (3) получаем для любого $m \leqslant n\delta/2$

$$D \equiv \sum_{i \leqslant m} \mathbf{E}_{W_n^{(1)}}\left(F^{(1)}\left(W_n^{(1)}\right)[\xi_{ni}]\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i \leqslant m}\int\limits_{i/n}^{1}\int\limits_{i/n}^{1}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial x} f\left(W_n^{(1)}(t, z), t, z\right)\frac{\partial}{\partial x} f\left(W_n^{(1)}(t', z'), t', z'\right)\times$$

$$\times \lambda(dt, dz)\,\lambda(dt', dz')(\min\{z, z'\} - zz') \geqslant \frac{m\nu}{n}\int\limits_{\delta/2}^{\delta} dt \int\limits_{\delta/2}^{\delta} dt' \times$$

$$\times \int\limits_{0}^{1} dz \frac{\partial}{\partial x} f(\cdot)(1 - z)\int\limits_{0}^{z} dz' \frac{\partial}{\partial x} f(\cdot)\, z' \geqslant \frac{m\nu}{2n}\cdot y^\theta \int\limits_{\delta/2}^{\delta} dt \int\limits_{\delta/2}^{\delta} dt' \times$$

$$\times \int\limits_{2y^\theta}^{3y^\theta} \frac{\partial}{\partial x} f\left(W_n^{(1)}(t, z), t, z\right) dz \int\limits_{y^\theta}^{2y^\theta} \frac{\partial}{\partial x} f\left(W_n^{(1)}(t', z'), t', z'\right) dz', \qquad (9)$$

где $\theta>0$, $y>0$, $3y^\theta\leqslant\delta\leqslant1/2$. Обозначим

$$\|W_n^{(1)}\|_{\delta,y}=\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant\delta\\0<z\leqslant3y^\theta}}|W_n^{(1)}(t,z)|.$$

Очевидно,

$$\mathbf{P}(D<ym/n)\leqslant\mathbf{P}(D<ym/n,\|W_n^{(1)}\|_{\delta,y}\leqslant\delta)+\mathbf{P}(\|W_n^{(1)}\|_{\delta,y}>\delta). \tag{10}$$

Для оценки первого слагаемого правой части (10) прежде всего отметим, что в (8) без ограничения общности можно полагать $r\geqslant2$. Далее, с помощью неравенства Гёльдера и теоремы Фубини получаем

$$\mathbf{P}(D<ym/n,\|W_n^{(1)}\|_{\delta,y}\leqslant\delta)\leqslant\mathbf{P}\left(\frac{C\nu}{2}\int_{\delta/2}^{\delta}dt\int_{2y^\theta}^{3y^\theta}|W_n^{(1)}(t,z)|^r dz<y^{1/2-\theta}\right)+$$
$$+\mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{\delta}dt'\int_{y^\theta}^{2y^\theta}|W_n^{(1)}(t',z')|^r dz'<y^{1/2}\right)\leqslant\mathbf{P}\left(\left(\frac{C\nu}{2}\right)^{2/r}\left\{\int_{\delta/2}^{\delta}dt\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\int_{2y^\theta}^{3y^\theta}(W_n^{(1)}(t,z))^2dz\right)^{r/2}\right\}^{2/r}<y^{2(1/2-\theta)/r}\right)+$$
$$+\mathbf{P}\left(\left\{\int_{\delta/2}^{\delta}dt'\left(\int_{y^\theta}^{2y^\theta}(W_n^{(1)}(t',z'))^2dz'\right\}^{1/r}<y^{1/r}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}\left(\left(\frac{C\nu}{2}\right)^{2/r}\int_{\delta/2}^{\delta}dt\int_{2y^\theta}^{3y^\theta}(W_n^{(1)}(t,z))^2dz<y^{(1-2\theta)/r}\right)+$$
$$+\mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{\delta}dt'\int_{y^\theta}^{2y^\theta}(W_n^{(1)}(t',z'))^2dz'<y^{1/r}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}\left(\left(\frac{C\nu}{2}\right)^{2/r}\int_{2y^\theta}^{3y^\theta}dz\left(\int_{\delta/2}^{\delta}W_n^{(1)}(t,z)\,dt\right)^2<y^{(1-2\theta)/r}\right)+$$
$$+\mathbf{P}\left(\int_{y^\theta}^{2y^\theta}dz'\left(\int_{\delta/2}^{\delta}W_n^{(1)}(t',z')\,dt'\right)^2<y^{1/r}\right). \tag{11}$$

Дальнейшая оценка обеих вероятностей правой части (11) проводится однотипно, в силу чего ограничимся оценкой слагаемого

$$R=\mathbf{P}\left(\int_{y^\theta}^{2y^\theta}dz\left(\int_{\delta/2}^{\delta}W_n^{(1)}(t,z)\,dt\right)^2<y^{1/r}\right).$$

Прежде всего отметим, что случайный процесс

$$\zeta_n(z)=\int_{\delta/2}^{\delta}W_n^{(1)}(t,z)\,dt,\quad z\in[0,1],$$

совпадает по распределению с процессом $C(\delta,n)W^0(z)$, где $W^0(z)$ — броуновский мост,

$$C(\delta,n)=\left(\int_{\delta/2}^{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}\min\left\{\frac{[nt]}{n},\frac{[ns]}{n}\right\}dtds\right)^{1/2}.$$

Это следует из равенства (см. (5))

$$\mathbf{E}\zeta_n(z)\zeta_n(y) = (\min\{z, y\} - zy)\int\limits_{\delta/2}^{\delta}\int\limits_{\delta/2}^{\delta}\min\left\{\frac{[nt]}{n}, \frac{[ns]}{n}\right\}dtds.$$

Очевидно,

$$\inf_{n>(2\delta)^{-1}} C(\delta, n) = C_0(\delta) > 0.$$

Следовательно, при $n > (2\delta)^{-1}$

$$R \leqslant \mathbf{P}\left(\int\limits_{y^\theta}^{2y^\theta}(W^0(z))^2\,dz < C_0^{-2}(\delta)\,y^{1/r}\right). \tag{12}$$

В [18] показано, что для любого события A из σ-алгебры, порожденной траекториями процесса $W^0(t)$ за время от 0 до $1-v$, имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(W^0(\cdot)\in A) \leqslant v^{-1/2}\mathbf{P}(W(\cdot)\in A), \tag{13}$$

где $W(\mathrm{t})$ — стандартный винеровский процесс. Стало быть, с учетом соотношения $y^\theta < 1/4$ из (12) и (13) следует

$$R \leqslant \sqrt{2}\,\mathbf{P}\left(\int\limits_{y^\theta}^{2y^\theta} W^2(z)\,dz < C_0^{-2}(\delta)\,y^{1/r}\right). \tag{14}$$

Для оценки правой части (14) нам понадобится известное разложение стандартного винеровского процесса $W(z)$ в ряд Фурье в пространстве $L_2([a, b], dt)$ (см. [19]):

$$W(z) = \sum_{k\geqslant 1}\lambda_k^{1/2}\gamma_k\varphi_k(z),$$

где $\{\gamma_k\}$ — независимые стандартные нормальные с. в., λ_k, φ_k — собственные числа и функции ковариационного оператора процесса $W(z)$, причем $\lambda_k > 0$. Отметим, что $\{\varphi_k(\cdot)\}$ образуют ортонормированный базис в $L_2([a, b], dt)$, в силу чего

$$\|W\|^2 \equiv \int\limits_a^b W^2(z)\,dz = \sum_{k\geqslant 1}\lambda_k\gamma_k^2. \tag{15}$$

Из (15) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство (по распределению)

$$\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} W^2(z)\,dz \stackrel{d}{=} \varepsilon^2\sum_{k\geqslant 1}\lambda_k\gamma_k^2; \tag{16}$$

здесь был использован очевидный факт: $W(\varepsilon z)\stackrel{d}{=}\varepsilon^{1/2}W(z)$ (в смысле равенства конечномерных распределений).

Положим в (16) $a=1$, $b=2$, $\varepsilon=y^\theta$. Поскольку в (16) $\lambda_k>0$, то из (14) окончательно получаем

$$R \leqslant \sqrt{2}\,\mathbf{P}\left(\sum_{k\geqslant 1}\lambda_k\gamma_k^2 < C_0^{-2}(\delta)\,y^{1/r-2\theta}\right) = o\left(y^{(1/r-2\theta)M}\right)$$

при $y\to 0$, где M — сколь угодно большое число. Остается только положить $\theta=(4r)^{-1}$.

Таким образом, первое слагаемое правой части (10) при $y\to 0$ убывает быстрее любой степени y.

Для оценки второго слагаемого в (10) воспользуемся сначала представлением (6) и неравенством Леви (см. [20]), в силу которого

$$\mathbf{P}(\|W_n^{(1)}\|_{\delta,y} > \delta) \leqslant 2\mathbf{P}\left(([n\delta]/n)^{1/2}\sup_{0<z<3y^\theta}|W^0(z)| > \delta\right);$$

здесь так же, как и в (12), было применено равенство

$$W_n^{(1)}\left(\frac{[n\delta]}{n}, z\right) = \left(\frac{[n\delta]}{n}\right)^{1/2} W^0(z).$$

Используя известные оценки (см. [19]) для распределения равномерной нормы случайного процесса $W^0(z)$ (или $W(z)$, см. (13)), окончательно получаем при $n > (2\delta)^{-1}$

$$\mathbf{P}(\|W_n^{(1)}\|_{\delta,y} > \delta) \leqslant C \exp\{-C_1\delta^2 y^{-\theta}\}, \tag{17}$$

что и требовалось показать. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь условие стохастической отделимости первой производной Фреше функционалов вида

$$F(x) = \int_0^1 f(x(t), t)\, dt \tag{18}$$

в классическом принципе инвариантности Донскера — Прохорова.

Лемма 2. *При выполнении условий*

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \geqslant 0, \qquad \inf_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \geqslant |x|^r \wedge b \tag{19}$$

при всех $x \in \mathbf{R}$, $t \in [0, 1]$ *и некоторых* b, $r > 0$, $\delta \in (0, 1/2)$, *для функционалов* (18) *выполнено* (1.11).

Доказательство. Для любого $y \in (0, 1)$ имеем

$$R \equiv \mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{1} \frac{\partial}{\partial x} f(W(t), t)\, dt < y\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{\delta(1+y^\theta)/2} \frac{\partial}{\partial x} f(W(t), t)\, dt < y\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{\delta(1+y^\theta)/2} \frac{\partial}{\partial x} f(W(t), t)\, dt < y,\ |W(\delta/2)| \leqslant b/2,\right.$$

$$\left.\sup_{\delta/2 \leqslant t \leqslant \delta(1+y^\theta)/2} |W(t) - W(\delta/2)| \leqslant b/4\right) +$$

$$+ \mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{\delta(1+y^\theta)/2} \frac{\partial}{\partial x} f(W(t), t) dt < y,\ |W(\delta/2)| > b/2,\right.$$

$$\left.\sup_{\delta/2 \leqslant t \leqslant \delta(1+y^\theta)/2} |W(t) - W(\delta/2)| \leqslant b/4\right) +$$

$$+ \mathbf{P}\left(\sup_{\delta/2 \leqslant t \leqslant \delta(1+y^\theta)/2} |W(t) - W(\delta/2)| > b/4\right). \tag{20}$$

Обозначим первое, второе и третье слагаемые правой части (20) соответственно R_1, R_2 и R_3. Аналогично (17) получаем

$$R_3 \leqslant C \exp\{-C_1(\delta y^\theta)^{-1}\}. \tag{21}$$

Далее, пусть $y \in (0, 1)$. Тогда в силу (19), а также (16) и неравенства Гёльдера

$$R_1 \leqslant \mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{\delta(1+y^\theta)/2} W(t)^2\, dt < y^{1/r}\right) \leqslant C(M, r, \delta)\, y^M, \tag{22}$$

где M — сколь угодно большое число, $\theta = (2r)^{-1}$, $r \geqslant 2$ (без ограничения общности рассуждений);

$$R_2 \leqslant I(\delta y^\theta b^2/32 < y) = 0 \tag{23}$$

при всех $y \leqslant (\delta b^2/32)^{\frac{1}{1-\theta}}$. Утверждение леммы следует из (2) и (20)—(23).

В заключение более подробно остановимся на замечании к теореме 1 в § 1. Рассмотрим в пространстве $L_2([0,\ 1],\ dt)$ следующую последовательность серий с. э. $\{\xi_{ni};\ i \leqslant n\}$:

$$\xi_{ni} \equiv \xi_{ni}(t) = \begin{cases} n^{-1/2}\zeta_i I_{i/2n}(t), & \text{если } n \text{ четное}, \\ n^{-1/2}\zeta_i I_{1/2+i/2n}(t) & \text{в противном случае}, \end{cases} \tag{24}$$

где по-прежнему $I_z(t) = 0$ или 1 соответственно при $t < z$ или $t \geqslant z$; $\{\zeta_i\}$ — независимые, одинаково распределенные с. в. с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным абсолютным третьим моментом. Через $\{r_{ni}\}$ определим по аналогии с (24) соответствующие гауссовские с. э. Очевидно, последовательность $\{\xi_{ni}\}$ не удовлетворяет в $L_2([0,\ 1],\ dt)$ центральной предельной теореме, поскольку подпоследовательности $\{\xi_{2n,i}\}$ и $\{\xi_{2n+1,i}\}$ при $n \to \infty$ слабо сходятся в $L_2(\cdot)$ к различным гауссовским процессам.

Теперь рассмотрим интегральный функционал

$$F(X) = \int_0^1 X(t)\,dt. \tag{25}$$

Как уже отмечалось, в этом случае $F^{(1)}(X)[h] \equiv F(h)$ и условие (1.5) с учетом (24) принимает вид

$$\sup_{z>0,n\geqslant 1} z^{-M} I\left\{(\mathrm{Card}\,(N))^{-1} \sum_{i\in N} \left\{1 - i/n - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2} I\{n \in \{2m-1;\ m = 1,\ 2,\ \ldots\}\}\right\}^2 < z\right\} \leqslant B$$

равномерно по всем $N \subseteq N(\delta,\ n) \subseteq \{1,\ \ldots,\ n\}$, где $N(\cdot)$ удовлетворяет требованию $\mathrm{Card}(N(\cdot)) \sim \delta n$. Остается только положить $\delta = 1/4$, $N(\delta,\ n) = \{i\colon\ i \leqslant n/4\}$.

Таким образом, для последовательности серий с. э. (24) и функционала (25)

$$d_F(S_n,\ W_n) \leqslant C(\cdot)n^{-1/2},$$

несмотря на то что с. э. $\{\xi_{ni};\ i \leqslant n\}$ не удовлетворяют центральной предельной теореме в $L_2([0,\ 1],\ dt)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Araujo A., Gine E.** The central limit theorem for real and Banach valued random variables.— New York: John Wiley and Sons, Inc., 1980.— 233 p.
2. **Rhee W. S., Talagrand M.** Bad rates of convergence for central limit theorem in Hilbert Space // Ann. Probab.— 1984.— V. 12, N 3.— P. 843—850.
3. **Götze F.** On the rate of convergence in the central limit theorem in Banach spaces.— Cologne, 1981.— 33 p.— (Preprints in Statistics, N 68; University of Cologne).
4. **Götze F.** On the rate of convergence in the central limit theorem in Banach spaces // Ann. Probab.— 1986.— V. 14, N 3.— P. 922—942.
5. **Ульянов В. В.** Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин в гильбертовом пространстве // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— Т. 31, № 1.— С. 31—46.
6. **Нагаев С. В., Чеботарев В. И.** О зависимости оценки скорости сходимости к нормальному закону от ковариационного оператора. Случай неодинаково распределенных слагаемых // Там же.— 1983.— Т. 28, № 3.— С. 599—600.
7. **Дронов С. В., Саханенко А. И.** О скорости сходимости в многомерном принципе инвариантности для функционалов интегрального типа // Сиб. мат. журн.— 1987.— Т. 28, № 3.— С. 78—88.
8. **Борисов И. С.** О скорости сходимости распределений функционалов интегрального типа // Теория вероятностей и ее применения.— 1976.— Т. 21, № 2.— С. 283—299.
9. **Виноградова Т. Р.** О точности нормальной аппроксимации на множествах, определяемых гладкими функциями. I // Там же.— 1985.— Т. 30, № 2.— С. 219—229.

10. **Виноградова Т. Р.** О точности нормальной аппроксимации на множествах, определяемых гладкими функциями. II // Там же.— 1985.— Т. 30, № 3.— С. 554—557.
11. **Юринский В. В.** О точности нормального приближения вероятности попадания в шар // Там же.— 1982.— Т. 27, № 2.— С. 270—278.
12. **Пинелис И. Ф., Саханенко А. И.** Замечания о неравенствах для вероятностей больших уклонений // Там же.— 1985.— Т. 30, № 1.— С. 127—131.
13. **Пинелис И. Ф.** О распределении сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве // Там же.— 1978.— Т. 23, № 3.— С. 630—637.
14. **Tortra A.** Lois indéfinment divisibles ($\mu \in I$) dans un group topologique abelian metrisable. Cas des espaces vectoriels // C. r. Acad. Sci. Ser. A.— 1965.— V. 261, N 23.— P. 4973—4975.
15. **Rosinski J., Suchanecki Z.** On the space of vector-valued functions integrable with respect to the white noise // Colloq. Math.— 1980.— V. 43, N 1.— P. 183—201.
16. **Götze F.** On Edgeworth expansions in Banach spaces // Ann. Probab.— 1981.— V. 9, N 5.— P. 852—859.
17. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин.— М.: Наука, 1972.— 414 с.
18. **Борисов И. С.** О скорости сходимости в «условном» принципе инвариантности // Теория вероятностей и ее применения.— 1978.— Т. 23, № 1.— С. 67—79.
19. **Скороход А. В.** Теория случайных процессов. Т. 1.— М.: Наука, 1971.— 664 с.
20. **Булдыгин В. В.** Сходимость случайных элементов в топологических пространствах.— Киев: Наук. думка, 1980.— 240 с.

О ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

А. И. САХАНЕНКО

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\forall j \quad \mathbf{M}\xi_j = 0, \ \mathbf{D}\xi_j < \infty. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение случайную ломаную $S = S(t)$, полагая

$$S(t_n) = \sum_{j\leqslant n} \xi_j \quad \text{при} \quad t_n = \sum_{j\leqslant n} \mathbf{D}\xi_j \tag{2}$$

и доопределяя $S(t)$ монотонно на каждом из интервалов $[t_{n-1}, t_n]$. Другими словами,

$$S(t) = S(t_{k-1}) + \xi_k h_k(t) \ \text{при}\ t \in [t_{k-1}, t_k], \tag{3}$$

где в качестве $\{h_k(\cdot)\}$ можно брать любые монотонные функции, для которых верны неравенства

$$0 \leqslant h_k(t) \leqslant 1 \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k] \quad \forall k. \tag{4}$$

Тем самым S может быть как случайной ступенчатой функцией, когда $h_k(t) \equiv 0$, так и непрерывной случайной ломаной, если $h_k(t) = (t - t_{k-1})/\mathbf{D}\xi_k$ при $\mathbf{D}\xi_k > 0$.

Мы будем рассматривать $S = S(t)$ как случайный процесс, определенный при $t \leqslant T$, где

$$T = [0, \infty) \cap [0, B^2] \quad \text{при} \quad B^2 \equiv \sum \mathbf{D}\xi_j. \tag{5}$$

Нетрудно понять, что ввиду (2)—(4) траектории процесса S с вероятностью 1 принадлежат некоторому сепарабельному подпространству $\mathscr{R}(T)$ пространства всех функций, не имеющих разрывов второго рода. Здесь $\mathscr{R}(T)$ рассматривается как нормированное пространство с равномерной нормой

$$\|u\| = \sup_{t\in T} |u(t)| \quad \text{при} \quad u \in \mathscr{R}(T) \tag{6}$$