СУММЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С φ-ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

С. А. УТЕВ

В работе исследуется асимптотическое поведение распределений частичных сумм случайных величин, удовлетворяющих условию φ-перемешивания.

Статья состоит из четырех параграфов.

Значительная часть исследований посвящена анализу дисперсии (§ 1) и оценкам вероятностей больших уклонений (§ 2) сумм слабо зависимых слагаемых.

Затем полученные оценки используются для обобщения на суммы случайных величин с φ-перемешиванием закона повторного логарифма (§ 3) и почти наверное принципа инвариантности (§ 4).

Некоторые из доказанных утверждений имеют законченный характер, а также развивают работы известных в этой области специалистов: И. А. Ибрагимова, W. Philipp, M. Peligrad, R. Bradley и др., и усиливают более ранние исследования автора.

§ 1. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИИ СУММЫ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть V — пространство случайных величин ξ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, которые имеют нулевые средние и конечные вторые моменты; $\|\xi\| = (\mathbf{E}|\xi|^2)^{1/2}$ — норма в V; $\langle a, b\rangle$, $|a|^2 = \langle a, a\rangle$ — соответственно скалярное произведение и порожденная им норма в H. Пусть, далее, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — некоторая последовательность элементов из V. Через V_a^b обозначим подпространство, натянутое на элементы ξ_i, $a \leqslant i \leqslant b$. Зафиксируем некоторое натуральное число h. Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad S(k, n) = \sum_{i=k+1}^{n} \xi_i,$$

$$\rho(k) = \sup_{i \geqslant 1} \sup_{\xi \in V_1^i, \eta \in V_{i+k}^{\infty}} \frac{|\mathbf{E}\langle \xi, \eta\rangle|}{\|\xi\|\|\eta\|},$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad \rho(0) = 1.$$

Здесь и далее для определенности положим $0/0 = 0$; сумму (произведение) по пустому множеству индексов считаем равной нулю (соответственно 1).

Основным содержанием этого пункта является

Теорема 1.1. *Справедливы оценки:*

$$\mathbf{E}|S_n|^2 \leqslant c_1 c(\rho, n) \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_j|^2, \tag{1.1}$$

$$\left| \sum_{\substack{i,j=1 \\ |i-j| \geqslant h}}^{n} \mathbf{E}\langle \xi_i, \xi_j\rangle \right| \leqslant c_2 c(\rho, n) \sum_{j=0}^{[\log_2 n]} \rho(h + 2^{j/3} - 1) \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_j|^2, \tag{1.2}$$

где $c(\rho, n) = \exp\left(2 \sum_{j=0}^{[\log_2 n]} \rho(2^{j/3})\right)$, c_1, c_2 — *абсолютные постоянные.*

Хорошо известны следующие оценки:

$$\mathbf{E}\,|S_n|^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\mathbf{E}\langle\xi_i,\xi_j\rangle| \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \rho(|j-i|\,\|\xi_i\|\,\|\xi_j\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{n-1}\rho(k)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,|\xi_j|^2,$$

$$\left|\sum_{i,j=1\,|\,i-j|\,\geqslant\,h}^{n}\mathbf{E}\langle\xi_i,\xi_j\rangle\right| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n,\\ |i-j|\geqslant h}} \rho(|j-i|)\,\|\xi_i\|\,\|\xi_j\| \leqslant 2\left(\sum_{k=h}^{n-1}\rho(k)\right)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,|\xi_j|^2,$$

т. е. предложенные в теореме оценки связаны с ослаблением зависимости от коэффициентов $\rho(k)$. Впервые в случае строго стационарной последовательности оценка (1.1) получена в [2] (дальнейшее развитие см. [7]). В [3] предложена оценка

$$\mathbf{E}\,|S_n|^2 \leqslant c_3 c(\rho, n)\, n \max_{1\leqslant j\leqslant n}\mathbf{E}\,|\xi_j|^2,$$

где c_3 — абсолютная постоянная.

Сначала докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1.2. *Пусть задана неубывающая последовательность неотрицательных чисел $a(n)$ такая, что существует невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\varepsilon(k)$ и натуральная последовательность $T(k)$, удовлетворяющие условиям*

$$T(k) \leqslant 2^{-1}k(1+k^{-1/3}), \tag{1.3}$$

$$a(k) \leqslant \max_{1\leqslant s\leqslant k} a(T(s))(1+\varepsilon(s)) \tag{1.4}$$

для всех $k\geqslant 1$. Тогда

$$a(n) \leqslant a(n_0)\exp\left(2\sum_{i=0}^{[\log_2 n]}\varepsilon(2^i)\right)$$

для всех $n\geqslant 1$, где можно взять $n_0 = 2^7$.

Доказательство. Положим $w(m) = a(2^m)$. Так как $a(n)$ — неубывающая последовательность, то $w(m)$ — тоже не убывает и

$$a(n) \leqslant w([\log_2 n]+1). \tag{1.5}$$

Докажем по индукции, что

$$w(m) \leqslant w(c)\prod_{i=0}^{m-2}(1+\varepsilon(2^i))^2, \tag{1.6}$$

где можно взять $c = 7$. При $m\leqslant c$ соотношение (1.6) очевидно. Пусть $m > c$. Обоснуем индукционный шаг. Дважды применяя свойство (1.4) и учитывая, что $T(k)\leqslant k$, находим

$$w(m) = a(2^m) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant 2^m}\ \max_{1\leqslant j\leqslant T(i)} a(T(j))(1+\varepsilon(j))(1+\varepsilon(i)) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant 2^m}\ \max_{1\leqslant j\leqslant T(i)} a(T(j))(1+\varepsilon(j))^2 \equiv a(T(J))(1+\varepsilon(J))^2$$

для некоторого J такого, что найдется натуральное I, удовлетворяющее неравенствам

$$1\leqslant I\leqslant 2^m,\quad 1\leqslant J\leqslant T(I).$$

Если $J\leqslant 2^{c-1}$, то $T(J)\leqslant J$, $[\log_2 T(J)]+1\leqslant c$, а значит, из соотношения (1.5) и невозрастания $\varepsilon(k)$ получим

$$a(T(J)) \leqslant w([\log_2 T(J)]+1) \leqslant w(c),$$

$$w(m) \leqslant a(T(J))(1+\varepsilon(1))^2 \leqslant w(c)\prod_{i=0}^{m-2}(1+\varepsilon(2^i))^2.$$

Пусть теперь $J > 2^{c-1}$. Тогда, так как $J \leqslant T(I) \leqslant I$, то и $I > 2^{c-1}$. Следовательно, по свойству (1.3) имеем

$$r = [\log_2 T(J)] + 1 \leqslant [\log_2 J - 1 + \log_2(1 + J^{-1/3})] + 1 \leqslant$$
$$\leqslant [\log_2 T(I) - 1 + 2^{(1-c)/3}] + 1 \leqslant [\log_2 I - 2 + 2 \cdot 2^{(1-c)/3}] + 1 \leqslant m - 1.$$

Значит, учитывая, что $T(J) \leqslant J$, можно применить индукционный шаг

$$w(m) \leqslant a(T(J))(1 + \varepsilon(J))^2 \leqslant w(r)\left(1 + \varepsilon(2^{r-1})\right)^2 \leqslant w(c) \prod_{j=0}^{m-2} \left(1 + \varepsilon(2^j)\right)^2.$$

Завершим доказательство леммы. Имеем по свойствам (1.5), (1.6)

$$a(n) \leqslant w([\log_2 n] + 1) \leqslant w(c) \prod_{i=0}^{[\log_2 n]-1} (1 + \varepsilon(2^i))^2 \leqslant$$
$$\leqslant a(n_0) \exp\left(2 \sum_{i=0}^{[\log_2 n]} \varepsilon(2^i)\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть заданы неотрицательные числа* $a(1) \leqslant \ldots \leqslant a(n)$ *такие, что существуют неотрицательные числа* $\delta(1) \geqslant \ldots \geqslant \delta(n)$ *и натуральная последовательность* $T(k)$, *удовлетворяющие условиям*

$$T(k) \leqslant 2^{-1}k(1 + k^{-1/3}), \tag{1.7}$$
$$a(k) \leqslant a(T(k)) + \delta(k) \tag{1.8}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда*

$$a(n) \leqslant a(n_0) + 2 \sum_{i=0}^{[\log_2 n]} \delta(2^i).$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, приведенными при доказательстве предыдущей леммы. Достаточно показать, что при $m > c$

$$w(m) \leqslant w(c) + 2\left[\sum_{j=0}^{m-1} \delta(2^j)\right] + \delta(2^m),$$

где, как и ранее, $w(m) = a(2^m)$. Применяя свойство (1.8), получим $w(m) \leqslant a(T(2^m)) + \delta(2^m)$.

Если $T(2^m) < 2^{m-1}$, то $a(T(2^m)) \leqslant a(2^{m-1}) \leqslant w(m-1)$; и по индукционному предположению

$$w(m) \leqslant w(m-1) + \delta(2^m) \leqslant a(n_0) + 2\left(\sum_{j=0}^{m-1} \delta(2^j)\right) + \delta(2^m).$$

Пусть теперь $T(2^m) \geqslant 2^{m-1}$. Тогда

$$r = [\log_2 T(T(2^m))] + 1 \leqslant [m - 2 + 2^{(1-m)/3} + 2^{-m/3}] + 1 \leqslant m - 1.$$

Еще раз применяя свойство (1.8) и используя индукционное предположение, находим

$$w(m) \leqslant a(T(T(2^m)) + \delta(2^m) + \delta(T(2^m)) \leqslant$$
$$\leqslant \left(a(n_0) + \left(2 \sum_{j=0}^{m-2} \delta(2^j)\right) + \delta(2^{m-1})\right) + \delta(2^m) + \delta(2^{m-1}) \leqslant$$
$$\leqslant a(n_0) + \left(2 \sum_{j=0}^{m-1} \delta(2^j)\right) + \delta(2^m).$$

Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.1. Положим

$$z_n = \sup_{0 \leqslant a < \infty} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \| S(a, a+i) \| \left(\sum_{j=a+1}^{a+i} \| \xi_j \|^2 \right)^{-1/2} \right\},$$

$$n = 1, 2, \ldots, z_0 = 1, x_0 = 0,$$

$$x_n = \sup_{0 \leqslant a < \infty} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \left| \sum_{j=a+1}^{a+i} \mathbf{E} \langle S(a, j), \xi_{j+h} \rangle \right| \left(\sum_{j=a+1}^{a+i} \| \xi_j \|^2 \sum_{j=a+1}^{a+i} \| \xi_{j+h} \|^2 \right)^{-1/2} \right\}.$$

Непосредственно из построения следует, что

$$\mathbf{E} | S_n |^2 \leqslant z_n^2 \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E} | \xi_j |^2, \tag{1.9}$$

$$\left| \sum_{\substack{i,j=1, \\ |i-j| \geqslant h}}^{n} \mathbf{E} \langle \xi_i, \xi_j \rangle \right| = 2 \left| \sum_{j=1}^{n-h} \mathbf{E} \langle S_j, \xi_{j+h} \rangle \right| \leqslant 2 x_n \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E} | \xi_j |^2. \tag{1.10}$$

Нетрудно видеть, что z_n и x_n неубывающие последовательности неотрицательных чисел.

Дальнейший путь заключается в том, чтобы применить к ним соответственно леммы 1.2 и 1.3, т. е. отыскать последовательности $\varepsilon(k)$, $\delta(k)$ и $T(k)$, которые удовлетворяют условиям (1.3), (1.4) и (1.7), (1.8) и вместе с неравенствами (1.9), (1.10) приводят к требуемым в теореме оценкам.

Для большей ясности выделим отмеченные пути исследования последовательностей z_n и x_n в отдельные леммы.

Лемма 1.4 (О свойствах z_n). *Для всех $k \geqslant 1$ имеет место*

$$1 = z_1 \leqslant z_{k-1} \leqslant z_k \leqslant k^{1/2}, \tag{1.11}$$

$$z_k \leqslant \max_{1 \leqslant s \leqslant k} z_{T(s)} \left(1 + 2^{-1} \rho([s^{1/3}]) + 4^{10} s^{-1/9} \right), \tag{1.12}$$

где натуральная последовательность $T(k)$ удовлетворяет условию (1.3).

Доказательство. Свойство (1.11) непосредственно следует из построения (при выводе соотношения $z_k \leqslant k^{1/2}$ нужно воспользоваться элементарным неравенством $(a_1 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + \ldots + a_n^2)$).

Докажем утверждение (1.12). Применим индукцию. Положим $k_0 = 4^9$ и $T(k) = 1$ при $k = 1, \ldots, k_0$. Тогда при $k \leqslant k_0$ получим

$$z_k \leqslant k_0 \leqslant z_{T(k)} \left(1 + 4^{10} k^{-1/9} \right). \tag{1.13}$$

Пусть теперь $k > k_0$. Нужно построить $T(k)$ так, чтобы для всех $a \geqslant 0$ и всех $i = 1, \ldots, k$ имело место

$$\| S(a, a+i) \|^2 \leqslant \sum_{j=a+1}^{a+i} \| \xi_j \|^2 \max_{1 \leqslant s \leqslant k} \left\{ z_{T(s)}^2 \left(1 + 2^{-1} \rho([s^{1/3}]) + 4^{10} s^{-1/9} \right)^2 \right\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать $a = 0$. С другой стороны, учитывая предположение индукции, достаточно построить $T(k)$ так, чтобы выписанное неравенство выполнялось при $i = k$, т. е.

$$\| S_k \|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \| \xi_j \|^2 z_{T(k)}^2 \left(1 + 2^{-1} \rho([k^{1/3}]) + 4^{10} k^{-1/9} \right)^2. \tag{1.14}$$

Положим

$$m = [k^{1/3}],$$

$$A = \left\{ u\colon\ 0 \leqslant u \leqslant k,\ \sum_{i=um+1}^{(u+1)m} \| \xi_i \|^2 \leqslant (m/k)^{1/3} \sum_{j=1}^{k} \| \xi_j \|^2 \right\},$$

$$\overline{A} = \left\{ u\colon\ \sum_{i=um+1}^{(u+1)m} \| \xi_i \|^2 > (m/k)^{1/3} \sum_{j=1}^{k} \| \xi_j \|^2,\ 0 \leqslant u \leqslant k \right\},$$

$$B = \{ u\colon\ 0 \leqslant u \leqslant k,\ 2^{-1}(k - m^2) \leqslant um \leqslant 2^{-1} k \}.$$

По построению, при $k \geqslant k_0$

$$|B| \geqslant |\{1 \leqslant u \leqslant k\colon [k/2m] - [m/2] + 1 \leqslant [k/2m]\}| \geqslant [m/2];$$
$$|\bar{A}|\,(m/k)^{1/3} \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$|A \cap B| = |B - \bar{A} \cap B| \geqslant |B| - |\bar{A}| \geqslant$$
$$\geqslant [m/2] - (k/m)^{1/3} \geqslant 2^{-1}k^{1/3}(1 - 4k^{-1/9}) - 3/2 > 0,$$

т. е. $A \cap B \neq \varnothing$.

Зафиксируем $u \in A \cap B$. Имеем

$$\|S_k\| \leqslant \|S_{um} + S(um + m,\ k)\| + \|S(um,\ um + m)\|. \tag{1.15}$$

Вспоминая про коэффициент корреляции $\rho(k)$, находим

$$\|S_{um} + S(um + m,\ k)\|^2 \leqslant \|S_{um}\|^2 + \|S(um + m,\ k)\|^2 +$$
$$+ 2\rho(m)\|S_{um}\|\,\|S(um + m,\ k)\|.$$

Следовательно, из определения z_n вытекает

$$\|S_k\| \leqslant z_m \left(\sum_{i=um+1}^{um+m} \|\xi_i\|^2\right)^{1/2} + \left(z_{um}^2 x^2 + z_{k-um-m}^2 y^2 + 2\rho(m)\, z_{um} z_{k-um-m} xy\right)^{1/2}, \tag{1.16}$$

где $x, y \geqslant 0$, $x^2 = \sum_{i=1}^{um} \|\xi_i\|^2$, $y^2 = \sum_{i=um+m+1}^{k} \|\xi_i|^p$.

Положим $T(k) = \max(um + m,\ k - um)$. Заметим, что так построенная величина $T(k)$ удовлетворяет неравенству (1.3). Опять же, по построению

$$\sum_{i=um+1}^{um+m} \|\xi_i\|^2 \leqslant (m/k)^{1/3} \sum_{j=1}^{k} \|\xi_j\|^2. \tag{1.17}$$

Таким образом, подставляя полученное соотношение в (1.16) и учитывая элементарное неравенство $2xy \leqslant x^2 + y^2$, получим

$$\|S_k\| \leqslant z_{T(k)} \left(\sum_{j=1}^{k} \|\xi_j\|^2\right)^{1/2} ((m/k)^{1/6} + (1 + \rho(m))^{1/2}) \leqslant$$
$$\leqslant z_{T(k)} \left(\sum_{j=1}^{k} \|\xi_j\|^2\right)^{1/2} \left(1 + 2^{-1}\rho\left([k^{1/3}]\right) + k^{-1/9}\right).$$

Следовательно, неравенство (1.14), а вместе с ним и лемма доказаны.

Из неравенства (1.9) и лемм 1.2, 1.4 вытекает первое соотношение доказываемой теоремы.

Лемма 1.5 (О свойствах x_n). *Для $k = 1, \ldots, n$ имеют место соотношения*

$$x_{k-1} \leqslant x_k \leqslant k\rho(h), \tag{1.18}$$

$$x_k \leqslant x_{T(k)} + V_n\rho(h)k^{-1/9} + V_n\rho([k^{1/3}] + h), \tag{1.19}$$

где $V_n = (c_1 + 4^{10}) \exp\left(2 \sum_{j=0}^{[\log_2 n]} \rho(2^{j/3})\right)$.

Доказательство. Покажем справедливость утверждения (1.18). Монотонность $x_{k-1} \leqslant x_k$ непосредственно следует из построения. Далее имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{i} \mathbf{E}\langle S(a, a + j), \xi_{j+h}\rangle\right| \leqslant$$
$$\leqslant \rho(h) \sum_{j=1}^{i} (\|S(a, a + j)\|\,\|\xi_{j+h}\|) \leqslant \rho(h)\, i \left\{\sum_{j=a+1}^{a+i} \|\xi_j\|^2 \sum_{j=a+1}^{a+i} \|\xi_{j+h}\|^2\right\}^{-1/2}.$$

Откуда, учитывая определение последовательности x_n, находим $x_k \leqslant k\rho(h)$.

Перейдем к доказательству утверждения (1.19). Воспользуемся обозначениями, которые использовали при доказательстве предыдущей леммы. Соотношение (1.13) в данном случае имеет вид

$$x_k \leqslant k_0\rho(h) \leqslant x_{T(k)} + 4^{10}k^{-1/9}, \quad k \leqslant k_0.$$

Пусть теперь $k > k_0$. Опять же, не ограничивая общности, достаточно проверить справедливость неравенства

$$\left|\sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\langle S_j, \xi_{j+h}\rangle\right| \leqslant x_{T(k)} + V_n\left(\rho(h)k^{-1/9} + \rho(h + [k^{1/3}])\right). \quad (1.20)$$

Аналогом неравенства (1.15) является тождество

$$\sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\langle S_j, \xi_{j+h}\rangle = \sum_{j=1}^{um+m} \mathbf{E}\langle S_j, \xi_{j+h}\rangle +$$

$$+ \sum_{j=um+m}^{k} \mathbf{E}\langle S(um, j), \xi_{j+h}\rangle + \mathbf{E}\langle S_{um+m}, S(um+m+h, k+h)\rangle.$$

Имеем

$$|\mathbf{E}\langle S_{um+m}, S(um+m+h, k+h)\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \rho(h)\|S(um, um+m)\|\,\|S(um+m+h, k+h)\| +$$
$$+ \rho(h+m)\|S_{um}\|\,\|S(um+m+h, k+h)\|.$$

Подставляя полученное неравенство в приведенное выше тождество и используя уже доказанное утверждение (1.1), находим

$$\left|\sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\langle S_j, \xi_{j+h}\rangle\right| \leqslant x_{um+m}p_1p_2 + x_{k-um-m}p_3p_4 +$$
$$+ V_n(\rho(h)p_4p_5 + \rho(h+m)p_1p_4),$$

где все $p_i \geqslant 0$ и

$$p_1^2 = \sum_{j=1}^{um+m} \|\xi_j\|^2, \quad p_2^2 = \sum_{j=1}^{um+m} \|\xi_{j+h}\|^2,$$

$$p_3^2 = \sum_{j=um+m+1}^{k} \|\xi_j\|^2, \quad p_4^2 = \sum_{j=um+m+1}^{k} \|\xi_{j+h}\|^2,$$

$$p_5^2 = \sum_{j=um+1}^{um+m} \|\xi_j\|^2, \quad V_n = (c_1 + 4^{10})\exp\left(2\sum_{j=0}^{[\log_2 n[} \rho(2^{j/3})\right).$$

Воспользовавшись элементарным неравенством $p_1p_2 + p_3p_4 \leqslant ((p_1^2 + p_3^2) \times \times (p_2^2 + p_4^2))^{1/2}$ и свойством (1.17), получим

$$\left|\sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\langle S_j, \xi_{j+h}\rangle\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{k} \|\xi_j\|^2 \sum_{j=1}^{k} \|\xi_{j+h}\|^2\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(x_{T(k)} + V_h\left(\rho(h)k^{-1/9} + \rho([k^{1/3}] + h)\right)\right).$$

Лемма доказана.

Из неравенств (1.10) и лемм 1.3, 1.5 вытекает соотношение (1.2). Теорема доказана.

Дальнейшие результаты этого параграфа играют ключевую роль в представлении суммы слабозависимых случайных величин в виде суммы «блоков», дисперсия которых ведет себя «почти одинаково» и корреляция между которыми «пренебрежимо» мала.

Положим

$$\delta_n^2 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{D}\xi_i.$$

Лемма 1.6. *Пусть* $\rho(h) < 1$. *Тогда существует абсолютная постоянная* c, *для которой*

$$\max_{1 \leqslant u \leqslant v \leqslant n} \mathbf{D}\left(\sum_{i=u}^{v} \xi_i\right) \leqslant c\,[\delta_n^2 + \mathbf{D}S_n](1 + h^2)(1 - \rho(h))^{-1}. \tag{1.21}$$

Доказательство леммы фактически содержится в [3, с. 1309]. Пусть, далее,

$$g_n = \max_{1 \leqslant s \leqslant n}\left\|\sum_{i=1}^{s} \xi_i\right\|, \quad 0 \leqslant a \leqslant g_n,$$

$$\nu(a) = \min\left\{s\colon \left\|\sum_{i=1}^{s} \xi_i\right\| \geqslant a\right\},$$

$$T(a) = \xi_1 + \ldots + \xi_{\nu(a)}.$$

Лемма 1.7. *Для всяких* $0 \leqslant a < b \leqslant g_n$ *и натуральных* $u \leqslant v \leqslant x \leqslant y$ *справедливы неравенства*

$$|\,\|T(a)\| - a| \leqslant \delta_n, \quad |\mathbf{D}T(a) - a^2| \leqslant 2\delta_n g_n, \tag{1.22}$$

$$\left|\mathbf{E}\left\langle \sum_{u \leqslant r \leqslant v} \xi_r, \sum_{x \leqslant i \leqslant y} \xi_i \right\rangle\right| \leqslant c_3(h\delta_n + \rho(h)\,g_n)\,g_n, \tag{1.23}$$

$$|\mathbf{D}(T(b) - T(a)) - (b^2 - a^2)| \leqslant c_4(h\delta_n + \rho(h)g_n)g_n, \tag{1.24}$$

где c_3, c_4 *— абсолютные постоянные.*

Подробное доказательство этой леммы приведено в [4]. Поэтому мы лишь приведем его небольшие наброски.

Первые два неравенства следуют из построения и неравенства треугольника. Соотношение (1.24) тоже вытекает из построения и утверждений (1.22), (1.23). Так что фактически достаточно обосновать (1.24). Имеем

$$\left|\mathbf{E}\left\langle \sum_{u \leqslant r \leqslant v} \xi_r, \sum_{x \leqslant i \leqslant y} \xi_i \right\rangle\right| \leqslant \mathbf{E}\left\langle \sum_{u \leqslant r \leqslant v-h} \xi_r, \sum_{x \leqslant i \leqslant y} \xi_i \right\rangle\Bigg| +$$

$$+ \left\|\sum_{v-h < r \leqslant v} \xi_r\right\| \left\|\sum_{x \leqslant i \leqslant y} \xi_i\right\| \leqslant \left(\rho(h)\left\|\sum_{u \leqslant r \leqslant v-h} \xi_r\right\| + \sum_{v-h < r \leqslant v} \|\xi_r\|\right)\left\|\sum_{x \leqslant i \leqslant y} \xi_i\right\| \leqslant$$

$$\leqslant (2\rho(h)\,g_n + h\delta_n)\,2g_n.$$

Лемма доказана.

§ 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И МОМЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА. ПРИЛОЖЕНИЕ К СХОДИМОСТИ РЯДОВ И УСИЛЕННОМУ ЗАКОНУ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Через M_a^b обозначим σ-алгебру, порожденную случайными элементами ξ_i, $a \leqslant i \leqslant b$. Зафиксируем натуральное p, а также $x_0 \in \mathbf{R}^+$. Положим

$$\varphi(k) = \sup_{1 \leqslant s} \sup_{A \in M_1^s, B \in M_{s+k}^{\infty}, \mathbf{P}(A) > 0} |\mathbf{P}(B \mid A) - \mathbf{P}(B)|,$$

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\eta = \varphi(p) + \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{P}(|S_n - S_i| > x_0).$$

Лемма 2.1. *Пусть* $\eta < 1$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| > x + 2a + 2x_0\right) \leqslant \eta(1 - \eta)^{-1}\,\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| > x\right) +$$

$$+ 2(1 - \eta)^{-1}\,\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k| > a/(p + 1)\right).$$

Это неравенство есть модификация неравенств, предложенных в [5].

Доказательство. Положим

$$\begin{gathered}\xi = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|, \quad R(t) = \mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| > t\right), \\ E_k(t) = \left\{\max_{i\leqslant k-1} |S_i| < t \leqslant |S_k|\right\}, \quad x_1 = x + a + x_0.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Имеем

$$\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| > t\right\} = \bigcup_{k=1}^{n} E_k(t), \quad E_k(t) \cap E_s(t) = \varnothing, \quad k \neq s,$$

$$\{|S_k| \geqslant x_1 + a + x_0\} \cap \left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} (\xi_k| > a/p\right\} \cap \{|S_n| \leqslant x_1\} <$$
$$< \{|S_n - S_{k+p}| \geqslant x_0\}.$$

Следовательно, полагая $x_2 = x_1 + a + x_0$, находим

$$I \equiv \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k(x_2) \cap \{\xi > a/p\} \cap \{|S_n| \leqslant x_1\}) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k(x_2) \cap \{|S_n - S_{k+p}| > x_0\}) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k(x_2))\right) \times$$
$$\times \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}(|S_n - S_{k+p}| > x_0 \mid E_k(x_2)) \leqslant$$
$$\leqslant R(x_2)\left(\varphi(p) + \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}(|S_n - S_{k+p}| > x_0)\right),$$

откуда

$$R(x_2) \leqslant (\mathbf{P}(|S_n| > x_1) + \mathbf{P}(\xi > a/p)) + I \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(|S_n| > x_1) + \mathbf{P}(\xi > a/p) + \eta R(x_2).$$

Тем самым, при $\eta < 1$ справедлива оценка

$$R(x_1 + a + x_0) \leqslant (1 - \eta)^{-1}(\mathbf{P}(|S_n| > x_1) + \mathbf{P}(\xi > a/p)). \tag{2.2}$$

Опять же

$$\{|S_{k-1}| < x\} \cap \{\xi > a/(p+1)\} \cap \{|S_n| > x + a + x_0\} \subset \{|S_n - S_{k+p}| > x_0\}.$$

Как и ранее, находим

$$\mathbf{P}(|S_n| > x + a + x_0) \leqslant \mathbf{P}(\xi > a/(p+1)) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k(x) \cap \{\xi > a/(p+1)\} \cap \{|S_n| > x + a + x_0\}) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(\xi > a/(p+1)) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(E_k(x) \cap \{|S_n - S_{k+p}| > x_0\}) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(\xi > a/(p+1)) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k(x)) \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}(|S_n - S_{k+p}| > x_0 \mid E_k(x)).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(|S_n| > x + a + x_0) \leqslant \mathbf{P}(\xi > a/(p+1)) + R(x)\eta.$$

Вспоминая, что $x_1 = x + a + x_0$, и подставляя предыдущее неравенство в соотношение (2.2), получим требуемый результат. Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Пусть $\varphi(p) < 1/2$. Существует постоянная $c\{\varphi(p)\}$, зависящая лишь от $\varphi(p)$, такая, что для всех $t \geqslant 1$ и всех $1 \leqslant q \leqslant t$ имеет место*

$$\mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|^t \leqslant (c\{\varphi(p)\}\, t)^t \left(p^t \mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^t + \max_{1\leqslant k\leqslant n} (\mathbf{E}|S_k|^q)^{t/q}\right).$$

Доказательство. Пусть x_0 такое, что $\eta < 1$. Тогда

$$\mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|^t = t\int_0^\infty u^{t-1} R(u)\, du \leqslant (Vx_0)^t + t \int_{Vx_0}^{\infty} u^{t-1} R(u)\, du \equiv (Vx_0)^t + J.$$

Положим

$$u = x(1+2\alpha) + 2x_0,\ a = \alpha x,\ \Phi = \eta(1-\eta)^{-1},\ A = 2(1-\eta)^{-1},$$
$$\Delta = \exp(2t(\alpha + (V-2)^{-1}))$$

и воспользуемся леммой. Учитывая, что из $u \geqslant Vx_0$ следует $x \geqslant (V-2)/(1+2\alpha)$, получим

$$J \leqslant \{(1+2\alpha)(1+2(V-2)^{-1}\}^{t-1} t \int_0^\infty x^{t-1} R(x(1+2\alpha)+2x_0)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \Delta\left(\Phi t \int_0^\infty x^{t-1} R(x)\,dx + At \int_0^\infty x^{t-1} \mathbf{P}(\xi(p+1) > \alpha x)\,dx\right) \leqslant$$
$$\leqslant \Delta\left(\Phi \mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|^t + A\mathbf{E}\xi^t((p+1)/\alpha)^t\right).$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|^t (1-\Phi\Delta) \leqslant (Vx_0)^t + \Delta A \mathbf{E}\xi^t((p+1)/\alpha)^t. \tag{2.3}$$

Полагая в (2.3)

$$x_0 = \varepsilon^{-1/q} \max_{1\leqslant k\leqslant n} (\mathbf{E}|S_k|^q)^{1/q},\quad \alpha = \varepsilon/t,\quad V = t/\varepsilon,\quad \varepsilon = (1-2\varphi(p))/N,$$

где N — достаточно большое число, мы получим требуемый результат. Теорема доказана.

Замечание. Покажем, что приведенная в теореме оценка точна. В самом деле, из неравенства треугольника следует

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k| \leqslant 2 \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|.$$

Воспользовавшись неравенством Йенсена и учитывая, что интеграл сохраняет порядок, мы находим

$$\mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^t \leqslant 2^t \mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|^t,$$
$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} (\mathbf{E}|S_k|^q)^{t/q} \leqslant \left(\mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|^q\right)^{t/q} \leqslant \mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|^t.$$

Следовательно,

$$2^{-1}\left(2^{-t}\mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^t + \max_{1\leqslant k\leqslant n} (\mathbf{E}|S_k|^q)^{t/q}\right) \leqslant \mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|^t.$$

Воспользовавшись для оценки $\mathbf{D}S_k$ теоремой 1.1, мы получим

Следствие 2.3. *Пусть* $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(2^k) < \infty$, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $i \geqslant 1$. *Тогда при* $t \geqslant 2$ *имеет место*

$$\mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|^t \leqslant (tk(\varphi))^t \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}|\xi_i|^t + \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}|\xi_i|^2\right)^{t/2}\right),$$

где постоянная $k(\varphi)$ *зависит лишь от* φ.

Воспользовавшись леммой 1.6, мы получим

Следствие 2.4. *Пусть* $\varphi(p) < 1/4$, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда при* $t \geqslant 2$ *имеет место*

$$\mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|^t \leqslant (c_1\{\varphi(p)\}\,t)^t \left(p^t \mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^t + (\mathbf{D}S_n)^{t/2}\right).$$

Следствия 2.5, 2.6 вытекают из следствия 2.4.

Следствие 2.5. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — *m-зависимы*, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Существует абсолютная постоянная* c, *для которой при* $t \geqslant 2$ *имеет место*

$$\mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|^t \leqslant (ct)^t \left[m^t \mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^t + (\mathbf{D}S_n)^{t/2}\right].$$

Следствие 2.6. *Пусть* $\xi_i = f_i(X_i, \omega)$, $i = 1, \ldots, n$, *где* $X = \{X_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ — *цепь Маркова с коэффициентом эргодичности* α_n; $f = \{f_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ — *случайные процессы, независимые между собой и в совокупности независящие от* X. *Тогда при* $t \geqslant 2$ *имеет место*

$$\mathbf{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k|^t \leqslant (ct)^t \left(\alpha_n^{-t} \mathbf{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k|^t + (\mathbf{D} S_n)^{t/2}\right).$$

Следствие 2.7. *Пусть* $1 \leqslant t \leqslant 2$ *и* $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(2^k) < \infty$; $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Имеет место неравенство*

$$\mathbf{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k|^t \leqslant k(\varphi) \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} |\xi_i|^t,$$

где, как и ранее, $k(\varphi)$ *зависит лишь от* φ.

Доказательство следствия 2.7. Из леммы 4.1 работы [10], и теоремы 1.1 вытекает

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{E} |S_i|^t \leqslant k \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} |\xi_i|^t,$$

где k зависит лишь от φ. Применяя теорему 2.2 при $q = t$ и подставляя приведенную оценку, получим требуемый результат.

Следствие 2.8. *Пусть* $\varphi(p) < 1/2$. *Тогда*

$$\mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|\right)^2 \leqslant c(\varphi, p) \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} |\xi_i|^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} |\xi_i|\right)^2\right),$$

где $c(\varphi, p)$ *зависит лишь от* $\varphi(p)$ *и* p.

Теорема 2.9. *Пусть* $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(2^k) < \infty$. *Тогда*

(1) *если* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}\xi_n < \infty$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \mathbf{E}\xi_n)$ *сходится п. н.*;

(2) *если* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}\xi_n a_n^{-2} < \infty$, *то* $a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \mathbf{E}\xi_i) \to 0$ *при* $h \to \infty$, *где также* $a_n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \to 1$.

Доказательство. Второе утверждение теоремы вытекает из первого и леммы Кронекера так же, как и в одномерном случае (см., например, [6, с. 326—332]).

Проверим справедливость утверждения (1). Имеем по следствию 2.7

$$\sup_{n>0} \left\{\mathbf{P}\left(\max_{m \leqslant k \leqslant m+n} \left|\sum_{i=m}^{k} (\xi_i - \mathbf{E}\xi_i)\right| > \varepsilon\right\} \leqslant\right.$$

$$\leqslant \sup_{h>0} \left\{\varepsilon^{-2} \mathbf{E} \max_{m \leqslant k \leqslant m+n} \left|\sum_{i=m}^{k} (\xi_i - \mathbf{E}\xi_i)\right|^2\right\} \leqslant c\varepsilon^{-2} \sum_{i=m}^{\infty} \mathbf{D}\xi_i \to 0$$

при $m \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание. Впервые моментное неравенство Розенталя [8, 9] для сумм случайных величин с φ-перемешиванием доказано в [10] (здесь же имеется история вопроса). Доказательство, предложенное в цитированной работе в случае t — целого четного порядка момента опиралось на явные комбинаторные вычисления, далее осуществлялся переход к произвольному $t \geqslant 1$ через соответствующую срезку, причем накладывались более жесткие ограничения на коэффициенты $\varphi(k)$, чем в следствии 2.3. В [11] предложен другой подход к доказательству моментных неравенств, а в частности, там доказан несколько более слабый вариант следствий 2.5, 2.6. Этот подход основан на неравенстве

$$\mathbf{E}x^m \leqslant c_m((\mathbf{E}x)^m + |\Gamma_m(x)|),$$

где $X \geqslant 0$; $\Gamma_m(x)$ — куммулянт порядка m случайной величины X. Путь, приведенный здесь, восходит к [12]. Для независимых слагаемых более детально изложен в [13], [14]. Для последовательностей с φ-перемешиванием частично реализован в [5], [15].

Результаты о сходимости рядов и усиленном законе больших чисел для последовательностей с φ-перемешиванием восходят к работе [16], где в отличие от приведенной теоремы 2.9 требуется сходимость ряда $\sum \varphi^{1/2}(k) < \infty$.

§ 3. ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность вещественнозначных случайных величин с нулевыми средними и конечными дисперсиями. Через M_a^b обозначим σ-алгебру, порожденную случайными величинами ξ_i, $a \leqslant i \leqslant b$. Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad \sigma_n = \mathbf{D}S_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$Lx = \ln|x|, \quad LLx = |\ln|\ln|x||\,|,$$

$$\varphi(n) = \sup_s \sup_{A \in M_1^s, B \in M_{s+n}^{\infty}, \mathbf{P}(A) > 0} |\mathbf{P}(B \mid A) - \mathbf{P}(B)|.$$

Основное содержание параграфа составляет

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(2^k) < \infty, \qquad (3.1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Inf} \sigma_n/n > 0, \qquad (3.2)$$

$$\mathbf{P}(|\xi_i| \geqslant x) \leqslant \mathbf{P}(\xi > x) \qquad (3.3)$$

для любых $i \geqslant 1$, $x \geqslant 0$, где $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$. Тогда справедлив закон повторного логарифма, т. е.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma_n LL\sigma_n}} = 1 \quad \text{п. н.}$$

Следствие 3.2. *Пусть ξ_1, ξ_2 — строго стационарная последовательность случайных величин; $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 < \infty$. Если $\sigma_n \to \infty$ и выполнено условие (3.1), то существует σ, $0 < \sigma < \infty$, такое, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n/n = \sigma, \qquad (3.4)$$

и справедлив закон повторного логарифма

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma \ln\ln n}} = 1 \quad \text{п. н.}$$

Соотношение (3.4) доказано в [7].

Замечание. Сформулированные результаты в определенной степени заканчивают ранние исследования автора в этом направлении [17, 18]. С другой стороны, они усиливают результаты работ [19—23]. Предложенное ниже доказательство является пошаговым уточнением доказательства, данного в [17]. Достигнутое продвижение получено за счет использования оценок дисперсии и моментных неравенств для сумм слабо зависимых слагаемых, требующих меньших ограничений на коэффициенты перемешивания $\varphi(k)$.

Буквой c будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от переменных суммирования. Запись $a_n \sim b_n$ (соответственно $a_n \asymp b_n$) означает, что $a_n/b_n \to 1$ при $n \to \infty$ (соответственно $0 < c \leqslant a_n/b_n \leqslant c^{-1} < \infty$ при всех $n \geqslant n_0$).

Доказательство теоремы 3.1. Положим

$$T_i = \xi_i I(|\xi_i| \leqslant \sqrt{i}),\ Y_i = T_i - \mathbf{E}T_i,\ i = 1, 2, \ldots.$$

Как показано в [17], достаточно доказать, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{2\sigma_n LL\sigma_n}} = 1 \quad \text{п. н.}, \tag{3.5}$$

так как в силу теоремы 1.1

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - Y_i)\right) \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\xi_i - Y_i)^2 \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\xi_i^2, |\xi_i| > \sqrt{i}) \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\xi, \xi > \sqrt{i}),$$

а значит,

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - Y_i)\right) = o(\sigma_n), \tag{3.6}$$

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sigma_n(1 + o(1)).$$

I) Разбиение на блоки. Положим

$$1 > \alpha > 1/2, \quad h_k = \left[k^{-1}2^{k^\alpha}\right], \quad g_k = \left[2^{k^\alpha}\right], \quad z_k = h_k + g_k,$$

$$n_k = z_1 + \ldots + z_{k-1}, \quad b_k = (2\sigma_k LL\sigma_k)^{1/2}, \quad a_k = b_{n_k},$$

$$\Psi_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_k+g_k} Y_i, \quad \eta_k = \sum_{i=n_k+g_k+1}^{n_{k+1}} Y_i,$$

$$x_k = \max_{1\leqslant j\leqslant z_k} \left| \sum_{i=n_k+1}^{j} Y_i \right|.$$

Заметим, что из построения вытекает

$$z_k \sim g_k \sim 2^{k^\alpha}, \quad n_k \sim k^{1-\alpha}2^{k^\alpha}/(\alpha \ln 2), \tag{3.7}$$

$$n_{k+1} \sim n_k, \quad h_1 + \ldots + h_k = o(n_k).$$

Из соотношений (3.3), (3.6) и неравенства Коши — Буняковского вытекает, что

$$\left| \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m_1+m_2} Y_i\right)^2 - \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m_1} Y_i\right)^2 \right| \leqslant c\,(m_2 + (m_1 m_2)^{1/2}).$$

Последнее неравенство вместе с соотношением (3.7) дает

$$a_k \asymp (n_k \ln\ln n_k)^{1/2} \asymp \left(k^{1-\alpha}2^{k^\alpha} \ln k\right)^{1/2},$$

$$a_{k+1} \sim a_k, \quad \max_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} |\sigma_n - \sigma_{n_k}| = o(\sigma_{n_k}), \tag{3.8}$$

$$\max_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} |b_n - b_{n_k}| = o(b_{n_k}).$$

Имеет место представление

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{k-1} \Psi_i + \sum_{i=1}^{k-1} \eta_i + \sum_{j=n_k+1}^{n} Y_j.$$

Так же как и в [17], наша ближайшая цель показать, что второе и третье слагаемые в написанном выше выражении дают в (3.5) нулевой вклад, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{1}^{k-1} \eta_j/a_k = 0 \quad \text{п.н.} \tag{3.9}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k/a_k = 0 \quad \text{п.н.} \tag{3.10}$$

Применяя теорему 1.1 и пользуясь соотношением (3.8), находим

$$\mathbf{D}\eta_i \leqslant c_1 h_i,$$

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \eta_i\right) \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{D}\eta_i \leqslant c_2 \sum_{i=1}^{k-1} h_i = o(n_k), \tag{3.11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}\eta_k a_k^{-2} \leqslant c_1 \sum_{k=1}^{\infty} h_k n_k^{-1} \leqslant c_2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-2} < \infty.$$

Из последнего соотношения и усиленного закона больших чисел (Теорема 2.9) вытекает требуемое утверждение (3.9).

Проверим справедливость утверждения (3.10). Воспользуемся следствием 2.3. Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(|x_k| \geqslant \varepsilon a_k) \leqslant \varepsilon^{-v} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}|x_k|^v a_k^{-v} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \varepsilon^{-v} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\{\sum_{i=n_k+1}^{n_k+1} \mathbf{E}(|\xi_i|^v, |\xi_i| \leqslant \sqrt{i})\right\} + z_k^{v/2}\right) a_k^{-v} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \varepsilon^{-v} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=n_k+1}^{n_k+1} \mathbf{E}(|\xi_i|^v, |\xi_i| \leqslant \sqrt{i})\, n_k^{-v/2} +$$

$$+ c_5 \varepsilon^{-v} \sum_{k=1}^{\infty} (z_k/n_k)^{v/2} \equiv c_4 \varepsilon^{-v} I_1 + c_5 \varepsilon^{-v} I_2.$$

По построению, при $v > 2/(1-\alpha)$ имеет место

$$I_2 \leqslant c_6 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1-\alpha)v/2} < \infty.$$

С другой стороны, условие (3.3) влечет

$$\mathbf{E}(|\xi_i|^v, |\xi_i| \leqslant x) \leqslant \mathbf{E}(\xi^v, \xi \leqslant x) + x^v \mathbf{P}(\xi \geqslant x),$$

а значит $(n_{k+1} \sim n_k)$,

$$I_1 \leqslant c_7 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}(|\xi_k|^v, |\xi_k| \leqslant \sqrt{k})\, k^{-v/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_7 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}(\xi^v, \xi \leqslant \sqrt{k})\, k^{-v/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi \geqslant \sqrt{k})\right) < \infty,$$

так как $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$. Следовательно, соотношение (3.10) доказано.

Итак, осталось показать, что

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} \Psi_i/a_k = 1 \quad \text{п.н.} \tag{3.12}$$

Сначала покажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(h_k) < \infty.$$

В самом деле, условие (3.1) и монотонность коэффициента влекут

$$\varphi(k)\log_2^2 k \to 0 \qquad \text{при } k\to\infty. \tag{3.13}$$

Тем самым, при $\alpha > 1/2$ имеет место

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(h_k) \leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}\left(\log_2 2^{k^\alpha}\right)^{-2} \leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2\alpha} < \infty.$$

Следовательно, по теореме Беркеша — Филиппа (формулировка приведена в лемме 4.4 из § 4), соотношение (3.12) эквивалентно следующему:

$$\limsup_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\Psi_i^*/a_k = 1 \quad \text{п.н.}, \tag{3.14}$$

где случайные величины Ψ_i^* независимы и распределены как Ψ_i, $i=1, 2, \ldots$.

II) Анализ дисперсии. Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i^* = \sigma_{n_k}(1+o(1)). \tag{3.15}$$

Во-первых, из уже доказанных соотношений (3.6) и (3.11) вытекает

$$\sigma_{n_k} \sim \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n_k}Y_i\right) \sim \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\Psi_i\right).$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\Psi_i\right) \sim \sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i.$$

Положим $\mathscr{K} = [k^{1/2}]$. Имеем

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{\mathscr{K}-1}\Psi_i\right) \leqslant c_1 n_{\mathscr{K}}, \quad \sum_{i=1}^{\mathscr{K}-1}\mathbf{D}\Psi_i \leqslant c_2 n_{\mathscr{K}}.$$

Следовательно, осталось показать, что

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=\mathscr{K}}^{k-1}\Psi_i\right) \sim \sum_{i=\mathscr{K}}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i.$$

Далее,

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=\mathscr{K}}^{k-1}\Psi_i\right) = \sum_{i=\mathscr{K}}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i + \sum_{i,j=\mathscr{K},\, i\neq j}^{k-1}\mathbf{E}\Psi_i\Psi_j.$$

Тем самым нужно доказать, что

$$I \equiv \sum_{\substack{i,j=\mathscr{K}\\ |i-j|\geqslant 1}}^{k-1}\mathbf{E}\Psi_i\Psi_j = o(n_k).$$

По теореме 1.1 справедлива оценка

$$I \leqslant c\sum_{i=0}^{\infty}\left(\widehat{\varphi}(2^i)\right)^{1/2}\sum_{i=\mathscr{K}}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i,$$

где по построению

$$\sum_{i=\mathscr{K}}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i \asymp n_k, \; \widehat{\varphi}(r) \leqslant \sup_{i\geqslant\mathscr{K}}\varphi\left(\sum_{s=i}^{i+r-1}h_s\right) = \varphi\left(\sum_{s=\mathscr{K}}^{K+r-1}h_s\right) \leqslant \varphi(h_{\mathscr{K}+r-1}).$$

Следовательно (см. (3.13)),

$$\sum_{i=0}^{\infty}(\widehat{\varphi}(2^i))^{1/2}\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\varphi^{1/2}(h_{2^i+\mathscr{K}-1})\leqslant c'\sum_{i=0}^{\infty}(\log_2 h_{2^i+\mathscr{K}-1})^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant c''\sum_{i=0}^{\infty}(2^i+\mathscr{K}-1)^{-\alpha}=o(1),$$

что и требовалось доказать.

III) Закон повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин. Нам осталось проверить, что верно (3.14), причем в силу соотношений (3.8), (3.15) имеет место

$$a_k=(2B_kLLB_k)^{1/2}(1+o(1)),$$

$$B_k=\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i^*=\sigma_{n_k}(1+o(1))\asymp n_k\asymp 2^{k^\alpha}k^{1-\alpha},$$

$$\lim_{k\to\infty}B_{k+1}/B_k=1,\ \mathbf{D}\Psi_k^*\leqslant cg_k\asymp 2^{k^\alpha}. \tag{3.16}$$

В работе [24] (следствие 4.3) показано, что для справедливости закона повторного логарифма в случае независимых слагаемых достаточно выполнение следующих условий ($v>2$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n^{-v/2}(LLB_n)^{-v/2}\mathbf{E}\,|\,\Psi_k^*\,|^v<\infty. \tag{3.17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n^{-1}(LB_n)^{\varepsilon-}\,\mathbf{D}\Psi_k^*=\infty. \tag{3.18}$$

Условие (3.18) следует из леммы 2.7 цитированной работы и соотношения (3.16).

Проверим справедливость утверждения (3.18). Применяя лемму 2.3, находим (подобные выкладки появлялись при исследовании (3.10))

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_k^{-v/2}(LLB_k)^{-v/2}\mathbf{E}\,|\,\Psi_k\,|^v\leqslant$$

$$\leqslant c_1\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{-v/2}(\ln k)^{-v/2}\left(\sum_{i=n_k+1}^{n_k+1}\mathbf{E}(|\,\xi_i\,|^v,|\,\xi_i\,|\leqslant\sqrt{i})+z_k^{v/2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant c_2\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{-v/2}\sum_{i=n_k+1}^{n_k+1}(\mathbf{E}(\xi^v,\xi\leqslant\sqrt{i})+i^{v/2}\mathbf{P}(\xi\geqslant\sqrt{i}))+$$

$$+c_3\sum_{k=1}^{\infty}(z_k/n_k)^{v/2}<\infty$$

для $v>2/(1-\alpha)$ в силу построения. Тем самым соотношение (3.17), а вместе с ним и теорема доказаны.

§ 4. ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ

1. Формулировка результата. Пусть $\xi=\{\xi_{1,n},\ldots,\xi_{k_n,n};\ n\geqslant 1\}$ — схема серий случайных величин с нулевыми средними и конечными дисперсиями. Через $M_a^b(n)$ обозначим σ — алгебру, порожденную случайными величинами $\xi_{i,n}$, $a\leqslant i\leqslant b$. Положим

$$S_{k,n}=\sum_{i=1}^{k}\xi_{i,n},\quad k=1,2,\ldots,k_n,\ S_{0,n}=0,$$

$$\varphi_n(k)=\max_{i\leqslant i\leqslant k_n}\ \sup_{\substack{A\in M_1^i(n),B\in M_{i+k}^{\infty}(n),\\ \mathbf{P}(A)>0}}|\,\mathbf{P}(B\,|\,A)-\mathbf{P}(B)|.$$

Введем основные ограничения.

А) Условие нормировки

$$\mathbf{D}S_{k_n,n} = 1 + o(1). \tag{4.1}$$

Б) Условие Линдеберга и ограничение на коэффициенты φ-перемешивания. Существует натуральная последовательность j_n такая, что

$$\sup_n \varphi_n(mj_n) \equiv \varphi(m) \to 0, \tag{4.2}$$

$$\inf_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^t + j_n^{t-1}\sum_{k=1}^{k_n}\mathbf{E}\left(|\xi_{k,n}|^t, |\xi_{k,n}| \geqslant \varepsilon j_n^{-1}\right)\right) \to 0, \tag{4.3 (t)}$$

при $m, n\to\infty$, где $t \geqslant 2$.

В) Условие построения. Существует схема серий неотрицательных чисел $a = \{a_{0,n}, \ldots, a_{k_n,n}; n \geqslant 1\}$, для которой

$$0 = a_{0,n} < a_{1,n} < \ldots < a_{k_n,n} = 1, \tag{4.4}$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} |\mathbf{D}S_{k,n} - a_{k,n}| \to 0 \tag{4.5}$$

при $n\to\infty$. Через S_n^a обозначим случайную ломаную с узлами в точках $(a_{k,n}, S_{k,n})$, $k = 0, 1, \ldots, k_n$.

Основным содержанием параграфа является

Теорема 4.1. *Пусть схема серий ξ удовлетворяет условиям* (4.1)—(4.3(t)), $t\geqslant 2$. *Тогда существует схема серий неотрицательных чисел a, для которой выполнены условия* (4.4), (4.5), *и можно задать на одном вероятностном пространстве случайную ломаную S_n^a и стандартный винеровский процесс w так, чтобы*

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}|S_n^a(u) - w(u)|^t \to 0 \tag{4.6}$$

при $n\to\infty$.

Замечание. Условие (4.3(t)) при $j_n\equiv 1$ и $t=2$ эквивалентно условию Линдеберга, а при $t>2$ — условию Ляпунова. Предложенная теорема обобщает и усиливает целый ряд результатов как для m_n-зависимых случайных величин, цепей Маркова, сложных функционалов от цепей Маркова, так и последовательностей с φ-перемешиванием (см. для сравнения [3, 5, 21, 29]; подробные следствия в случае центральной предельной теоремы приведены в [4]). Следует отметить, что хотя существуют различные схемы серий неотрицательных чисел, удовлетворяющие соотношениям (4.4), (4.5), но все они влекут (4.6) (это вытекает из следующей ниже леммы 4.5).

2) Приведем ряд вспомогательных фактов.

Лемма 4.2. *Для любых $\varepsilon > 0$, $t \geqslant 2$ имеет место*

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n z_i\right|^t, \left|\sum_{i=1}^n z_i\right| \geqslant \varepsilon n\right) \leqslant 2n^{t-1}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(|z_i|^t, |z_i| \geqslant \varepsilon/2\right).$$

Доказательство. Положим $g(x) = \max(2|x|^t - (\varepsilon n)^t, 0)$. Нетрудно видеть, что $g(x) \geqslant |x|^t$ при $|x| \geqslant \varepsilon n$. Далее, по построению функция g выпукла. Следовательно,

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_1^n z_i\right|^t, \left|\sum_1^n z_i\right| \geqslant \varepsilon n\right) \leqslant \mathbf{E}g\left(n^{-1}\sum_1^n z_i n\right) \leqslant$$

$$\leqslant n^{-1}\sum_1^n \mathbf{E}g(z_i n) \leqslant 2n^{t-1}\sum_1^n \mathbf{E}\left(|z_i|^t, |z_i| \geqslant \varepsilon/2\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Пусть на сепарабельных банаховых пространствах S_i с борелевскими σ-алгебрами B_i заданы распределения: F на $(S_1\times S_2, B_1\times B_2)$ и G на $(S_2\times S_3, B_2\times B_3)$, причем маргинальные распределения F и G совпадают на (S_2, B_2). Тогда на некотором вероятностном пространстве можно задать случайные элементы w_i так, что F (соответственно G) есть совместное распределение элементов w_1 и w_2 (соответственно w_2 и w_3).*

Доказательство см. в [22], с. 53.

Лемма 4.4. *Пусть $\{\{S_k, \sigma_k\}, k\geqslant 1\}$ — последовательность полных метрических пространств; $\{X_k, k\geqslant 1\}$ — последовательность случайных элементов со значениями в S_k; $\{B_k, k\geqslant 1\}$ — последовательность σ-алгебр, для которых X_k измерима относительно B_k. Пусть*

$$|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\leqslant \varphi_k\mathbf{P}(A)$$

для всех $B\in B_k$, $A\in V_{j<k}B_k$ (минимальной σ-алгебре, содержащей σ-алгебры $B_1, \ldots, B_k$). Тогда не меняя исходного совместного распределения элементов X_k можно задать на одном вероятностном пространстве последовательность $\{X_k, k\geqslant 1\}$ и последовательность независимых случайных величин $\{Y_k, k\geqslant 1\}$ так, что каждое Y_k совпадает по распределению с X_k и

$$\mathbf{P}(\sigma_k(X_k, Y_k)\geqslant 6\varphi_k)\leqslant 6\varphi_k$$

для всех $k=1, 2, \ldots$.

Доказательство см. в [22, с. 33—35].

Лемма 4.5. *Для всякого $t>0$ имеет место*

$$\lim_{h\to 0}\mathbf{E}\sup_{0\leqslant g,s\leqslant 1, |g-s|\leqslant h}|w(g)-w(s)|^t=0,$$

где w — стандартный винеровский процесс.

Доказательство следует, например, из [30, лемма 2].

3) Доказательство теоремы 4.1. Сначала сведем задачу к случаю $j_n\equiv 1$. Положим

$$\eta_{m,n}=\sum_{i=j_n(m-1)+1}^{j_n m}\xi_{i,n},\ \xi_{i,n},\ \xi_{i,n}=0,\ i>k_n,$$

$$m=1, \ldots, m_n,\quad m_n=[k_n/j_n]+1.$$

Лемма 4.6. *Справедливы соотношения*

$$\sum_{m=1}^{m_n}\mathbf{E}(|\eta_{m,n}|^t, |\eta_{m,n}|\geqslant 2\varepsilon)\leqslant$$

$$\leqslant j_n^{t-1}\sum_{k=1}^{k_n}\mathbf{E}(|\xi_{k,n}|^t, |\xi_{k,n}|\geqslant\varepsilon j_n^{-1}),\tag{4.7}$$

$$\mathbf{D}\left(\sum_{m=1}^{m_n}\eta_{m,n}\right)=1+o(1),\tag{4.8}$$

$$\max_{1\leqslant m\leqslant m_n}\mathbf{E}\eta_{m,n}^2\to 0,\tag{4.9}$$

$$\sup_n\max_{1\leqslant k\leqslant m_n}\mathbf{D}\left(\sum_{m=1}^{k}\eta_{m,n}\right)<\infty,\tag{4.10}$$

$$\Delta_n\equiv\mathbf{E}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant m_n}\max_{j_n(k-1)\leqslant s<j_n k}\left|\sum_{m=1}^{k}\eta_{m,n}-\sum_{i=1}^{s}\xi_{i,n}\right|^t\right)\to 0,\tag{4.11}$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant m_n}\max_{j_n(k-1)\leqslant s<j_n k}\left|\mathbf{D}\left(\sum_{m=1}^{k}\eta_{m,n}\right)-\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{s}\xi_{i,n}\right)\right|\to 0.\tag{4.12}$$

при $n\to\infty$.

Доказательство леммы. Первое неравенство вытекает из леммы 4.2. Второе соотношение непосредственно следует из определения и условия нормировки (4.1). Утверждение (4.9) вытекает из уже доказанного (4.7), условия (4.3(t)) и простого неравенства

$$\max_{1\leqslant m\leqslant m_n} \mathbf{E}\eta_{m,n}^2 \leqslant \varepsilon^2 + \varepsilon^{2-t} \sum_{m=1}^{m_n} \mathbf{E}(|\eta_{m,n}|^t, |\eta_{m,n}| > \varepsilon).$$

Соотношение (4.10) есть следствие утверждения (4.9) и леммы 1.6. Далее, имеем

$$\Delta_n = \mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant m_n} \max_{j_n(k-1)\leqslant s<j_nk} \left| \sum_{i=s+1}^{j_nk} \xi_{i,n} \right|^t \leqslant$$

$$\leqslant 2^{t-1} \left(\varepsilon^t + \mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant m_n} \max_{j_n(k-1)\leqslant s<j_nk} \left| \sum_{i=s+1}^{j_nk} \xi_{i,n} \Delta(|\xi_{i,n}| > \varepsilon j_n^{-1}) \right|^t \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{t-1} \left(\varepsilon^t + j_n^{t-1} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}(|\xi_{k,n}|^t, |\xi_{k,n}| > \varepsilon j_n^{-1}) \right).$$

Тем самым утверждение (4.11) доказано. Сходимость в (4.12) непосредственно вытекает из соотношений (4.10), (4.11) и простого неравенства

$$|\,\|x\|^2 - \|y\|^2\,| \leqslant \|x-y\|(\|x-y\| + 2\|x\|),$$

где $\|x\| = (\mathbf{E}x^2)^{1/2}$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Так как схема серий $\eta = \{\eta_{1,n}, \ldots, \eta_{m_n};\ n\geqslant 1\}$ удовлетворяет условию (4.3(t)) с $j_n \equiv 1$, то найдется ε_n такое, что

$$\varepsilon_n \to 0, \quad n \to \infty, \tag{4.13}$$

$$2\varepsilon_n^t \geqslant \sum_{i=1}^{m_n} \mathbf{E}\{|\eta_{i,n}|^t,\ |\eta_{i,n}| \geqslant \varepsilon_n\} \equiv L_n,\ n \geqslant 1.$$

Положим

$$x_{i,n} = \eta_{i,n}\mathbf{1}(|\eta_{i,n}| \leqslant \varepsilon_n) - \mathbf{E}(\eta_{i,n}\mathbf{1}(|\eta_{i,n}| \leqslant \varepsilon_n)),$$
$$i = 1, 2, \ldots, m_n.$$

По построению

$$|x_{i,n}| \leqslant 2\varepsilon_n \quad \text{п. н.} \tag{4.14}$$

Из следствия 2.8 и соотношений (4.13) находим

$$I_n \equiv \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m_n} |\eta_{i,n} - x_{i,n}| \right)^2 \leqslant c_1 \left(\sum_{i=1}^{m_n} \mathbf{E}|\eta_{i,n} - x_{i,n}|^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{m_n} \mathbf{E}|\eta_{i,n} - x_{i,n}| \right)^2 \right) \leqslant c_2 (L_n + (L_n\varepsilon_n^{-1})^2) \to 0$$

при $n \to \infty$. С другой стороны, из следствия 2.3 вытекает

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m_n} |\eta_{i,n} - x_{i,n}| \right)^t \leqslant c_3 \left(\sum_{i=1}^{m_n} \mathbf{E}|\eta_{i,n} - x_{i,n}|^t + \right.$$
$$\left. + \left(\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m_n} |\eta_{i,n} - x_{i,n}| \right)^2 \right)^{t/2} \right) \leqslant c_4 \left(\sum_{i=1}^{m_n} \mathbf{E}(|\eta_{i,n}|^t, |\eta_{i,n}| \geqslant \varepsilon_n) + I_n^{t/2} \right) \to 0$$

при $n\to\infty$. Следовательно,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m_n}|\eta_{i,n}-x_{i,n}|\right)^t\to 0, \tag{4.15}$$

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m_n}x_{i,n}\right)=1+o(1), \tag{4.16}$$

$$\sup_n\max_{1\leqslant m\leqslant m_n}\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m}x_{i,n}\right)<\infty, \tag{4.17}$$

$$\max_{1\leqslant m\leqslant m_n}\left|\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m}x_{i,n}\right)-\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m}\eta_{i,n}\right)\right|\to 0 \tag{4.18}$$

при $n\to\infty$. Тем самым мы свели исследуемую задачу к схеме серий $X=\{x_{1,n},\ldots,x_{m_n,n};\ n\geqslant 1\}$, которая удовлетворяет условиям (4.1)—(4.3(t)), $j_n\equiv 1$ и дополнительному соотношению (4.14).

Положим

$$\Psi_n=\min_{k\geqslant 1}\{k\varepsilon_n+\varphi^{1/2}(k)\},\quad g_n=\max_{1\leqslant k\leqslant m_n}\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{k}x_{i,n}\right),$$

$$h_n=\max\left(\Psi_n^{1/3},\ \varphi^{1/2t}\left([\varepsilon_n^{-1/2}]\right)\right),$$

$$\nu(m)=\min\left\{s:\ \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{s}x_{i,n}\right)^2\geqslant mh_n\right\},\quad \nu(0)=0,$$

$$m=1,\ldots,p(n)-1,\ \nu(p(n))=m_n,\ p(n)=[g_n/h_n]+1;$$

$$\mathfrak{Z}_{m,n}=\sum_{j=\nu(m-1)+1}^{\nu(m)}x_{j,n},\quad z_{m,n}=m/p(n),$$

$$q_{m,n}=\max_{\nu(m-1)<a\leqslant\nu(m)}\left|\sum_{i=\nu(m-1)+1}^{a}x_{i,n}\right|,$$

$$m=1,\ldots,p(n),\ z_{0n}=0.$$

Заметим, что из (4.2) и (4.14) вытекает $\Psi_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Следующие факты о свойствах схемы серий $\mathfrak{Z}=\{\mathfrak{Z}_{1,n},\ldots,\mathfrak{Z}_{p(n),n};\ n\geqslant 1\}$ выделим в отдельную лемму.

Лемма 4.7. *Справедливы соотношения*

$$p(n)\leqslant c_1h_n^{-1}, \tag{4.19}$$

$$\mathbf{D}\mathfrak{Z}_{i,n}=h_n(1+o(1)),\ i\leqslant p(n)-1, \tag{4.20}$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant p(n)}\mathbf{D}\mathfrak{Z}_{i,n}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant p(n)}\mathbf{E}q_{i,n}^2\leqslant c_2h_n, \tag{4.21}$$

$$\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant p(n)}|\mathbf{E}\mathfrak{Z}_{i,n}\mathfrak{Z}_{j,n}|=o(1), \tag{4.22}$$

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{k}\mathfrak{Z}_{i,n}\right)=\sum_{i=1}^{k}\mathbf{D}\mathfrak{Z}_{i,n}(1+o(1))=kh_n(1+o(1)), \tag{4.23}$$

$$p(n)=h_n^{-1}(1+o(1)), \tag{4.24}$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant p(n)}\left|\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{k}\mathfrak{Z}_{i,n}\right)-z_{k,n}\right|\to 0, \tag{4.25}$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant p(n)}\mathbf{E}|\mathfrak{Z}_{i,n}|^r\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant p(n)}\mathbf{E}q_{i,n}^r\leqslant c_3h_n^{r/2},\ r>2, \tag{4.26}$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant p(n)}\max_{\nu(k-1)\leqslant i<\nu(k)}\left|\mathbf{D}\left(\sum_{j=1}^{i}x_{j,n}\right)-z_{k,n}\right|\to 0, \tag{4.27}$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant p(n)} \max_{\nu(k-1)j_n\leqslant i<\nu(k)j_n} |\mathbf{D}S_{i,n}-z_{k,n}|\to 0, \tag{4.28}$$

$$\min_{1\leqslant m<p(n)} (\nu(m)-\nu(m-1))\geqslant [\varepsilon_n^{-1/2}], \quad n\geqslant n_0, \tag{4.29}$$

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant p(n)} \max_{\nu(k-1)\leqslant i<\nu(k)} \left|\sum_{j=1}^{k} \mathfrak{Z}_{j,n}-\sum_{j=1}^{i} x_{i,n}\right|^t\to 0, \tag{4.30}$$

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant p(n)} \max_{\nu(k-1)j_n\leqslant i<\nu(k)j_n} \left|\sum_{j=1}^{k} \mathfrak{Z}_{j,n}-S_{i,n}\right|^t\to 0, \tag{4.31}$$

где везде рассматривается сходимость при $n\to\infty$.

Доказательство. Первое утверждение следует из (4.17). Из построения и неравенства (1.24) леммы 1.7 вытекает

$$\mathbf{D}\mathfrak{Z}_{i,n}=h_n+o(\Psi_n)=h_n(1+o(1))$$

при $i\leqslant p(n)-1$, что доказывает (4.20). Далее, из неравенства (1.23) той же леммы следует

$$\max_{1\leqslant i\neq j\leqslant p(n)} |\mathbf{E}\mathfrak{Z}_{i,n}\mathfrak{Z}_{j,n}|\leqslant c'\Psi_n,$$

$$\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant p(n)} |\mathbf{E}\mathfrak{Z}_{i,n}\mathfrak{Z}_{j,n}|\leqslant c''\Psi_n p_n^2\leqslant c'''\Psi_n^{1/3},$$

т. е. доказано соотношение (4.22). С другой стороны, имеем

$$g_n\geqslant\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m_n} x_{i,n}\right)=\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{\nu(p(n)-1)} x_{i,n}+\mathfrak{Z}_{p(n),n}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{\nu(p(n)-1}x_{i,n}\right)+\mathbf{D}\mathfrak{Z}_{p(n),n}-c\Psi_n\geqslant g_n-h_n+\mathbf{D}\mathfrak{Z}_{p(n),n}-c\Psi_n,$$

$$c\Psi_n+h_n\geqslant\mathbf{D}\mathfrak{Z}_{p(n),\,n}.$$

Последнее неравенство вместе с уже доказанным соотношением (4.20) влечет утверждение (4.21).

Соотношения (4.23)—(4.25) есть непосредственные следствия уже доказанных утверждений (4.19)—(4.22) и построения. Далее, из построения и следствия 2.4 вытекает

$$\mathbf{E}|\mathfrak{Z}_{i,n}|^r\leqslant\mathbf{E}q_{i,n}^r\leqslant c_1\left[\mathbf{E}\max_{1\leqslant i\leqslant m_n}|x_{i,n}|^r+(\mathbf{D}\mathfrak{Z}_{i,n})^{r/2}\right]\leqslant$$

$$\leqslant c_2\left(\varepsilon_n^r+h_n^{r/2}\right)\leqslant c_3h_n^{r/2},$$

откуда получим неравенство (4.26).

Опять же, по построению и лемме 1.7, положив $T_{m,n}=x_{1,n}+\ldots$ $\ldots+x_{m,\,n}$, находим

$$kh_n\geqslant\mathbf{D}T_{i,\,n}\geqslant\mathbf{D}T_{\nu(k-1)}-c\psi_n\geqslant(k-1)h_n-c\psi_n$$

при $\nu(k-1)\leqslant i<\nu(k)$, $k<p(n)$ и $o(1)+p_nh_n\geqslant g_n\geqslant\mathbf{D}T_{i,\,n}\geqslant$ $\geqslant\mathbf{D}T_{\nu(p(n)-1),\,n}-c\Psi_n\geqslant(p(n)-1)h_n-c\Psi_n$. Следовательно, доказано утверждение (4.27). Соотношения (4.18) и (4.12) позволяют соответственно перейти в (4.27) сначала от сумм $x_{1,n}+\ldots+x_{m,n}$ к суммам $\eta_{1,n}+\ldots$ $\ldots+\eta_{m,\,n}$, а затем и к суммам $S_{m,\,n}$. Тем самым показана справедливость утверждения (4.28).

Обоснуем (4.29). Имеем

$$\mathbf{D}\mathfrak{Z}_{i,n}=h_n(1+o(1))\leqslant(\nu(i)-\nu(i-1))^2\max_i\mathbf{D}x_{i,n}\leqslant 4(\nu(i)-\nu(i-1))^2\varepsilon_n^2,$$

$$\min_{i<p(n)}(\nu(i)-\nu(i-1))\geqslant ch_n^{1/2}\varepsilon_n^{-1}\geqslant[\varepsilon_n^{-1/2}]$$

для всех n, начиная с некоторого n_0.

Осталось доказать сходимость в (4.30) и (4.31). Обозначим левую часть в (4.30) через δ_n. Имеем

$$\delta_n \leqslant 2^t \mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant p(n)} q_{k,n}^t \leqslant 2^t \left(\varepsilon^t + \sum_{k=1}^{p(n)} \mathbf{E}\left[q_{k,n}^t,\, q_{k,n} > \varepsilon\right]\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2^t \left(\varepsilon^t + c_1 p(n)\, \varepsilon^{-t} \max_{1\leqslant k\leqslant p(n)} \mathbf{E} q_{k,n}^{2t}\right) \leqslant 2^t \left(\varepsilon^t + c_2 \varepsilon^{-t} h_n^{t-1}\right).$$

Полагая $\varepsilon = h_n^{1/2t}$, находим $\delta_n \leqslant c_3 h_n^{1/2}$, что доказывает (4.30). Применяя последовательно к уже доказанному соотношению утверждения (4.15) и (4.11), мы получим сходимость в (4.31). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Положим

$$З_{m,n}^* = \sum_{j=\nu(m-1)+1}^{\nu(m)-u(n)} x_{j,n}, \quad З_{p(n),n}^* = З_{p(n),n},$$
$$u(n) = \left[\varepsilon_n^{-1/2}\right], \quad m = 1, \ldots, p(n) - 1.$$

Из свойств (4.19)—(4.24) вытекает

$$\max_{1\leqslant m\leqslant p(n)} \left\| З_{m,n} - З_{m,n}^* \right\| \leqslant c\varepsilon_n^{1/2}, \tag{4.32}$$

$$\mathbf{D} З_{m,n}^* = h_n (1 + o(1)), \quad m < p(n), \tag{4.33}$$

$$\max_{1\leqslant m\leqslant p(n)} \mathbf{E} \left| З_{m,n}^* \right|^r \leqslant c h_n^{r/2}, \quad r > 2. \tag{4.34}$$

Из следствия 2.4 вытекает

$$\mathbf{E} \left| З_{m,n} - З_{m,n}^* \right|^t \leqslant c_1 \left(\mathbf{E} \max_{1\leqslant i\leqslant m_n} |x_{i,n}|^t + \right.$$
$$\left. + \left(\mathbf{D}\left(З_{m,n} - З_{m,n}^*\right)\right)^{t/2}\right) \leqslant c_2 \left(\varepsilon_n^t + \varepsilon_n^{t/2}\right) \leqslant c_3 h_n^{3t/2}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant p(n)} \left| \sum_{m=1}^{k} \left(З_{m,n} - З_{m,n}^*\right) \right|^t \leqslant c_3 (p(n))^t \max_k \mathbf{E} \left| З_{m,n} - З_{m,n}^* \right|^t \leqslant$$
$$\leqslant c_4 h_n^{-t} h_n^{3t/2} \to 0, \tag{4.35}$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant p(n)} \left| \mathbf{D}\left(\sum_{m=1}^{k} З_{m,n}^*\right) - z_{k,n} \right| \to 0. \tag{4.36}$$

Тем самым, благодаря доказанной лемме и полученным оценкам, исследуемая задача сведена к схеме серий $З^* = \{З_{1,n}^*, \ldots, З_{p(n),n}^*;\ n \geqslant 1\}$ «почти независимых» случайных величин с «почти одинаковыми» дисперсиями, с равномерно малыми «хвостами» распределений и «пренебрежимой» суммарной корреляцией. Далее мы воспользуемся аппроксимационной теоремой Беркеша — Филиппа.

А именно, будем считать, что у нас «богатое» вероятностное пространство и по лемме 4.4 и свойству 4.29 леммы 4.7 найдутся независимые случайные величины $W_{1,n}, \ldots, W_{p(n),n}$ такие, что

(1) $W_{i,n}$ распределены как $З_{i,n}^*$,

(2) $\mathbf{P}\left(\left| W_{i,n} - З_{i,n}^* \right| \geqslant 6h_n^{2t}\right) \leqslant 6h_n^{2t}$

для всех $1 \leqslant i \leqslant p(n)$, $n \geqslant n_0$, так как по построению

$$\left| \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \right| \leqslant \mathbf{P}(A)\, \varphi\left(\left[\varepsilon_n^{-1/2}\right]\right) \leqslant \mathbf{P}(A)\, h_n^{2t}, \quad n \geqslant n_0,$$

для всех $A \in \sigma\left(З_{1,n}^*, \ldots, З_{i-1,n}^*\right)$, $B \in \sigma\left(З_{i,n}^*\right)$, где $\sigma(Y)$ — σ-алгебра, порожденная случайным вектором Y. Через W_n обозначим случайную ломаную с узлами в точках $(z_{k,n},\ W_{1,n} + \ldots + W_{k,n})$, $k = 0, \ldots, p(n)$. Из свойств (4.33), (4.34) и одного результата А. И. Саханенко [31, теорема 5, с. 37] вытекает, что можно задать на одном вероятностном пространстве случайную ломаную и стандартный винеровский процесс w так, чтобы

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leqslant u \leqslant 1} |w(u) - W_n(u)|^t \to 0. \tag{4.37}$$

Покажем, что

$$J_n \equiv \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{p(n)} |W_{i,n} - \text{З}^*_{i,n}| \right)^t \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.38}$$

Имеем

$$J_n \leqslant (p(n))^t \max_{1 \leqslant i \leqslant p(n)} \mathbf{E} |W_{i,n} - \text{З}^*_{i,n}|^t \leqslant$$

$$\leqslant c_1 h_n^{-t} \Big(6h_n^{2t} + \max_i \mathbf{E} \left(|W_{i,n} - \text{З}^*_{i,n}|^t, \ 6h_n^{2t} < |W_{i,n} - \text{З}^*_{i,n}| \leqslant 1 \right) +$$

$$+ \max_i \mathbf{E} |W_{i,n} - \text{З}^*_{i,n}|^{2t+1} \Big) \leqslant c_2 h_n^{-t} \left(h_n^{2t^2} + h_n^{2t} + h_n^{(2t+1)/2} \right) \to 0,$$

что и требовалось доказать.

Завершим доказательство теоремы. Положим

$$a_{i,n} = z_{k,n} + k_n^{-2} (i - \nu(k-1) j_n)$$

при $\nu(k-1) j_n < i < \nu(k) j_n$, $0 < i < k_n$, $a_{0,n} = 0$, $a_{k_n,n} = 1$. Через S_n^a обозначим случайную ломаную с узлами в точках $(a_{i,n}, S_{i,n})$, $i = 0, 1, \ldots, k_n$. По построению и свойству (4.28) схема серий неотрицательных чисел $a = \{a_{0,n}, \ldots, a_{k_n,n};\ n \geqslant 1\}$ удовлетворяет требуемым условиям (4.4) и (4.5). С другой стороны, применяя неоднократно леммы 4.3, 4.5 и учитывая соотношения (4.28), (4.31), (4.35), (4.36) и (4.38), мы сможет в утверждении (4.37) перейти от процесса W_n к случайной ломаной S_n^a.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ибрагимов И. А.** Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения.— 1962.— Т. 7, № 4.— С. 361—362.
2. **Ибрагимов И. А.** Замечание о центральной предельной теореме для зависимых случайных величин // Там же.— 1975.— Т. 20, № 1.— С. 134—140.
3. **Peligrad M.** Invariance principle for mixing sequences of random variables // Ann. Probab.— 1982.— V. 10, N 4.— P. 968—981.
4. **Утев С. А.** О центральной предельной теореме для схем серий случайных величин с φ-перемешиванием // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— Т. 31, № 4.— С 133—161.
5. **Peligrad M.** An invariance principle for φ-mixing sequences // Ann. Probab.— 1985.— V. 13, N 4.— P. 1304—1313.
6. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин.— М.: Наука, 1972.— 416 с.
7. **Bradley R.** A sufficient condition for linier growth of variances in a stationary random sequence // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— V. 83, N 3.— P. 586—589.
8. **Rosenthal H. P.** On the span in of sequences of independent random variables // Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. Berkeley.— 1972.— V. 2.— P. 149—168.
9. **Burkholder D. L.** Distribution function inequalities for martingales // Ann. Probab.— 1973.— V. 1, N 1.— P. 19—42.
10. **Утев С. А.** Неравенства для сумм слабозависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1984.— Т. 3.— С. 50—76.
11. **Утев С. А.** Семиинварианты и моментные неравенства // Теория вероятностей и ее применения.— 1987.— Т. 32, № 2.— С. 35—53.
12. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Теория случайных процессов.— М.: Наука, 1971.— Т. 1.— С. 664.
13. **Jain N. C., Marcus M. B.** Integrability of infinite sums of independent vector-valued random variables // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— V. 212.— P. 1—35.
14. **Нагаев С. В.** Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1982.— Т. 1.— С. 159—167.
15. **Samur J.** Convergence of sums of mixing triangular arrays of random vectors with stationary rows // Ann. Probab.— 1984.— V. 12, N 2.— P. 390—426.

16. **Cohn H.** On a class of dependent random variables // Rev. Roum. Math. Pures et Appl.— 1965.— V. 10, N 10.— P. 1593—1606.
17. **Утев С. А.** О законе повторного логарифма для φ-перемешанных случайных величин // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25, № 1.— С. 174—179.
18. **Утев С. А.** Предельные теоремы для последовательностей случайных величин с φ-перемешиванием // Тез. докл. Междунар. конф. по теории вероятн. и матем. статистике, Вильнюс, июнь, 1985 г.— Вильнюс, 1985.— Т. 3.
19. **Резник М. X.** Закон повторного логарифма для некоторых классов стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения.— 1968.— Т. 13, № 4.— С. 642—656.
20. **Philipp W.** The law of the iterated logarithm for mixing stochastic processes // Ann. Math. Statist.— 1969.— V. 40, N 6.— P. 1985—1991.
21. **Philipp W., Stout W.** Almoust sure invariance principles for partial sums of weakly dependent random variables // Memoirs of Amer. Math. Soc.— 1975.— V. 2, N 161.
22. **Berkes A., Philipp W.** Approximation theorems for idependent and weakly dependent random vectors // Ann. Probab.— 1979.— V. 7, N 1.— P. 29—54.
23. **Heyde C. C., Scott D. I.** Invariance principles for the law of the iterated logarithm for martingales and processes with stationary increments // Ibid.— 1973.— V. 1, N 3.— P. 428—437.
24. **Wittman R.** Sufficient Moment and Truncated Moment conditions for the Law of the Iterated Logarithm // Probab. Theory Rel. fields.— 1987.— V. 75, N 4.— P. 509—530.
25. **Herrndorf N.** The invariance principle for φ-mixing sequences // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1983.— V. 63, N 1.— P. 97—108.
26. **Давыдов Ю. А.** О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятностей и ее применения.— 1968.— Т. 13, № 4.— С. 730—737.
27. **Гудинас П. П.** Принцип инвариантности для неоднородных цепей Маркова // Литовск. мат. сб.— 1977.— Т. 17, № 2.— С. 63—73.
28. **Лифшиц Б. А.** О сходимости моментов в центральной предельной теореме для неоднородных цепей Маркова // Теория вероятностей и ее применения.— 1975.— Т. 20, № 4.— С. 755—772.
29. **Лифшиц Б. А.** Принцип инвариантности для слабо зависимых величин // Там же.— 1984.— Т. 29, № 1.— С. 33—40.
30. **Утев С. А.** Замечание о скорости сходимости в принципе инвариантности // Сиб. мат. журн.— 1981.— Т. 22, № 5.— С. 206—209.
31. **Саханенко А. И.** Оценки в принципе инвариантности // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 5.— С. 27—44.

АСИМПТОТИКА БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В $\mathbf{R}^n$

М. С. СГИБНЕВ

В работе изучаются асимптотические свойства безгранично делимых распределений и соответствующих им мер Леви. Этой тематике посвящено немало работ. После введения необходимых обозначений и прежде чем сформулировать теорему 1, основной результат данной работы, мы дадим краткий обзор результатов, которые наиболее близки к задаче, рассматриваемой в этой работе. Дальнейший план статьи таков. Поскольку в доказательстве основной теоремы существенным образом используется техника банаховых алгебр, в § 2 излагаются новые результаты о банаховых алгебрах мер в $\mathbf{R}^n$ с заданными асимптотическими характеристиками. Самостоятельный интерес представляет доказываемая здесь теорема 2 о строении гомоморфизмов в поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ банаховой алгебры $S(\varphi)$ мер в $\mathbf{R}^n$, конечных с заданными полумультипликативным весом $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть μ — σ-конечная мера, заданная на σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ борелевских подмножеств n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Определим преобразование Лапласа $\widehat{\mu}(\lambda)$ меры μ в точке $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ n-мерного