16. **Cohn H.** On a class of dependent random variables // Rev. Roum. Math. Pures et Appl.— 1965.— V. 10, N 10.— P. 1593—1606.
17. **Утев С. А.** О законе повторного логарифма для φ-перемешанных случайных величин // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25, № 1.— С. 174—179.
18. **Утев С. А.** Предельные теоремы для последовательностей случайных величин с φ-перемешиванием // Тез. докл. Междунар. конф. по теории вероятн. и матем. статистике, Вильнюс, июнь, 1985 г.— Вильнюс, 1985.— Т. 3.
19. **Резник М. X.** Закон повторного логарифма для некоторых классов стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения.— 1968.— Т. 13, № 4.— С. 642—656.
20. **Philipp W.** The law of the iterated logarithm for mixing stochastic processes // Ann. Math. Statist.— 1969.— V. 40, N 6.— P. 1985—1991.
21. **Philipp W., Stout W.** Almoust sure invariance principles for partial sums of weakly dependent random variables // Memoirs of Amer. Math. Soc.— 1975.— V. 2, N 161.
22. **Berkes A., Philipp W.** Approximation theorems for idependent and weakly dependent random vectors // Ann. Probab.— 1979.— V. 7, N 1.— P. 29—54.
23. **Heyde C. C., Scott D. I.** Invariance principles for the law of the iterated logarithm for martingales and processes with stationary increments // Ibid.— 1973.— V. 1, N 3.— P. 428—437.
24. **Wittman R.** Sufficient Moment and Truncated Moment conditions for the Law of the Iterated Logarithm // Probab. Theory Rel. fields.— 1987.— V. 75, N 4.— P. 509—530.
25. **Herrndorf N.** The invariance principle for φ-mixing sequences // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1983.— V. 63, N 1.— P. 97—108.
26. **Давыдов Ю. А.** О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятностей и ее применения.— 1968.— Т. 13, № 4.— С. 730—737.
27. **Гудинас П. П.** Принцип инвариантности для неоднородных цепей Маркова // Литовск. мат. сб.— 1977.— Т. 17, № 2.— С. 63—73.
28. **Лифшиц Б. А.** О сходимости моментов в центральной предельной теореме для неоднородных цепей Маркова // Теория вероятностей и ее применения.— 1975.— Т. 20, № 4.— С. 755—772.
29. **Лифшиц Б. А.** Принцип инвариантности для слабо зависимых величин // Там же.— 1984.— Т. 29, № 1.— С. 33—40.
30. **Утев С. А.** Замечание о скорости сходимости в принципе инвариантности // Сиб. мат. журн.— 1981.— Т. 22, № 5.— С. 206—209.
31. **Саханенко А. И.** Оценки в принципе инвариантности // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 5.— С. 27—44.

АСИМПТОТИКА БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В R^n

М. С. СГИБНЕВ

В работе изучаются асимптотические свойства безгранично делимых распределений и соответствующих им мер Леви. Этой тематике посвящено немало работ. После введения необходимых обозначений и прежде чем сформулировать теорему 1, основной результат данной работы, мы дадим краткий обзор результатов, которые наиболее близки к задаче, рассматриваемой в этой работе. Дальнейший план статьи таков. Поскольку в доказательстве основной теоремы существенным образом используется техника банаховых алгебр, в § 2 излагаются новые результаты о банаховых алгебрах мер в $\mathbf{R}^n$ с заданными асимптотическими характеристиками. Самостоятельный интерес представляет доказываемая здесь теорема 2 о строении гомоморфизмов в поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ банаховой алгебры $S(\varphi)$ мер в $\mathbf{R}^n$, конечных с заданными полумультипликативным весом $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть μ — σ-конечная мера, заданная на σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ борелевских подмножеств n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Определим преобразование Лапласа $\widehat{\mu}(\lambda)$ меры μ в точке $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$ по формуле

$$\widehat{\mu}(\lambda) = \int \exp(\lambda \cdot x)\, \mu(dx);$$

здесь и в дальнейшем, если не указана область интегрирования, интеграл берется по всему пространству $\mathbf{R}^n$, а для $u, v \in \mathbf{C}^n$ символ $u \cdot v$ означает эрмитово скалярное произведение: $u \cdot v = u_1\bar{v}_1 + \ldots + u_n\bar{v}_n$. Через μ^{m*} обозначим m-кратную свертку меры μ с собой, $\mu^{0*} = E$ — мера Дирака, сосредоточенная в нуле.

Распределение вероятностей F в $\mathbf{R}^n$ называется *безгранично делимым распределением* (б. д. р.), если при любом натуральном m его характеристическая функция (х. ф.) $\widehat{F}(i\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}^n$, представима в виде $\widehat{F}(i\lambda) = \widehat{F}_m(i\lambda)^m$, где F_m — некоторое распределение вероятностей в $\mathbf{R}^n$.

Логарифм характеристической функции х. ф. б. д. р. F в $\mathbf{R}^n$ выражается следующим образом [1, гл. IV, § 3]:

$$\ln \widehat{F}(i\lambda) = ia \cdot \lambda - \frac{\mathbf{S}\lambda . \lambda}{2} + \int' \left[e^{i\lambda \cdot x} - 1 - \frac{i\lambda \cdot x}{1 + x \cdot x} \right] \nu(dx), \qquad (1)$$

где $\lambda \in \mathbf{R}^n$, $a \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{S}$ — симметричный неотрицательный оператор в $\mathbf{R}^n$; мера ν, называемая *мерой Леви* б. д. р. F, удовлетворяет условию

$$\int \min(x \cdot x, 1)\, \nu(dx) < \infty; \qquad (2)$$

символ интеграла со знаком «штрих» означает, что интегрирование в (1) берется по множеству $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. Запись $F = F(a, \mathbf{S}, \nu)$ означает, что для б. д. р. F имеет место представление (1).

Через $\mathbf{R}^n_+$ обозначим подмножество всех точек из $\mathbf{R}^n$ с неотрицательными координатами. Для произвольной меры μ в $\mathbf{R}$ положим $\bar{\mu}(t) = \mu((t, \infty))$, $t \geqslant 0$.

Определение 1. *Распределение вероятностей G в $\mathbf{R}_+$ принадлежит классу $\mathscr{S}(\gamma)$, $\gamma \geqslant 0$, если*

1) *при всех t $\bar{G}(t) > 0$;*

2) *существует конечный предел*

$$\lim_{t\to\infty} G^{2*}((t, \infty))/\bar{G}(t) = c;$$

3) *при любом $y \in \mathbf{R}$ существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} \bar{G}(t + y)/\bar{G}(t) = \exp(-\gamma y);$$

4) *преобразование Лапласа $\widehat{G}(\lambda)$ в точке $\lambda = \gamma$ конечно: $\widehat{G}(\gamma) < \infty$.*

Класс $\mathscr{S} = \mathscr{S}(0)$ так называемых *субэкспоненциальных распределений* был введен в работе [2], а классы $\mathscr{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$,— в работах [3, 4]. Из условий 2)—4) следует (см. [3, 4]), что постоянная c в условии 2) равна $2\widehat{G}(\gamma)$. Известно также, что если $\bar{G}(t)$ — правильно меняющаяся функция, то G — субэкспоненциальное распределение [2, теорема 3]. Свойства распределений из $\mathscr{S}(\gamma)$ изучались многими авторами; достаточные условия принадлежности распределений к $\mathscr{S}(\gamma)$ можно почерпнуть, например, в работах [2—10].

Пусть F — б. д. р. в $\mathbf{R}$, ν — его мера Леви и G — некоторое распределение из $\mathscr{S}(\gamma)$, $\gamma \geqslant 0$. Рассмотрим следующие утверждения:

(а) $\bar{F}(t) \sim k_1\bar{G}(t)$, $t \to \infty$, $k_1 > 0$;

(б) $\bar{\nu}(t) \sim k_2\bar{G}(t)$, $t \to \infty$, $k_2 > 0$;

(в) F удовлетворяет условию 3) и

$$\bar{F}(t) \sim \widehat{F}(\gamma)\bar{\nu}(t), \ t \to \infty. \qquad (3)$$

Относительно этих утверждений известно следующее. Если $\overline{\nu}(t)$ — правильно меняющаяся функция, то имеет место (3) с $\gamma=0$ [11]. Если F — б. д. р. в $\mathbf{R}_+$ и $\gamma=0$, то утверждения (а) — (в) эквивалентны [6]. Если F — обобщенное пуассоновское распределение в $\mathbf{R}_+$ и $\gamma>0$, то, как показано в [9], (б) $\Rightarrow$ (а), (б) $\Rightarrow$ (в) и (а) $\Rightarrow$ (б) (последняя импликация установлена при одном дополнительном условии). Если F — б. д. р. в $\mathbf{R}$ и $\gamma=0$, то (а) $\Leftrightarrow$ (б) и (б) $\Rightarrow$ (в) [10, односторонний аналог теоремы 4.4, с. 155]. Если F — б. д. р. в $\mathbf{R}$ и $\gamma\geqslant 0$ произвольно, то утверждения (а) — (в) эквивалентны [12]. В работе [13] асимптотическое равенство (3) доказано в предположении, что функция $\overline{\nu}(t)$ слабо осциллирует ($\overline{\nu}(t)/\overline{\nu}(\tau)\to 1$, если $\tau/t\to 1$ при $t\to\infty$), в этом случае $\gamma=0$. В работах [13 — 15] получены уточнения асимптотического равенства (3) ($\gamma=0$) при наличии более детальной информации о функции $\overline{\nu}(t)$. Пусть положительная убывающая функция $\tau(t)$ такова, что $-\int_0^t\tau(t-s)\,d\tau(s)=O(\tau(t))$, $t\to\infty$. Тогда [16] $\overline{F}(t)=O(\tau(t))\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\overline{\nu}(t)=O(\tau(t))$, $t\to\infty$, и знак «O — большое» можно заменить на «o — малое». В работах [17—20] изучалась родственная задача об асимптотических свойствах безгранично делимых распределений в $\mathbf{R}^n$, в банаховых и гильбертовых пространствах. Например, если F — б. д. р. в гильбертовом пространстве с мерой Леви ν, то [20, теорема 6.3] $\inf\{r: r>0,\ \nu(\|x\|>r)=0\}=\gamma\Leftrightarrow-\lim\limits_{r\to\infty}\ln F(\|x\|>r)/(r\ln(r+1))=1/\gamma$.

Условимся, что знак неравенства между двумя n-мерными векторами означает, что соответствующие неравенства выполняются покоординатно, и пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)>0$ — вектор с положительными координатами. Обозначим $A=A(x)=\{y\in\mathbf{R}^n\colon\ y\leqslant x\}$, $B=B(x)=\{y\in\mathbf{R}^n\colon\ \exists j\colon y_j>x_j\}$ — дополнение множества A. Пусть t — вещественный параметр, $h(t)$ — правильно меняющаяся функция с отрицательным показателем.

Для б. д. р. F в октанте $\mathbf{R}^n_+$ следующие утверждения эквивалентны: (i) $\forall x>0$ $F(tB(x))\sim\lambda(B(x))h(t)$, $t\to\infty$; (ii) $\forall x>0$ $\nu(tB(x))\sim$ $\sim\lambda(B(x))h(t)$, $t\to\infty$, где λ — некоторая мера в $\mathbf{R}^n_+$ [21, теорема 2.2].

Пусть F — мера в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через F_j меру в $\mathbf{R}$, определяемую соотношением

$$F_j(A)=F(\mathbf{R}^{j-1}\times A\times\mathbf{R}^{n-j}),\ A\in\mathscr{B}(\mathbf{R}). \tag{4}$$

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть F — безгранично делимое распределение вероятностей в $\mathbf{R}^n$, ν — его мера Леви, G — некоторое распределение из класса $\mathscr{S}(\nu)$, $\gamma\geqslant 0$, $x\in\mathbf{R}^n$ — произвольный фиксированный вектор с положительными координатами. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

А. *Существует вектор $c(F)=(c_1(F),\ldots,c_n(F))\neq 0$ с неотрицательными координатами, такой что при любом $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbf{R}^n$*

$$F(tB(x)+y)\sim\sum_{j=1}^n c_j(F)\exp(-\gamma y_j/x_j)\overline{G}(t),\ t\to\infty. \tag{5}$$

Б. *Существует вектор $c(\nu)=(c_1(\nu),\ldots,c_n(\nu))\neq 0$ с неотрицательными координатами, такой что при любом $y\in\mathbf{R}^n$*

$$\nu(tB(x)+y)\sim\sum_{j=1}^n c_j(\nu)\exp(-\gamma y_j/x_j)\overline{G}(t),\ t\to\infty. \tag{6}$$

В обоих случаях выполняется соотношение: при $t\to\infty$

$$F(tB(x))\sim\sum_{j=1}^n c_j(\nu)\widehat{F}_j(\gamma/x_j)\,\nu(tB(x))\Big/\sum_{j=1}^n c_j(\nu). \tag{7}$$

Замечание. При $\gamma=0$ формулировка теоремы 1 заметно упрощается: условие (5) можно заменить на

$$F(tB(x))\sim c\bar{G}(t),\ t\to\infty, \tag{5'}$$

где $c>0$ — постоянная: для условия (6) замена аналогична; соотношение (7) принимает следующий вид:

$$F(tB(x))\sim \nu(tB(x)),\ t\to\infty.$$

§ 2. БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ МЕР В $\mathbf{R}^n$

Пусть $\varphi(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$ — полумультипликативная функция, т. е. функция $\varphi(x)$ конечна, положительна, измерима по Борелю и удовлетворяет условию

$$\varphi(0)=1,\ \varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)\varphi(y),\ x,\ y\in\mathbf{R}^n. \tag{8}$$

Для любого $x\in\mathbf{R}^n$ существует конечный предел [22, с. 261, 258]

$$r(\varphi, x)=\lim_{t\to\infty}\ln\varphi(tx)/t=\inf_{t>0}\ln\varphi(tx)/t. \tag{9}$$

Обозначим через $S(\varphi)$ совокупность всех комплекснозначных мер ν, удовлетворяющих условию ($|\nu|$ — полная вариация меры ν) $\|\nu\|_\varphi=\int\varphi(x)|\nu|(dx)<\infty$. Определим сложение мер из $S(\varphi)$ и умножение меры на комплексное число обычным образом, а произведением элементов μ, $\nu\in S(\varphi)$ назовем их свертку $\mu*\nu$. Тогда совокупность мер $S(\varphi)$ превращается в банахову алгебру относительно нормы $\|\nu\|_\varphi$; единичным элементом в $S(\varphi)$ служит мера Дирака, сосредоточенная в нуле, которую мы обозначим через E [22, глава IV, § 4].

Перейдем к описанию гомоморфизмов банаховой алгебры $S(\varphi)$ в поле комплексных чисел $\mathbf{C}$. Назовем меру ν *абсолютно непрерывной относительно меры* μ (обозначение: $\nu\ll\mu$), если ν абсолютно непрерывна относительно $|\mu|$.

Определение 2 [23]. *Обобщенной функцией $f(x,\nu)$ называется комплекснозначная функция от точки $x\in\mathbf{R}^n$ и меры $\nu\in S(\varphi)$, которая для каждой меры ν является $|\nu|$-измеримой функцией от x, причем, если $\nu\ll\mu$, то $f(x,\nu)=f(x,\mu)$ $|\nu|$-почти всюду* ($|\nu|$ = п. в.).

Обозначим

$$\nu\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{x\in A}|f(x)|=\sup\{\varepsilon\colon\ |\nu|(x\in A\colon\ |f(x)|>\varepsilon)>0\};$$

здесь ν — комплексная мера, $f(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$,— $|\nu|$-измеримая функция, A — $|\nu|$-измеримое множество. В дальнейшем, если не указывается множество, по которому берется существенный супремум ess sup, то это означает, что он берется по всему пространству $\mathbf{R}^n$.

Определение 3 [23]. *Обобщенным характером называется обобщенная функция $\chi(t,\nu)$, удовлетворяющая уравнению*

$$\chi(t,\nu)\chi(s,\nu)=\chi(t+s,\nu) \tag{10}$$

для всех пар $(t, s)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ (кроме, быть может, множества меры нуль относительно произведения мер $|\nu|\times|\nu|$) и условию

$$\sup_{\nu\in S(\varphi)}\nu\text{-}\operatorname{ess\,sup}|\chi(t,\nu)|=1. \tag{11}$$

Лемма 1. *Всякий непрерывный линейный функционал L в $S(\varphi)$ представим в виде*

$$L(\nu)=\int g(x,\nu)\nu(dx),\quad \nu\in S(\varphi), \tag{12}$$

где $g(x,\nu)$ — некоторая обобщенная функция, удовлетворяющая условию

$$\sup_{\nu\in S(\varphi)}\nu\text{-}\operatorname{ess\,sup}|g(x,\nu)|/\varphi(x)=\|L\|<\infty. \tag{13}$$

Обратно, всякая обобщенная функция $g(x, \nu)$, удовлетворяющая (13), *определяет по формуле* (12) *непрерывный линейный функционал в* $S(\varphi)$.

Доказательство леммы 1 почти не отличается от доказательства теоремы 1 в [23], где $\varphi(x) \equiv 1$.

Лемма 2. *Пусть* $\gamma(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$,— *комплекснозначная функция, такая что*

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y), \ x, \ y \in \mathbf{R}^n. \tag{14}$$

Тогда если модуль $|\gamma(x)|$ *ограничен на каком-нибудь параллелепипеде* $[\tau_1, \tau_2] = \{x \in \mathbf{R}^n\colon \tau_1 \leqslant x \leqslant \tau_2\}$ при $\tau_1 \neq \tau_2$, τ_1, $\tau_2 \in \mathbf{R}^n$, *то* $|\gamma(x)| = \exp(\alpha \cdot x)$, *где* α — *некоторый вещественный* n-*мерный вектор.*

Лемма 2 доказывается с помощью незначительной модификации рассуждений, которые используются при доказательстве аналогичного утверждения в одномерном случае [22, теорема 4.17.2].

Теорема 2. *Пусть* $m\colon S(\varphi) \to \mathbf{C}$ — *произвольный гомоморфизм банаховой алгебры* $S(\varphi)$ *в поле комплексных чисел* $\mathbf{C}$. *Тогда справедливо следующее представление*

$$m(\nu) = \int \chi(x, \nu) \exp(\alpha \cdot x)\, \nu(dx), \tag{15}$$

где $\chi(x, \nu)$ — *некоторый обобщенный характер, а* α — *некоторый вещественный* n-*мерный вектор, удовлетворяющий неравенствам*

$$\alpha \cdot x \leqslant r(\varphi, x) = \lim_{t\to\infty} \ln \varphi(tx)/t \ \text{для} \ \forall x \in \mathbf{R}^n. \tag{16}$$

Обратно, для любого обобщенного характера $\chi(x, \nu)$ *и любого* $\alpha \in \mathbf{R}^n$, *удовлетворяющего* (16), *формула* (15) *определяет некоторый гомоморфизм* $m\colon S(\varphi) \to \mathbf{C}$.

Доказательство. Мы воспользуемся схемой доказательства соответствующего утверждения в одномерном случае [24, теорема 1]. Пусть $m\colon S(\varphi) \to \mathbf{C}$ — гомоморфизм. Так как m — непрерывный функционал с нормой, равной единице, по лемме 1 найдется обобщенная функция $g(x, \nu)$, такая что справедливы соотношения

$$m(\nu) = \int g(x, \nu)\, \nu(dx), \quad \nu \in S(\varphi), \tag{17}$$

$$\sup_{\nu \in S(\varphi)} \nu\text{-}\operatorname{ess\,sup} |g(x, \nu)|/\varphi(x) = \|m\| = 1. \tag{18}$$

Из мультипликативности функционала m следует, что

$$g(x+y, \nu) = g(x, \nu) g(y, \nu) \tag{19}$$

для п. в. пар $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ относительно меры $|\nu| \times |\nu|$ [23, доказательство теоремы 2]. Обозначим через E_x меру единичной массы, сосредоточенную в точке $x \in \mathbf{R}^n$. Покажем, что

$$m(E_x) = \chi(x) \exp(\alpha \cdot x), \ x \in \mathbf{R}^n, \tag{20}$$

где функция $\chi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$,— характер, т. е. $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$, $|\chi(x)| = 1$ для $\forall\ x$, $y \in \mathbf{R}^n$, и $\alpha \in \mathbf{R}^n$ удовлетворяет неравенствам (16). Обозначим через $e_j \in \mathbf{R}^n$ вектор, у которого координата с номером j равна единице, а остальные координаты — нули. Положим $\gamma(x) = |m(E_x)|$. Имеем

$$\gamma(x) \leqslant \|E_x\|_\varphi = \varphi(x) \leqslant \prod_{j=1}^{n} \varphi(x_j e_j). \tag{21}$$

Так как «одномерные» полумультипликативные функции $\varphi(x_j e_j)$ ограничены на промежутках $\varepsilon \leqslant x_j \leqslant 1/\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ [22, теорема 7.4.1], в силу (21) функция $\gamma(x)$ ограничена в n-мерном кубе $[\varepsilon, 1/\varepsilon]^n$, и по лемме 2 $\gamma(x) = \exp(\alpha \cdot x)$, где $\alpha \in \mathbf{R}^n$. Из (21) следует, что α удовлетворяет неравенству (16) при любом $x \in \mathbf{R}^n$. Полагая $\chi(x) = m(E_x)/\gamma(x)$, получим требуемое представление (20).

Обозначим $\chi(x, \nu) = g(x, \nu)\exp(-\alpha \cdot x)$, где $g(x, \nu)$ и α взяты из равенств (17) и (20). Докажем, что $\chi(x, \nu)$ — обобщенный характер. Равенство (10) следует из (19). Установим (11), тем самым прямое утверждение теоремы будет доказано. В силу (18) и (21) левая часть (11) больше либо равна единице. Рассуждая от противного, покажем, что на самом деле возможно только равенство. Допустим, что $\exists \nu \in S(\varphi)$:

$$\nu\text{-ess sup}\, |\chi(x, \nu)| = \Delta > 1. \tag{22}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что ν — положительная конечная мера. Действительно, по теореме 7.13.2 из [22] функция $r(\varphi, x)$ непрерывна; поэтому $K = \min\{r(\varphi, x)\colon |x| = 1\}$ конечно. Далее, из (9) следует, что $\varphi(x) \geqslant \exp(r(\varphi, x))$ для $\forall x \in \mathbf{R}^n$. Если $K \geqslant 0$, то ν — конечная мера для $\forall \nu \in S(\varphi)$. Если $K < 0$, то возьмем $K_1 < K$ и положим $\varphi_1(x) = \exp(-K_1 |x| \min\{0, \operatorname{sign} r(\varphi, x)\}) > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$; через $|x|$ обозначена евклидова норма элемента x. Пусть $\nu \in S(\varphi)$, определим меру ν_1 равенством $\nu_1(dx) = \varphi_1(x)\nu(dx)$; тогда ν_1 — конечная мера и $\nu_1 \in S(\varphi)$, так как $\varphi_1(x) \leqslant \min\{1, \varphi(x)\}$ для $\forall x \in \mathbf{R}^n$. Наконец, меры ν и ν_1 абсолютно непрерывны относительно друг друга, поэтому $g(x, \nu) = g(x, \nu_1)$ п. в. относительно обеих мер ν и ν_1. Таким образом, если в (22) мера ν бесконечна, то вместо нее можно рассматривать конечную меру ν_1.

Рассмотрим меру $\Gamma = \exp(\nu) \in S(\varphi)$. Поскольку $\nu \ll \Gamma$, имеем в силу определения 2

$$\Gamma\text{-ess-sup}|\chi(x, \Gamma)| = \Delta > 1. \tag{23}$$

Возьмем $\Delta_1 \in (1, \Delta)$. Положим $G = \{x \in \mathbf{R}^n\colon |\chi(x, \Gamma)| \geqslant \Delta_1\}$. Обозначим через $B(a, r)$ замкнутый шар радиуса r с центром в точке a. Поскольку $\Gamma(\{0\}) > 0$, имеем $|\chi(0, \Gamma)| = |g(0, \Gamma)/\varphi(0)| \leqslant 1$. Поэтому найдется шар $B(a, r)$, $0 < r < |a|$, такой что множество $G_1 = G \cap B(a, r)$ имеет положительную Γ-меру. Для любого целого $m \geqslant 1$ обозначим через G_m множество

$$G_m = \{x \in \mathbf{R}^n\colon x = s_1 + \ldots + s_m,\ s_j \in G_1,\ j = 1, \ldots, m\}.$$

Положим $b = |a| - r$, $d = |a| + r$, $a' = a/|a|$. Очевидно, множество G_m лежит в слое $L_m = \{x \in \mathbf{R}^n\colon xa' \in [mb, md]\}$. Далее, $\Gamma^{m*}(G_m) \geqslant (\Gamma(G_1))^m > 0$. Поскольку $\Gamma^{m*} \ll \Gamma$, из предыдущего неравенства следует, что $\Gamma(G_m) > 0$. Покажем, используя метод индукции, что на множестве G_m функция $\chi(x, \Gamma)$ Γ-п. в. удовлетворяет неравенству

$$|\chi(x, \Gamma)| \geqslant \Delta_1^m. \tag{24}$$

При $m = 1$ это так в силу выбора G_1. Предположим, что (24) справедливо при $m = k$, и пусть $m = k + 1$. Ввиду $\Gamma \ll \Gamma * \Gamma$ достаточно показать, что

$$\Gamma^{2*}\{x \in G_{k+1}\colon |\chi(x, \Gamma)| < \Delta_1^{k+1}\} = 0. \tag{25}$$

Выражение в левой части (25) равно

$$\Gamma \times \Gamma\{(s_1, s_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n\colon s_1 \in G_k, s_2 \in G_1, |\chi(s_1 + s_2, \Gamma)| < \Delta_1^{k+1}\}.$$

Фигурирующее здесь множество содержится в объединении множеств

$$D_1 = \{(s_1, s_2)\colon \chi(s_1 + s_2, \Gamma) \neq \chi(s_1, \Gamma)\chi(s_2, \Gamma)\},$$

$$D_2 = \{(s_1, s_2)\colon s_1 \in G_k, |\chi(s_1, \Gamma)| < \Delta_1^k\}.$$

Осталось заметить, что $\Gamma \times \Gamma(D_1) = 0$ в силу (19), а $\Gamma \times \Gamma(D_2) = 0$ в силу теоремы Фубини и предположения индукции. Соотношение (25) установлено, а вместе с ним и неравенство (24).

Функция $f(x) = \ln \varphi(x)$ ограничена на $B = \{x \in \mathbf{R}^n\colon |x| \leqslant 1\}$, скажем, числом $M < \infty$ [22, теорема 7.13.1]. Тогда $f(tx) \leqslant 2tM$ для $\forall t \geqslant 1$,

$\forall x \in B$; это следует из полуаддитивности $f(x)$: $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$. Выберем целое $m > 1$ так, чтобы

$$\ln \Delta_1 > (|a|+r)(|\alpha|+2M)/m; \tag{26}$$

здесь a и r такие же, как и в определении множества G_1. Найдется такое $y \in L_m$, что множество $H = G_m \cap B(y, r)$ имеет положительную Г-меру. Рассмотрим меру $\Gamma_1 = \Gamma * E_u$, где $u = (|y| - |a|)y/|y|$. Обозначим $H_1 = H - u$. Имеем $\Gamma_1(H_1) = \Gamma(H) > 0$, а норма любой точки $x \in H_1$ удовлетворяет неравенству $|x| \leqslant |a| + r$. Оценим Γ_1-ess sup $\{|\chi(x, \Gamma_1)|: x \in H_1\}$. Для п.в. пар (s, t) относительно $\Gamma \times E_u$ имеем $g(s+t, \Gamma_1) = g(s, \Gamma)g(t, E_u)$ [23, формула (35)] или для Г-п. в. $s - \chi(s+u, \Gamma_1) = \chi(s, \Gamma)\chi(u)$. Разделив обе части этого равенства на $\exp(\alpha \cdot (s+u))$, получим для Г-п. в. s $\chi(s+u, \Gamma_1) = \chi(s, \Gamma)\chi(u)$. Отсюда, а также из определения меры Γ_1 следует, что для Γ_1-п. в. $x \in H_1$

$$|\chi(x, \Gamma_1)| \geqslant \Delta_1^m = \Delta_2. \tag{27}$$

Пусть $H_k = H_1 + \ldots + H_1$ (k раз). Тогда, заменяя Γ на Γ_1 и G_k на H_k в рассуждениях, использовавшихся при выводе неравенства (24), получим $\Gamma_1(H_k) > 0$ и $|\chi(x, \Gamma_1)| \geqslant \Delta_2^k$ для Γ_1-п. в. $x \in H_k$; в дальнейшем, переходя в случае необходимости к подмножествам, будет считать, что последнее неравенство выполняется для всех $x \in H_k$; здесь $k \geqslant 1$ — произвольное целое.

Имеем в силу (18)

$$1 \geqslant \Gamma_1\text{-ess sup}\, |g(x, \Gamma_1)|/\varphi(x) \geqslant \Gamma_1\text{-ess sup}\, \{|g(x, Z_1)|/\varphi(x): x \in H_k\} \geqslant$$
$$\geqslant \Delta_2^k \inf\{\exp(\alpha \cdot x)/\varphi(x): x \in H_k\}.$$

Переходя к логарифмам и разделив на $|x|$, получим

$$\inf_{x \in H_k} (k \ln \Delta_2 + \alpha \cdot x - \ln \varphi(x))/|x| \leqslant 0.$$

Заметим, что $|x| \leqslant k(|a| + r)$ для $\forall x \in H_k$, отсюда следует, что

$$\ln \Delta_2/(|a|+r) \leqslant |\alpha| + 2M,$$

но это противоречит выбору Δ_2 (см. (26)). Таким образом, предположение (22), приведшее к противоречию, неверно. Вместе с равенством $\chi(0, \Gamma) = 1$ это доказывает, что определенная в процессе доказательства обобщенная функция $\chi(x, \nu)$ наряду с (10) удовлетворяет также и условию (11), т. е. она является обобщенным характером. Прямое утверждение теоремы 2 доказано. Обратное утверждение теоремы 2 легко следует из определения обобщенного характера и равенства $\chi(x+y, \mu * \nu) = \chi(x, \mu)\chi(y, \nu)$ для п.в. пар (x, y) относительно произведения мер $|\mu| \times |\nu|$[23, формула (35)].

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) > 0$ и G — некоторое фиксированное распределение из класса $\mathscr{S}(\gamma)$, $\gamma \geqslant 0$. Положим $\tau(t) = \bar{G}(t) = G((t, \infty))$, $t \geqslant 0$; $v^+ = \max(0, v)$ для $v \in \mathbf{R}$;

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{n} \exp\left(\gamma y_j^+/x_j\right)/n, \quad y \in \mathbf{R}^n. \tag{28}$$

Очевидно, что φ — полумультипликативная функция. Банахову алгебру $S(\varphi)$ при таком выборе функции φ обозначим для краткости просто через S.

Перейдем к рассмотрению совокупностей мер из S, обладающих одинаковыми асимптотическими свойствами относительно функции $\tau(t)$.

Положим для $\nu \in S$

$$Q(\nu) = \sup |\nu|(B(tx))/\tau(t),$$
$$\|\nu\| = \|\nu\|_\varphi + Q(\nu). \tag{29}$$

Функционал $\|\nu\|$ удовлетворяет всем аксиомам нормы. Рассмотрим следующие совокупности мер:

$$\mathrm{Sf} = \{\mu \in S:\ Q(\mu) < \infty\},$$
$$\mathrm{So} = \{\mu \in \mathrm{Sf}:\ \lim_{t\to\infty} |\mu|(tB(x))/\tau(t) = 0\},$$

и будем говорить, что мера μ принадлежит совокупности Sl, если $\mu \in \mathrm{Sf}$ и существует такой вектор $c(\mu) = (c_1(\mu), \ldots, c_n(\mu)) \in \mathbf{C}^n$, что для любого $z \in \mathbf{R}^n$

$$\mu(tB(x) - z) \sim \sum_{j=1}^{n} c_j(\mu) \exp(\gamma z_j/x_j)\,\tau(t), \quad t \to \infty. \tag{30}$$

Очевидно, что мера E, единичный элемент банаховой алгебры S, принадлежит этим совокупностям.

Теорема 3. *Совокупность мер* Sf *является комплексной коммутативной банаховой алгеброй относительно некоторой нормы* $\|\nu\|'$, *эквивалентной норме* (29). *В качестве произведения элементов из* Sf *берется их свертка, а единичным элементом служит мера* E.

Совокупности мер So *и* Sl *являются банаховыми подалгебрами алгебры* Sf, *и для произвольных элементов* $\mu, \nu \in \mathrm{Sl}$ *имеют место равенства*

$$c_j(\mu * \nu) = c_j(\mu)\widehat{\nu}_j(\gamma/x_j) + c_j(\nu)\widehat{\mu}_j(\gamma/x_j), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{31}$$

Доказательство. Полнота нормированных пространств Sf, So и Sl относительно нормы (29) устанавливается с помощью стандартных рассуждений (см. доказательства аналогичных утверждений в [4, 25, 26]). Покажем, что свертка $\mu * \nu \in \mathrm{Sf}$, если $\mu, \nu \in \mathrm{Sf}$, и что существует постоянная $C \geqslant 1$, такая что

$$\|\mu * \nu\| \leqslant C\|\mu\|\,\|\nu\|. \tag{32}$$

Тогда в Sf можно перейти к эквивалентной норме $\|\nu\|'$, удовлетворяющей всем требованиям из определения банаховой алгебры [22, теорема 2.14.3]. Тем самым первая часть теоремы будет доказана.

Рассмотрим неотрицательные меры $\mu, \nu \in \mathrm{Sf}$. Пусть $t \geqslant 0$ и

$$D = \{(y, z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n:\ y + z \in tB(x)\},$$
$$d = A(tx/2) = \{y \in \mathbf{R}^n:\ y \leqslant tx/2\}.$$

Представим D в виде объединения непересекающихся множеств $D_1 = D \cap (d \times \mathbf{R}^n)$, $D_2 = D \cap (\mathbf{R}^n \times d)$, $D_3 = D \cap (d^c \times d^c)$. Имеем

$$(\mu * \nu)(tB(x)) = \sum_{k=1}^{3} \mu \times \nu(D_k) = \sum_{k=1}^{3} I_k(t). \tag{33}$$

Обозначим $f(y) = \max(y_j^+/x_j:\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, $y \in \mathbf{R}^n$. Тогда $d = A(0) \cup \{0 < f(y),\ y \leqslant tx/2\} \in A(0) \cap d_1$. Определим меру μ_f равенством

$$\mu_f(A) = \mu\{y \in \mathbf{R}^n:\ f(y) \in A\},\ A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

Имеем

$$I_1(t)/\tau(t) = \left(\int_{A(0)} + \int_{d_1}\right) \nu(tB(x) - y)\,\mu(dy)/\tau(t) = J_1(t) + J_2(t). \tag{}$$

Справедливы оценки

$$J_1(t) < Q(\nu)\,\mu(A(0)), \tag{35}$$

$$J_2(t) \leqslant Q(\nu) \int_0^{t/2} \tau(t - s)\,\mu_f(ds)/\tau(t). \tag{36}$$

Представим последний интеграл в виде повторного интеграла ($\tau(t) = G((t, \infty))$) и переменим порядок интегрирования; получим

$$\int_{t/2}^{t} \mu_f((t-u, t/2))\, G(u)/\tau(t) + \mu_f((0, t/2)) \leqslant Q(\mu)\, G^{2*}((t, \infty))/\tau(t) +$$
$$+ \mu(B(0)) \leqslant Q(\mu)\, C_1 + \mu(B(0)), \tag{37}$$

где $C_1 = \sup\{G^{2*}((t, \infty))/\tau(t):\ t \geqslant 0\} < \infty$ в силу условия 2) (см. пункт 1). Из (34)—(32) вытекает оценка для $I_1(t)$:

$$\sup_{t \geqslant 0} I_1(t)/\tau(t) \leqslant Q(\nu)\, \|\mu\|_\varphi + C_1 Q(\mu)\, Q(\nu). \tag{38}$$

Аналогичная оценка справедлива для $I_2(t)$. Наконец,

$$\sup_{t \geqslant 0} I_3(t)/\tau(t) \leqslant C_1 Q(\mu)\, Q(\nu). \tag{39}$$

Из оценок (38), (39) следует (32).

Перейдем к доказательству второй части теоремы 3. Пусть $\mu, \nu \in \mathrm{Sl}$; покажем, что $\mu * \nu \in \mathrm{Sl}$ и что выполняются равенства (31). Пусть $0 < T < t/2$. Имеем

$$\frac{I_1(t)}{\tau(t)} = \left(\int\limits_{A(Tx)} + \int\limits_{A(tx/2) \cap B(Tx)} \right) \frac{\nu(tB(x) - y)}{\tau(t)}\, \mu(dy) = J_3(t) + J_4(t). \tag{40}$$

По теореме о мажорируемой сходимости из условия (31) вытекает

$$\lim_{t \to \infty} J_3(t) = \int\limits_{A(Tx)} \sum_{j=1}^{n} c_j(\nu) \exp(\gamma y_j/x_j)\, \mu(dy). \tag{41}$$

Обозначим для краткости подынтегральную функцию в (41) через $h(y;\ c(\nu))$. При оценке интеграла $J_4(t)$ используем уже применявшийся прием (см. выкладку (37)):

$$|J_4(t)| \leqslant Q(\nu) \int_{T}^{t/2} \tau(t-s)\, |\mu|_f(ds)/\tau(t) \leqslant$$
$$\leqslant Q(\mu)(Q)(\nu) \left\{ \int_{t/2}^{t-T} \frac{\tau(t-u)}{\tau(t)}\, G(du) + \frac{\tau(T)\, \tau(t-T)}{\tau(t)} \right\}. \tag{42}$$

Далее, повторяя рассуждения, использовавшиеся при доказательстве предложения 2 в [27], приходим к равенству

$$\lim_{t \to \infty} I_1(t)/\tau(t) = \int h(y;\ c(\nu))\, \mu(dy).$$

Аналогичное равенство справедливо для $I_2(t)$ и $I_3(t)/\tau(t) \to 0$, $t \to \infty$ [27, доказательство предложения 2]. В результате равенство (33) влечет

$$\lim_{t \to \infty} \frac{(\mu * \nu)(tB(x))}{\tau(t)} = \sum_{j=1}^{n} [c_j(\nu)\, \widehat{\mu}_j(\gamma/x_j) + c_j(\mu)\, \widehat{\nu}_j(\gamma/x_j)]. \tag{43}$$

Пусть теперь $z \in \mathbf{R}^n$ произвольно. Определим сдвиг μ_z меры $\mu \in \mathrm{Sl}$ формулой $\mu_z(A) = \mu(A - z)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$. Очевидно $\mu_z \in \mathrm{Sl}$ и

$$c_j(\mu_z) = \exp(\gamma z_j/x_j)\, c_j(\mu), \tag{44}$$

$$\widehat{\mu}_{z,j}(\gamma/x_j) = \exp(\gamma z_j/x_j)\, \widehat{\mu}_j(\gamma/x_j),\ j = 1, \ldots, n. \tag{45}$$

Имеем $\mu * \nu(tB(x) - z) = \mu_z * \nu(tB(x))$. Применение уже доказанного равенства (43) к свертке мер $\mu_z * \nu$ с использованием равенств (44) и (45) показывает, что свертка $\mu * \nu$ удовлетворяет условию (30) и что для соответствующих ей коэффициентов $c_j(\mu * \nu)$ справедливы равенства

(31). Доказательство утверждения теоремы для совокупности So аналогично.

Следующая теорема показывает, что гомоморфизмы введенных банаховых алгебр в поле комплексных чисел суть сужения гомоморфизмов банаховой алгебры S.

Теорема 4. *Пусть* m: So $\to \mathbf{C}$ — *произвольный гомоморфизм банаховой алгебры* So *в поле комплексных чисел. Тогда существует обобщенный характер* $\chi(y, \nu)$, $y \in \mathbf{R}^n$, $\nu \in$ So, *на* So *и вектор* $\alpha \in \mathbf{R}^n$, *удовлетворяющий неравенствам*

$$\alpha \cdot y \leqslant r(\varphi, y) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} y_j^+ \gamma / x_j, \; y \in \mathbf{R}^n, \tag{46}$$

такие, что справедливо представление (15). *Обратно, для любого обобщенного характера на* So *и любого вектора* $\alpha \in \mathbf{R}^n$, *удовлетворяющего* (46), *формула* (15) *определяет некоторый гомоморфизм* m: So $\to \mathbf{C}$.

Идентичные утверждения справедливы также и для банаховых алгебр Sf *и* Sl.

Доказательство. Несложные вычисления показывают, что неравенства (16) в теореме 2 при данном выборе (28) полумультипликативной функции φ переходят в (46). Положим для любого $y \in \mathbf{R}^n$

$$\varphi_1(y) = \| E_y \| = \varphi(y) + 1_{B(0)}(y)/\tau\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} y_j/x_j\right); \tag{47}$$

здесь $1_{B(0)}$ — индикатор множества $B(0)$. Так как $E_{y+z} = E_y * E_z$, в силу неравенства (32) имеем $\varphi_1(y+z) \leqslant C\varphi_1(y)\varphi_1(z)$. Найдутся полумультипликативная функция φ_2 и положительные постоянные C_2 и C_3, такие, что для $\forall y \in \mathbf{R}^n$

$$C_2\varphi_1(y) \leqslant \varphi_2(y) \leqslant C_3\varphi(y); \tag{48}$$

для этого достаточно положить $\varphi_2(y)$ равным норме $\|A_y\|$ ограниченного линейного оператора A_y: Sf $\to$ Sf, определяемого равенством $A_y(\mu) = \mu * E_y$, $\mu \in$ Sf [22, доказательство теоремы 2.14.3]. Для любого $y \in \mathbf{R}^n$ имеем

$$r(\varphi_2, y) = r(\varphi, y) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} y_j^+ \gamma / x_j = \gamma\Delta(y). \tag{49}$$

Если $y \in A(0)$, т. е. $y_j \leqslant 0$ для $\forall j$, то (49) — немедленное следствие соотношений (47) и (48). Пусть $y \in B(0)$, т. е. $\Delta = \Delta(y) > 0$. Тогда

$$\varphi(ty) \leqslant \exp(t\gamma\Delta) = o(1/\tau(t\Delta)), \; t \to \infty. \tag{50}$$

Учитывая соотношения (47), (48) и (50), при любом $y \in B(0)$ имеем $r_2(\varphi_2, y) = \gamma\Delta$ [27]. Справедливы включения $S(\varphi_2) \subset$ So $\subset S$. Это вытекает из (48) и оценки

$$\frac{|\mu|(tB(x))}{\tau(t)} \leqslant \int\limits_{tB(x)} \frac{|\mu|(dy)}{\tau(\Delta)} \leqslant \int\limits_{tB(x)} \varphi_1(y)\,|\mu|(dy),$$

потому что если $\mu \in S(\varphi_2)$, то интеграл справа стремится к нулю при $t \to \infty$ ($tB(x) \downarrow \varnothing$ при $t \uparrow \infty$). Теперь, чтобы завершить доказательство теоремы в случае банаховой алгебры So, достаточно повторить соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 2 в [24]. Сужение m_1 гомоморфизма m на $S(\varphi_2)$ является гомоморфизмом банаховой алгебры $S(\varphi_2)$ в $\mathbf{C}$. По теореме 2 он представим в виде (15), где в силу (49) вектор α удовлетворяет неравенствам (46). Это позволяет продолжить m_1 до гомоморфизма m_2: $S \to \mathbf{C}$, также имеющего вид (15) с тем же вектором α. Совокупность $S(\varphi_2)$ всюду плотна в So; поэтому m_2 совпадает с m на So.

Приведем схему доказательства теоремы для Sl и Sf. Оба случая рассматриваются аналогично. Пусть m: Sl $\to \mathbf{C}$ — гомоморфизм. Его сужение m_0 на So также гомоморфизм. Как показано выше, m_0 — сужение на So некоторого гомоморфизма m_1: $S \to \mathbf{C}$; и чтобы доказать теорему для Sl, достаточно установить, что m — сужение m_1 на Sl.

Если допустить, что m не является сужением m_1 на Sl, то мы придем к противоречию с непрерывностью функционала $m_2 = m - m_1$: $:\mathrm{Sl} \to \mathbf{C}$, рассуждая, как при доказательстве теоремы 3 из [24]. При этом вместо условия (29) в [24] следует воспользоваться соотношением

$$\lim_{m\to\infty} Q(\mu_m * \mu_m) = 0 \text{ для } \forall \mu \in \mathrm{Sf}, \tag{51}$$

где $\mu_m(B) = \mu(B \backslash A(mx))$, $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$, $m = 1, 2, \ldots$. Проверка этого соотношения осуществляется аналогично проверке подобного соотношения (35) в [27]. Обратные утверждения теоремы 4 очевидны.

Перейдем к изучению строения максимальных идеалов. Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная комплексная коммутативная банахова алгебра, e — единичный элемент в $\mathscr{A}$ и $\mathscr{M}$ — пространство максимальных идеалов банаховой алгебры $\mathscr{A}$. *Спектром* $\sigma(x)$ *элемента* $x \in \mathscr{A}$ называется совокупность комплексных чисел λ таких, что элементы $x - \lambda e$ не имеют обратного. Всякий максимальный идеал $M \in \mathscr{M}$ порождает гомоморфизм m: $\mathscr{A} \to \mathbf{C}$, причем $M = m^{-1}(\{0\})$. Значение $m(x)$ гомоморфизма m на элементе $x \in \mathscr{A}$ обозначим через $x(M)$. Если фиксировать $x \in \mathscr{A}$, то получим функцию $M \to x(M)$ на пространстве максимальных идеалов $\mathscr{M}$. Топология пространства $\mathscr{M}$ — это наименьшая топология, относительно которой все функции $x(M)$, определенные на $\mathscr{M}$, непрерывны. Спектр $\sigma(x)$ элемента $x \in \mathscr{A}$ совпадает с областью значений функции $x(M)$: $\sigma(x) = \{x(M)\colon M \in \mathscr{M}\}$ [28].

Обозначим через $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}\mathrm{f}$, $\mathfrak{M}\mathrm{o}$, $\mathfrak{M}\mathrm{l}$ пространства максимальных идеалов банаховых алгебр S, Sf, So, Sl соответственно.

Теорема 5. *Любой максимальный идеал* M *банаховой алгебры* So *представим в виде*

$$M = M_1 \cap \mathrm{So}, \tag{52}$$

где M_1 — некоторый максимальный идеал банаховой алгебры S. *И наоборот, если* $M_1 \in \mathfrak{M}$, *то* $M \cap \mathrm{So} \in \mathfrak{M}\mathrm{o}$. *Соответствие* (52) *между пространствами* $\mathfrak{M}\mathrm{o}$ *и* $\mathfrak{M}$ *максимальных идеалов есть гомеоморфизм.*

Идентичные утверждения справедливы также и для банаховых алгебр Sl *и* Sf.

Доказательство. Теорема 5 — непосредственное следствие теорем 2 и 4. Взаимную однозначность соответствия (52) нетрудно доказать, используя тот факт, что совокупность So всюду плотна в S. Взаимная непрерывность соответствия (52) следует из определения топологии в пространстве максимальных идеалов банаховой алгебры.

Известно следующее утверждение [28, 29].

Теорема А. *Пусть* $f(z)$ — *аналитическая функция в области* $\mathscr{D} \subset \mathbf{C}$, *содержащей спектр* $\sigma(x)$ *элемента* $z \in \mathscr{A}$. *Тогда существует такой элемент* $f(x) \in \mathscr{A}$, *что для всех* $M \in \mathscr{M}$

$$f(x)(M) = f(x(M)).$$

Элемент $f(x) \in \mathscr{A}$, *фигурирующий в теореме* **А**, *называется значением аналитической функции* $f(z)$ *на элементе* $x \in \mathscr{A}$.

Теорема 6. *Пусть* $f(z)$ — *аналитическая функция в области* $\mathscr{D} \subset \mathbf{C}$, *содержащей спектр* $\sigma(\nu)$ *меры* $\nu \in S$, *и пусть* $f(\nu) \in S$ — *значение* $f(z)$ *на элементе* $\nu \in S$, *определяемое теоремой* **А**. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

I. *Если* $\nu \in Sf$ (So), *то и* $f(\nu) \in \mathrm{Sf}$ (So).

II. *Если* $\nu \in \mathrm{Sl}$, *то и* $f(\nu) \in \mathrm{Sl}$; *при этом имеют место равенства*

$$c_j(f(\nu)) = f'(\widehat{\nu_j}(\gamma/x_j))\, c_j(\nu), \; j = 1, \ldots, n. \tag{53}$$

Доказательство. Докажем только вторую часть. Спектр меры ν в Sl совпадает с множеством $\{x(M),\ M \in \mathfrak{M}\mathrm{l}\}$, которое в силу теорем 2 и 4 совпадает с $\{x(M_1),\ M_1 \in \mathfrak{M}\} = \sigma(\nu)$. Поэтому согласно теореме **A** ($\mathscr{A} = \mathrm{Sl}$) существует элемент $\mu \in \mathrm{Sl}$, такой что $\mu(M) = f(\nu(M))$, $M \in \mathfrak{M}$l. Равенство $\mu = f(\nu)$ следует из взаимной однозначности соответствия между конечными мерами в $\mathbf{R}^n$ и преобразованиями Лапласа. Действительно, при фиксированном $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (i\mathbf{R})^n$ отображение m: $S \to \mathbf{C}$, задаваемое равенством $m(\varkappa) = \widehat{\varkappa}(\lambda)$, $\varkappa \in S$, есть гомоморфизм. Имеем

$$\widehat{\mu}(\lambda) = f(\widehat{\nu}(\lambda)) = (f(\nu))^{\wedge}(\lambda) \text{ для } \forall \lambda \in (i\mathbf{R})^n.$$

Значит, меры μ и $f(\nu)$ совпадают.

Равенства (53) доказываются так же, как и равенство (2) в теореме 1 из [4]. В качестве соответствующего линейного непрерывного функционала L следует взять отдельно для каждого $j = 1, \ldots, n$ функционал $L_j(\nu) = c_j(\nu)$, $\nu \in \mathrm{Sl}$. Линейность L_j очевидна, чего нельзя сказать о непрерывности L_j. Однако мы преодолеем и это препятствие. Обозначим $l(\mu) = \sum_{j=1}^{n} c_j(\mu)$. Из линейности l и оценки $|l(\mu)| \leqslant Q(\mu) \leqslant \|\mu\|$ следует непрерывность l в Sl. Покажем, что сдвиг мер на фиксированный вектор $z \in \mathbf{R}^n$ является непрерывным отображением Sl в себя. Во-первых, $\|\mu_z - \nu_z\|_\varphi \leqslant \varphi(z)\|\mu - \nu\|_\varphi$. Во-вторых, условие 3) определения 1 и неравенство

$$|\mu|(tB(x) - y) \leqslant |\mu|((t - f(y)B(x))$$

$$\left(\text{напоминаем: } f(z) = \max\{z_j^+/x_j\colon\ j = 1, \ldots, n\}\right)$$

гарантируют, что при фиксированном $z \in \mathbf{R}^n$

$$Q(\mu_z - \nu_z) \leqslant C_4 Q(\mu - \nu).$$

Эти оценки показывают, что при фиксированном $z \in \mathbf{R}^n$

$$\|\mu_z - \nu_z\| \leqslant C_5\|\mu - \nu\|.$$

Возьмем $z = (z_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$, $z_1 \neq 0$. Функционал $l(\mu) - l(\mu_z)$ непрерывно зависит от $\mu \in \mathrm{Sl}$. С другой стороны, в силу (44) эта разность равна $(1 - \exp(z_1\gamma/x_1))c_1(\mu)$. Значит, функционал $L_1 = c_1(\mu)$ непрерывен.

Замечание. Банаховы алгебры мер в $\mathbf{R}_+$ и в $\mathbf{R}$, аналогичные рассмотренным в этом параграфе, изучались в работах [27, 30].

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

/Б $\Rightarrow$ А/. Пусть B — замкнутый единичный шар с центром в нуле. Обозначим $\nu^{(1)}(A) = \nu(A \backslash B)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$; $\nu^{(1)}$ — конечная мера. Представим б. д. р. F в виде $F = F^1 * F^{(2)}$, где $F^{(1)}$ — обобщенное распределение Пуассона с мерой Леви $\nu^{(1)}$:

$$\widehat{F}^{(1)}(\lambda) = \exp\{\widehat{\nu}^{(1)}(\lambda) - \nu^{(1)}(\mathbf{R}^n)\},\ \lambda \in (i\mathbf{R})^n, \tag{54}$$

а $F^{(2)} = F^{(2)}(a^{(2)}, \mathbf{S}, \nu - \nu^{(1)})$. Из условия Б следует, что $\nu^{(1)} \in \mathrm{Sl}$ и что $c_j(\nu^{(1)}) = c_j(\nu)$, $j = 1, \ldots, n$. Мера $F^{(1)}$ равна значению целой функции $f(z) = \exp(z - \nu^{(1)}(\mathbf{R}^n))$ и по теореме 6 принадлежит Sl; в силу (53), (54) имеют место равенства

$$c_j(F^{(1)}) = \widehat{F}_j^{(1)}(\gamma/x_j)\, c_j(\nu),\quad j = 1, \ldots, n. \tag{55}$$

По лемме 1 из [31] для любого $\delta > 0$

$$\int \exp\{(\gamma + \delta)|y|\} F^{(2)}(dy) < \infty, \tag{56}$$

а из условия 3) определения 1 следует [9, лемма 2.4], что

$$\lim_{t\to\infty} \tau(t) \exp\{(\gamma + \delta)t\} = \infty \text{ для } \forall\delta > 0. \tag{57}$$

Из соотношений (56), (57) вытекает, что $F^{(2)} \in \mathrm{So} \subset \mathrm{Sl}$. Поэтому

$$c_j(F^{(2)}) = 0, \ j = 1, \ldots, n. \tag{58}$$

Таким образом, $F \in \mathrm{Sl}$. Из соотношений (31), (55) и (58) следует, что

$$c_j(F) = c_j(F^{(1)}) \widehat{F}_j^{(2)}(\gamma/x_j) = \widehat{F}_j(\gamma/x_j)\, c_j(\nu), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{59}$$

Импликация Б $\Rightarrow$ А доказана. Из формул (6) и (59) вытекает требуемое соотношение (7).

/А $\Rightarrow$ Б/. Сначала покажем, что если F — обобщенное распределение Пуассона с мерой Леви ν, то из принадлежности $F \in \mathrm{Sl}$ следует $\nu \in \mathrm{Sl}$. Тогда по доказанному будут выполняться равенства (55) (без верхнего индекса). Очевидно, что $\nu \in S$. Как элемент банаховой алгебры S, мера F — значение $f(\nu)$ целой функции $f(z)$ на элементе $\nu \in S$. Поэтому

$$F(M) = \exp\{\nu(M) - \nu(\mathbf{R}^n)\}, \quad M \in \mathfrak{M}. \tag{60}$$

В силу теорем 2 и 4 функции $F(M_1)$, $M_1 \in \mathfrak{Ml}$ и $F(M)$, $M \in \mathfrak{M}$, совпадают с точностью до гомеоморфизма (52). Поэтому из (60) следует, что $\ln F(M_1)$, $M_1 \in \mathfrak{M}l$,— однозначная непрерывная функция на $\mathfrak{Ml}$. Значит, найдется элемент $\varkappa \in \mathrm{Sl}$, такой что $\varkappa(M_1) = \ln F(M_1)$, $M_1 \in \mathfrak{Ml}$ [32]. В силу взаимной однозначности соответствия между мерами и преобразованиями Лапласа $\varkappa = \nu - \nu(\mathbf{R}^n)E$. Таким образом, $\nu \in \mathrm{Sl}$.

Пусть в представлении (1) $\mathbf{S} = 0$ и $\nu(\mathbf{R}^n) < \infty$. Тогда F — сдвиг обобщенного распределения Пуассона с мерой Леви ν. Поскольку алгебра Sl содержит все сдвиги своих элементов, то по доказанному на предыдущем этапе $\nu \in \mathrm{Sl}$. Импликация А $\Rightarrow$ Б установлена и в этом случае.

Самый сложный и трудоемкий случай: $\mathbf{S} \neq 0$ или $\nu(\mathbf{R}^n) = \infty$. Воспользуемся опять равенством $F = F^{(1)} * F^{(2)}$. Пусть $F \in \mathrm{Sl}$. Для доказательства импликации А $\Rightarrow$ Б достаточно показать, что $F^{(1)} \in \mathrm{Sl}$, откуда, как уже установлено для обобщенного распределения Пуассона, будет следовать, что $\nu^{(1)} \in \mathrm{Sl}$; а это эквивалентно утверждению Б. Обозначим через $h_1(y)$ и $h_2(y)$, $y \in \mathbf{R}^n$, соответственно нижний и верхний пределы отношения $F^{(1)}(tB(x) - y)/\tau(t)$ при $t \to \infty$. Достаточно установить, что

$$h_1(y) = h_2(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp(y_j\gamma/x_j) \ \text{ для } \ \forall y \in \mathbf{R}^u, \tag{61}$$

где $c_j = c_j(F)/\widehat{F}_j^{(2)}(\gamma/x_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Фиксируем $u \in \mathbf{R}^n$. Обозначим

$$D_4 = \{(y, s) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n\colon\ y + s \in tB(x) - u\}.$$

Перейдем к пределу при $t \to \infty$ в следующем равенстве:

$$\frac{F(tB(x) - u)}{\tau(t)} = \int\limits_{A((tx-u)/2)} \frac{F^{(1)}(tB(x) - u - y)\, F^{(2)}(dy)}{\tau(t)} + \int\limits_{A((tx-u)/2)} \frac{F^{(2)}(tB(x) - u - s)\, F^{(1)}(ds)}{\tau(t)} + \frac{(F^{(1)} \times F^{(2)})(D_4 \cap B((tx-u)/2) \times B((tx-u)/2))}{\tau(t)} = \sum_{j=6}^{8} J_j(t). \tag{62}$$

Получим

$$\int h_1(u + y)\, F^{(2)}(dy) = \sum_{j=1}^{n} c_j(F) \exp(u_j\gamma/x_j) = \int h_2(u + y)\, F^{(2)}(dy). \tag{63}$$

Это устанавливается следующим образом. Нетрудно видеть, что $F^{(1)} \in \mathrm{Sf}$; ранее было показано, что $F^{(2)} \in \mathrm{So}$. Поэтому, рассуждая как при доказательстве второй части теоремы 3, заключаем, что

$$\lim_{t\to\infty} J_7(t) = \lim_{t\to\infty} J_8(t) = 0. \tag{64}$$

Из $F^{(1)} \in \mathrm{Sf}$ следует, что

$$0 \leqslant F^{(1)}(tB(x) - y)/\tau(t) \leqslant F^{(1)}((t - f(y))B(x))/\tau(t) \leqslant$$
$$\leqslant Q(F^{(1)}) \sup_{t \geqslant 0} \tau(t - f(y))/\tau(t) \leqslant C_6 \exp\{C_7 f(y)\} = Z(y). \qquad (65)$$

Функция $Z(y)$ $F^{(2)}$-интегрируема [31], поэтому неравенства (65) гарантируют законность применения леммы Фату — Лебега (см. [33]) к $J_6(t)$. В результате из (5), (62), (64) и леммы Фату — Лебега, примененной к интегралу $J_6(t)$, получим соотношения (63), где вместо равенств пока стоят знаки «меньше» или «равно». В действительности же в этих соотношениях стоят знаки равенства. Это следует из неравенств $h_1(y) \leqslant h_2(y) \leqslant h_1(y+v)$ для $\forall v > 0$. Перейдем непосредственно к доказательству соотношения (61) для функции $h(y) = h_2(y)$. Для функции $h_1(y)$ равенство (61) доказывается аналогично. Фиксируем точку $z = (z_1, 0, \ldots, 0)$, $z_1 > 0$, обозначим $h_z(y) = h(y+z) - h(y)$. Рассмотрим функцию

$$k_z(y) = h_z(y)/\{\exp(y_1\gamma/x_1)(\exp(z_1\gamma/x_1) - 1)\}.$$

Из (63) вытекает, что

$$c_1(F) = \int k_z(y+u) \exp(y_1\gamma/x_1) F^{(2)}(dy) \quad \text{для} \quad \forall u \in \mathbf{R}^n. \qquad (66)$$

Лемма 3. *Пусть μ — конечная неотрицательная мера, определенная на σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$; пусть ее преобразование Лапласа $\widehat{\mu}(it)$ не обращается в нуль ни при каком $t \in \mathbf{R}^n$ и представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию в $\mathbf{R}^n$: $\widehat{\mu}(it) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Пусть $K(x), x \in \mathbf{R}^n$, — измеримая по Борелю ограниченная п. в. относительно меры Лебега комплексная функция, такая что*

$$K * \mu(x) = \int K(x-y)\mu(dy) \equiv C(K). \qquad (67)$$

Тогда п. в. относительно меры Лебега в $\mathbf{R}^n$

$$K(x) = C(K)/\mu(\mathbf{R}^n).$$

Лемма 3 будет доказана после завершения доказательства теоремы 1.

Положим $\mu(dy) = \exp(y_1\gamma/x_1) F^{(2)}(dy)$. Определенная таким образом мера μ удовлетворяет условиям леммы 3, так как $\mu(dy)/\widehat{F}_1^{(2)}(\gamma/x_1)$ — б. д. р. в $\mathbf{R}^n$, имеющее конечные моменты всех порядков, что следует из соотношения (56). Функция $K(y) = k_z(-y)$ также удовлетворяет условию леммы 3. Тождество (67) немедленно вытекает из (66). Ограниченность $k_z(y)$ по $y = (y_1, 0, \ldots, 0)$, $y_1 \geqslant 0$, следует из $F^{(1)} \in \mathrm{Sf}$, условия 3) определения 1 и включения

$$tB(x) - y_1 e_1 \subset (t - y_1/x_1) B(x).$$

Действительно,

$$h(y) = \limsup_{t\to\infty} \frac{F^{(1)}(tB(x) - y_1 e_1)}{\tau(t)} \leqslant$$
$$\leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{F^{(1)}((t - y_1/x_1) B(x))}{\tau(t)} = h(0) \exp(y_1\gamma/x_1).$$

Отсюда следует, что

$$k_z(y) \leqslant h(0)\{\exp(z_1\gamma/x_1) + 1\}/\{\exp(z_1\gamma/x_1) - 1\} = C_8(z) < \infty.$$

Распространим эти неравенства на случай произвольных отрицательных значений y_1. Положим $h_z^{\pm}(y_1) = \lim\limits_{y_2,\ldots,y_n\to\pm\infty} h_z(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. По теореме монотонной сходимости из (63) следует, что для всех $u \in \mathbf{R}^n$

$$\int h_z^-(y_1) F^{(2)}(dy) = \int h_z^-(y_1) F^{(2)}(dy) = \int h_z(y+u) F^{(2)}(dy).$$

Отсюда следует, что для $F_1^{(2)}$-п. в. $y_1 \in \mathbf{R}$

$$h_z(y_1, y_2, \ldots, y_n) = h_z^+(y_1) = h_z^-(y_1). \tag{68}$$

Можно считать, что равенства (68) выполняются для всех $y_2, \ldots, y_n$ и для п. в. y_1 относительно меры Лебега в $\mathbf{R}$. Этого всегда можно добиться, рассматривая в случае необходимости вместо F, например, свертку F с n-мерным стандартным нормальным распределением $N(0, \mathbf{I})$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Тогда б. д. р. $F * N(0, \mathbf{I})$ эквивалентно мере Лебега в $\mathbf{R}^n$ и имеет ту же самую меру Леви ν, что и F. Здесь эквивалентность мер понимается как абсолютная непрерывность относительно друг друга. Кроме того, $F * N(0, \mathbf{I}) \in \mathrm{Sl}$, так как $N(0, \mathbf{I}) \subset \mathrm{So} \subset \mathrm{Sl}$.

Пусть $y_1 < 0$. Имеем в силу (68)

$$h_z(y_1, 0, \ldots, 0) \overset{\text{п.в.}}{=\!=} h_z(y_1, y_1x_2/x_1, \ldots, y_1x_n/x_1) \leqslant$$
$$\leqslant \limsup_{t\to\infty} \{F^{(1)}((t - y_1/x_1)B(x) - z_1e_1) -$$
$$- F^{(1)}((t - y_1/x_1)B(x))\}/\tau(t) \leqslant \exp(\gamma y_1/x_1)\,h(0)\{\exp(\gamma z_1/x_1) + 1\}.$$

Отсюда, а также из (68), следует, что для п. в. y_1 относительно меры Лебега и для всех $y_2, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$, т. е. для п. в. $y \in \mathbf{R}^n$ относительно меры Лебега,

$$k_z(y) = k_z(y_1, y_2, \ldots, y_n) \leqslant C_8(z).$$

Аналогичное неравенство справедливо и при $z = (z_1, 0, \ldots, 0)$, $z_1 < 0$, потому что $k_z(y) = k_{-z}(y')$, где $y' = (y_1 + z_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Применяя лемму 3, получаем для п. в. $y \in \mathbf{R}^n$ относительно меры Лебега

$$k_z(y) = c_1 = c_1(F)/\widehat{F}_1^{(2)}(\gamma/x_1). \tag{69}$$

В действительности равенство (69) справедливо для всех $y \in \mathbf{R}^n$. Чтобы убедиться в этом, достаточно установить непрерывность $k_z(y)$. Как уже было показано, для п. в. $y_1 \in \mathbf{R}$ функция $h_z(y_1, y_2, \ldots, y_n) = h_z^+(y_1)$, т. е. не зависит от переменных $y_2, \ldots, y_n$. Если мы установим непрерывность по y_1 функции $h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ при любых $y_2, \ldots, y_n$, то тем самым будет установлена непрерывность $h_z(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $k_z(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ по y_1, откуда будет следовать тождественное выполнение равенства (69). Обозначим через D_5 множество всех точек $y \in \mathbf{R}^n$, для которых выполнено равенство (69). Допустим, что при некоторых фиксированных $y_2, \ldots, y_n$ функция $h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ терпит разрыв в некоторой точке $y_1 \in \mathbf{R}$:

$$\delta = h(y_1 + 0, y_2, \ldots, y_n) - h(y_1 - 0, y_2, \ldots, y_n) > 0.$$

Выбирая $u_1 < y_1 < v_1$ так, чтобы $(u_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $(v_1, y_2, \ldots, y_n)$ принадлежали D_5 и устремляя $u_1 \to y_1 - 0$, $v_1 \to y_1 + 0$, получим из (69)

$$h(y_1 + z_1 + 0, y_2, \ldots, y_n) - h(y_1 + z_1 - 0, y_2, \ldots, y_n) = \delta > 0.$$

Варьируя z_1, получим, что неубывающая функция от y_1 $h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в каждой точке терпит разрыв, что невозможно. Полученное противоречие доказывает непрерывность по y_1 функции $h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ при любых $y_2, \ldots, y_n$, что, в свою очередь, влечет тождественное выполнение равенства (69). Соотношения, аналогичные (69), получаем также для точек $z \in \mathbf{R}^n$, у которых отличны от нуля только вторые координаты, и т. д. Пусть теперь $z \in \mathbf{R}^n$ произвольно. Произведем преобразования с использованием (69) и аналогичных ему равенств для $j = 2, \ldots, n$:

$$h(z) - h(0) = h\left(\sum_{j=1}^n z_je_j\right) - h(0) = \sum_{l=1}^n \left\{h\left(\sum_{j=l}^n z_je_j\right) - h\left(\sum_{j=l+1}^n z_je_j\right)\right\} =$$
$$= \sum_{l=1}^n c_l(\exp(z_l\gamma/x_l) - 1).$$

Обозначим $h_3(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp(z_j \gamma / x_j)$. Как видно из предыдущей выкладки, разность $h(z) - h_3(z) \equiv \mathrm{const}$ и, кроме того, интегралы от функций h и h_3 по мере $F^{(2)}$ равны (это следует из (63) при $u=0$ и (69)). Значит, $h(z) \equiv h_3(z)$.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим свертку $\mu * N$ меры μ с нормальным распределением $N(0, \mathbf{I})$ в $\mathbf{R}^n$. Мера $\mu * N$ абсолютно непрерывна и имеет плотность

$$p(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \exp(-|x-u|^2/2)\, d\mu(u), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

которая принадлежит пространству быстро убывающих функций $\mathcal{S}_n$. Из (67) следует, что

$$\int \widetilde{K}(x-y)\, p(y)\, dy = 0, \quad \widetilde{K}(x) = K(x) - C(K)/\mu(\mathbf{R}^n).$$

По теореме о преобразовании Фурье [34, с. 105—106] имеем $\mathcal{F}(\widetilde{K} * p) = \mathcal{F}(\widetilde{K}) \cdot \mathcal{F}(p) = 0$. Заметим, что $\mathcal{F}(p) = \widehat{\mu}\widehat{N} \neq 0$, так как по предположению $\widehat{\mu} \neq 0$, а $\widehat{N} = \exp(-|x|^2/2)$. Поэтому $\mathcal{F}(\widetilde{K}) = 0$ и, следовательно, $\widetilde{K}(x) = 0$ п.в., так как отображение $f \to \mathcal{F}(f)$ на $\mathcal{S}'_n$ взаимно однозначно [34, с. 102].

В завершение приведем еще один результат о безгранично делимых распределениях в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 7. *Пусть F — б.д.р. в $\mathbf{R}^n$ и ν — его мера Леви. Пусть G — распределение класса $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geqslant 0$, и $x = (x_1, \ldots, x_n) > 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(а) $F(tB(x)) = O(\overline{G}(t))$ *при* $t \to \infty$;

(б) $\nu(tB(x)) = O(\overline{G}(t))$ *при* $t \to \infty$.

Заключение теоремы останется в силе, если в ее формулировке символ O всюду заменить на символ o.

Автор выражает глубокую благодарность В. М. Круглову, сделавшему ценные замечания по содержанию статьи и предложившему приводимое здесь более короткое доказательство леммы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Теория случайных процессов.— М.: Наука, 1971.— Т. 1.— 664 с.
2. **Чистяков В. П.** Теорема о суммах положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам // Теория вероятностей и ее применения.— 1964.— Т. 9, вып. 4.— С. 710—718.
3. **Chover J., Ney P., Wainger S.** Degeneracy properties of subcritical branching processes // Ann. Probab.— 1973.— V. 1, N 4.— P. 663—673.
4. **Chover J., Ney P., Wainger S.** Functions of probability measures // J. Anal. Math.— 1973.— V. 26.— P. 255—302.
5. **Teugels J.** The class of subexponential distributions // Ann. Probab.— 1975.— V. 3.— P. 1000—1011.
6. **Embrechts P., Goldie C. M., Veraverbeke N.** Subexponentiality and infinite divisibility // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1979.— Bd 49.— S. 335—347.
7. **Embrechts P., Goldie C. M.** On closure and factorization properties of subexponential and related distributions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A.— 1980.— V. 29.— P. 243—256.
8. **Pitman E. J. G.** Subexponential distribution functions // Ibid.— 1980.— V. 29.— P. 337—347.
9. **Embrechts P., Goldie C. M.** On convolution tails // Stochast. Process and Appl.— 1982.— V. 13.— P. 263—278.
10. **Пинелис И. Ф.** Об асимптотической эквивалентности вероятностей больших уклонений суммы и максимума независимых случайных величин // Тр. Ин-та/ Ин-т математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 5.— С. 144—173.
11. **Золотарев В. М.** Об асимптотическом поведении одного класса безгранично делимых законов распределения // Теория вероятностей и ее применения.— 1961.— Т. 6, вып. 3.— С. 330—334.
12. **Сгибнев М. С.** О безгранично делимых распределениях класса $\mathcal{S}_\gamma$ // Тез. I Всемир. конгр. о-ва им. Бернулли, Ташкент, сент. 1986 г.— М., 1986.— Т. 2.— С. 923.
13. **Якымив А. Л.** Асимптотическое поведение одного класса безгранично делимых

распределений // Теория вероятностей и ее применения.— 1987.— Т. 32, вып. 4.— С. 691—702.
14. **Grübel R.** Functions of discrete probability measures: rates of convergence in the renewal theory // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1983.— Bd 64.— S. 341—357.
15. **Grübel R.** On subordinated distributions and generalized renewal measures // Ann. Probab.— 1987.— V. 15, N 1.— P. 394—415.
16. **Grübel R.** Über unbegrenzt teilbare Verteilungen // Arch. Math.— 1983.— V. 41, Fasc. 1.— P. 80—88.
17. **Улановский А. М.** Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений на бесконечности // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.— Харьков, 1981.— Вып. 35.— С. 100—107.
18. **Круглов В. М., Антонов С. Н.** Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Теория вероятностей и ее применения.— 1982.— Т. 27, вып. 4.— С. 625—642.
19. **Круглов В. М, Антонов С. Н.** Еще раз об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Там же.— 1984.— Т. 29, вып. 4.— С. 735—742.
20. **Круглов В. М.** Дополнительные главы теории вероятностей: Учеб. пособие.— М.: Высш. шк., 1984.— 264 с.
21. **Omey E.** Infinite divisibility and random sums of random vectors // Yokohama Math. J.— 1985.— Vol. 33.— P. 39—48.
22. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 829 с.
23. **Шрейдер Ю. А.** Строение максимальных идеалов в кольцах со сверткой // Мат. сб.— 1950.— Т. 27, № 2.— С. 297—318.
24. **Рогозин Б. А., Сгибнев М. С.** Банаховы алгебры мер на прямой // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 2.— С. 160—169.
25. **Рогозин Б. А.** Асимптотика коэффициентов в теоремах Леви — Винера об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах // Там же.— 1973.— Т. 14, № 6.— С. 1304—1312.
26. **Essén M.** Banach algebra methods in renewal theory // J. Anal. Math.— 1973.— Vol. 26.— P. 303—336.
27. **Сгибнев М. С.** Банаховы алгебры мер класса $\mathscr{S}(\gamma)$ // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 4.— С. 162—171.
28. **Наймарк М. А.** Нормированные кольца.— М.: Наука, 1968.— 664 с.
29. **Wermer J.** Banach Algebras and Several Complex Variables.— New York a. o.: Springer, 1976.— 161 p.
30. **Van Dulst D., Frenk J. B. G.** On Banach algebras, subexponential distributions and renewal theory.— Amsterdam, 1984.— 57 p.— (Preprint; University of Amsterdam, Department of Mathematics; Report 84—20).
31. **Круглов В. М.** Замечание к теории безгранично делимых законов // Теория вероятностей и ее применения.— 1970.— Т. 15, вып. 2.— С. 330—336.
32. **Шилов Г. Е.** О локально аналитических функциях // Успехи мат. наук.— 1966.— Т. 21, вып. 6.— С. 177—182.
33. **Невё Ж.** Математические основы теории вероятностей.— М.: Мир, 1969.— 309 с.
34. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.— 280 с.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ДВУГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЦЕПИ МАРКОВА

В. И. ЛОТОВ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается конечная однородная неразложимая непериодическая цепь Маркова $\{\varkappa_n\}_{n\geqslant 0}$ с множеством состояний $D=\{1, \ldots, m\}$ и матрицей переходных вероятностей $\mathscr{P}=\|p_{jk}\|_{j,k\in D}$. Пусть $\{\xi_{jk}^{(n)}\}$, $n\geqslant 1$, $j, k\in D$ — не зависящее от $\{\varkappa_n\}$ семейство независимых случайных величин, одинаково распределенных при фиксированных j, k. Положим

$$S_0=0,\quad S_n=S_{n-1}+\xi^{(n)}_{\varkappa_{n-1}\varkappa_n},\quad n>0. \tag{1}$$