Автор признателен А. А. Боровкову за внимание к работе, а также А. М. Зубкову за полезные замечания. Автор хотел бы выразить свою искреннюю благодарность С. А. Утеву за моральную поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гончаров В. Л.** Из области комбинаторики // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1944.— Т. 8, № 1.— С. 3—48.
2. **Földes A.** The limit distribution of the length of the longest head-run // Trans. 8-th Prague Conf. on Inform. Theory, Statist. Desis. Func., Rand. Processes.— Prague, 1979.— P. 95—104.
3. **Kusolitsch N.** Runs in Markov chains // Probab. & Statist. Inference.— 1982.— P. 223—230.
4. **Новак С. Ю.** О длине наибольшей серии успехов в марковских цепях // 4-я Междунар. Вильнюс. конф. по теор. вероятн. и мат. статист.— Вильнюс, 1985.— Т. 11.— С. 267—268.
5. **Новак С. Ю.** Об отрезках времени постоянного пребывания однородной марковской цепи в фиксированном подмножестве состояний // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 1.— С. 129—140.
6. **Mory G., Szekely G.** Asymptotic independence of "pure head" stopping times // Statist. & Probab. letters.— 1984.— V. 2, N 1.— P. 5—8.
7. **Анисимов В. В., Черняк А. И.** Предельные теоремы для некоторых редких функционалов на марковских цепях и полумарковских процессах // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1982.— Т. 26.— С. 1—6.
8. **Erdös P., Révész P.** On the length of the longest head-run // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. Topics in Inform. Theory.— 1975.— V. 16.— P. 219—228.
9. **Самарова С. С.** О количестве отрезков времени постоянного пребывания эргодической марковской цепи в фиксированном состоянии // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 260, № 1.— С. 35—40.
10. **Варякойис Л.** О максимуме длин серий «успехов» в счетной марковской цепи // Литовск. мат. сб.— 1986.— Т. 26, № 4.— С. 616—625.
11. **Guibas L. J., Odlyzko A. M.** Long Repetitive Patterns in Random Sequences // Z. Wahr. Gebiet.— 1980.— V. 53.— P. 241—262.
12. **Novak S. Yu.** On the length of the longest increasing run // 1st Congr. Bernoully Soc. on Math. Statist. & Probab.— 1986.— V. 11.— P. 766.
13. **Grill K.** Erdös-Révész Type Bounds for the Length of the longest run from a Stationary Mixing Sequence // Probab. Th. Rel. Fields.— 1987.— V. 75, N 3.— P. 77—85.
14. **Moivre A.** Doctrine of Chances.— L., 1738.
15. **Новак С. Ю.** О времени пребывания однородной марковской цепи в конечном подмножестве состояний // Теория вероятностей и применения.— 1986.— Т. 31, № 2.— С. 412—413.
16. **Бицадзе А. В.** Основы теории аналитических функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1984.— 320 с.
17. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М.: Мир, 1984.— Т. 1.
18. **Боровков А. А.** Теория вероятностей.— М.: Наука, 1986.
19. **Боровков А. А.** Математическая статистика.— М.: Наука, 1984.

О ВЕРОЯТНОСТЯХ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. А. БОРОВКОВ, А. А. МОГУЛЬСКИЙ

---

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс с траекториями из пространства $D(0, 1)$ функций без разрыва второго рода на отрезке $[0, 1]$. Обозначим через Q распределение процесса ξ в $D(0, 1)$ (с σ-алгеброй $\mathscr{B}$, порожденной цилиндрическими множествами, или, что то же самое, борелевскими множествами относительно метрики Скорохода). Явный вид $Q(A)$ даже для «простых» множеств A и «простых» процессов ξ найти, за редким исключением, невозможно. Однако асимптотическое поведение $Q(xA)$ ($f + xA$ означает множество функций $\{f + xg,\ g \in A\}$, $x \in \mathbf{R}^1$) при $x \to \infty$ или $x \to 0$ в целом ряде случаев поддается изучению.

Если $x \to \infty$ и A не содержит окрестности точки $f=0$, то $Q(xA) \to 0$, и задачу отыскания асимптотики $Q(xA)$ называют задачей о *больших уклонениях* для процесса ξ.

Аналогичную задачу для $x \to 0$ и A таких, что $Q(xA) \to 0$, естественно называть задачей о *малых уклонениях* процесса ξ. Это название особенно оправдано, когда величина $|A| = \sup\limits_{f \in A} \|f\|$ ограничена в какой-нибудь естественной норме или полунорме $\|f\|$. В общем случае свойство $Q(xA) \to 0$ при $x \to 0$ может не следовать из неравенства $Q(A) < 1$. Например, если $A = A_a = \{\xi(1) < a\}$, то для непрерывного симметричного распределения $\xi(1)$ будет справедливо $Q(xA) \to Q(A_0) = \mathbf{P}(\xi(1) < 0) = 1/2$. Если $A = \left\{\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \xi(t) < 1\right\}$, то для широкого класса процессов $Q(xA) \to 0$ при $x \to 0$, но скорость убывания будет определяться событием $\left\{\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant \varepsilon} \xi(t) < x\right\}$ при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$. Если $A = \{|\xi(t_0)| < 1\}$, то скорость убывания $Q(xA)$ будет определяться свойствами распределения $\xi(t_0)$ в точке 0. Если же $A = \left\{\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\xi(t)| < 1\right\}$, то для асимптотики $Q(xA)$ существенно поведение $\xi(t)$ во всех точках $t \in [0, 1]$. Эти примеры показывают, что природа поведения $Q(xA)$ при $x \to 0$ может быть очень разной в зависимости от A.

Положение, как мы увидим, становится более однородным, если множество A связано с «существенными двусторонними» ограничениями на траекторию $\xi(t)$ на некотором невырожденном интервале: например, если A имеет вид $\{\|f\| < 1\}$ для некоторой нормы $\|f\|$. В связи с этим *малыми уклонениями процесса* $\xi(t)$ *около точки* f естественно называть также события $\{\|f - \xi\| < x\}$ или более общё — событие $\{\xi \in f + xA\}$ при $x \to 0$. Если $h(f, \xi)$ — плотность распределения процесса $\xi - f$ относительно распределения процесса ξ, то мы можем записать

$$\mathbf{P}(\xi \in f + xA) = \mathbf{E}(h(f, \xi);\ \xi \in A). \tag{1}$$

Если окажется, что на событии $\{\xi \in xA\}$ выполняется $h(f, \xi) = c(f) + o(1)$, то формула (1) перейдет в соотношение

$$\mathbf{P}(\xi \in f + xA) \sim c(f)\mathbf{P}(\xi \in xA). \tag{2}$$

При этом задача о малых уклонениях может сочетаться с задачей о больших уклонениях, если в (1) в качестве f выбрать yf_0, где $y \to \infty$. Задачу отыскания асимптотики вероятности (1) можно сравнить с проблематикой локальных теорем для вещественно- или векторно-значных случайных величин.

В задаче о больших уклонениях прогресс в изучении асимптотики $Q(xA)$, $x \to \infty$, во многом связан с характером предположений относительно природы процесса $\xi(t)$ и множества A. Наибольшего продвижения здесь можно достичь для процессов $\xi(t)$ с независимыми приращениями, марковских и гауссовских процессов и процессов, порожденных последовательными суммами независимых случайных величин и величин, связанных в цепь Маркова. Предположения относительно множеств A являются весьма широкими, если речь идет о «грубой» асимптотике (т. е. об асимптотическом поведении $\ln Q(xA)$ при $x \to \infty$), и весьма частными, если речь идет о самой асимптотике. В этом последнем случае приходится ограничиваться в основном криволинейными полосами

$$A = A(g_-, g_+) = \{f\colon\ g_-(t) \leqslant f(t) \leqslant g_+(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}, \tag{3}$$

где $g_-(t)$, $g_+(t)$ — заданные функции. Обзор результатов в этих направлениях можно найти, например, в [1—3].

Пусть $\xi(t)$ — произвольный непрерывный процесс. Функция уклонений процесса ξ определяется как значение

$$\Lambda(f) = \sup_{\theta \in C^*(0,1)} \{\theta(f) - \ln \mathbf{E}e^{\theta(\xi)}\}, \quad f \in C(0, 1),$$

где $C^*(0, 1)$ — сопряженное пространство всех непрерывных линейных функционалов $\theta = \theta(f)$ на пространстве $C(0, 1)$ непрерывных функций. Тогда для гауссовских процессов $\xi(t)$ и для широкого класса множеств $A \subseteq C(0, 1)$ при $x \to \infty$ ([4, 5])

$$\ln Q(xA) \sim -x^2 \inf_{f \in A} \Lambda(f). \tag{4}$$

Класс множеств A в (4) определяется условием

$$\inf_{f \in A_0} \Lambda(f) = \inf_{f \in \bar{A}} \Lambda(f), \tag{5}$$

где A_0 и $\bar{A}$ — соответственно внутренность и замыкание множества A. В частности (см. [1]), если $\xi(t) = w(t)$ есть стандартный винеровский процесс, то для широкого класса множеств A

$$\ln W(xA) \sim -x^2 \inf_{f \in A \cap C^1} \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(t))^2 \, dt, \tag{6}$$

где W — распределение $w(t)$, C^1 — класс абсолютно непрерывных функций $f = f(t)$, $f(0) = 0$.

Как показывают примеры, имеет место и более общий факт. Если $\xi(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, распределения которого удовлетворяют условиям Крамера, то

$$\ln \mathbf{P}(\xi \in xA) \sim -\inf_{A \cap C^1} \int_0^1 \Lambda(xf'(t)) \, dt, \tag{7}$$

где $\Lambda(\alpha)$ — функция уклонений случайной величины $\xi(1)$. Условия на A в (7) аналогичны (5).

Несколько труднее формулируются результаты для марковских процессов (см. [2]) и для последовательностей $s_n(t)$ процессов, порожденных суммами $S_0 = 0, S_1, \ldots, S_n$ случайных величин (здесь результат зависит также от отношения x/n; при определенных условиях $\mathbf{P}(s_n \in \in xA)$ ведет себя так же, как $W(xA)$, см. [1]).

Вычисление точной асимптотики $Q(xA)$ при $x \to \infty$, даже для так называемых граничных задач (см. [3]) требует привлечения более трудоемких технических средств, вид самих результатов существенно усложняется (см. [3, 6, 7]).

При описании малых уклонений картина получается несколько иная, хотя в некоторых отношениях аналогия сохраняется:

1. Как и для больших уклонений, оценивать асимптотику $Q(f + xA)$ при $x \to 0$ оказывается проще для процессов (или последовательностей) с независимыми приращениями.

2. Основной класс множеств, для которых это удается сделать, состоит из множеств A типа «полос» (3). В ряде случаев удается оценить $Q(f + xA)$ и для сфер $\{g\colon \|g - f\|_p < x\}$, где $\|f\|_p$ — норма в L_p.

3. Грубую асимптотику $Q(f + xA)$, как правило, удается получать при более широких предположениях.

Отличия малых уклонений от больших связаны с иной природой явлений, обусловливающих «главный вклад» траекторий процесса в xA при $x \to 0$ (условие Крамера, например, здесь перестает играть определяющую роль).

Для винеровского процесса и для множества $A = A(g_-, g_+)$ асимптотика $\ln W(xA)$ при $x \to 0$ имеет вид $-cx^{-2}$, т. е. носит характер инверсии к (6) (см. [8]). В работах [8—12] изучены малые уклонения произвольного гауссовского процесса (как случайного элемента гильбертова пространства). Тут асимптотика $\ln Q(xA)$ при $x \to 0$ может быть самой разной. Например, если собственные значения μ_n ковариационного оператора S, отвечающего процессу ξ, имеют кратность 1 и ведут себя как $\lambda n^{-\alpha}$, $\alpha > 1$, то для множества $A = \{f\colon \|f\| < 1\}$ при $x \to 0$ выполняется (см. [8])

$$Q(xA) \sim -cx^{2/(1-\alpha)}.$$

Как и в теории больших уклонений поведение $Q(f+xA)$ при $x \to 0$ удается оценить и для целого ряда других процессов $\xi(t)$ (отличных от названных выше), например, для броуновского моста $\overset{\circ}{w}(t) = w(t) - tw(1)$, для эмпирических процессов $F_n(t) - F(t)$, где $F_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, отвечающая функции распределения $F(t)$ и др.

Дальнейшее изложение разделено на следующие параграфы. В § 2 излагаются результаты о малых уклонениях винеровского и устойчивых процессов. В § 3 приводятся аналогичные результаты для процессов, порожденных суммами независимых случайных величин. Там же изучаются малые уклонения в принципе инвариантности, которые позволяют в ряде случаев сводить результаты § 2, 3 одни к другим. Эти результаты представляют и самостоятельный интерес. Названные параграфы содержат также некоторые приложения полученных результатов, например, для получения закона повторного логарифма в форме Чжуна для винеровского процесса, а также для последовательных сумм и для эмпирического процесса. Доказательства некоторых утверждений (теорем 3, 11) как технически наиболее трудных вынесены в § 4, 5. Вопрос об асимптотике вероятностей малых уклонений для других типов (не названных выше) процессов остается открытым.

Результаты работы докладывались на конференции в Бакуриане в марте 1986 г.

§ 2. МАЛЫЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА И УСТОЙЧИВЫХ ПРОЦЕССОВ

Можно считать типичными две скорости убывания $W(xA)$ при $x \to 0$. Первая связана, грубо говоря, с ситуацией, когда принадлежность множеству A накладывает на траекторию $w(t)$ лишь локальные ограничения. Так будет, например, для множеств

$$A_1 = \left\{f\colon \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} f(t) < 1\right\}, \quad A_2 = \{f\colon |f(1)| < 1\}.$$

Тогда

$$W(xA_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \sim x\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$W(xA_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \sim x\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

так что сходимость к 0 этих вероятностей обусловливается соответственно ограничениями на траекторию $w(t)$ в окрестностях точек $t = 0$ и $t = 1$. Рассматривая множества

$$A = \{f\colon |f(t_1)| \leqslant c_1, \ldots, |f(t_k)| \leqslant c_k\},$$

где $0 \leqslant t_1 < t_2 \ldots < t_k \leqslant 1$, $c_1 > 0, \ldots, c_k > 0$, мы можем получать другие степенные скорости убывания $W(xA)$, например, cx^k. Качественно картина сохранится и для асимптотического поведения $W(f+xA)$ для широкого класса функций f.

Асимптотика $W(xA)$ будет совершенно иной, если в A входят лишь функции, ограниченные в некоторой естественной норме на каком-нибудь интервале (u, v); $0 \leqslant u < v \leqslant 1$.

Для криволинейной полосы $A(g_-, g_+)$ (см. (3)) справедлива

Теорема 1. *Пусть* $g_-(0) < 0 < g_+(0)$, $g_-(t) < g_+(t)$ *при* $t \in [0, 1]$; $\operatorname*{var}_{[0,1]} g_\pm(t) < \infty$; *для некоторой непрерывной возрастающей функции* $\alpha(t)$,

$\alpha(0)=0$, *выполняется* $\delta_\pm(t)\leqslant\alpha(t)\sqrt{t}$ *при* $0\leqslant t\leqslant 1$, *где* $\delta_\pm(t)$ — *модули непрерывности функций* $g_\pm$. *Тогда при* $x\to 0$

$$\mathbf{P}(w\in xA(g_-, g_+)) = W(xA(g_-, g_+))\sim$$
$$\sim\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{g_+(1)-g_-(1)}{g_+(0)-g_-(0)}}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{g_+(0)+g_-(0)}{g_+(0)-g_-(0)}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\pi^2}{8x^2}\int_0^1 (g_+(t)-g_-(t))^{-2}\,dt\right\}.$$

Теорема 1 доказана в [13].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и функция* $f\in C(0, 1)$ *удовлетворяет условиям* $f'\in L_2(0, 1)$, $f''\in L_1(0, 1)$, $f(0)=0$, $|f'(1)|<\infty$. *Тогда при* $x\to 0$

$$W(f+xA(g_-, g_+))\sim e^{-\frac{1}{2}\int_0^1 (f'(t))^2dt}\,W(xA(g_-, g_+)). \tag{8}$$

В [14] приводится асимптотика для левой части формулы (8) в предположениях $f=0$, $g_-=-g_+$, производная g_+' имеет ограниченную вариацию. В [15] эта формула анонсирована при более широких условиях на f и более узких на $g_\pm$, чем в теореме 2 (там предполагается, что функции f, $g_\pm$ имеют производные, интегрируемые с квадратом). Так как доказательство результатов [15] еще не опубликовано, а доказательство теоремы 2 весьма просто, то мы это доказательство ниже приводим (не претендуя при этом на максимально широкие условия на f).

Из теоремы 1 получаем, что для множества

$$A=\{f\colon \|f\|_C<1\}, \tag{9}$$

где $\|f\|_C=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)|$ — равномерная норма, имеет место соотношение

$$W(xA)\sim\frac{4}{\pi}\exp\left\{-\frac{\pi^2}{2x^2}\right\}. \tag{10}$$

Нетрудно понять, почему характер убывания $W(xA)$ имеет вид (10). Для множества (9) справедливо

$$\mathbf{P}(w\in xA)=\mathbf{P}\left(\left|\frac{w(t)}{x}\right|<1,\ 0\leqslant t\leqslant 1\right)=\mathbf{P}(|w(t)|<1,\ 0\leqslant t\leqslant x^{-2})$$

(в последнем равенстве мы воспользовались известным свойством винеровского процесса: для любого $T>0$ распределения в $C(0, 1)$ процессов $w(t)$ и $w(Tt)/\sqrt{T}$ совпадают). Но ясно, что $\mathbf{P}_T\equiv\mathbf{P}(|w(t)|<1,\ 0<t\leqslant T)$ имеет экспоненциальный по T характер убывания (двусторонние экспоненциальные оценки для $\mathbf{P}_T$ очевидны). Полагая $T=x^{-2}$, мы получаем убывание вида $\exp(-cx^{-2})$.

Эти простые соображения можно сделать и более точными. Рассмотрим однородную полугруппу операторов

$$R_T\varphi(x)\equiv\mathbf{E}(\varphi(w(T)+x);\ |w(t)+x|<1,\ 0\leqslant t\leqslant T),$$

определенную в $L_2(-1, 1)$. Тогда $\mathbf{P}_T$ представляется в виде $R_T\varphi_0(0)$, где $\varphi_0(x)=1$ при $-1\leqslant x\leqslant 1$. Поскольку операторы R_T являются самосопряженными и вполне непрерывными, то по теореме Гильберта — Шмидта (см., например, [16])

$$R_T\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k T}\varphi_k(x)(\varphi_k, \varphi), \tag{11}$$

где φ_k — собственные функции, $e^{-\lambda_k}$ — собственные числа оператора R_1. Максимальное собственное число $e^{-\lambda_1}$ имеет кратность 1 и равно $e^{-\pi^2/2}$. $\varphi_1(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$, поэтому из (11) следует при $T\to\infty$

$$R_T\varphi(x)\sim e^{-\lambda_1 T}\varphi_1(x)(\varphi_1,\varphi). \tag{12}$$

Для $\varphi=\varphi_0$ получаем

$$\mathbf{P}_T\sim\frac{4}{\pi}e^{-\frac{\pi^2}{2}T}=\frac{4}{\pi}e^{-\frac{\pi^2}{2}x^{-2}}.$$

Это соотношение можно получить и из хорошо известных явных формул распределения $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|w(t)|$ (см., например, [7]).

Пусть теперь $A=\{f:\ \|f\|_p<1\}$, где норму в L_p для $p\geqslant 1$ определим как

$$\|f\|_p=\left(\int_0^1|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}. \tag{13}$$

Заметим, что при $0<p<1$ функционал (13) не является нормой.

Теорема 3. *Для $p>0$ при $x\to 0$*

$$\mathbf{P}(w\in xA)\sim C\exp\{-cx^{-2}\}, \tag{14}$$

где константы $C=C(p)>0$ и $c=c(p)>0$ зависят только от p.

Теорема 4. *Пусть $p>1$, функция $f\in C(0,1)$ такова, что $f(0)=0$, $|f'(1)|<\infty$, $f'\in L_2(0,1)$, $f''\in L_q(0,1)$, где $1/p+1/q=1$. Тогда при $x\to 0$*

$$W(f+xA)\sim e^{-\frac{1}{2}\int_0^1|f'(t)|^2dt}\,W(xA).$$

Единообразие асимптотического поведения $W(xA)$ при $x\to 0$ в условиях теорем 1, 3 при существенном различии норм $\|f\|_C$, $\|f\|_p$ вполне объяснимо. С одной стороны, $\|f\|_p\leqslant\|f\|_C$, с другой — неравенство $\|f\|_p\leqslant C$ означает, что $\sup\limits_{t\in B}|f(t)|\leqslant 2C$ на множестве $B\subseteq[0,1]$ меры большей, чем $1-2^{-p}$.

Доказательство теорем 2, 4 приведем ниже в настоящем параграфе. Доказательство теоремы 3 отнесено в § 4, где, в частности, приводятся уравнения для констант C, c и рассмотрены два примера ($p=1$ и $p=2$), в которых указанные константы явно вычислены. Здесь мы приведем лишь схему доказательства теоремы 3, позволяющую, однако, понять существо дела. Для этого рассмотрим однородную полугруппу операторов

$$R_T\varphi(x)=\mathbf{E}\left(e^{-\int_0^T|w(t)+x|^pdt}\varphi(w(T)+x)\right), \tag{15}$$

действующую в $L_2(-\infty,\infty)$. Очевидно, что операторы R_T самосопряженные; можно доказать, что они вполне непрерывные, поэтому по теореме Гильберта — Шмидта справедливы соотношения (11), (12). Получим далее с помощью полугруппы R_T представление для преобразования Лапласа $\varphi(\lambda)=\mathbf{E}e^{\lambda\eta}$ распределения случайной величины $\eta\equiv\|w\|_p^p=\int_0^1|w(t)|^p\,dt$. С помощью замены $t=u\lambda^{-\alpha}$, $\alpha=2/(2+p)$ получаем, что

$$\lambda\eta\underset{\mathbf{P}}{=}\int_0^{\lambda^\alpha}|w(t)|^p\,dt,$$

т. е.

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{-\int\limits_0^{\lambda^\alpha} |w(t)|\,dt} = R_{\lambda^\alpha}\varphi_0(0),$$

где $\varphi_0(x) = 1$. Дополнительные трудности превносит то обстоятельство, что φ_0 не принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$. Однако можно показать, что для φ_0 тоже справедлива формула (12), что позволяет утверждать, что

$$\varphi(\lambda) \sim e^{-\lambda^\alpha \cdot \lambda_1}\varphi_1(0)(\varphi_1, \varphi_0). \tag{16}$$

Применяя далее (формально) к $\varphi(\lambda)$ формулу обращения и метод Лапласа, получаем, что плотность $f(x)$ случайной величины η ведет себя при $x \to 0$ как

$$f(x) \sim Ax^{-\frac{2+p}{p}} \exp\left\{-ax^{-\frac{2}{p}}\right\},$$

а плотность $\tilde{f}(x)$ случайной величины $\eta^{1/p} = \|w\|_p$ ведет себя при $x \to 0$ как

$$\tilde{f}(x) = px^{p-1}f(x^p) \sim Bx^{-3}\exp\{-bx^{-2}\}.$$

Из последнего, очевидно, получаем требуемое соотношение

$$\mathbf{P}(\|w\|_p < x) = \int\limits_0^x \tilde{f}(u)\,du \sim C\exp\{-cx^{-2}\}.$$

Доказательство теоремы 2. Известно (см. [17]), что для функции $f \in C(0, 1)$, удовлетворяющей условию $f(0) = 0$, $f' \in L_2(0, 1)$ распределение процесса $w - f$ абсолютно непрерывно относительно распределения w с плотностью

$$h(f, w) = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (f'(t))^2 dt + \int\limits_0^1 f'(t)\,dw(t)}.$$

Поэтому в силу (1)

$$\mathbf{P}(w - f \in A) = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (f'(t))^2 dt}\,\mathbf{E}\left(e^{\int\limits_0^1 f'(t)\,dw(t)};\ w \in A\right) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (f'(t))^2 dt}\,\mathbf{E}\left(e^{w(1)f'(1) - \int\limits_0^1 w(t)f''(t)\,dt};\ w \in A\right). \tag{17}$$

В условиях теоремы 2, когда $A = xA(g_-, g_+)$, $x \to 0$, очевидно, что функция, стоящая под знаком математического ожидания, ограничена и стремится к 1. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. При $w \in xA$ в силу неравенства Гельдера выполняется

$$\left|\int\limits_0^1 w(t)f''(t)\,dt\right| \leqslant \|w\|_p \cdot \|f''\|_q \leqslant Cx\|f''\|_q \to 0, \tag{18}$$

поэтому (см. (17)) для доказательства теоремы 4 достаточно доказать, что для любого $N < \infty$

$$\mathbf{E}(e^{\pm N|w(1)|};\ w \in xA) \sim \mathbf{P}(w \in xA). \tag{19}$$

Поскольку для любого $\nu > 0$

$$\mathbf{E}(e^{N|w(1)|};\ w \in xA) \leqslant e^{\nu}\mathbf{P}(w \in xA) +$$
$$+ \mathbf{E}(e^{N|w(1)|};\ w \in xA,\ N|w(1)| \geqslant \nu),$$

для оценки сверху в (19) достаточно доказать, что

$$\mathbf{E}(e^{N|w(1)|};\ w \in xA,\ N|w(1)| \geqslant \nu) = o(\mathbf{P}(w \in xA)). \tag{20}$$

Соотношение (20) является достаточным и для получения оценки снизу в (19), поскольку

$$\mathbf{E}(\mathrm{e}^{-N|w(1)|};\ w\in xA)\geqslant \mathrm{e}^{-\nu}\mathbf{P}(w\in xA,\ N|w(1)|\leqslant\nu)\geqslant$$
$$\geqslant \mathrm{e}^{-\nu}[\mathbf{P}(w\in xA)-\mathbf{P}(w\in xA,\ N|w(1)|\geqslant\nu)].$$

Докажем соотношение (20), в котором для простоты будем считать $N=1$, $\nu=1$. Легко видеть, что

$$\mathbf{E}(\mathrm{e}^{|w(1)|};\ \|w\|_p<x,\ |w(1)|\geqslant 1)=$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{j+1}\mathbf{P}(\|w\|_p<x,\ j+1>|w(1)|\geqslant j)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{j+1}\mathbf{P}(\|w\|_p<x,\ |w(1)|\geqslant j).$$

Для оценки каждого слагаемого в последней сумме докажем, что для $t=x^p2^pj^{-p}$

$$\{\|w\|_p<x,\ |w(1)|\geqslant j\}\subseteq\left\{\|w\|_p<x,\ \sup_{1-t\leqslant u\leqslant 1}|w(u)-w(t)|>j/2\right\}. \quad (21)$$

В последнем можно убедиться так: если $\sup\limits_{1-t\leqslant u\leqslant 1}|w(u)-w(t)|\leqslant j/2$, то на отрезке $[1-t,\ 1]$ траектория $|w(u)|$ будет строго больше, чем $j/2$, и, стало быть,

$$\int_{1-t}^{1}|w(u)|^p\,du>(j/2)^p\,t>x^p,$$

что невозможно. Из (21) следует, что

$$\mathbf{P}(\|w\|_p<x,\ |w(1)|\geqslant j)\leqslant\mathbf{P}\left(\int_0^t|w(u)|^p\,du<x^p,\ \sup_{1-t\leqslant u\leqslant 1}|w(u)-w(t)|\geqslant j/2\right)=$$
$$=\mathbf{P}\left(\int_0^t|w(u)|^p\,du<x^p\right)\cdot\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|w(u)|\geqslant j/2\right)\equiv A\cdot B.$$

Сделав замену $u=(1-t)y$, получаем

$$A=\mathbf{P}\left(\left(\int_0^{1-t}|w(u)|^p\,du\right)^{1/p}\leqslant\frac{x}{(1-t)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}}\right),$$

поэтому, в силу теоремы 3,

$$A\leqslant C\exp\left\{-cx^{-2}(1-t)^{\left(1+\frac{2}{p}\right)}\right\}.$$

Для оценки B заметим, что

$$B=\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\frac{|w(u)|}{\sqrt{t}}\geqslant\frac{j}{2\sqrt{t}}\right)\leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{j^2}{2t}}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}(\mathrm{e}^{|w(1)|};\ \|w\|_p<x,\ |w(1)|\geqslant 1)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{j+1}C\mathrm{e}^{-cx^{-2}(1-t)^{(1+2/p)}-j^2/2t}, \quad (22)$$

где $t=(2x)^pj^{-p}$. Очевидно, что сумма в (22) есть $o\left(e^{-cx^{-2}}\right)$, так что соотношение (20), а вместе с ним и теорема 4 доказаны.

При переходе к грубой асимптотике в теореме 2, т. е. асимптотике $\ln W(j+xA(g_-,\ g_+))$, ограничения на функции f, g_-, g_+ можно существенно ослабить.

Теорема 5. *Пусть функции* f, g_-, $g_+ \in C(0, 1)$ *удовлетворяют условиям*: $f(0)=0$, $g_-(0)<0<g_+(0)$, $g_-(t)<g_+(t)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Тогда при* $x \to 0$

$$\ln \mathbf{P}(w \in f + xA(g_-, g_+)) \sim -\frac{\pi^2}{8x^2}\int_0^1 (g_+(t) - g_-(t))^{-2}\,dt.$$

Теорема 5 при $f \equiv 0$ доказана в [18]. Доказательство при $f \neq 0$ практически не отличается от доказательства при $f=0$, и по этой причине мы его здесь не приводим.

Теорема 3 (и даже более слабый ее вариант) позволяют доказать закон повторного логарифма в форме Чжуна для винеровского процесса в L_p, $p \geqslant 1$.

Теорема 6. *Для произвольного* $p \geqslant 1$ *с вероятностью* 1

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\left(\int_0^t |w(u)|^p\,du\right)^{1/p}}{\sqrt{t}} \sqrt{\ln\ln t} = \sqrt{c}, \tag{23}$$

где константа $c=c(p)>0$ *определена в теореме* 3.

Доказательство теоремы 6 непосредственно следует из общей теоремы в [19] и теоремы 3.

Закон Чжуна был известен ранее для равномерной нормы (см. [20]): *с вероятностью* 1 *выполняется соотношение*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t} |w(u)|}{\sqrt{t}} \sqrt{\ln\ln t} = \frac{\pi}{\sqrt{8}}. \tag{24}$$

Утверждения (23) и (24) справедливы и для броуновского моста $\overset{\circ}{w}_t(u) = w(u) - uw(t)$, $0 \leqslant u \leqslant t$. В этом нетрудно убедиться, если заметить, что грубая теорема о малых уклонениях для броуновского моста имеет в точности такой же вид, что и для винеровского процесса (для норм $\|f\|_C$ и $\|f\|_p$).

Можно указать еще один класс процессов, для которых справедливы утверждения, аналогичные теореме 5. Это класс устойчивых процессов $\xi = \xi(t)$ с параметром α, $0<\alpha\leqslant 2$, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{P}(\xi(t)<x) = \mathbf{P}(\xi(1)<xt^{-1/\alpha})$$

(так называемые *строго устойчивые процессы*).

Теорема 7. *Пусть* $0<\mathbf{P}(\xi(1)<0)<1$. *Если* $g_\pm \in C(0, 1)$, $g_-(0) < 0 < g_+(0)$, $g_-(t)<g_+(t)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *то при* $x \to 0$

$$\ln \mathbf{P}(\xi \in xA(g_-, g_+)) \sim -cx^{-\alpha}\int_0^1 (g_+(t) - g_-(t))^{-\alpha}\,dt,$$

где константа $c>0$ *зависит только от распределения* $\xi(1)$.

Теорема 7 доказана в [18].

Аналогично предыдущему, из теоремы 7 вытекает закон повторного логарифма в форме Чжуна для строго устойчивых процессов (см. [20]): *с вероятностью* 1 *выполняется соотношение*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t} |\xi(u)|}{t^{1/\alpha}} (\ln\ln t)^{1/\alpha} = c^{1/\alpha},$$

где постоянная c *та же, что и в теореме* 7.

§ 3. МАЛЫЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ СУММАМИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $\xi_{1,n}, \ldots, \xi_{n,n}$; $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность серий случайных величин,

$$S_{k,n} = \sum_{j=1}^{k} \xi_{j,n}, \quad \mathbf{E}\xi_{j,n} = 0, \quad b_{j,n}^2 = \mathrm{D}\xi_{j,n} < \infty,$$

$$B_n^2 = \mathrm{D}S_{n,n} = \sum_{j=1}^{n} b_{j,n}^2, \quad b_{0,n}^2 = S_{0,n} = 0.$$

Образуем на отрезке $[0, 1]$ случайную ломаную $s_n(t)$ с узлами в точках $(t_k, S_{k,n}B_n^{-1})$, $k = 0, 1, \ldots, n$, где

$$t_0 = 0, \quad t_k = B_n^{-2} \sum_{j=1}^{k} b_{j,n}^2,$$

так что в точках $t = t_0, t_1, \ldots, t_n$ процесс $s_n(t)$ принимает значения $s_n(t_k) = S_{k,n}B_n^{-1}$, и между точками t_k, t_{k+1} меняется линейно.

Если при некотором $r > 2$

$$L_r \equiv B_n^{-2} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,|\xi_{j,n}|^r \to 0$$

при $n \to \infty$, то в соответствии с принципом инвариантности для любого фиксированного множества A из борелевской σ-алгебры в $C(0, 1)$ такого, что $W(\partial A) = 0$ (∂A — граница A) имеет место сходимость

$$\mathbf{P}(s_n \in A) \to \mathbf{P}(w \in A).$$

Используя известные оценки скорости сходимости в этом соотношении, можно сводить задачу изучения асимптотики $\mathbf{P}(s_n \in xA)$ к задаче о поведении $\mathbf{P}(w \in xA)$ (и наоборот) при достаточно медленно убывающих или растущих последовательностях $x = x(n)$. Однако получающийся при этом интервал допустимых последовательностей удовлетворительным назвать нельзя. Более продвинутые (но тоже не окончательные) результаты получаются, если использовать наилучшую возможную потраекторную близость $s_n(t)$ и $w(t)$.

Пусть $z = z(n)$ есть некоторая сходящаяся к 0 последовательность. По аналогии с терминологией для больших уклонений (см. [1]) мы будем говорить, что имеет место (f, A, z)-*принцип инвариантности в области малых уклонений*, если

$$\mathbf{P}(s_n \in f + xA) \sim W(f + xA) \tag{25}$$

для любого $x \to 0$, $x \gg z$ (будем писать $x \gg z$, если $z = o(x)$).

При изучении условий, при которых справедлив (f, A, z)-принцип инвариантности, мы будем исходить из того, что множество A при подходящем f относится к одному из двух типов (см. § 2):

I. $W(f + xA) \geqslant Cx^{\beta}$ при $C > 0, \beta > 0, x \to 0$;

II. $W(f+xA) \geqslant Ce^{-\alpha x^{-2}}$ при $C > 0, \alpha > 0, x \to 0$.

Второе условие, очевидно, всегда выполнено, если множество A содержит какую-нибудь окрестность точки $g = 0$ в норме $\|f\|_C$ или $\|f\|_p$, а f — достаточно гладкая функция.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия*:

1) $W([\partial(f + xA)]^{\delta}) = o(W(f + xA))$ при $\delta = o(x^{\gamma})$, *если* $x \to 0$, *где* $\gamma = 1$ *в случае* I; $\gamma = 3$ *в случае* II ($[A]^{\delta}$ — δ-*окрестность множества* A, ∂A — *граница множества* A *в равномерной норме*);

2) (L): $L_r \to 0$ *при некотором* $r > 2$ *или*
(C): $B_n \to \infty$ *при некотором* $h > 0$

$$h\mathbf{E}\,|\,\xi_{j,n}|^3 e^{h|\xi_{j,n}|} \leqslant \mathbf{E}\,|\,\xi_{j,n}|^2, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда справедлив (f, A, z)*-принцип инвариантности в области малых уклонений, где последовательность* $z = z(n)$ *для разных комбинаций условий* I, II (L), (C) *определяется так*:

	(L)	(C)
I	$z = L_r^{1/r+\beta}$	$z = B_n^{-1} \ln B_n$
II	$z = \sqrt{\ln L_r}$	$z = B_n^{-1/5}$

Доказательство теоремы по сути есть следствие оценок А. И. Саханенко [21] возможной близости траекторий $s_n(t)$ и $w(t)$, заданных на одном вероятностном пространстве. Оно близко к доказательству аналогичных утверждений для вероятностей больших уклонений [1]. Согласно этим оценкам процессы $s_n(t)$ и $w(t)$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что

$$\mathbf{P}(\|s_n - w\| \geqslant x) \leqslant C_r \frac{L_2}{x^2} \quad \text{для всех} \quad r > 2. \tag{26}$$

Если же выполнено условие (C), то

$$\mathbf{P}(\|s_n - w\| \geqslant x) \leqslant (1 + hB_n)\, e^{-chxB_n}. \tag{27}$$

Так как доказательства в случаях (L), (C) довольно близки, то мы остановимся лишь на случае (C). Примем для простоты $h = 1$, $f \equiv 0$ (для произвольных h и f все рассуждения сохраняются). Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(s_n \in xA) &\leqslant (1 + B_n)\, e^{-c\delta B_n} + \mathbf{P}(s_n \in xA, \|s_n - w\| < \delta) \leqslant \\ &\leqslant (1 + B_n)\, e^{-c\delta B_n} + \mathbf{P}\big(w \in xA \cup [\partial(xA)]^\delta\big) \leqslant \\ &\leqslant (1 + B_n)\, e^{-c\delta B_n} + \mathbf{P}(w \in xA) + \mathbf{P}\big(w \in [\partial(xA)]^\delta\big).\end{aligned} \tag{28}$$

Рассмотрим сначала случай I. Первое слагаемое в правой части (28) не превосходит $2B_n e^{-c\delta B_n}$, второе — не меньше, чем cx^β. Поэтому при $x \gg \delta = C_1 B_n^{-1} \ln B_n$ первое слагаемое при подходящем C_1 будет пренебрежимо мало по сравнению со вторым. Последнее слагаемое в (28) в силу условия 1) является при $x \gg \delta$ пренебрежимо мало по сравнению со вторым. Итак, мы получили, что

$$\mathbf{P}(s_n \in xA) \leqslant \mathbf{P}(w \in xA)\,(1 + o(1))$$

при $x \gg B_n^{-1} \ln B_n$. С другой стороны, при тех же условиях

$$\begin{aligned}W(xA) &\leqslant W\big(xA \setminus [\partial(xA)]^\delta\big) + W\big([\partial(xA)]^\delta\big) \leqslant (1 + B_n)\, e^{-c\delta B_n} + \\ &+ \mathbf{P}\big(w \in xA \setminus [\partial(xA)]^\delta\big) + W\big([\partial(xA)]^\delta\big) \leqslant (1 + B_n)\, e^{-c\delta B_n} + \\ &+ \mathbf{P}(s_n \in xA) + W\big([\partial(xA)]^\delta\big).\end{aligned}$$

Итак, мы показали, что в случае I, (C) справедлив (j, A, z)-принцип инвариантности при $z = B_n^{-1} \ln B_n$.

Пусть теперь выполнено условие II. В силу условия 1) последнее слагаемое в правой части (28) пренебрежимо мало по сравнению со вторым слагаемым при $x \gg \delta^{1/3}$. Так как первое слагаемое в правой части (28) равно $(1 + B_n)\, e^{-c\delta B_n}$, а второе не меньше, чем $Ce^{-\alpha x^{-2}}$, то решая уравнение

$$B_n e^{-c\delta B_n} = e^{-\alpha\delta^{-2/3}},$$

получаем, что первое слагаемое также будет пренебрежимо мало при $\delta = B_n^{-1/5}$. Повторяя эти рассуждения для оценки в другую сторону, получим, что в условиях II, (C) справедлив (f, A, z)-принцип инвариантности при $z = B_n^{-1/5}$.

Случаи I, (L) и II, (L) рассматриваются аналогично. Теорема 8 доказана.

Для одинаково распределенных слагаемых ξ_k, не зависящих от n, имеем $B_n = \sigma\sqrt{n}$, и параметр z в условиях I, (C) превращается в $n^{-1/10}$, в условиях II, (C) — в $\ln n/\sqrt{n}$.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 8 видно, что утверждение этой теоремы сохранится для последовательности любых процессов $\xi_n(t)$, удовлетворяющих неравенствам (26) или (27). В частности, это может быть последовательность $\xi_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, процессов с независимыми приращениями, удовлетворяющая (26) или (27).

Следует сразу отметить, что в связи с тем, что при доказательстве теоремы 8 мы использовали методы, не адекватные природе явлений (вероятности малых уклонений мало связаны с условиями (L) и (C)), то результаты теоремы 8, если иметь в виду параметр z, не являются окончательными. Это можно проиллюстрировать следующим утверждением, в котором приведены условия, более тесно связанные с существом дела.

Теорема 9. *Пусть ξ_k одинаково распределены, имеют ограниченную плотность распределения $p(t)$, $g_\pm(t) \equiv g_\pm$ не зависят от t. Тогда для $x \to 0$, $x\sqrt{n} \to \infty$*

$$\mathbf{P}(s_n \in xA(g_-, g_+)) \sim \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{g_+ + g_-}{g_+ - g_-}\right)\lambda^n(x\sqrt{n}),$$

где $\lambda(a)$ — максимальное собственное число оператора R_a в $L_2(-1, 1)$:

$$R_a\psi(x) = a\int_{-1}^{1} p(a(y-x))\,\psi(y)\,dy.$$

При $a \to \infty$ справедлива оценка

$$\ln\lambda(a) = -\frac{\pi^2}{8\alpha^2}\sigma^2 + o\left(\frac{1}{a^2}\right),$$

где $\sigma^2 = D\xi_1$.

Теорема 9 доказана в [22]. Из нее следует, что в тех случаях, когда справедливо разложение

$$\ln\lambda(a) = -\frac{\pi^2}{8a^2}\sigma^2 + \frac{c}{a^3} + o(a^{-3}), \tag{29}$$

можно утверждать, что

$$\mathbf{P}(\|s_n\| < x) \sim \lambda^n(x\sqrt{n}) \sim$$
$$\sim \exp\left\{-\frac{\pi^2}{2x^2}\sigma^2 + \frac{c}{x^3\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{x^3\sqrt{n}}\right)\right\} \sim \mathbf{P}(\|w\| < x)$$

при $x^3\sqrt{n} \to 0$, т. е. при $x \gg n^{-1/6}$. Другими словами, для рассмотренных множеств A при выполнении (29) имеет место $(0, A, n^{-1/6})$-принцип инвариантности. Вопрос об условиях, при которых имеет место (29) (это трудная задача), остается открытым. Отметим еще, что для центрированного показательного распределения в формальном разложении для $\lambda(a)$ в (29) число c не равно 0; это говорит о том, что (f, A, z)-принцип инвариантности при $z \ll B_n^{-1/3}$ для множеств вида $A = A(g_-, g_+)$, вообще говоря, не имеет место.

Для других множеств A теорема 8 также не дает результатов, близких к оптимальным. Например, если $\mathbf{E}\xi_k=0$, $\mathbf{D}\xi_k=1$ и существует ограниченная плотность распределения ξ_1, то для множеств вида

$$A=\{f\colon\ |f(1)|<1\}\tag{30}$$

для всех $x=x(n)\to 0$ справедливо

$$\mathbf{P}(s_n\in xA)=\mathbf{P}(|s_n(1)|<x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\sim W(xA).\tag{31}$$

Если же $x\gg n^{-1/2}$ и не предполагается ограниченная плотность, то (31) можно обеспечить условием $\mathbf{E}|\xi_1|^3<\infty$ (т. е. условием на «хвост» распределения), используя известную оценку $c/\sqrt{n}$ в центральной предельной теореме. Таким образом, при выполнении одного из названных выше условий для множеств A вида (30) имеет место $(0,\ A,\ 1/\sqrt{n})$-принцип инвариантности. Нетрудно понять, что $(f,\ A,\ z)$-принцип инвариантности при $z\ll 1/\sqrt{n}$, вообще говоря, невозможен. В этом примере проблематика малых уклонений непосредственно смыкается с локальной предельной теоремой, а разнородность условий (на плотность и на моменты), обеспечивающих выполнение (31), носит тот же характер, что и в теоремах 8, 9.

Аналогичным образом, для множеств A вида

$$A=\left\{f\colon\ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}f(t)<1\right\}\tag{32}$$

справедливы неравенства (см. [23])

$$\left|\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}s_n(t)<1\right)-\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}W(t)<1\right)\right|\leqslant\frac{c}{1+|x|^3}\frac{R_n}{B_n},$$

где $R_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{E}|\xi_{k,n}|^3$. Таким образом, для множеств А вида (32) справедлив $(0,\ A,\ R_nB_n^{-1})$-принцип инвариантности. В случае, когда распределение $\xi_{k,n}$ не зависит от k и n, $\mathbf{D}\xi_1>0$, мы получаем $R_nB_n^{-1}=c/\sqrt{n}$.

Аналогично теореме 8, можно рассмотреть задачу об $(f,\ A,\ z)$-грубом принципе инвариантности в области малых уклонений, когда

$$\ln\mathbf{P}(s_n\in f+xA)\sim\ln W(f+xA)$$

при $x\to 0$, $x\gg z$.

Результаты при этом будут теми же, что в теореме 8, с той лишь разницей, что условие 1) теоремы 8 можно заменить более слабым условием: при $\delta=o(x^\gamma)$

$$\ln W([\partial(f+xA)]^\delta)\leqslant\ln W(f+xA)(1+o(1)).$$

При этом очевидно, что замечание 1 к теореме 8 сохраняет силу. Для сравнения, как и в теореме 8, можно привести следующие утверждения для конкретных множеств.

Теорема 10. *Пусть* $\xi_{k,n}=\xi_k$ *одинаково распределены и не зависят от* n, $\mathbf{E}\xi_1=0$, $\mathbf{E}\xi_1^2=1$, $x\to 0$, $x\sqrt{n}\to\infty$. *Тогда для множеств* $A(g_-,\ g_+)$ *с* $g_\pm\in C(0,\ 1)$, $g_-(0)<g_+(0)$, $g_-(t)<g_+(t)$ *при* $0\leqslant t\leqslant 1$, $f(t)\in C(0,\ 1)$ *справедливо соотношение*

$$\ln\mathbf{P}(s_n\in f+xA(g_-,\ g_+))\sim\ln W(f+xA(g_-,\ g_+)).$$

При $f=0$ теорема 10 доказана в [18]. Доказательство при $f\neq 0$ практически не изменяется, поэтому мы его не приводим.

Замечание 2. Утверждение теоремы 10 сохранится, если вместо процесса $s_n=s_n(t)$ рассмотреть процесс $\xi_n=\xi_n(t)=\xi(nt)/\sqrt{n}$, где $\xi(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, $\mathbf{E}\xi(1)=0$, $\mathbf{E}\xi(1)^2=1$.

Замечание 3. Утверждение, аналогичное теореме 10, справедливо и для случая, когда слагаемые $\xi_{k,n} = \xi_k$ принадлежат области притяжения строго устойчивого распределения F_α, $0 < \alpha \leqslant 2$ (см. [18]).

Теорема 11. *Пусть* $\xi_{k,n} = \xi_k$ *одинаково распределены и не зависят от* n, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 = 1$, $x \to 0$, $x\sqrt{n} \to \infty$. *Тогда для произвольного* $p > 0$

$$\ln \mathbf{P}(\|s_n\|_p < x) \sim -cx^{-2},$$

где константа $c = c(p)$ *та же, что и в теореме* 3.

Доказательство теоремы 11 мы приведем в § 5. Таким образом, в условиях теорем 10, 11 имеет место $(f, A, 1/\sqrt{n})$-грубый принцип инвариантности.

Из грубой теоремы о малых уклонениях для ломаных следует вариант закона повторного логарифма в форме Чжуна.

Теорема 12. *Пусть* $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 = 1$. *Тогда с вероятностью* 1 *для* $p \geqslant 1$

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\int_0^1 |s_n(t)|^p\, dt \right)^{1/p} \sqrt{\ln \ln n} = \sqrt{c},$$

где константа c *определена в теореме* 3.

Доказательство теоремы 12 следует из теоремы 11 и общей теоремы в [19].

Замечание 4. Теоремы 11 и 12 справедливы и для ломаных, построенных по суммам независимых, одинаково распределенных случайных векторов. Доказательства при этом сохраняются полностью.

Закон повторного логарифма Чжуна ранее (см. [24]) был известен для равномерной нормы: *с вероятностью* 1 *имеет место соотношение*

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |s_n(t)| \sqrt{\ln \ln n} = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \sigma,$$

где $\sigma^2 = \mathbf{E}\xi_1^2$. Разумеется, это утверждение следует и из теоремы 10 и общей теоремы в [19]. Аналогичное утверждение имеет место и для случая сходимости к строго устойчивому распределению F_α с параметром α, $0 < \alpha \leqslant 2$ (см. [20]).

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ УТВЕРЖДЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С МАЛЫМИ УКЛОНЕНИЯМИ ВИНЕРОВСКОЙ МЕРЫ СФЕР В L_p

В настоящем параграфе доказан ряд утверждений, из которых, в частности, выведена теорема 3 (§ 2).

Для $p > 0$, $\lambda \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ обозначим

$$M(p, \lambda) = \mathbf{E} \exp\{-\lambda \|w\|_p^p\},$$

$$f(p, x) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}(\|w\|_p^p < x),$$

где $\|f\|_p$ — норма в $L_p(0, 1)$ (см. (13)). Ниже найдены представления функций $M(p, \lambda)$ и $f(p, x)$ в виде рядов специальных функций. Получена асимптотика при $x \to 0$ плотности $f(p, x)$. Основная идея (см. [13, 25]) состоит в представлении функции $M(p, \lambda)$ в виде

$$M(p, \lambda) = R_{t(p,\lambda)}\varphi_0(0), \quad \text{где} \quad t(p, \lambda) = \lambda^{\frac{2}{2+p}},$$

(см. (15)) и использовании теоремы Гильберта — Шмидта.

Обозначим $\psi(\alpha, x)$ плотность спектрально-положительного устойчивого распределения с параметром α, $0 < \alpha < 1$, и преобразованием Лапласа * (см. [26, с. 518])

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\psi(\alpha, x)\,dx = e^{-\lambda^\alpha}.$$

Известно (см. [27, с. 72]), что при $x \to 0$

$$\psi(\alpha, x) \sim ax^{-\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}} \exp\left\{-bx^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\}, \qquad (33)$$

где $a = \dfrac{\alpha^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)}}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^{\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}}, \quad b = (1-\alpha)\,\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$

Ниже будет установлено, что все собственные числа $\{-\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ оператора

$$A\varphi(x) = 1/2\varphi''(x) - |x|^p\varphi(x) \qquad (34)$$

удовлетворяют соотношениям

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \quad \sum_{k=1}^\infty e^{-\varepsilon\lambda_k} < \infty \qquad (35)$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Теорема 13. *При любых $p > 0$, $x \geqslant 0$ справедливо*

$$f(p, x) = \sum_{k=1}^\infty A_k\psi\left(\frac{2}{2+p}, x\lambda_k^{-\frac{2+p}{2}}\right), \qquad (36)$$

где числа $A_k = A_k(p)$ зависят только от p и допускают оценку

$$|A_k(p)| \leqslant C(p)\lambda_k^{\frac{5p+4}{4p}}, \qquad (37)$$

так что в силу (33) *и* (34) *ряд* (36) *сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, a]$ для любого $a < \infty$.*

Следствие 1. *При $x \to 0$*

$$f(p, x) \sim A_1 a\lambda_1^{\frac{(2+p)^2}{2}} x^{-\frac{2+p}{p}} \exp\left(-b\lambda_1 x^{-\frac{2}{p}}\right),$$

где A_1 и λ_1 из (36), *a и b из* (32) *при $\alpha = \dfrac{2}{2+p}$.*

Обозначим

$$\tilde{f}(p, x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}(\|w\|_p < x);$$

легко видеть, что

$$\tilde{f}(p, x) = px^{p-1}f(p, x^p).$$

Следствие 2. *При $x \to 0$*

$$\tilde{f}(p, x) \sim Cx^{-3}\exp(-cx^{-2}),$$

где $C = C(p) = A_1 a\lambda_1^{\frac{(2+p)^2}{2}} p, \quad c = c(p) = b\lambda_1$.

Доказательство теоремы 3 (§ 2) вытекает непосредственно из следствия 2.

Замечание 5. Теорема 13 и следствия 1, 2 справедливы и для k-мерного винеровского процесса $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_k(t))$. Тут нужно рассматривать норму

$$\|w\|_p = \left(\int_0^1 \left(w_1^2(t) + \ldots + w_k^2(t)\right)^{p/2} dt\right)^{1/p};$$

при этом доказательства полностью сохранятся.

* На возможность использования в рассматриваемой задаче плотностей $\psi(\alpha, x)$ обратил внимание одного из авторов А. В. Нагаев.

Доказательство теоремы 13. В гильбертовом пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ вещественных функций $\varphi(x)$ со скалярным произведением $(\psi, \varphi) = \int \varphi(x)\psi(x)\,d\varkappa$ рассмотрим полугруппу операторов $R_t = R_t(p)$, $p > 0$, определенных равенством

$$R_t\varphi(x) = \mathbf{E}e^{-\int\limits_0^t |w(u)+x|^p du}\varphi(w(t)+x).$$

Пусть $r_t(x, y)$ — ядро оператора R_t, так что

$$R_t\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} r_t(x, y)\varphi(y)\,dy.$$

Лемма 1. *Для всех* $t > 0$, $p > 0$

$$r_t(x, y) \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{t}}\left(e^{-c_2\frac{x^2+y^2}{t}} + e^{-c_3 t\frac{(x^2+y^2)^{p/2}}{8^p}}\right), \tag{38}$$

где $0 < c_i < \infty$ — *абсолютные константы*, $i = 1, 2, 3$.

Лемма 1 будет доказана несколько позже.

Из леммы 1 следует, что для любого $t > 0$

$$\int\int r_t^2(x, y)\,dx\,dy < \infty,$$

поэтому (см. [16, с. 461]) операторы R_t вполне непрерывны в $L_2(-\infty, \infty)$. Поскольку они самосопряженные, то по теореме Гильберта — Шмидта (см. [16, с. 246])

$$r_t(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k(y), \tag{39}$$

где $e^{-\lambda_k}$, $\psi_k(x)$ — соответственно k-е собственное число и k-й собственный нормированный вектор оператора R_1 (занумерованные так, что $\lambda_1 \leqslant \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$); при этом для любого $\varepsilon > 0$ конечен ряд $\sum \exp\{-\lambda_k\varepsilon\}$. Очевидно (см. (38)), что для любого $\varphi \in L_2(-\infty, \infty)$ справедливо $\|R_t\varphi\| \to 0$ при $t \to \infty$. Поэтому $\lambda_1 > 0$. Далее, для любого $\varphi \in L_2(-\infty, \infty)$ при $t \to 0$ справедливо $\|R_t\varphi - \varphi\| \to 0$; поэтому ортобазис $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является полным в $L_2(-\infty, \infty)$. Вычисляя далее инфинитезимальный оператор полугруппы R_t, приходим к оператору A (см. (34)). Таким образом, числа λ_k и функции ψ_k удовлетворяют соотношениям

$$A\psi_k = -\lambda_k\psi, \quad (\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}. \tag{40}$$

Оценим $|\psi_k(x)|$. Поскольку

$$e^{-\lambda_k t}\psi_k(x) = \int r_t(x, y)\psi_k(y)\,dy,$$

то

$$|\psi_k(x)| \leqslant e^{\lambda_k t}\left(\int r_t^2(x, y)\,dy\right)^{1/2}.$$

Ядро оператора R_t допускает оценку (см. доказательство леммы 1)

$$r_t(x, y) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}},$$

поэтому для любого $t > 0$ справедливо

$$\sup_x |\psi_k(x)| \leqslant ct^{-1/4}e^{\lambda_k t},$$

где $c < \infty$ — абсолютная константа. Выбирая далее $t = \lambda_k^{-1}$, получим

$$\sup_x |\psi_k(x)| \leqslant c\lambda_k^{1/4}. \tag{41}$$

Оценим теперь $a_k = \int \psi_k(x)\,dx$. Поскольку

$$|a_k|\,e^{-\lambda_k t} \leqslant \int\int r_t(x, y)\,|\psi_k(y)|\,dy\,dx,$$

то в силу леммы 1 и неравенства (41) получаем

$$|a_k| \leqslant c e^{\lambda_k t}\lambda_k^{1/4}\int\int \frac{c_1}{\sqrt{t}}\left(e^{-c_2\frac{(x^2+y^2)}{t}} + e^{\frac{-c_3 t(x^2+y^2)}{8^p}}\right) dx\,dy.$$

Из последнего неравенства получаем, что для любого $t > 0$

$$|a_k| \leqslant e^{\lambda_k t} c\left(\sqrt{t} + t^{-(1/2+2/p)}\right)\lambda_k^{1/4}.$$

Полагая $t = \lambda_k^{-1}$, окончательно устанавливаем, что

$$|a_k| \leqslant c\left(\lambda_k^{-1/4} + \lambda_k^{\frac{2p+4}{2p}}\right) \leqslant c_1\lambda_k^{\frac{p+2}{p}}, \tag{42}$$

где $c_1 = c_1(p) < \infty$.

Обратимся теперь к функции $M(p, \lambda)$. Поскольку

$$M(p, \lambda) = R_{t(p,\lambda)}\varphi_0(0),\quad t(p, \lambda) = \lambda^{2/(2+p)},$$

где $\varphi_0(x) = 1$, то получаем в силу (39)

$$M(p, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\lambda_k \lambda^{2/(2+p)}}. \tag{43}$$

При этом $B_k = a_k\psi_k(0)$, $|B_k| \leqslant c\lambda_k^{1/4+(p+2)/p}$, так что в силу (35) ряд (43) сходится абсолютно и равномерно по $\lambda \in [\varepsilon, \infty)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим характеристические функции

$$g(t) = \frac{M(p, 1-it)}{M(p, 1)} = \int_0^{\infty} e^{itx} r(x)\,dx,$$

$$g_k(t) = e^{-\lambda_k(1-it)^{2/(2+p)}+\lambda_k} = \int_0^{\infty} e^{itx} r_k(x)\,dx,$$

где

$$r(x) = e^{-x} f(p, x)/M(p, 1);$$
$$r_k(x) = e^{-x+\lambda_k - (2+p)/p}\lambda_k\psi\left(2/(2+p),\ x\lambda_k^{-(2+p)/2}\right),$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

В силу (43) справедливо

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k(t), \tag{44}$$

где $b_k = a_k\psi_k(0)\,e^{-\lambda_k}/M(p, 1)$. Поскольку ряд $\sum |b_k|$ конечен, то из (44) следует, что

$$e^{-x} f(p, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-x}\psi\left(\frac{p}{2+p},\ x\lambda_k^{-\frac{2+p}{2}}\right), \tag{45}$$

где $A_k = \psi_k(0)\,a_k\lambda_k^{-(2+p)/2}$, и ряд (45) сходится в $L_2(0, \infty)$. Остается заметить, что в силу оценок (41) и (42) числа A_k в (45) и (36) допускают оценку (37). Теорема 13 доказана.

Рассмотрим два примера, где собственные числа и собственные функции оператора R_t найдены явно.

Пример 1. $p=1$. Пусть $v(x)$ — функция Эйри (см. [28]), т. е. единственное решение уравнения

$$\frac{1}{2}v''(x)-xv(x)=0,$$

удовлетворяющее условиям $v(\infty)=0$, $v(0)=1$. Обозначим через α_k и β_k нули функций $v'(x)$ и $v(x)$ соответственно. Известно [28], что они отрицательные, строго чередуются и их счетное число, так что

$$0>\alpha_1>\beta_1>\alpha_2>\beta_2\ldots$$

Положим $\lambda_{2k-1}=-\alpha_k$, $\lambda_{2k}=-\beta_k$, $k=1, 2, \ldots$,

$$\psi_k(x)=\frac{1}{c_k}\frac{x^k}{|x|^k}v(|x|-\lambda_k), \tag{46}$$

где числа c_k таковы, что $(\psi_k, \psi_k)=1$. Легко видеть, что функции (46) удовлетворяют уравнению

$$A\psi_k(x)\equiv\frac{1}{2}\psi_k''(x)-|x|\psi_k(x)=-\lambda_k\psi_k(x),$$

т. е. составляют ортбазис оператора $R_t(1)$ (см. (40)).

Пример 2. $p=2$. В этом случае оператор A имеет вид

$$A\varphi(x)=\frac{1}{2}\varphi''(x)-x^2\varphi(x). \tag{47}$$

Обозначим

$$\psi_k(x)=2^{1/4}e^{-x^2}H_k(x\sqrt{2}),$$

где $H_k(x)$ — полиномы Эрмита (см. [29, с. 114]), $\lambda_k=k+1/2$, $k=1, 2, \ldots$. Поскольку для оператора (47) $A\psi_k(x)=-\lambda_k\psi_k(x)$, то ортбазис, соответствующий оператору $R_t(2)$, построен.

Нам осталось провести

Доказательство леммы 1. Введем функцию $f_{0,t}^{x,y}(u)=x+\frac{u}{t}(y-x)$ и процесс $\mathring{w}_t(u)=w(u)-uw(t)$, $0\leqslant u\leqslant t$. Очевидно, что ядро $r_t(x, y)$ оператора R_t представляется в виде

$$r_t(x, y)=\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right)\mathring{r}_t(x, y), \tag{48}$$

где
$$\varphi(x)=(2\pi)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},$$

$$\mathring{r}_t(x, y)=\mathbf{E}\exp\left\{-\int_0^t|\mathring{w}_t(u)+f_{0,t}^{x,y}(u)|^p\,du\right\}.$$

Оценим $\mathring{r}_t(x, y)$. Пусть $A(x, y)=\min(|x|, |y|)$, если x, y — одного знака; $A(x, y)=0$, если x, y — разных знаков. Тогда

$$\mathring{r}_t(x, y)\leqslant e^{-t\left(\frac{A(x,y)}{2}\right)^p}+\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\mathring{w}_t(u)|\geqslant\frac{A(x, y)}{2}\right). \tag{49}$$

Оценим

$$I\equiv\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\mathring{w}_t(u)|\geqslant\frac{A(x, y)}{2}\right)=\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}|\mathring{w}_1(u)|\geqslant\frac{A(x, y)}{(2\sqrt{t})}\right)\leqslant$$
$$\leqslant 2\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}\mathring{w}_1(u)\geqslant\frac{A(x, y)}{(2\sqrt{t})}\right).$$

Далее, поскольку при $x>0$ справедлива оценка [17, с. 169],

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}\mathring{w}_1(u)>x\right)\leqslant e^{-2x^2},$$

получаем

$$\mathrm{I} \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{A^2(x,y)}{t}}. \tag{50}$$

Таким образом, в силу (48), (49) и (50) получим

$$r_t(x, y) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} 2 \left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2t} - \frac{A^2(x,y)}{2t}} + \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2t} - t\frac{A^p(x,y)}{2^p}} \right).$$

Если $T^2 = x^2 + y^2$, то либо $|x - y| \geqslant T/2$, либо $A(x, y) \geqslant T/4$. Поэтому

$$r_t(x, y) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\mathrm{e}^{-\frac{T^2}{8t}} + \mathrm{e}^{-\frac{T^2}{32t}} + \mathrm{e}^{-\frac{T^2}{8t}} + \mathrm{e}^{-t\frac{T^{p/2}}{8^p}} \right) \leqslant \frac{6}{\sqrt{2\pi t}} \left(\mathrm{e}^{-\frac{T^2}{32t}} + \mathrm{e}^{-t\frac{T^{p/2}}{8^p}} \right).$$

Лемма 1 доказана.

Замечание 6. Теорема 13 и следствия 1, 2 справедливы и для броуновского моста

$$\overset{\circ}{w}_t(u) = w(u) - uw(t), \qquad 0 \leqslant u \leqslant t.$$

Доказательство для $\overset{\circ}{w}_t$ полностью сохраняется.

Пусть $F_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $(x_1, \ldots, x_n)$ из равномерного на отрезке $[0, 1]$ распределения. Из следствия 2 и замечания 6 выводится (см. [19]).

Теорема 14. *Для* $p \geqslant 1$ *с вероятностью* 1

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt{n \ln \ln n} \left(\int_0^1 (F_n(t) - t)^p \, dt \right)^{1/p} = C^{1/2},$$

где $C = C(p)$ *из следствия* 2.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11

Для $x > 0$, $p > 0$ определим функцию

$$\lambda(x) = \lambda_p(x) \equiv (\alpha\lambda_1)^{1/(1-\alpha)} x^{-1/(1-\alpha)},$$

где число $\lambda_1 = \lambda_1(p)$ определено в теореме 13, $\alpha = 2/(2+p)$. Введем далее случайную величину

$$\eta_n \equiv \int_0^1 |s_n(t)|^p \, dt = \|s_n\|_p^p,$$

где $s_n = s_n(t)$ — случайная ломаная из теоремы 11.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 11. *Тогда* $(x = x(n))$

$$\begin{aligned} &1)\ \ln \mathrm{E}\mathrm{e}^{-\lambda(x)\eta_n} \sim -\lambda_1\lambda^\alpha(x), \\ &2)\ \mathrm{e}^{-\mu}\mathrm{E}\mathrm{e}^{(-\lambda(x)+\mu x^{-1})\eta_n} / \mathrm{E}\mathrm{e}^{-\lambda(x)\eta_n} \to 1 \quad \text{при } n \to \infty, \end{aligned} \tag{51}$$

где $\mu \in \mathbf{R}^1$, $\alpha = 2/(2+p) c = c(p)$ *из теоремы* 13.

Лемма будет доказана ниже.

Получим оценку сверху в теореме 11. В силу экспоненциального неравенства Чебышева $(x = x(n))$

$$\mathbf{P}(\eta_n < x) \leqslant \mathrm{e}^{x\lambda(x) + \ln \mathrm{E} \exp\{-\lambda(x)\eta_n\}},$$

поэтому в силу леммы 2

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{P}(\eta_n < x) &\leqslant x\lambda(x) - \lambda_1 \circ \lambda^\alpha(x) \cdot (1 + o(1)) = \\ &= -cx^{\alpha/(\alpha-1)}(1 + o(1)) \sim -cx^{-2/p}. \end{aligned}$$

Это дает нам оценку сверху

$$\ln \mathbf{P}\left(\eta_n^{1/p} < x\right) \leqslant -cx^{-2}(1+o(1)).$$

Для получения оценки снизу введем с помощью абсолютно-непрерывного преобразования новую вероятностную меру

$$\widetilde{\mathbf{P}}_y(A) \equiv \mathbf{E}\left(e^{-\lambda(y)\eta_n};\ \eta_n \in A\right) \big| \mathbf{E}e^{-\lambda(y)\eta_n}.$$

Используя эту меру при $y = x\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$, получим

$$\mathbf{P}(\eta_n < x) \geqslant \mathbf{P}\left(|\eta_n - y| \leqslant x\frac{\nu}{2}\right) =$$

$$= \widetilde{\mathbf{E}}_y\left(e^{\lambda(y)(\eta_n - y)};\ |\eta_n - y| \leqslant x\frac{\nu}{2}\right)\cdot e^{\lambda(y)y}\cdot \mathbf{E}e^{-\lambda(y)\eta_n}.$$

Поскольку

$$\widetilde{\mathbf{E}}_y\left(e^{\lambda(y)(\eta_n - y)};\ |\eta_n - y| \leqslant x\frac{\nu}{2}\right) \geqslant e^{-\lambda(y)x\frac{\nu}{2}}\widetilde{\mathbf{P}}_y\left(|\eta_n - y| \leqslant x\frac{\nu}{2}\right),$$

получаем, что

$$\ln \mathbf{P}(\eta_n < x) \geqslant \lambda(y)\left(y - x\frac{\nu}{2}\right) + \ln \mathbf{E}e^{-\lambda(y)\eta_n} + L_n, \tag{52}$$

где

$$L_n \equiv \ln \widetilde{\mathbf{P}}_y\left(|\eta_n - y| \leqslant x\frac{\nu}{2}\right).$$

Обозначим далее $\widetilde{\eta}_n = \dfrac{\eta_n}{y} - 1$. Тогда

$$L_n = \ln \widetilde{\mathbf{P}}_y\left(|\widetilde{\eta}_n| \leqslant \frac{\nu}{2}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)^{-1}\right).$$

Из утверждения 2) леммы 2 следует, что

$$\widetilde{\mathbf{E}}_y e^{\mu\widetilde{\eta}_n} \equiv \mathbf{E}e^{\left(-\lambda(y) + \mu y^{-1}\right)\eta_n - \mu} / \mathbf{E}e^{-\lambda(y)\eta_n} \to 1$$

при $n \to \infty$ и любом $\mu \in \mathbf{R}^1$. Поэтому $\widetilde{\eta}_n \to 0$ при $n \to \infty$ по мере $\widetilde{\mathbf{P}}_y$ и, стало быть, $L_n \to 0$ при $n \to \infty$. Используя далее утверждение 1) леммы 2 и устремляя к нулю число ν в правой части (52), получаем оценку снизу в теореме 11:

$$\ln \mathbf{P}(\eta_n < x) \geqslant -cx^{-2/p}(1+o(1)).$$

Теорема 11 доказана.

Доказательство леммы 2. В силу принципа инвариантности и формулы (43) найдется последовательность $\Lambda_n \to \infty$ такая, что для любой последовательности $\lambda_n \leqslant \Lambda_n$ выполняется

$$\ln \sup_x \mathbf{E}e^{-\lambda_n\int_0^1 |s_n(t)+x|^p dt} \sim \ln \sup_x \mathbf{E}e^{-\lambda_n\int_0^1 |w(t)+x|^p dt} \sim -\lambda_1\lambda_n^{2/(2+p)}, \tag{53}$$

$$\ln \inf_{|x|\leqslant 1} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda_n\int_0^1 |s_n(t)+x|^p dt};\ |s_n(1)+x| < 1\right) \sim$$

$$\sim \ln \inf_{|x|<1} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda_n\int_0^1 |w(t)+x|^p dt};\ |w(1)+x| < 1\right) \sim -\lambda_1\lambda_n^{2/(2+p)}, \tag{54}$$

где λ_1 определено в теореме 3. Далее, для любых целых $n \geqslant 1$ и $k = k(n)$, $1 \leqslant k \leqslant n/2$, определим целое $m = m(n)$ и $k' = k'(n)$ таким образом, что $n = km + k'$, $k \leqslant k' < 2k$. Очевидно, что

$$a_{k,n}^m(\lambda) \cdot a_{k',n}(\lambda) \leqslant \mathbf{E}e^{-\lambda \eta_n} \leqslant b_{k,n}^m(\lambda)\, b_{k',n}(\lambda), \tag{55}$$

где

$$a_{k,n}(\lambda) = a_{k,n}(\lambda, \delta) \equiv \inf_{|x| \leqslant \delta} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda \int_0^{k/n} |s_n(t)+x|^p dt} ; \left| s_n\left(\frac{k}{n}\right) + x \right| < \delta \right),$$

$$b_{k,n}(\lambda) \equiv \sup_x \mathbf{E}e^{-\lambda \int_0^{k/n} |s_n(t)+x|^p dt}.$$

Очевидно, далее, что

$$b_{k,n}(\lambda) = b_{k,k}(\lambda\beta),$$

$$a_{k,n}\left(\lambda, \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}\right) = a_{k,k}(\lambda\beta, 1),$$

где $\beta = (k/n)^{\frac{p}{2}+1}$.

Выберем далее по заданному $x = x(n)$ числа $k = k(n)$, $m = m(n)$, $k' = k'(n)$, так, чтобы

$$\lambda(x) \cdot r(k) \leqslant \frac{1}{2} \Lambda_k,$$

где $r(k) = \beta \equiv (k/n)^{\frac{p}{2}+1}$. Очевидно, что это всегда можно сделать. Тогда в силу (55)

$$a_{k,k}^m(\lambda(x)\, r(k), 1)\, a_{k',k'}(\lambda(x)\, r(k'), 1) \leqslant \mathbf{E}e^{-\lambda(x)\eta_n} \leqslant$$
$$\leqslant b_{k,k}^m(\lambda(x)\, r(k))\, b_{k',k'}(\lambda(x)\, r(k')),$$

и в силу (53) и (54) получаем

$$-\lambda_1 (m(\lambda(x)\, r(k))^\alpha + (\lambda(x)\, r(k'))^\alpha \sim \ln \mathbf{E}e^{-\lambda(x)\eta_n}.$$

Осталось заметить, что

$$m\lambda^\alpha(x) r^\alpha(k) + \lambda^\alpha(x) r^\alpha(k') \sim \lambda^\alpha(x).$$

Первое утверждение леммы 2 доказано.

Второе утверждение следует непосредственно из первого: для любого $\mu \in \mathbf{R}^1$

$$\ln\left[e^{-\mu} \mathbf{E}e^{(-\lambda(x)+\mu x^{-1})\eta_n} / \mathbf{E}e^{-\lambda(x) r_n}\right] \sim -\lambda_1\left(\lambda(x) + \frac{\mu}{x}\right)^\alpha + \lambda_1 \lambda^\alpha(x) - \mu \to 0,$$

так что (51) имеет место.

Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боровков А. А.** Граничные задачи, принцип инвариантности, большие уклонения // Успехи мат. наук.— 1983.— Т. 38, № 4.— С. 232—287.
2. **Вентцель А. Д.** Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов.— М.: Наука.— 1986.— 175 с.
3. **Случайные** процессы. Выборочные функции и пересечения/Под ред. Ю. К. Беляева.— М.: Мир, 1978.— 280 с.
4. **Боровков А. А., Могульский А. А.** О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах. I // Сиб. мат. журн.— 1978.— Т. 19, № 5.— С. 988—1004.
5. **Bahadur R. R., Zabell S. L.** Large deviations of the sample mean in general vector spaces // Ann. Probab.— 1979.— V. 7, N 4.— P. 587—621.

6. **Боровков А. А.** Анализ больших уклонений в граничных задачах с произвольными границами. I, II // Сиб. мат. журн.— 1964.— Т. 5, № 2.— С. 253—289; № 4.— С. 750—767.
7. **Могульский А. А.** Вероятности больших уклонений для случайных блужданий // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1983.— Т. 3.— С. 93—124.
8. **Сытая Г. Н.** О некоторых асимптотических представлениях для гауссовской меры в гильбертовом пространстве // Теория случайных процессов.— Киев: Наук. думка, 1974.— Вып. 2.— С. 93—104.
9. **Ибрагимов И. А.** О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса // Зап. науч. семинаров ЛОМИ/Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-ние.— 1979.— Т. 83.— С. 75—93.
10. **Zolotarev V. M.** Gaussian measure asimptotic in l_p on a set of centred sphere with radii tending to zero // 12-th Europ. meet. of statisticients.— Varna, 1979.— P. 254.
11. **Нагаев А. В., Старцев А. Н.** Асимптотические свойства распределения бесконечной квадратичной формы от гауссовских случайных величин // Предельные теоремы для случайных процессов и статистические выводы.— Ташкент: Фан, 1981.— С. 144—160.
12. **Сытая Г. Н.** О некоторых локальных представлениях для гауссовской меры в гильбертовом пространстве // Тез. докл. Междунар. конф. по теории вероятностей и матем. статистике, Вильнюс, сент. 1973 г.— Вильнюс, 1973.—Т. 2.— С. 267—268.
13. **Могульский А. А.** Метод Фурье для нахождения асимптотики малых уклонений винеровского процесса // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 22, № 3.— С. 161—174.
14. **Новиков А. А.** Об асимптотике вероятностей недостижения подвижных границ процессами с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения.— 1981.— Т. 26, № 2.— С. 430—431.
15. **Нагаев С. В.** Об асимптотике винеровской меры узкой полосы // Там же, № 3.— С. 630.
16. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1968.— 496 с.
17. **Скороход А. В.** Случайные процессы с независимыми приращениями.— М.: Наука, 1986.— 320 с.
18. **Могульский А. А.** Малые уклонения в пространстве траекторий // Теория вероятностей и ее применения.— 1974— Т. 19, № 4.— С. 755—765.
19. **Могульский А. А.** О законе повторного логарифма в форме Чжуна для функциональных пространств // Там же.— 1979.— Т. 24, № 2.— С. 399—407.
20. **Jain N., Pruitt W.** Maximum of partial sums of independent variables // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1973.— V. 27, N 3.— P. 141—151.
21. **Саханенко А. И.** Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1983.— Т. 3.— С. 4—49.
22. **Могульский А. А.** Малые уклонения и закон повторного логарифма в форме Чжуна для многомерных случайных блужданий // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1984.— Т. 5: Предельные теоремы теории вероятностей.— С. 45—55.
23. **Арак Т. В.** О распределении максимума последовательных сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения.— 1974.— Т. 19, № 2.— С. 257—277.
24. **Jain N., Pruitt W.** The other low of the interated logarith // Ann. Probab.— 1975.— V. 3, N 6.— P. 1046—1049.
25. **Mogulskii A. A.** Common approach to stadying the probability of large deviations for random walks // Lecture Notes in Mathematics, 1021.— 1983.— P. 452—461.
26. **Феллер В. В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М.: Мир, 1967.— Т. 2.— 752 с.
27. **Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.** Независимые и стационарно связанные случайные величины.— М.: Наука, 1965.— 524 с.
28. **Яковлева Г. Д.** Таблицы функций Эйри и их производных.— М.: Наука, 1969.— 377 с.
29. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены.— М.: Физматгиз, 1962.— 500 с.