ОЦЕНКИ КОВАРИАЦИЙ ДЛЯ СРЕДНИХ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

В. В. ЮРИНСКИЙ

Интерес к оценкам ковариаций специальных случайных полей, которым посвящена эта работа, возникает в теории усреднения дифференциальных операторов со случайными коэффициентами.

Многие задачи математической физики, относящиеся к описанию процессов, протекающих в микронеоднородных средах, подчиняются принципу усреднения — при их решении характеристики среды, зависящие от пространственных переменных и, вообще говоря, случайные, могут быть приближенно заменены постоянными характеристиками некоторой эффективной «усредненной» среды без микроструктуры. При изучении случайных сред оценка погрешности усреднения в ряде случаев может быть сведена [1—3] к выводу оценок для ковариаций случайных полей, воспроизводящих в качестве поправок к усредненному решению локальное строение полей напряжений. Возникающие при этом трудности связаны с тем, что поправки получаются из случайных коэффициентов исходной задачи существенно нелинейным образом — обращением дифференциальных операторов в частных производных со случайными коэффициентами при старших производных.

Оценкам ковариаций случайных полей, удовлетворяющих системам эллиптических уравнений со случайными коэффициентами, и посвящена эта работа. Представляющие самостоятельный интерес вопросы об эффективных методах расчета усредненных коэффициентов и существовании усредненного оператора при этом не затрагиваются.

В статье рассматриваются случайные поля $u=(u^{(\alpha)})\colon \mathbf{R}^d\times\Omega\to\mathbf{R}^m$, удовлетворяющие системам уравнений

$$-Lu^{(\alpha)}+\sum_{\beta=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{d}B_k^{(\alpha\beta)}D_ku^{(\beta)}+C^{(\alpha\beta)}u^{(\beta)}\right)+u^{(\alpha)}/T=F_T^{(\alpha)},\qquad \alpha=1,\ldots,m, \tag{0.1}$$

где $T>0$ — большой параметр, $D_k=\partial/\partial x_k$, а

$$Lv\equiv 1/2\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}D_iD_jv+\sum_{i=1}^{d}b_iD_iv \tag{0.2}$$

— производящий оператор диффузионного процесса. Коэффициенты (0.1) и правая часть образуют однородное случайное поле. Тем же свойством однородности обладает и решение u.

В предположении, что поле коэффициентов и правых частей (0.1) удовлетворяет достаточно сильному условию перемешивания, получены оценки для дисперсий и ковариаций случайных величин

$$[u^{(\alpha)};R]=(2R)^{-d}\int\limits_{\|x\|\leqslant R}u^{(\alpha)}(x)\,dx. \tag{0.3}$$

В них явно выделена зависимость от больших параметров R, T и коэффициента перемешивания. Если размерность диффузии d достаточно велика, а коэффициент перемешивания убывает с ростом расстояния не медленнее, чем степенным образом, следствием оценок статьи оказываются соотношения

$$\mathbf{D}\,[u^{(\alpha)};T^{1/2-\gamma_1}]=O\left(T^{-\gamma_2}\right),\quad \gamma_i>0. \tag{0.4}$$

Интерес к результатам описанного типа обусловлен тем, что они в ряде случаев позволяют оценить погрешность от замены решения корректной краевой задачи для оператора вида (0.1) со случайными быстро осциллирующими коэффициентами решением аналогичной краевой задачи для «усредненного» оператора того же типа с неслучайными постоянными коэффициентами (см. [1—3]).

Для естественного класса эллиптических систем, включающего, в частности, уравнения линейной теории упругости и дивергентное уравнение теплопроводности, средствами теории возмущений удается получить оценки порядка $O(T^{-\zeta/\ln\ln T})$, $\zeta>0$ без ограничений на размерность пространственной переменной (см. [3]). Метод, которым ниже получены более сильные оценки (0.4), существенно использует возможность представления решения системы (0.1) средним по распределению марковского процесса, одной из компонент которого является диффузионный процесс с производящим оператором (0.2). Это представление позволяет локализовать зависимость решения от коэффициентов задачи. Ограничения на размерность связаны с тем, что в вычислениях существенно используется малость объема «задетой» типичной траекторией диффузии части пространства по сравнению со всем объемом, определяющим значение решения. Метод статьи представляет собой модификацию метода работ [1, 2], где рассматривалось одно уравнение второго порядка.

Формулировки и доказательства основных результатов работы, теорем 3.1 и 4.1, приведены в § 3—4. Необходимый для вычислений аппарат подготовлен в § 2. В § 1 дана сводка обозначений.

§ 1. СВОДКА ОБОЗНАЧЕНИЙ

Векторы евклидовых пространств разных размерностей задаются ниже координатами в фиксированных ортонормированных базисах. Индексы, обозначенные латинскими буквами, изменяются от 1 до d, греческими — от 1 до m; используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Обозначение $|\cdot|$ закрепляется за евклидовой нормой в пространстве любой размерности: так, $|x|=(x_ix_i)^{1/2}$ при $x=(x_i)\in\mathbf{R}^d$, $|Y|=(Y^{(\alpha)}Y^{(\alpha)})^{1/2}$ при $Y=(Y^{(\alpha)})\in\mathbf{R}^m$ и т. д. Используется еще норма $\|x\|=\max\{|x_i|:\ i=1,\ldots,d\}$.

Алгебраические операции над множествами имеют естественный смысл: так, $\alpha A+\beta B=\{x:\ x=\alpha y+\beta z,\ y\in A,\ z\in B\}$. Если K — конечное множество, $|K|$ обозначает число его элементов; $\mathbf{Z}$ — целочисленная решетка.

Операторы дифференцирования по пространственным переменным обозначаются $D_iu=\partial u/\partial x_i$; при $k=(k_i)\in\mathbf{Z}_+^d$ $D^ku=D_1^{k_1}\ldots D_d^{k_d}u$, $D_i^0u\equiv u$. Для функции u: $\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ при натуральном n

$$\nabla^nu(x)=\Bigl(\sum_{k_1+\ldots+k_d=n}(D^ku(x))^2\Bigr)^{1/2};$$

используется также соглашение $\nabla^0u=|u|$. Аналогичные обозначения приняты и для векторнозначных функций: так, при $u=\bigl(u_i^{(\alpha)}\bigr):\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d\otimes R^m$ $\nabla^nu(x)\in\mathbf{R}^d\otimes\mathbf{R}^m$ есть вектор с координатами $\nabla^nu_i^{(\alpha)}(x)$, а $|\nabla^nu(x)|$ — его евклидова норма.

В тех случаях, когда это не влечет путаницы, применяется и матричная запись. Например, система (0.1) может записываться в форме

$$-Lu+B_kD_ku+Cu+u/T=F_T, \tag{1.1}$$

где $u=(u^{(\alpha)})$ — столбец высоты m, $B_k=\bigl(B_k^{(\alpha\beta)}\bigr)$, $C=(C^{(\alpha\beta)})$ — матрицы размера $m\times m$, A^T — транспонированная к A матрица, $\operatorname{tr}A=A^{(\alpha\alpha)}$ — след матрицы A. Неравенство $A'\geqslant A''$ означает неотрицательную определенность матрицы $A'-A''$. Элементы единичных матриц обозначаются символами Кронекера соответствующих размерностей.

Все константы, значения которых определяют размерности d, m и постоянные в ограничениях на коэффициенты (0.1), но не большой параметр T, обозначаются символами c, c', c_i и т. п. При этом одно и то же обозначение может использоваться для разных констант этого типа, если это не влечет путаницы. Вследствие этого возможны равенства типа $c+c=c$, $cc=c$. . ..

§ 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ

Вероятностные представления решений системы вида (0.1), которые используются в этой работе, предложены в [4] (см. также [5] и монографию [6, гл. VII]).

Чтобы избежать технических осложнений, удобно считать коэффициенты (0.1) гладкими функциями пространственных переменных, равномерно во всем пространстве ограниченными вместе с производными любого порядка.

Коэффициенты «скалярного» оператора (0.2) в дальнейшем удовлетворяют условиям симметрии, ограниченности и равномерной эллиптичности: для любых $x=(x_i)$, $\xi=(\xi_i)$

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\quad A_1|\xi|^2\leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant A_2|\xi|^2, \tag{2.1}$$

$$|b(x)|\leqslant A_3. \tag{2.2}$$

При этих ограничениях (0.2) — производящий оператор диффузионного процесса $\xi=(\xi_i(t))$ со значениями в пространстве $\mathbf{R}^d$. Удобно выбрать в качестве пространства элементарных исходов для этого процесса «пространство траекторий» $\mathcal{U}=C([0,\infty),\mathbf{R}^d)$ с цилиндрической σ-алгеброй $\mathfrak{U}$ и обычным потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t=\sigma(\xi(s),\ s\leqslant t)$. Распределение на $\mathfrak{U}$, отвечающее диффузии (0.2) с начальным условием $\xi(0)=x$, обозначается ниже $\mathbf{P}_x$. Как обычно,

$$\mathbf{M}_x\{\varphi;\ A\}=\int\limits_A\varphi(u)\,\mathbf{P}_x(du),\quad \mathbf{M}_x\varphi=\mathbf{M}_x\{\varphi,\ U\}.$$

Диффузионный процесс ξ является решением стохастического дифференциального уравнения (СДУ)

$$d\xi_i(t)=\sigma_{ik}(\xi(t))dw_k(t)+b_i(\xi(t))dt, \tag{2.3}$$

где (w_k) стандартный винеровский процесс в $\mathbf{R}^d$, а положительно определенная симметричная матрица (σ_{ik}) удовлетворяет условию $\sigma_{ik}\sigma_{jk}=a_{ij}$.

Чтобы получить вероятностное представление решения (0.1), процесс ξ дополняется матричнозначными решениями линейных СДУ (обозначения те же, что в (1.1))

$$\begin{gathered} dX(s,t)=-X(s,t)\,(B_k(\xi(t))\bar\sigma_{kl}(\xi(t))dw_l(t)+\\ +C(\xi(t))dt;\ X(s,t)=(X^{(\alpha\beta)}(s,t)),\\ 0\leqslant s\leqslant t,\ X(s,s)=(\delta^{(\alpha\beta)}), \end{gathered} \tag{2.4}$$

где матрица размера $d\times d$ $(\bar\sigma_{ij})$-обратная к (σ_{ij}) уравнения (2.3). Решения (2.4) обладают полугрупповым свойством: при u, $t>0$ с вероятностью 1 выполняется

$$X(s,\ s+t+u)=X(s,\ s+t)X(s+t,\ s+t+u). \tag{2.5}$$

Пара $(\xi,\ X_0X)$ при любом начальном значении X_0 составляет марковский процесс, так как в вычислениях всегда используется начальное условие, приведенное в (2.4), обозначения $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{M}_x$ приняты и для распределений пары $(\xi,\ X)$, чтобы не загромождать формул.

Показательный рост решений (2.4) исключает условие

$$C+C^T\geqslant(1+\gamma_1)\bar a_{kl}B_kB_l^T,\quad \gamma_1\geqslant 0, \tag{2.6}$$

где $(\bar a_{kl})$ — обратная к (a_{kl}) матрица.

Действительно, по формуле Ито

$$d\,\mathrm{tr} X^T X = \mathscr{A}_l dw_l + \mathscr{B} dt,$$

причем коэффициент переноса неположителен:

$$\mathscr{B} = -\mathrm{tr}\,(X^T X (C^T + C - B_k B_l^T \bar{a}_{kl})) \leqslant 0.$$

Следовательно, при $t > 0$

$$\mathbf{M}_x |X(0,\ t)|^2 = \mathbf{M}_x \mathrm{tr}\, X^T X \leqslant |I|^2. \tag{2.7}$$

Показательного роста решений (2.4) нет и в случае, когда

$$\begin{gathered} B_k \equiv 0,\ \forall \alpha\ C^{(\alpha 1)} + \ldots + C^{(\alpha m)} = 0, \\ C^{(\alpha\beta)} \leqslant 0,\ \alpha \neq \beta. \end{gathered} \tag{2.8}$$

При этих предположениях (2.4) — обыкновенные дифференциальные уравнения, коэффициенты которых определяет выбор траектории ξ. Решение при ограничениях (2.8) — стохастическая матрица.

Пусть $v(x,\ t) = \mathbf{M}_x X(0,\ t) g(\xi(t))$, где g — ограниченная гладкая матричнозначная функция подходящей размерности. С помощью (2.5) из обратного уравнения Колмогорова для процесса $(\xi,\ X)$ выводится уравнение

$$\partial v / \partial t = \Lambda_1 v \equiv Lv - B_k D_k v - Cv. \tag{2.9}$$

Эти формулы приводят к вероятностной интерпретации известного интегрального представления для резольвенты Λ_1 (ср. [7, с. 331]).

Лемма 2.1. *Если выполнено условие* (2.6) *или* (2.8), *а гладкая функция* g: $\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^m$ *равномерно ограничена, то решение системы* (0.1) *с правой частью* $F_T = g/T$ *при* $T > 0$ *допускает представление*

$$u(x) = \int_0^\infty \mathbf{M}_x X(0,\ t)\, g(\xi(t))\, de(t/T),$$

где $de(t/T) = \exp\{-t/T\} dt/T$.

Справедливы оценки

$$\mathbf{M}_x \int_0^\infty |X(0,\ t)|\, |g(\xi(t))|\, de(t/T) \leqslant c\, |g|_\infty,$$

и при $\widehat{T} = T(\ln T)^2$

$$\left| u(x) - \mathbf{M}_x \int_0^{\widehat{T}} X(0,\ t)\, g(\xi(t))\, de(t/T) \right| \leqslant c\, |g|_\infty \exp\{-c'(\ln T)^2\},$$

$$|g|_\infty = \sup_x |g(x)|.$$

Положительные постоянные c, c' *не зависят от* T.

Доказательство представления леммы сводится к интегрированию по частям равенства

$$\Lambda_1 u = \int_0^\infty \Lambda_1 \mathbf{M}_x (Xg)_t\, de(t/T) = \int_0^\infty (\partial/\partial t)\, \mathbf{M}_x (Xg)_t\, de(t/T),$$

$$(Xg)_t = X(0,\ t) g(\xi(t)).$$

Оценки леммы следуют из (2.5) и (2.7) (или стохастичности X при условии (2.8)):

$$\left| \mathbf{M}_x \int_{\widehat{T}}^\infty (Xg)_t\, de(t/T) \right| \leqslant |g|_\infty \int_{\widehat{T}}^\infty (\mathbf{M}_x |X|^2)^{1/2}\, de(t/T) \leqslant c\, |g|_\infty \exp\{-c'\widehat{T}/T\}.$$

Пусть $\xi[s,\ t] = \{y\colon\ y = \xi(u),\ u \in [s,\ t]\}$ — отрезок траектории диффузии, а $\Xi(\widehat{T})$ — случайное множество «номеров» кубов $n + [0,\ 1]^d$, $n \in \mathbf{Z}^d$, задетых начальным отрезком траектории:

$$\Xi(\widehat{T})=\{n\in \mathbf{Z}^d\colon\ \xi[0,\ \widehat{T}]\cap(n+[0,\ 1]^d)\neq\varnothing\}. \qquad (2.10)$$

Аналогично соответствующим предложениям [1, 2] проверяется

Лемма 2.2. *При условиях* (2.1), (2.2) *число точек* (2.10) *при* $\widehat{T}=T(\ln T)^2$, $T>10$, *допускает оценку*

$$\mathbf{M}_x|\Xi(\widehat{T})|^p\leqslant c(T(\ln T)^3)^p,\ p\geqslant 0.$$

Если оператор (0.2) *самосопряжен, т. е.*

$$b_i=D_j a_{ij}/2, \qquad (2.11)$$

то константа с в оценке леммы не зависит от постоянной A_3.

В дальнейшем коэффициенты и правые части систем вида (0.1) — реализации случайных полей, заданных на некотором вероятностном пространстве (Ω, $\mathfrak{A}$, $\mathbf{Pr}$) с математическим ожиданием $\mathbf{E}=\int d\,\mathbf{Pr}$. Элементарные исходы $\omega\in\Omega$ называются состояниями среды. Условия (2.1), (2.2) и другие ограничения на коэффициенты (0.1) предполагаются выполненными для почти всех состояний среды с неслучайными постоянными. Поэтому состоянию среды сопоставляется марковский процесс (ξ, X), который описывают СДУ (2.3), (2.4), и представление леммы 2.1 для реализации решения (0.1). Чтобы не загромождать запись, зависимость коэффициентов и распределений $\mathbf{P}_x$ от состояний среды не указывается: $\mathbf{P}_x=\mathbf{P}_x^\omega$, $\mathbf{M}_x=\mathbf{M}_x^\omega$.

Оговорки «с вероятностью 1», «для почти всех состояний» и т. п., как и очевидные предположения об измеримости, ниже, как правило, опускаются.

Пусть $N\subset \mathbf{Z}^d$ — конечное множество, $k=(a_{ij},\ \ldots)$ — случайное поле, образованное коэффициентами и правыми частями (0.1).

$$\mathfrak{K}(N)=\sigma(k(x),\ x\in V(N)) \qquad (2.12)$$

есть σ-алгебра, порожденная значениями поля коэффициентов на примыкающем к N множестве $V(N)=N+[0,\ 1]^d$. Обозначение $\mathfrak{K}^+(N,\ r)=\sigma(k(x),\ x\notin N+[-r,\ r]^d)$ закрепляется за «дополнительной» σ-алгеброй, порожденной значениями поля коэффициентов вне r-окрестности N.

Представление леммы 2.1 позволяет следующим образом локализовать зависимость решения (0.1) от коэффициентов и правой части (ср. [1, 2]).

Лемма 2.3. *Справедливо разложение*

$$\mathbf{M}_x\int\limits_0^{\widehat{T}} X(0,t)\,g(\xi(t))\,de(t/T)=\sum{}^{*}G_{\widehat{T},N}(x),$$

в котором случайные векторы

$$G_{\widehat{T},N}(x)=\mathbf{M}_x\left\{\int\limits_0^{\widehat{T}} X(0,t)\,g(\xi(t))\,de(t/T);\ \Xi(\widehat{T})=N\right\}$$

измеримы относительно σ*-алгебр* (2.12), *символ* $\sum^*$ *указывает на то, что суммирование ведется по всевозможным конечным множествам* $N\subset \mathbf{Z}^d$, Ξ *задано* (2.10).

Разложение леммы — вариант формулы полной вероятности. Оговоренная в формулировке измеримость слагаемых — следствие того, что при вычислении $G_{\widehat{T},N}$ используются только значения коэффициентов на множестве $V(N)$.

Условие слабой зависимости значений коэффициентов в далеких точках используется здесь в форме условия равномерно сильного перемешивания ([8], с. 392): для конечного $N\subset \mathbf{Z}^d$, $p\geqslant 1$ и случайных величин ζ, ζ^+: $\Omega \to \mathbf{R}$, измеримых соответственно относительно σ-алгебр (2.12) $\mathfrak{K}(N)$ и $\mathfrak{K}^+(N, r)$, выполняется неравенство

$$|\mathrm{cov}(\zeta, \zeta^+)| \leqslant \varkappa(r) |\zeta|_p |\zeta^+|_q, \quad 1/p + 1/q = 1. \tag{2.13}$$

В (2.13) нормы задаются равенствами $|\zeta|_\infty = \mathrm{vrai}\sup|\zeta|$, $|\zeta|_p = (\mathbf{E}|\zeta|^p)^{1/p}$, $p < \infty$, а ковариация есть $\mathbf{E}\zeta\zeta^+ - \mathbf{E}\zeta\mathbf{E}\zeta^+$.

Как правило, убывание коэффициента перемешивания (2.13) в дальнейшем не медленнее степенного:

$$\varkappa(r) \leqslant K(1 + r)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{2.14}$$

В большинстве вычислений работы поле коэффициентов (0.1) и, следовательно, решение предполагаются однородными в следующем смысле: распределение поля

$$k_z(x, \omega) = k(x + z, \omega) \tag{2.15}$$

не зависит от сдвига на вектор целочисленной решетки $z \in \mathbf{Z}^d$. Этой однородностью обладают, например, обычные в моделях неупорядоченных микронеоднородных сред «шахматные структуры». При рассмотрении однородных в смысле (2.15) случайных полей удобны средние

$$\langle \varphi \rangle = \mathbf{E} \int\limits_{[0,1]^d} \varphi(x)\, dx.$$

§ 3. ОЦЕНКИ КОВАРИАЦИЙ: МНОГОМЕРНЫЙ «НЕДИВЕРГЕНТНЫЙ» СЛУЧАЙ

Теорема 3.1. *Пусть коэффициенты оператора* (0.1) *удовлетворяют* (2.1), (2.2) *и одному из условий* (2.6) *или* (2.8), *а правая часть имеет вид*

$$F_T^{(\alpha)}(x) = g^{(\alpha)}(x)/T, \quad |g(x)| \leqslant 1. \tag{3.1}$$

Если коэффициенты и правые части образуют случайное поле $k = (a, b, B, C, g)$, *однородное в смысле* (2.15) *и удовлетворяющее условию перемешивания* (2.13), *то при* $T > 10$ *для средних вида* (0.3) *выполняется неравенство*

$$|\mathrm{cov}([u^{(\alpha)}; R], [u^{(\beta)}; \mathbf{R}])| \leqslant c(\exp\{-c'(\ln T)^2\} + \varkappa(r) + (r^d T^2 (\ln T)^3 R^{-d})^{1/2}).$$

Оценка теоремы сохраняется при замене условия (2.2) *предположением* (2.11) *о самосопряженности оператора* (0.2); *в этом случае константы* c, c' *не зависят от постоянной* A_3 *из* (2.2).

З а м е ч а н и е 3.1. Если коэффициент перемешивания допускает степенную оценку (2.14), то при достаточно малом $\gamma > 0$, $d \geqslant 5$

$$\mathbf{D}[u^{(\alpha)}; T^{1/2-\gamma}] \leqslant cT^{-\gamma'},$$

где значение $\gamma' > 0$ определяют m, d, константы в (2.1), (2.2) и показатель в (2.14).

Вывод неравенства теоремы 3.1 аналогичен вычислениям, проведенным в [1] для одного уравнения. Его этапы оформлены ниже в виде нескольких лемм. В вычислениях всюду принято сокращение $[\varphi] = [\varphi; R]$.

Лемма 3.1. *При* $T \geqslant 10$

$$|\mathrm{cov}([u^{(\alpha)}], [u^{(\beta)}])| \leqslant c\exp\{-c'(\ln T)^2\} + \\ + \left|\sum\nolimits^* [\mathrm{cov}(G_{T,N}^{(\alpha)}(\cdot), [u^{(\beta)}])]\right|,$$

где векторы $G_{...}$ *описаны в лемме* 2.3.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы сводится к применению леммы 2.1 и линейности ковариации.

Лемма 3.2. *В условиях теоремы 3.1. при* $1 \leqslant r \leqslant R$

$$\left|\operatorname{cov}\left(G^{(\alpha)}_{\widehat{T},N}(x), [u^{(\beta)}]\right)\right| \leqslant c\left(\varkappa(r) + (\mathbf{E}[\mathbf{M}.\exp\{-2\tau/T\}])^{1/2}\right) \times$$
$$\times \mathbf{EM}_x\left\{\int_0^\infty |X(0,t)||g(\xi(t))|\,de(t/T);\ \Xi - (\widehat{T}) = N\right\},$$

где Ξ *задано* (2.10), *а* $\tau = \inf\{t\colon \xi(t) \in N + [-r-1, r+1]^d\}$ — *момент первого достижения окрестности* N.

Доказательство. По лемме 2.3 случайная величина $G^{(\alpha)}_{\widehat{T},N}$ измерима относительно $\mathfrak{K}(N)$. Чтобы воспользоваться условием перемешивания (2.13), величину $[u^{(\beta)}]$ можно заменить измеримой относительно «дополнительной» σ-алгебры $\mathfrak{K}^+(N, r)$ случайной величиной

$$\zeta^+ = \left[\mathbf{M}.\int_0^\tau X(0,t)\,g(\xi(t))\,de(t/T)\right].$$

Погрешность такой замены не превосходит ограниченной случайной величины

$$Z^+ = c[\mathbf{M}.\exp\{-2\tau/T\}]^{1/2} \leqslant c,$$

также измеримой относительно $\mathfrak{K}^+(N, r)$.

Действительно, из представления леммы 2.1 и супермартингального свойства X (2.7) (или стохастичности X в случае, когда выполнено (2.8)) следуют соотношения

$$|[u^{(\beta)}] - \zeta^+| = |[\mathbf{M}.X(0,\tau)\exp\{-\tau/T\}u^{(\beta)}(\xi(\tau))]| \leqslant$$
$$\leqslant c\,\mathbf{M}.|X(0,\tau)|^2]^{1/2}[\mathbf{M}.\exp\{-2\tau/T\}]^{1/2} \leqslant Z^+.$$

Остается воспользоваться очевидными неравенствами

$$|\operatorname{cov}(\zeta, [u^{(\beta)}])| \leqslant |\operatorname{cov}(\zeta, \zeta^+)| + \mathbf{E}|\zeta|Z^+ + \mathbf{E}|\zeta|\mathbf{E}Z^+ \leqslant$$
$$\leqslant |\operatorname{cov}(\zeta, \zeta^+)| + |\operatorname{cov}(|\zeta|, Z^+)| + 2\mathbf{E}|\zeta|\mathbf{E}Z^+.$$

При рассматриваемых в теореме 3.1. больших размерностях удовлетворительную по точности оценку входящего в формулировку леммы 3.2 момента первого достижения можно получить из следующих соображений.

Для диффузионного процесса с невырожденным производящим оператором (0.2) распределение $\mathbf{P}_x\{\xi(t) \in B\}$, $B \subset \mathbf{R}^d$, имеет при $t > 0$ плотность $p(x, t, y)$. Если коэффициенты оператора образуют однородное случайное поле, то статистические свойства поля $p_z(x, t, y) = p(x+z, t, y+z)$ не зависят от сдвигов на $z \in \mathbf{Z}^d$. Однородно и поле

$$\mu = \mu_T(x) = \int_0^\infty de(t/T)\int_{R^d} p(y,t,x)\,dy.$$

Это поле удовлетворяет условию нормировки $\langle\mu\rangle = 1$.

Действительно,

$$\langle\mu\rangle = \sum_{z\in\mathbf{Z}^d}\mathbf{E}\int_0^\infty de(t/T)\int_{[0,1]^d} dy\int_{[0,1]^d} p(y+z,t,x)\,dx,$$

а по однородности

$$\mathbf{E}\sum_{z\in\mathbf{Z}^d}\int_{[0,1]^d} dy\int_{[0,1]^d} p(y+z,t,x)\,dx = \mathbf{E}\int_{[0,1]^d} dy\int_{\mathbf{R}^d} p(y,t,x)\,dx = 1.$$

Из показательных оценок для диффузии с ограниченными коэффициентами или оценок [9] для переходных плотностей диффузий с самосопряженным производящим оператором следует, что процесс ξ субгауссовский. Это приводит (см. [2]) к оценке

$$\mathbf{M}_x \exp\{-\sigma/T\} \leqslant 1 - c/T$$

для момента остановки $\sigma = \inf\{t: \|\xi(t) - \xi(0)\| \geqslant 1\}$.

После попадания в r-окрестность множества N траектория диффузии находится в $(r+1)$-окрестности $V_r(N)$ по крайней мере до того момента, пока не отойдет от «точки входа» на единичное расстояние. Поэтому

$$\mathbf{M}_x \exp\{-\tau/T\}\, \mathbf{M}_{\xi(\tau)} (1 - \exp\{-\sigma/T\}) \leqslant \mathbf{M}_x \int_0^\infty I_{V_r(N)}(\xi(s)) de(s/T),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{M}_x \exp\{-2\tau/T\} \leqslant cT\mathbf{M}_x \int_0^\infty I_{V_r(N)}(\xi(s))\, de(s/T),$$

откуда

$$[\mathbf{M}.\exp\{-2\tau/T\}] \leqslant cTR^{-d} \int_{V_r(N)} \mu(x)\, dx.$$

Таким образом, справедливы неравенство

$$\mathbf{E}Z^+ \leqslant c\left(TR^{-d} \int_{V_r(N)} dx\right)^{1/2} \leqslant c\left(Tr^d R^{-d} |N|\right)^{1/2}$$

и вытекающая из него и леммы 3.2

Лемма 3.3. *В условиях теоремы* 3.1

$$\left|\operatorname{cov}\left(G^{(\alpha)}_{\widehat{T},N}(x), [u^{(\beta)}]\right)\right| \leqslant c\left(\varkappa(r) + \left(Tr^d R^{-d} |N|\right)^{1/2}\right) \times$$
$$\times\, \mathbf{E}\mathbf{M}_x \left\{\int_0^\infty |X(0,t)|\, de(t/T);\ \Xi(\widehat{T}) = N\right\}.$$

Доказательство теоремы 3.1. По неравенству Коши — Буняковского

$$\mathrm{M}_x\{|X|;\ \Xi = N\} \leqslant (\mathbf{M}_x\{|X|^2;\ \Xi = N\}\mathbf{P}_x\{\Xi = N\})^{1/2}.$$

Поэтому из леммы 2.1 следует неравенство

$$\sum\nolimits^* \mathbf{E}\mathbf{M}_x \left\{\int_0^\infty |X(0,t)|\, de(t/T);\ \Xi = N\right\} (1 + |N|)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\mathbf{E}\mathbf{M}_x \int_0^\infty |X(0,t)|^2\, de(t/T)\right)^{1/2} (1 + \mathbf{E}\mathbf{M}_x |\Xi(\widehat{T})|)^{1/2}.$$

Вместе с оценками лемм 3.1—3.3 это неравенство доказывает теорему.

§ 4. ОЦЕНКИ КОВАРИАЦИЙ РЕШЕНИЯ ПРИ ДИВЕРГЕНТНОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Если «скалярная» часть (0.2) оператора (0.1) дивергентна, т. е. выполнено условие (2.11), теорему 3.1 можно дополнить аналогичным результатом для случая, когда правая часть имеет вид

$$F_T^{(\alpha)}(x) = T^{-1/2} D_i h_i^{(\alpha)}(x). \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Пусть коэффициенты оператора* (0.1) *удовлетворяют условиям* (2.1), (2.11), (2.6) *и*

$$\forall V = (V^{(\alpha\beta)})\ \operatorname{tr}\{(VV^T + V^TV)\cdot(C - (1+\gamma_2)\bar{a}_{kl}B_kB_l^T/2) -$$
$$- V^TB_kVB_l^T\bar{a}_{kl}\} \geqslant 0,\ \gamma_2 \geqslant 2, \tag{4.2}$$

а правая часть вида (4.1) *допускает оценку* $|h| \leqslant 1$.

Если случайное поле $k=(a, B, C, h)$ однородно в смысле (2.15) *и удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания* (2.13), *то при $1 \leqslant r \leqslant R$ для средних* (0.3) *выполняется неравенство*

$$|\operatorname{cov}([u^{(\alpha)}; R], [u^{(\beta)}; R])| \leqslant c(\varkappa(r)+(r^d R^{-d} T^2 (\ln T)^3)^{1/2}).$$

В предположении, что B_k, C не случайны, эту оценку можно заменить более сильной, с правой частью

$$c(\varkappa(r)+(r^d R^{-d} T(\ln T)^3)^{1/2}).$$

Замечание 4.1. Из оценки теоремы 4.1 следует соотношение

$$\mathbf{D}[u^{(\alpha)}; T^{1/2-\gamma}] \leqslant cT^{-\gamma'}, \ \gamma'>0,$$

если $\gamma>0$ достаточно мало, выполнено степенное условие перемешивания (2.14), а размерность диффузии $d \geqslant 5$. При неслучайных B_k, C достаточно условия $d \geqslant 3$.

Оценка теоремы 4.1 выводится ниже по той же схеме, что и аналогичный результат [2]. Промежуточные результаты оформлены в виде лемм.

Основой вычислений является представление решения леммы 2.1, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{gathered} u(x)=\mathbf{M}_x \Gamma(0, \infty), \\ \Gamma(s, t) = \int_s^t T^{1/2} D_k h_k(\xi(u'))\, de(u'/T). \end{gathered} \tag{4.3}$$

Необходимы также некоторые априорные оценки для уравнения (0.1).

Лемма 4.1. *Если коэффициенты системы* (0.1) *с правой частью*

$$F_T^{(\alpha)} = T^{-1} g^{(\alpha)} + T^{-1/2} D_i h_i^{(\alpha)}$$

удовлетворяют условиям (2.1), (2.11), (2.6), *а g, h суммируемы в квадрате, то в предположении однородности коэффициентов решение также однородно и*

$$\langle |\nabla u|^2 + |u|^2/T \rangle \leqslant cT^{-1} \langle |g|^2 + |h|^2 \rangle.$$

Без предположения однородности

$$\int_{\mathbf{R}^d} (|\nabla u|^2 + |u|^2/T)\, dx \leqslant cT^{-1} \int_{\mathbf{R}^d} (|g|^2 + |h|^2)\, dx.$$

Доказательство (ср. [10, гл. VII, § 1]). По условию (2.6)

$$\begin{gathered} u^T(B_k D_k u + Cu) \geqslant u^T(C+C^T)u/2 - \tilde{\gamma}/2 \cdot |u^T B_k \bar{\sigma}_{k\cdot}|^2 - \\ - (2\tilde{\gamma})^{-1} |\sigma_{\cdot k} D_k u|^2 = -(2\tilde{\gamma})^{-1} a_{kl} D_k u^T D_l u + u^T(C + C^T - \\ - \tilde{\gamma} B_k B_l^T \bar{a}_{kl}/2) u \geqslant -a_{kl} D_k u^T D_l u/(2\tilde{\gamma}), \ \tilde{\gamma} = 1+\gamma. \end{gathered}$$

Отсюда для гладких однородных случайных полей с помощью равенства $\langle -u^T D_i a_{ij} D_j u \rangle = \langle a_{ij} D_i u^T D_j u \rangle$ выводится оценка

$$\langle u^T(-\Lambda_1 u + u/T) \rangle \geqslant c \langle |\nabla u|^2 + |u|^2/T \rangle.$$

Так как $\langle u^T T^{-1/2} D_k h_k \rangle = -\langle D_k u^T T^{-1/2} h_k \rangle$, из полученного выше неравенства эллиптичности обычным образом выводится существование однородного решения и априорная оценка леммы. «Неоднородный» случай также стандартен.

Лемма 4.2. *Пусть коэффициенты и правая часть* (0.1) — *однородные случайные поля, удовлетворяющие условиям теоремы* 4.1.

Тогда случайное поле (4.3) *допускает оценку*

$$\langle (\mathbf{M}.|\Gamma(0, \infty)|^2)^2 \rangle \leqslant c.$$

Доказательство. С помощью (2.5) проверяется равенство

$$|\Gamma(0,\infty)|^2 = \operatorname{tr}\int_0^\infty de(2s/T)\,X(0,s)\times$$
$$\times\left(T\int_0^\infty X(s,s+t)\,D_k h_k(\xi(s+t))\,de(t/T)\right)D_l h_l^T(\xi(s))\,X^T(0,s).$$

Поэтому по марковскому свойству (ξ, X) и (4.3)

$$v = \mathbf{M}_x|\Gamma(0,\infty)|^2 = \operatorname{tr}\int_0^\infty X(0,s)\,u(\xi(s))\,T^{1/2}D_k h_k^T(\xi(s))\,X^T(0,s)\,de(2s/T). \tag{4.4}$$

Аналогично (2.9) проверяется, что матричнозначное поле

$$w = \mathbf{M}_x X(0,t)\,\Phi(\xi(t))\,X(0,t)^T$$

удовлетворяет уравнению

$$\partial w/\partial t = \Lambda_2 w \equiv Lw - B_l D_l w - (D_k w)\,B_k^T - Cw - wC^T + B_k w B_l^T \bar{a}_{kl}. \tag{4.5}$$

Следовательно, случайное поле (4.4) имеет представление $v = \operatorname{tr} U$, где U — матричнозначное решение системы

$$-\Lambda_2 U + 2U/T = G,$$
$$G = T^{-1/2}D_k\left(uh_k^T\right) - T^{-1/2}(D_k u)\,h_k^T. \tag{4.6}$$

По условию (4.2)

$$\operatorname{tr}\left(1/2a_{kl}D_k w^T D_l w + w^T B_l D_l w + w^T D_k w B_k^T + w^T C w + w^T w C^T +\right.$$
$$\left. + w^T B_k w B_l^T \bar{a}_{kl}\right) \geqslant (1/2 - 1/(1+\gamma_2))\operatorname{tr} a_{kl} D_k w^T D_l w.$$

Благодаря этому, оператор Λ_2 удовлетворяет условию эллиптичности

$$\langle \operatorname{tr} w^T(-\Lambda_2 w)\rangle \geqslant c\langle|\nabla w|^2\rangle. \tag{4.7}$$

Из (4.7) стандартным образом получается априорная оценка

$$\langle|\nabla U|^2 + |U|^2/T\rangle \leqslant \langle|\nabla u|^2 + |u|^2/T\rangle$$

для (4.6), очевидным следствием которой является утверждение леммы.

Лемма 4.3. *При* $\widehat{T} \geqslant c_1 T$

$$\langle(\mathbf{M}.|\Gamma(0,\widehat{T})|^2)^2\rangle \leqslant c_2.$$

Доказательство. Из определения (4.3) следует, что

$$\Gamma(0,\infty) - \Gamma(0,\widehat{T}) = \exp\{-\widehat{T}/T\}\,X(0,\widehat{T})\cdot$$
$$\cdot\int_0^\infty X(\widehat{T},\widehat{T}+t)\,T^{1/2}D_k h_k(\xi(\widehat{T}+t))\,de(t/T).$$

Поэтому по марковскому свойству (ξ, X)

$$\mathbf{M}_x|\Gamma(0,\widehat{T}) - \Gamma|^2 \leqslant \exp\{-2\widehat{T}/T\}\operatorname{tr}\mathbf{M}_x X(0,\widehat{T})\cdot$$
$$\cdot\mathbf{M}_{\xi(\widehat{T})}\Gamma\Gamma^T X^T(0,\widehat{T}),\ \ \Gamma = \Gamma(0,\infty).$$

Матричнозначная функция $w = \mathbf{M}_x X(0,t)\,\Phi(\xi(t))\,X(0,t)$, $\Phi = \mathbf{M}_x\Gamma\Gamma^T$, удовлетворяет уравнению (4.5). Это позволяет стандартным рассуждением получить из (4.7) оценку

$$\langle|w|^2\rangle|_{t=\widehat{T}} \leqslant \langle|\Phi|^2\rangle + 2\int_0^{\widehat{T}}\langle\operatorname{tr} w^T\Lambda_2 w\rangle\,dt \leqslant \langle|\Phi|^2\rangle.$$

При достаточно больших $\widehat{T}$ оценка

$$\langle (\mathbf{M}.|\Gamma(0, \widehat{T})-\Gamma|^2)^2\rangle \leqslant c\exp\{-4T/\widehat{T}\}\langle(\mathbf{M}.|\Gamma|^2)^2\rangle, \tag{4.8}$$

которая доказывает лемму, следует теперь из леммы 4.2.

Оценка устойчивости решения (0.1) с дивергентными старшими членами по отношению к возмущению коэффициентов используется при доказательстве теоремы в следующей форме.

Лемма 4.4. *Пусть* u — *решение* (0.1), $\widehat{u}$ — *решение системы того же вида с коэффициентами*

$$\begin{gathered}\widehat{a}_{ij}=(1-\zeta)a_{ij}+\zeta A_{ij},\\ \widehat{B}_k=(1-\zeta)B_k,\quad \widehat{C}=(1-\zeta)C\end{gathered} \tag{4.9}$$

и правой частью $(1-\zeta)g/T+T^{-1/2}D_k(1-\zeta)h_k$, где ζ: $\mathbf{R}^d\to[0,\ 1]$ — *гладкая функция, такая что* $\zeta(x)=0$ *вне ограниченного множества* V *и всюду в* $\mathbf{R}^d$ $|\nabla\zeta(x)|\leqslant c$, *а* A_{ij} — *постоянные, удовлетворяющие условию* (2.1). *Тогда*

$$\begin{aligned}\delta=\int\limits_{\mathbf{R}^d}(|\nabla(\widehat{u}-u)|^2+|\widehat{u}-u|^2/T)\,dx\leqslant\\ \leqslant cT\int\limits_V(|\nabla u|^2+|u|^2/T+|h|^2/T)\,dx.\end{aligned}$$

Замечание 4.2. В случае, когда коэффициенты B_k, C не возмущены, оценку леммы можно заменить более сильной:

$$\delta\leqslant c\int\limits_V(|\nabla u|^2+|h|^2/T)\,dx.$$

Доказательство. Невязка $w=\widehat{u}-u$ удовлетворяет системе

$$-\widehat{\Lambda}_1w+w/T=\delta F,\quad \widehat{\Lambda}_1=1/2D_i\widehat{a}_{ij}D_j+\ldots.$$

Правая часть этой системы имеет вид

$$\delta F=1/2D_i((\widehat{a}_{ij}-a_{ij})D_ju)+\zeta(B_kD_ku+Cu-g/T-D_ih_iT^{-1/2}).$$

С помощью невозмущенных уравнений (0.1) это выражение приводится к виду

$$\delta F=1/2D_i(\zeta A_{ij}D_ju)-\zeta u/T-T^{-1/2}h_iD_i\zeta-1/2(D_i\zeta)a_{ij}D_ju.$$

Утверждение леммы следует из априорной оценки леммы 4.1.

Лемма 4.5. *В условиях теоремы* 4.1 *при больших* T *и* $\widehat{T}=T(\ln T)^2$

$$\langle\mathbf{M}.|\Gamma(0,\infty)-\Gamma(0,\widehat{T})|^2\rangle\leqslant c\exp\{-c'(\ln T)^2\}.$$

Случайная величина $\mathbf{M}.\Gamma(0,\ \widehat{T})$ *допускает разложение на* $\mathfrak{K}(N)$-*измеримые слагаемые*:

$$\mathbf{M}_x\Gamma(0,\widehat{T})=\sum{}^*\mathbf{M}_x\{\Gamma(0,\widehat{T});\ \Xi(\widehat{T})=N\},$$

суммирование ведется по всевозможным конечным подмножествам целочисленной решетки.

Доказательство. Неравенство леммы — немедленное следствие (4.8) и леммы 4.2. Разложение — вариант формулы полной вероятности.

Лемма 4.6. *В условиях теоремы* 4.1

$$\begin{gathered}|\mathrm{cov}(\mathbf{M}_x\{\Gamma^{(\alpha)}(0,\widehat{T});\ \Xi(\widehat{T})=N\},[u^{(\beta)};R])|\leqslant\\ \leqslant c(\varkappa(r)+\varepsilon)\mathbf{E}(\mathbf{M}_x\{|\widehat{\Gamma}|^2;\ \Xi(\widehat{T})=N\})^{1/2}(\mathbf{P}_x\{\Xi(\widehat{T})=N\})^{1/2},\\ \widehat{\Gamma}=\Gamma(0,\widehat{T}),\ \varepsilon^2=T|N|r^dR^{-d}.\end{gathered}$$

Доказательство. Случайную величину $[u^{(\beta)}]$ можно приблизить $\mathfrak{K}^+(N, r)$-измеримой случайной величиной $[\widehat{u}^{(\beta)}]$, где $\widehat{u}$ — описанное в лемме 4.4 решение системы (0.1) с коэффициентами и правой частью, «подправленными» по формулам (4.9) с функцией ζ, равной единице на окрестности N $V = N + [-r-2, r+2]^d$. Погрешность этой замены не превосходит

$$Z^+ = c\left(T^2 R^{-d} \int_V (|\nabla u|^2 + |u|^2/T + |h|^2/T)\, dx\right)^{1/2}; \qquad (4.10)$$

по лемме 4.1 при $1 \leqslant r \leqslant R$ $\mathbf{E}(Z^+)^2 \leqslant cTr^dR^{-d}|N|$.

Обозначая $Z = \mathbf{M}_x\{\widehat{\Gamma}^{(\alpha)};\ \Xi(\widehat{T}) = N\}$, $\tilde{Z} = [u^{(\beta)};\ R]$, $\zeta^+ = [\widehat{u}^{(\beta)};\ R]$, нетрудно проверить, что

$$|\operatorname{cov}(Z, \tilde{Z})| \leqslant |\operatorname{cov}(Z, \zeta^+)| + \mathbf{E}|Z|Z^+ + \mathbf{E}|Z|\mathbf{E}Z^+ \leqslant$$
$$\leqslant c(\varkappa(r)(\mathbf{E}Z^2)^{1/2}(\mathbf{E}\tilde{Z}^2 + \mathbf{E}(Z^+)^2)^{1/2} + (\mathbf{E}Z^2)^{1/2}(\mathbf{E}(Z^+)^2)^{1/2}).$$

При этом $\mathbf{E}\tilde{Z}^2 \leqslant \langle |u|^2 \rangle \leqslant c$, и по неравенству Коши — Буняковского

$$Z^2 \leqslant \mathbf{M}_x\{|\widehat{\Gamma}|^2;\ \Xi(\widehat{T}) = N\}\mathbf{P}_x\{\Xi(\widehat{T}) = N\}.$$

Доказательство теоремы 4.1. По леммам 4.5—4.6 при $\widehat{T} = T(\ln T)^2$

$$|\operatorname{cov}([u^{(\alpha)}],\ [u^{(\beta)}])| \leqslant c\exp\{-c'(\ln T)^2\} +$$
$$+ \mathbf{E}\left[\sum{}^* (\mathbf{M}.\{|\widehat{\Gamma}|^2;\ \Xi(\widehat{T}) = N\}\mathbf{P}.\{\Xi(\widehat{T}) = N\})^{1/2}\right](\varepsilon + \varkappa(r)).$$

Остается воспользоваться оценками лемм 4.3 и 2.2:

$$\sum{}^* \varepsilon(N)^2 \mathbf{P}_x\{\Xi = N\} \leqslant Tr^dR^{-d}T(\ln T)^3,\quad \mathbf{E}\left[\sum{}^* \mathbf{M}.\{|\widehat{\Gamma}|^2; \Xi = N\}\right] = \langle \mathbf{M}.|\widehat{\Gamma}|^2 \rangle \leqslant c.$$

Более сильная оценка замечания 4.1 получается с помощью замечания 4.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Юринский В. В.** Об усреднении диффузии в случайной среде // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 5.— С. 76—85.
2. **Юринский В. В.** Об усреднении симметричной диффузии в случайной среде // Сиб. мат. журн.— 1986.— Т. 27, № 4.— С. 167—180.
3. **Юринский В. В.** О погрешности усреднения симметричных линейных эллиптических систем.— Новосибирск, 1987.— 50 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 3).
4. **Stroock D. W.** On certain systems of parabolic equations // Communs.— Pure and Appl. Math.— 1970.— V. 23, N 3.— P. 447—457.
5. **Bensoussan A.** Systems of partial differential equations and stochastic control // Le Matematiche.— 1981.— V. 36, N 1.— P. 13—32.
6. **Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.** Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М.: Наука, 1983.— 384 с.
7. **Иосида К.** Функциональный анализ.— М.: Мир, 1967.— 624 с.
8. **Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.** Независимые и стационарно связанные случайные величины.— М.: Наука, 1965.— 524 с.
9. **Aronson D. G.** Non-negative solutions of linear parabolic equations // Ann. scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.— 1968.— V. 22, N 4.— P. 607—694.
10. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1973.— 576 с.