При $m \to \infty$ будем иметь

$$|\varphi_0[f(z)] - z| \leqslant A\varepsilon r_0 \frac{1}{1-\mu q}\frac{1}{1-q}. \tag{2.4}$$

Заметим, что $\frac{1}{1-q} = \frac{S+r_0}{r_0}$, а при

$$\varepsilon \leqslant \frac{r_0}{6a(r_0+2S)} \text{ еще и } \frac{1}{1-\mu q} \leqslant 2\frac{S+r_0}{r_0}.$$

Подставляя это в (2.4), получаем требуемую в теореме оценку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаврентьев М. А.** Об устойчивости в теореме Лиувилля // Докл. АН СССР.— 1954.— Т. 95, № 5.— С. 925—926.
2. **John F.** Rotation and strain // Communs Pure and Appl. Math.— 1961.— V. 14, N 3.— P. 391—413.
3. **Белинский П. П.** О порядке близости пространственного квазиконформного отображения к конформному // Сиб. мат. журн.— 1973.— Т. 14, № 3.— С. 475—483.
4. **Решетняк Ю. Г.** Теоремы устойчивости в геометрии и анализе.— Новосибриск: Наука, Сиб. отд-ние, 1982.
5. **Копылов А. П.** Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. I. Концепция устойчивости. Теорема Лиувилля // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 23, № 2.— С. 83—111.
6. **Копылов А. П.** То же. II. Устойчивость классов голоморфных отображений // Там же.— 1982.— Т. 23, № 4.— С. 65—89.
7. **Копылов А. П.** То же. III. Свойства отображений, близких к голоморфным // там же.— 1983.— Т. 24, № 3.— С. 70—91.
8. **Гуров Л. Г.** Оценки устойчивости лоренцевых отображений // Там же.— 1974.— Т. 15, № 3.— С. 498—515.
9. **Гуров Л. Г.** Об устойчивости преобразований Лоренца в пространстве W^1_p// Там же.— 1980.— Т. 21, № 2.— С. 51—60.

В. И. ДИСКАНТ

УТОЧНЕНИЯ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА И ТЕОРЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Посвящается
Юрию Григорьевичу Решетняку

К основным результатам теории смешанных объемов выпуклых тел в $\mathbf{R}^n$ относятся неравенство Брунна и его следствия — неравенства Минковского между смешанными объемами, теорема Минковского о единственности выпуклого многогранника с заданными площадями граней и нормалями к ним, теорема Минковского о единственности регулярного выпуклого тела с заданной функцией кривизны $(n-1)$-го порядка. Особый интерес представляет вопрос о том, в каком случае в неравенстве Брунна и изопериметрическом неравенстве Минковского стоит знак равенства. Отмеченные выше теоремы единственности Минковского являются прямыми следствиями ответа на этот вопрос [1].

А. Д. Александров в [2—5] обобщил эти результаты как по размерности, так и по содержанию. Он доказал обобщенное неравенство Брунна, решил вопрос о наличии в нем знака равенства, доказал теорему единственности выпуклого тела с заданной функцией кривизны любого порядка. При этом А. Д. Александров существенно расширил понятие функции кривизны, сделав его пригодным не только для регулярного, но и для произвольного выпуклого тела.

В настоящей статье усилены некоторые из приведенных выше результатов Брунна, Минковского, Александрова. Так, основным результатом § 1 является неравенство, уточняющее изопериметрическое неравенство Минковского. В этом же параграфе получены и уточнения неравенств изопериметрического типа. Следствиями этих уточнений являются обобщения неравенств Боннезена [6], Хадвигера [7], Дингхаса [8], Виллься [9], теоремы Линделефа [10].

В § 2 доказаны теоремы устойчивости решений уравнений Брунна и Минковского, уравнений, отвечающих случаю равенства в неравенствах Брунна и Минковского. Кроме того, доказана теорема устойчивости в проблеме Минковского как в постановке Александрова, так и в постановке Минковского. Теоремы устойчивости этого параграфа фактически являются следствиями уточнения изопериметрического неравенства Минковского, установленного в § 1.

В § 3 доказываются теоремы устойчивости, соответствующие следующим теоремам единственности: теореме единственности решения обобщенных уравнений Брунна и Минковского для шара, теореме единственности в проблеме Александрова для тела, одна из проекций которого — шар, теореме единственности решения уравнения Брунна для $(n-1)$-го интеграла кривизны, теореме единственности в проблеме Александрова для $(n-2)$-й функции кривизны.

В § 4 приводится теорема устойчивости в проблеме Христоффеля, доказанная А. В. Погореловым [11], и дается краткий обзор других теорем устойчивости в теории выпуклых тел.

Большинство результатов, изложенных в § 1—3 настоящей статьи, получено в работах автора [12—20].

§ 1. Уточнения изопериметрического неравенства и его аналогов

1.1. Изопериметрическое неравенство, его аналоги. Уточнения Боннезена, Хадвигера, Дингхаса.

Выпуклым телом в $\mathbf{R}^n$ будем называть замкнутое ограниченное выпуклое множество $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$. Выпуклое тело, содержащее внутренние точки, будем называть *собственным*.

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_s$ — выпуклые тела в $\mathbf{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — неотрицательные числа. Следуя Минковскому определим линейную комбинацию тел $H_1, H_2, \ldots, H_s$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. Именно, полагая, что в $\mathbf{R}^n$ выбрано начало координат, рассмотрим множество H всех точек, которые являются концами радиус-векторов вида $\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \ldots + \lambda_s\bar{x}_s$, где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s$ — радиус-векторы точек тел $H_1, H_2, \ldots, H_s$ соответственно. Нетрудно видеть, что множество H — выпуклое тело в $\mathbf{R}^n$. Положим $H = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots + \lambda_s H_s$. Изменение положения начала координат в $\mathbf{R}^n$ влечет параллельный перенос тела H.

Минковский показал, что объем $V(H)$ тела $H = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i H_i$ является однородным многочленом степени n относительно переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $\ldots, \lambda_s$, т. е.

$$V(H) = \sum_{i_1=1}^{s} \ldots \sum_{i_n=1}^{s} V_{i_1 \ldots i_n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n}, \tag{1.1}$$

где коэффициенты $V_{i_1 \ldots i_n}$ однозначно определяются следующим требованием: они не должны зависеть от порядка индексов. Коэффициент $V_{i_1 \ldots i_n}$ зависит только от тел $H_{i_1}, \ldots, H_{i_n}$. Его записывают в виде $V(H_{i_1}, \ldots, H_{i_n})$ и называют *смешанным объемом тел* $H_{i_1}, \ldots$ $\ldots, H_{i_n}$.

Пусть A и B — выпуклые тела в $\mathbf{R}^n$. Объем $V(A+\lambda B)$ тела $A+\lambda B$, $\lambda > 0$, запишется согласно (1.1) в виде

$$V(A+\lambda B) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k V_k(A, B), \tag{1.2}$$

где $V_k(A, B)$ — k-й смешанный объем тел A и B. Из (1,2) имеем

$$nV_1(A, B) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{V(A + \lambda B) - V(A)}{\lambda}.$$

Если $B = E$, где E — единичный шар в $\mathbf{R}^n$ с центром в начале координат, то $A + \lambda E$ — замкнутая λ-окрестность тела A, а $V(A + \lambda E) - V(A)$ — объем оболочки толщины λ вокруг тела A. В этом случае

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{V(A + \lambda E) - V(A)}{\lambda} = F(A),$$

где $F(A)$ — площадь поверхности тела A. Следовательно, $F(A) = nV_1(A, E)$. Поэтому величину $nV_1(A, B) = F(A, B)$ называют *площадью поверхности тела A относительно тела B.*

Классическое изопериметрическое неравенство для тела имеет вид

$$F^n - n^n v_n V^{n-1} \geqslant 0, \tag{1.3}$$

где $F = F(A)$, $v_n = V(E)$, $V = V(A)$. В случае $n = 2$ неравенство (1.3) запишется в виде $l^2 - 4\pi S \geqslant 0$, где l — периметр, S — площадь выпуклой фигуры A в $\mathbf{R}^2$.

Изопериметрическое неравенство Минковского для тел A и B имеет вид

$$V_1^n(A, B) - V^{n-1}(A) V(B) \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Отметим, что неравенство (1.3) является частным случаем (1.4): оно получается из (1.4) заменой тела B на шар E. В дальнейшем именно неравенство (1.4) будем называть *изопериметрическим.*

Кроме изопериметрического неравенства будут рассмотрены и его аналоги вида

$$V_{m+k}^{n-m}(A, B) - V_m^{n-m-k}(A, B) V^k(B) \geqslant 0, \tag{1.5}$$

где $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, $0 \leqslant m \leqslant n - 2$, $1 \leqslant k + m \leqslant n - 1$. Неравенства (1.5) являются следствиями более общих неравенств Александрова [3]. Изопериметрическое неравенство (1.4) получается из (1.5) при $m = 0$, $k = 1$.

Для классического изопериметрического неравенства (1.3) был получен ряд уточнений. Так, Боннезен доказал [6] в случае $n = 2$ неравенства

$$l^2 - 4\pi S \geqslant (l - 2\pi r)^2, \tag{1.6}$$

$$l^2 - 4\pi S \geqslant (2\pi R - l)^2, \tag{1.7}$$

$$l^2 - 4\pi S \geqslant \pi^2 (R - r)^2, \tag{1.8}$$

где r — радиус максимального вписанного в A круга, R — радиус минимального описанного около A круга. Хадвигер [7] в случае $n = 3$ уточнил неравенство (1.3), соответствующее неравенству (1.6):

$$F^{3/2} - \sqrt{36\pi} V \geqslant (\sqrt{F} - r\sqrt{4\pi})^3.$$

Дингхас [8] обобщил неравенство (1.6) для любого $n \geqslant 2$ в виде

$$F^{\frac{n}{n-1}} - (n^n v_n)^{\frac{1}{n-1}} V \geqslant \left(F^{\frac{1}{n-1}} - r(nv_n)^{\frac{1}{n-1}}\right)^n. \tag{1.9}$$

1.2. Уточнения изопериметрического неравенства и его аналогов.

Обозначим через $q = q(A, B)$ *коэффициент вместимости тела B в тело A*, т. е. наибольшее из чисел α, для которых тело αB параллельным сдвигом помещается в A, через $Q = Q(A, B)$ — *коэффициент охвата тела A телом B*, т. е. наименьшее из чисел β, для которых тело A параллельным сдвигом помещается в тело βB. Если $B = E$, то $q(A, E) = r$, а $Q(A, E) = R$. Тогда при $m = 0$ и любом $k (1 \leqslant k \leqslant n - 1)$ для собственных тел A и B имеют место следующие уточнения неравенств (1.5):

$$V_k^{\frac{n}{n-k}}(A, B) - V(A)\,V^{\frac{k}{n-k}}(B) \geqslant \left[V_k^{\frac{1}{n-k}}(A, B) - qV^{\frac{1}{n-k}}(B)\right]^n, \quad (1.10)$$

$$V_k^{\frac{n}{n-k}}(B, A) - V(B)\,V^{\frac{k}{n-k}}(A) \geqslant \left[V_k^{\frac{1}{n-k}}(B, A) - \frac{1}{Q}\,V^{\frac{1}{n-k}}(A)\right]^n. \quad (1.11)$$

Доказательство неравенства (1.10). Пусть Ω — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$ с центром в начале координат, Ω' — замкнутое множество на Ω, не лежащее в одной замкнутой полусфере, $\bar{u}$ — единичный радиус-вектор (конец вектора $\bar{u}$ — точка, принадлежащая Ω, ее также будем обозначать через $\bar{u}$), $H^*(\bar{u})$ — непрерывная положительная функция на Ω'. Определим с помощью функции $H^*(\bar{u})$ собственное выпуклое тело H так, как это делает А. Д. Александров в [4]. А именно, для каждого $\bar{u} \in \Omega'$ рассмотрим плоскость, отстоящую от начала координат на расстоянии $H^*(\bar{u})$, и полупространство, ограниченное этой плоскостью и содержащее начало координат. Пересечение всех таких полупространств, т. е. полупространств, задаваемых неравенствами $\bar{u}\bar{x} \leqslant H^*(\bar{u})$, $\bar{u} \in \Omega'$, $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, и является собственным выпуклым телом H, определяемым функцией $H^*(\bar{u})$.

Так как рассматриваемые в дальнейшем величины инвариантны относительно параллельных сдвигов выпуклых тел, будем считать, что начало координат лежит внутри тела B и $qB \subset A$.

Пусть $H_A(\bar{u})$ и $H_B(\bar{u})$ — опорные функции тел A и B соответственно. Функции $H_A(\bar{u})$ и $H_B(\bar{u})$ непрерывны на Ω и $H_A(\bar{u}) \geqslant qH_B(\bar{u})$. Поэтому функция $N_\sigma^*(\bar{u}) = H_A(\bar{u}) - \sigma H_B(\bar{u})$ при $\sigma \in [0, q)$ непрерывна и положительна на Ω. Функция $N_\sigma^*(\bar{u})$ определяет собственное выпуклое тело N_σ.

Найдем вариацию $\delta V(N_\sigma^*)$ объема тела N_σ по параметру σ. Для этого воспользуемся леммой Александрова [4]: объем тела H, определяемого непрерывной положительной функцией $H^*(\bar{u})$, заданной на Ω', имеет первую вариацию

$$\delta V(H^*) = \int_{\Omega'} \delta H^*(\bar{u})\,F(H, d\omega),$$

где $F(H, \omega)$ — поверхностная функция тела H [2]. При этом под вариацией объема понимается

$$\lim_{t\to 0} \frac{V(H^* + t\delta H^*) - V(H^*)}{t}.$$

В нашем случае $\Omega' = \Omega$ и $\delta H^*(\bar{u}) = -H_B(\bar{u})$. Следовательно,

$$\delta V(N_\sigma^*) = \frac{dV(N_\sigma^*)}{d\sigma} = -\int_{\Omega'} H_B(\bar{u})\;F(N_\sigma, d\omega) = -nV_1(N_\sigma, B).$$

Здесь мы воспользовались выражением для $V_1(N_\sigma, B)$ через $H_B(\bar{u})$ и $F(N_\sigma, \omega)$, полученным А. Д. Александровым в [5]. Интегрируя последнее равенство по σ и учитывая, что $V(N_0^*) = V(H_A) = V(A)$, $V(N_q^*) = 0$, получим

$$V(A) = n\int_0^q V_1(N_\sigma, B)\,d\sigma. \quad (1.12)$$

Из неравенств (1.5), полагая $m = 1$ и заменяя k на $k-1$, A на N_σ, выводим

$$V_k^{\frac{n-1}{n-k}}(N_\sigma, B) - V_1(N_\sigma, B)\,V^{\frac{k-1}{n-k}}(B) \geqslant 0,$$

откуда

$$V_1(N_\sigma, B) \leqslant \left[V_k^{\frac{1}{n-k}}(N_\sigma, B)\right]^{n-1} \Big/ V^{\frac{k-1}{n-k}}(B) \tag{1.13}$$

при $k = \overline{1, n-1}$.

Согласно обобщенной теореме Брунна функция $f(t) = V_k^{\frac{1}{n-k}}(H_t, B)$ (где $H_t = (1-t)L + tK$, K и L — выпуклые тела в $\mathbf{R}^n$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$) при $0 \leqslant t \leqslant 1$ является выпуклой вверх [21]. Из этой теоремы имеем

$$V_k^{\frac{1}{n-k}}(N_\sigma + \sigma B, B) \geqslant V_k^{\frac{1}{n-k}}(N_\sigma, B) + \sigma V^{\frac{1}{n-k}}(B).$$

Так как опорная функция тела $N_\sigma + \sigma B$ равна $N_\sigma(\bar u) + \sigma H_B(\bar u)$, где $N_\sigma(\bar u)$ — опорная функция N_σ, и на Ω выполняется неравенство $N_\sigma(\bar u) + \sigma H_B(\bar u) \leqslant N_\sigma^*(\bar u) + \sigma H_B(\bar u) = H_A(\bar u)$, то тело $N_\sigma + \sigma B$ лежит в теле А. Отсюда, пользуясь свойством монотонности смешанного объема по каждому из своих аргументов [22], имеем $V_k(N_\sigma + \sigma B, B) \leqslant V_k(A, B)$. Из двух последних неравенств следует

$$V_k^{\frac{1}{n-k}}(N_\sigma, B) \leqslant V_k^{\frac{1}{n-k}}(A, B) - \sigma V^{\frac{1}{n-k}}(B).$$

Подставляя эту оценку в (1.13), а затем оценку, полученную для $V_1(N_\sigma, B)$,— в (1.12), выводим

$$V(A) \leqslant \frac{n}{V^{\frac{k-1}{n-k}}(B)} \int_0^q \left(V_k^{\frac{1}{n-k}}(A, B) - \sigma V^{\frac{1}{n-k}}(B)\right)^{n-1} d\sigma. \tag{1.14}$$

Интегрируя правую часть (1.14), придем к (1.10). □

Доказательство неравенства (1.11). Условия, которым удовлетворяют тела A и B в (1.10), одинаковы. Поэтому, меняя местами A и B в (1.10), придем к неравенству

$$V_k^{\frac{n}{n-k}}(B, A) - V(B)\, V^{\frac{k}{n-k}}(A) \geqslant \left[V_k^{\frac{1}{n-k}}(B, A) - q(B, A)\, V^{\frac{1}{n-k}}(A)\right]^n.$$

Легко убедиться, что $q(B, A) = 1/Q(A, B) = 1/Q$ [23]. Заменяя в последнем неравенстве $q(B, A)$ на $1/Q$, получим (1.11). □

Замечание (об уточнении (1.5) при $m > 0$). Неравенство (1.5) можно получить из неравенства

$$V_k^n(A, B) - V^{n-k}(A)\, V^k(B) \geqslant 0$$

заменой n на $n-m$ и уменьшением на m числа мест, которые занимает тело A в смешанных объемах $V_k(A, B)$ и $V(A) = V_0(A, B)$. Тогда естественно поставить вопрос, имеет ли место неравенство

$$V_{m+k}^{\frac{n-m}{n-m-k}}(A, B) - V_m(A, B)\, V^{\frac{k}{n-m-k}}(B) \geqslant \left[V_{m+k}^{\frac{1}{n-m-k}}(A, B) - qV^{\frac{1}{n-m-k}}(B)\right]^{n-m}, \tag{1.15}$$

которое уточняет (1.5) и получается из (1.10) заменой n на $n-m$ и уменьшением на m числа мест, занимаемых A в $V_k(A, B)$ и $V(A)$. Покажем на примере, что при $m > 0$ такое неравенство места не имеет. Введем в $\mathbf{R}^n$ декартову прямоугольную систему координат $Ox_1 \ldots x_n$. В плоскости $x_n = 0$ возьмем единичный $(n-1)$-мерный куб Q_{n-1}, центр которого совпадает с началом координат, а ребра параллельны осям координат $Ox_1, \ldots, Ox_{n-1}$. Пусть n-мерный единичный куб Q_n в $\mathbf{R}^n$ также имеет своим центром начало координат и ребра, параллельные осям координат. Возьмем $A = Q_{n-1}$, $B = Q_n$. Тогда тело $A + \lambda B (\lambda > 0)$ будет n-мерным прямым параллелепипедом, ребра которого параллельны осям координат, причем одно из них равно λ, остальные равны $1+\lambda$. Тогда $V(A+\lambda B)=\lambda(1+\lambda)^{n-1}$. Отсюда и из равенства $V(A+\lambda B)=$ $=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k V_k(A, B)$ получаем, что $V_0(A, B)=V(A)=0$, $C_{n-1}^k=$ $=C_n^{k+1} V_{k+1}(A, B)$ при $0\leqslant k\leqslant n-1$. Следовательно, в этом примере $V_k(A, B)\neq 0$ при $1\leqslant k\leqslant n$. В частности, $V(B)=1$. Очевидно, что $q=$ $=q(A, B)=0$. Поэтому в неравенстве (1.15) правая часть равна $\overline{V_{m+k}^{\frac{n-m}{n-m-k}}}(A, B)$, в то время как левая часть при $m>0$ строго меньше этой величины.

В приведенном примере тело A несобственное. Избавиться от этого ограничения можно так. Рассмотрим тело $A_\alpha=Q_{n-1}+\alpha Q_n(\alpha>0)$. При $\alpha\to+0$ тело A_α приближается к телу A, $V_{k+m}(A_\alpha, B)\to V_{k+m}(A, B)$, $V_m(A_\alpha, B)\to V_m(A, B)$, $q(A_\alpha, B)\to 0$, так как смешанные объемы непрерывны от своих аргументов, а $q(A_\alpha, B)=\alpha$. Следовательно, α можно взять таким, чтобы левая часть в (1.15) была меньше правой.

Отметим, что к (1.15) можно прийти так же, как и к (1.10), предполагая, что справедливы равенства $\frac{dV_m(N_\sigma, B)}{d\sigma}=-(n-m)V_{m+1}(N_\sigma, B)$ и $V_m(N_\sigma, B)|_{\sigma=q}=0$ при $m>0$. Условие $V_m(N_\sigma, B)|_{\sigma=q}=0$ в приведенном примере, когда в качестве A взято A_α, не выполняется. Если за тело A взять пирамиду, основанием которой служит Q_{n-1}, а вершина находится в точке $M(0, \ldots, 0, \alpha)$, лежащей на оси $Ox_n(\alpha>0)$, то при достаточно малом α неравенство (1.15) не будет иметь места, а условие $V_m(N_\alpha, B)|_{\sigma=q}=0$ будет выполнено. Это означает, что равенство $\frac{dV_m(N_\sigma, B)}{d\sigma}=-(n-m)V_{m+1}(N_\sigma, B)$ при $m>0$ не имеет места. □

1.3. Обобщение неравенств Боннезена, Хадвигера, Дингхаса.

Покажем, что в специальном случае, когда $B=E$, из неравенств (1.10), (1.11) следуют неравенства Боннезена, Хадвигера, Дингхаса, приведенные в п. 1.1. Положим $V_{n-k}(A, E)=V_k(A)=V_k$. Пусть $n=2$. Тогда $V(A+\lambda E)=V_2+2\lambda V_1+\lambda^2 V_0$. С другой стороны, известно, что $S(A+\lambda E)=S+\lambda l+\lambda^2\pi$. Поэтому $V_2=S$, $2V_1=l$, $V_0=\pi$. Полагая в (1.10) $n=2$, $B=E$, $k=1$, $q=r$, получаем

$$V_1^2-V_2V_0\geqslant(V_1-rV_0)^2 \Leftrightarrow l^2-4\pi S\geqslant(l-2\pi r)^2.$$

Полагая в (1.11) $n=2$, $k=1$, $B=E$, $Q=R$, получаем

$$V_1^2-V_0V_2\geqslant\left(V_1-\frac{1}{R}V_2\right)^2 \Leftrightarrow l^2-4\pi S\geqslant(2\pi R-l)^2.$$

Так как неравенство (1.8) — алгебраическое следствие (1.6) и (1.7), то неравенства Боннезена (1.6) — (1.8) являются следствиями (1.10) и (1.11).

Пусть $n=3$. Тогда $V(A+\lambda E)=V_3+3\lambda V_2+3\lambda^2 V_1+\lambda^3 V_0$. С другой стороны, $V(A+\lambda E)=V+\lambda F+\lambda^2 M+(4/3)\pi\lambda^3$, где M — интеграл средней кривизны тела A [24]. Для *регулярного тела* A, т. е. тела, имеющего в каждой точке своей поверхности определенные и нигде не равные нулю главные радиусы кривизны R_1 и R_2, величина M равна $\frac{1}{2}\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{R_1}+\right.$ $\left.+\frac{1}{R_2}\right)d\omega$. Из выражений для $V(A+\lambda E)$ имеем $V_3=V$, $3V_2=F$, $3V_1=$ $=M$, $V_0=(4/3)\pi$. Полагая в (1.10) $n=3$, $k=1$, $B=E$, $q=r$, приходим к неравенству

$$V_2^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{\frac{1}{2}}V\geqslant\left(V_2^{\frac{1}{2}}-r\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3,$$

которое после умножения на $\sqrt{27}$ совпадает с неравенством Хадвигера из п. 1.1.

Полагая в (1.10) $n=3$, $k=2$, $B=E$, $q=r$, получаем

$$V_1^3-\left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 V\geqslant\left(V_1-r\frac{4}{3}\pi\right)^3,$$

что после умножения на 27 приводит к новому неравенству

$$M^3-48\pi^2V\geqslant(M-4\pi r)^3, \tag{1.16}$$

уточняющему известный аналог изопериметрического неравенства

$$M^3-48\pi^2V\geqslant 0.$$

Полагая в (1.11) $n=3$, $k=1$, $B=E$, $Q=R$, получим

$$V_1^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\pi V^{\frac{1}{2}}\geqslant\left(V_1^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{R}V^{\frac{1}{2}}\right)^3$$

или

$$M^{\frac{3}{2}}-\sqrt{48\pi^2}V^{\frac{1}{2}}\geqslant\left(M^{\frac{1}{2}}-\frac{(3V)^{\frac{1}{2}}}{R}\right)^3. \tag{1.17}$$

Полагая в (1.11) $n=3$, $k=2$, $B=E$, $Q=R$, получим

$$V_2^3-\frac{4}{3}\pi V^2\geqslant\left(V_2-\frac{1}{R}V\right)^3 \tag{1.18}$$

или

$$F^3-36\pi V^2\geqslant\left(F-\frac{3V}{R}\right)^3.$$

Если $n(n\geqslant 2)$ произвольно, положив $B=E$, $q=r$, $k=1$ и заменив $nV_1(A,E)$ на F в (1.10), придем к неравенству (1.9) Дингхаса. Таким образом, (1.10), (1.11) обобщают неравенства Боннезена, Хадвигера, Дингхаса и содержат ряд новых неравенств даже в случае, когда $B=E$, таких как (1.16)—(1.18).

Вновь обратимся к (1.15). Если бы (1.15) имело место при $m>0$, то, полагая в нем $n=3$, $m=1$, $k=1$, $B=E$, $q=r$, мы пришли бы к неравенству

$$V_1^2-V_2\left(\frac{4}{3}\pi\right)\geqslant\left(V_1-r\frac{4}{3}\pi\right)^3\Leftrightarrow M^2-4\pi F\geqslant(M-4\pi r)^2. \tag{1.19}$$

Это неравенство также не имеет места. Действительно, если $A=Q_2$, где Q_2 — квадрат в плоскости Ox_1x_2, то $r=0$, $F=2$ и левая часть в (1.19) меньше правой. Этот же пример опровергает и неравенство

$$M^2-4\pi F\geqslant 4\pi^2(R-r)^2,$$

примыкающее к неравенству (1.19) и приведенное в приложении к книге [24] в качестве неравенства, обобщающего (1.8) в случае $n=3$. Имеет ли место неравенство

$$M^2-4\pi F\geqslant(4\pi R-M)^2,$$

обобщающее (1.7) в случае $n=3$, автору не известно.

1.4. Условие равенства в неравенстве

$$V_k^n(A,B)\geqslant V^{n-k}(A)V^k(B). \tag{1.20}$$

Если в (1.20) стоит знак равенства, то левая часть в (1.10) обращается в нуль. Так как правая часть в (1.10) неотрицательна, то и она равна нулю. Следовательно,

$$V_k^{\frac{1}{n-k}}(A,B)-qV^{\frac{1}{n-k}}(B)=0\Leftrightarrow V_k(A,B)-q^{n-k}V(B)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow q^kV_k(A,B)-q^nV(B)=0\Leftrightarrow V_k(A,qB)=V(qB).$$

Поэтому из (1.20) для тел A и qB имеем

$$V_k^n(A,qB)\geqslant V^{n-k}(A)\,V^k(qB)\Rightarrow V^n(qB)\geqslant V^{n-k}(A)\,V^k(qB)\Rightarrow V(qB)\geqslant V(A).$$

Из $qB\subset A$ имеем $V(qB)\leqslant V(A)$. Таким образом, $V(A)=V(qB)$. Последнее равенство вместе с включением $qB\subset A$ для собственных тел A и B возможно лишь, когда $A=qB$. Итак, знак равенства в (1.20) имеет место тогда и только тогда, когда A и B гомотетичны.

1.5. Неравенство Виллься. Неравенства Боннезена (1.6), (1.7) можно переписать в виде

$$rl\geqslant S+\pi r^2, \tag{1.21}$$
$$Rl\geqslant S+\pi R^2. \tag{1.22}$$

Вилльс предположил [9], что для собственного тела A в случае $n\geqslant 3$ неравенство (1.21) допускает обобщение в виде

$$rF\geqslant V+(n-1)\,V_i, \tag{1.23}$$

где V_i — объем шара, вписанного в тело A. Герц [25], доказал, что при условии

$$\frac{V_i}{V}\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^n}$$

такое обобщение имеет место. В указанной работе Герц на примере тела, близкого к отрезку, показал, что неравенство $RF\geqslant V+(n-1)\,V_u$, обобщающее (1.22), в котором V_u — объем описанного около A шара, при $n\geqslant 3$ не имеет места.

Покажем, что

(а) *из* (1.10) *при* $k=1$ *вытекает неравенство*

$$qnV_1(A,\ B)\geqslant V(A)+(n-1)\,V(qB), \tag{1.24}$$

которое при $B=E$ *совпадает с* (1.23) (следовательно, неравенство Виллься справедливо без каких-либо ограничений);

(б) *из* (1.11) *при* $k=1$ *вытекает неравенство*

$$nV_1(QB,\ A)\geqslant V(QB)+(n-1)\,V(A), \tag{1.25}$$

которое при $n=2$, $B=E$ *совпадает с неравенством Боннезена* (1.22) (следовательно, обобщает его на случай $n\geqslant 3$; в частности, при $n=3$ (1.25) имеет вид $R^2M\geqslant V_u+2V$).

Доказательство неравенств (1.24), (1.25). Покажем, что (1.24) является алгебраическим следствием (1.10) при $k=1$. Рассмотрим функцию $\varphi_n(x)=(x-a)^n-x^n+nx^{n-1}a$, $a>0$, $n\geqslant 2$, и покажем, что она на промежутке $[a,\infty)$ возрастает. Для $\varphi_2(x)=a^2$ это очевидно. Предположим, что $\varphi_{n-1}(x)$ при $n\geqslant 3$ возрастает на $[a,\infty)$. Тогда $\varphi_n(x)$ также возрастает на этом промежутке. Действительно, из $\varphi_{n-1}(a)=(n-2)a^{n-1}>0$ следует, что $\varphi_{n-1}(x)>0$ при $x\in[a,\ \infty)$. Так как $\varphi_n'(x)=n\varphi_{n-1}(x)$, то $\varphi_n(x)$ возрастает на $[a,\ \infty)$.

Положим $x=V_1^{1/(n-1)}(A,B)$, $a=qV^{1/(n-1)}(B)$. Из условия $qB\subset A$ вытекает, что $V_1(A,\ B)\geqslant q^{n-1}V(B)$, поэтому $x\geqslant a$. Оценим снизу правую часть в (1.10) при $k=1$. Имеем $(x-a)^n=x^n-nx^{n-1}a+\varphi_n(x)\geqslant x^n-nx^{n-1}a+\varphi_n(a)=x^n-nx^{n-1}a+(n-1)a^n\geqslant V_1^{n/(n-1)}(A,B)-nV_1(A,B)\,qV^{1/(n-1)}(B)+(n-1)\,q^nV^{n/(n-1)}(B)$. Заменяя правую часть в (1.10) при

$k=1$ полученной оценкой и сокращая на $V^{1/(n-1)}(B)$, приходим к (1.24).

Неравенство (1.25) получается из (1.24) заменой A на B и q на $1/Q$. □

1.6. Уточнение аналогов изопериметрического неравенства с учетом особенностей на границе выпуклого тела.

Пусть множество $\Omega' \subset \Omega$, положительная функция $H^*(\bar{u})$ на Ω', выпуклое тело H имеют тот же смысл, что и в п. 1.3. Будем писать $H = (\Omega', H^*(\bar{v}))$. Наряду с заданным так телом H рассмотрим тело $\bar{B} = (\Omega', H_B^*(\bar{u}))$, где $H_B^*(\bar{u})$ — ограничение опорной функции тела B на Ω'. Функция $H_B^*(\bar{u})$ непрерывна на Ω', так как $H_B(\bar{u})$ непрерывна на Ω, и положительна на Ω', так как начало координат лежит внутри B. Поэтому пара $(\Omega', H_B^*(\bar{u}))$ определяет собственное выпуклое тело $\bar{B}$. Отметим, что $B \subset \bar{B}$.

Имеет место неравенство

$$V_k^{\frac{n}{n-k}}(H, B) - V(H)\, V^{\frac{k-1}{n-k}}(B)\, V_k^{\frac{1}{n-k}}(\bar{B}, B) \geqslant \left[V_k^{\frac{1}{n-k}}(H, B) - qV_k^{\frac{1}{n-k}}(\bar{B}, B)\right]^n, \tag{1.26}$$

где $q = q(H, B)$.

Доказательство неравенства (1.26). Покажем, что $q(H, B) = q(H, \bar{B})$. Действительно, для любого $\bar{u} \in \Omega$ имеем $H(\bar{u}) - qH_B(\bar{u}) \geqslant 0$, где $H(\bar{u})$ — опорная функция тела H. Так как $H^*(\bar{u}) \geqslant H(\bar{u})$ при $\bar{u} \in \Omega'$, то $H^*(\bar{u}) - qH_B^*(\bar{u}) \geqslant 0$ на Ω' Поэтому $q\bar{B} \subset H$ и $q(H, \bar{B}) \geqslant q$. Из $B \subset \bar{B}$ вытекает, что $q \geqslant q(H, \bar{B})$. Следовательно, $q(H, B) = q(H, \bar{B})$.

Рассмотрим семейство тел $N_\sigma = (\Omega', N_\sigma^*(u))$, где $N_\sigma^*(\bar{u}) = H^*) - \sigma H_B^*(\bar{u}), \bar{u} \in \Omega'$. При $\sigma \in [0, q)$ тело N_σ собственное, так как $N_\sigma^*(\bar{u}) > 0$ на Ω'. Так же как и при доказательстве неравенства (1.10), имеем

$$\frac{dV(N_\sigma)}{d\sigma} = -\int_{\Omega'} H_B^*(\bar{u})\, F(N_\sigma, d\omega) = -\int_{\Omega'} H_B(\bar{u})\, F(N_\sigma, d\omega).$$

Покажем, что

$$\int_{\Omega'} H_B(\bar{u})\, F(N_\sigma, d\omega) = \int_{\Omega} H_B(\bar{u})\, F(N_\sigma, d\omega).$$

Действительно, через каждую точку $\bar{x}$ поверхности тела N_σ проходит опорная плоскость с нормалью из Ω' [4]. Поэтому, если через $\bar{x}$ проходит опорная плоскость с нормалью из $\Omega - \Omega'$, то $\bar{x}$ — особая точка поверхности тела $N\sigma$. Отсюда $F(N_\sigma, \Omega - \Omega') = 0$ и $\int_{\Omega-\Omega'} H_B(\bar{u})\, F(N_\sigma, d\omega) = 0$. Следовательно,

$$\frac{dV(N_\sigma)}{d\sigma} = -\int_{\Omega} H_B(\bar{u})\, F(N_\sigma, d\omega) = -nV_1(N_\sigma, B).$$

Интегрируя последнее равенство по σ, придем к равенству (1.12), в котором A следует заменить на H. Воспользуемся для $V_1(N_\sigma, B)$ оценкой (1.13). Оценим сверху $V_k^{1/(n-k)}(N_\sigma, B)$, применив к $V_k(N_\sigma + \sigma\bar{B}, B)$ обобщенную теорему Брунна:

$$V_k^{\frac{1}{n-k}}(N_\sigma + \sigma\bar{B}, B) \geqslant V_k^{\frac{1}{n-k}}(N_\sigma, B) + \sigma V_k^{\frac{1}{n-k}}(\bar{B}, B).$$

Заметим, что $N_\sigma + \sigma\bar{B} \subset H$. Действительно, опорная функция тела $N_\sigma + \sigma\bar{B}$, равная $N_\sigma(\bar{u}) + \sigma H_{\bar{B}}(\bar{u})$, на множестве Ω' допускает оценку $N_\sigma(\bar{u}) + \sigma H_{\bar{B}}(\bar{u}) \leqslant N_\sigma^*(\bar{u}) + \sigma H_B^*(\bar{u}) = H^*(\bar{u})$. Поэтому $V_k(N_\sigma + \sigma\bar{B}, B) \leqslant$

$\leqslant V_k(H, B)$. Следовательно,

$$V_k^{\frac{1}{n-k}}(N_\sigma, B) \leqslant V_k^{\frac{1}{n-k}}(H, B) - \sigma V_k^{\frac{1}{n-k}}(\bar{B}, B).$$

Подставляя последнюю оценку в (1.13), а затем оценку для $V_1(N_\sigma, B)$ в (1.12), получим

$$V(H) \leqslant \frac{n}{V^{\frac{k-1}{n-k}}(B)} \int_0^q \left(V_k^{\frac{1}{n-k}}(H, B) - \sigma V_k^{\frac{1}{n-k}}(\bar{B}, B) \right)^n d\sigma. \tag{1.27}$$

Интегрируя правую часть последнего неравенства, придем к (1.26). □

Неравенство (1.26) дает возможность уточнить неравенство (1.10) с учетом особенностей границы тела A. Имеем $A = (\Omega, H_A(\bar{u}))$. Действительно, $H_A(\bar{u})$ — непрерывная функция на Ω и $H_A(\bar{u}) > 0$, так как начало координат лежит внутри A. В некоторых случаях то же тело A представимо в виде $A = (\Omega_1, H_A^*(\bar{u}))$, где Ω_1 — замкнутое множество на Ω и $\Omega \neq \Omega_1$. $H_A^*(\bar{u})$ — ограничение $H_A(\bar{u})$ на Ω_1. Например, если A — многогранник, то в качестве Ω_1 можно взять совокупность концов единичных нормалей к граням (единичные нормали имеют своим началом начало координат). Если $A = (\Omega_1, H_A^*(\bar{u}))$, то подставляя в (1.26) вместо H тело A, а вместо $\bar{B} = (\Omega', H_B^*(\bar{u}))$ тело $\bar{B} = (\Omega_1, H_B^*(\bar{u}))$, получим

$$V_k^{\frac{n}{n-k}}(A, B) - V(A) V^{\frac{k-1}{n-k}}(B) V_k^{\frac{1}{n-k}}(\bar{B}, B) \geqslant \left[V_k^{\frac{1}{n-k}}(A, B) - q V_k^{\frac{1}{n-k}}(\bar{B}, B) \right]^n. \tag{1.28}$$

Неравенство (1.28), так же как и неравенство (1.10), можно рассматривать как оценку сверху для объема $V(A)$, а именно:

$$V(A) \leqslant V^{-\frac{k-1}{n-k}}(B) V_k^{-\frac{1}{n-k}}(\bar{B}, B) \left[V_k^{\frac{n}{n-k}}(A, B) - \left(V_k^{\frac{1}{n-k}}(A, B) - q V_k^{\frac{1}{n-k}}(\bar{B}, B) \right)^n \right]. \tag{1.29}$$

Оказывается, что (1.29) в этом смысле уточняет неравенство (1.10). Действительно, так как $B \subset \bar{B}$, то $V(B) \leqslant V_k(\bar{B}, B)$, и в неравенстве (1.14), равносильном (1.10), правая часть не меньше, чем правая часть неравенства (1.27), равносильного (1.28) при $H = A$. При этом если $B \neq \bar{B}$, то правая часть в (1.14) строго больше правой части в (1.27). Это следует из неравенства $V_k(\bar{B}, B) > V(B)$, которое можно вывести из неравенства $V_k^n(\bar{B}, B) \geqslant V^{n-k}(\bar{B}) V^k(B)$. Последнее вытекает из (1.5) при $m = 0$ и неравенства $V(\bar{B}) > V(B)$. □

Докажем существование минимальной области Ω_A такой, что $A = (\Omega_A, H_A^*(\bar{u}))$. При этом область Ω_A называется *минимальной областью задания опорной функции тела* A, если из $A = (\Omega_A, H_A^*(\bar{u}))$ и $A = (\Omega', A_A^*(\bar{u}))$ следует $\Omega_A \subset \Omega'$. Заметим, что любое множество Ω' такое, что $A = (\Omega', H_A^*(\bar{u}))$, содержит множество Φ концов единичных нормалей к опорным плоскостям, проходящим через регулярные точки поверхности тела A. Точка $\bar{x}_0$ границы тела A называется *регулярной*, если через нее проходит ровно одна опорная плоскость тела A. Если предположить, что единичная нормаль $\bar{u}_0$ к опорной плоскости, проходящей через регулярную точку $\bar{x}_0$, не принадлежит Ω', то $H_A(\bar{u}) - \bar{u}\bar{x}_0 > 0$ при $\bar{u} \in \Omega'$, так как равенство $H_A(\bar{u}) = \bar{u}\bar{x}_0$ возможно лишь в случае $\bar{u} = \bar{u}_0$. Поэтому функция $H_A(\bar{u}) - \bar{u}\bar{x}_0$ достигает на замкнутом множестве Ω' положительного минимума и, следовательно, $\bar{x}_0$ является внутренней точкой тела $(\Omega', H_A^*(\bar{u}))$. Итак, множество Φ и вместе с ним его замыкание $\bar{\Phi}$ входят в Ω'. Покажем, что $\Omega_A = \bar{\Phi}$. Для этого достаточно убедиться в том, что $A = (\bar{\Phi}, H_A^*(\bar{u}))$. Допустим, что $A_1 = (\bar{\Phi},$

$H_A^*(\bar u)) \neq A$. Поскольку при этом $A \subset A_1$ существует на поверхности тела A точка, которая является внутренней для тела A_1. Регулярные точки на поверхности выпуклого тела лежат всюду плотно. Поэтому существует регулярная точка границы тела A, лежащая внутри тела A_1. Последнее невозможно, так как через каждую регулярную точку границы тела A проходит опорная плоскость с нормалью в множестве Φ. □

Пусть $A = (\Omega', H_A^*(\bar u))$. Покажем, что в случае $\Omega_B \subset \Omega'$ неравенства (1.10) и (1.28) равносильны. Действительно, если $\Omega_B \subset \Omega'$, то $B = (\Omega$ $H_B^*(\bar u)) \supset (\Omega', H_B^*(\bar u)) = \bar B$, откуда $B = \bar B$. Следовательно, неравенства (1.10)и (1.28) эквивалентны. Наоборот, из эквивалентности неравенств (1.10) и (1.28) вытекает, что $B = \bar B = (\Omega', H_B^*(\bar u))$, откуда $\Omega_B \subset \Omega'$.

Назовем тело $\bar B_A = (\Omega_A, H_B^*(\bar u))$ *форм-телом тела A относительно тела B*. Если $A = (\Omega', H_A^*(\bar u)), \bar B = (\Omega', H_B^*(\bar u))$, то $\bar B \subset \bar B_A$. Следовательно, максимальное уменьшение правой части в (1.29) мы получим, если вместо $\bar B$ подставим $\bar B_A$. При этом оценка сверху для $V(A)$ не уменьшается по сравнению с оценкой сверху для $V(A)$ из неравенства (1.10), если $\Omega_B \subset \Omega_A$.

1.7. Обобщение теоремы Линделефа. Теорема Линделефа утверждает, что среди всех многогранников с данной системой нормалей к их граням наименьшую площадь поверхности при заданном объеме имеет многогранник, описанный около шара. А. Д. Александров обобщил [4] этот результат, доказав такую теорему: среди всех выпуклых тел с одной и той же областью задания опорной функции наименьшую площадь поверхности при заданном объеме имеет тело, описанное около шара, и только оно обладает этим минимальным свойством.

Неравенство (1.28) дает возможность обобщить этот результат на случай, когда вместо шара E берется произвольное собственное выпуклое тело B. Рассмотрим совокупность тел с данной областью задания Ω' и данным объемом V_0. Пусть $A = (\Omega', H_A(\bar u))$, $V(A) = V_0$, B — некоторое собственное выпуклое тело $\bar B = (\Omega', H_B^*(\bar u))$. Отметим, что

$$V(\bar B) = \int_{\Omega'} H_B^*(\bar u) F(\bar B, d\omega) = \int_{\Omega} H_B(\bar u) F(\bar B, d\omega) = V_1(\bar B, B).$$

Полагая в (1.28) $k = 1$, $V(A) = V_0$, учитывая, что правая часть в (1.28) неотрицательна и $V_1(\bar B, B) = V(\bar B)$, придем к неравенству

$$V_1^{\frac{n}{n-1}}(A, B) \geqslant V_0 V^{\frac{1}{n-1}}(\bar B),$$

в котором знак равенства стоит, как показано в п. 1.4, тогда и только тогда, когда $A = q\bar B$. Так как в этом неравенстве при заданной области Ω' правая часть постоянная, то левая достигает минимума при $A = q\bar B$ и только в этом случае. Таким образом, справедлива

Теорема. *Среди всех выпуклых тел с одной и той же областью задания опорной функции наименьшую площадь поверхности относительно тела B при заданном объеме имеет тело, гомотетичное телу, описанному около тела B, и только оно обладает этим минимальным свойством.*

§ 2. Устойчивость в проблеме Минковского

2.1. Проблема Минковского, неравенства Брунна и Минковского. Теорема единственности в проблеме Минковского, единственность решений уравнений Брунна и Минковского.

Пусть A — *выпуклое регулярное тело*, т. е. тело, имеющее в каждой точке своей границы не равные нулю главные радиусы кривизны $R_1, \ldots$

..., R_{n-1}, которые являются непрерывными функциями нормали $\bar{u} \in \Omega$ к границе тела A. Положим $D_{n-1}(A, \bar{u}) = R_1 \ldots R_{n-1}$. Назовем $D_{n-1}(A, \bar{u})$ $(n-1)$-й *функцией кривизны тела* A. Известно [1], что $\int\limits_{\Omega} \bar{u} D_{n-1}(A, \bar{u}) d\omega = 0$.

Минковскому принадлежит постановка и решение следующей проблемы: пусть на сфере Ω пространства $\mathbf{R}^n$ задана положительная непрерывная функция $F(\bar{u})$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{\Omega} \bar{u} F(\bar{u})\, d\omega = 0.$$

Тогда существует выпуклое тело A, для которого $F(\bar{u}) = D_{n-1}(A, \bar{u}) = R_1 \ldots R_{n-1}$. Это тело определяется однозначно с точностью до параллельного переноса.

Пусть A — произвольное выпуклое тело в $\mathbf{R}^n$ и ω — множество на Ω. Обозначим через $\sigma(\omega)$ множество всех тех точек поверхности тела A, через каждую из которых проходит опорная плоскость с нормалью в ω. А. Д. Александров показал (см. [2]), что $\sigma(\omega)$ измеримо для любого борелевского множества $\omega \subset \Omega$ и назвал функцию множества $F(A, \omega) = F(\sigma(\omega))$, где $F(\sigma(\omega))$ — площадь множества $\sigma(\omega)$, *поверхностной функцией тела* A. Если A — регулярное тело, то

$$F(A, \omega) = \int\limits_{\omega} D_{n-1}(A, \bar{u})\, d\omega.$$

А. Д. Александров назвал поверхностную функцию $F(A, \omega)$ $(n-1)$-*й функцией кривизны тела* A, определив тем самым понятие $(n-1)$-й функции кривизны для любого выпуклого тела в $\mathbf{R}^n$. Положим $F(A, \omega) = F_{n-1}(A, \omega)$. Отметим, что поверхностная функция удовлетворяет условию $\int\limits_{\Omega} \bar{u} F(A, d\omega) = 0$.

А. Д. Александров решил (см. [4]) проблему Минковского в более общей постановке: пусть $F(\omega)$ — неотрицательная абсолютно аддитивная функция множества на Ω, удовлетворяющая условиям

$$\int\limits_{\Omega} \bar{u} F(d\omega) = 0, \quad \int\limits_{\Omega} |\bar{u}_0 \bar{u}|\, F(d\omega) > 2a > 0,$$

где $\bar{u}_0$ — произвольный вектор Ω, a — одна и та же постоянная для всех $\bar{u}_0$. Тогда существует и при том только одно с точностью до параллельного переноса выпуклое тело с внутренними точками, поверхностная функция которого есть данная функция $F(\omega)$.

Пусть A и X — выпуклые тела в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим отрезок $H_t = (1-t)A + tX$, $0 \leq t \leq 1$, соединяющий тела A и X. Брунн доказал [1] теорему: функция $g(t) = V^{\frac{1}{n}}(H_t)$ выпукла вверх при $t \in [0, 1]$. Для собственных тел A и X она линейна в том и только в том случае, когда A и X гомотетичны.

Эта теорема равносильна неравенству Брунна

$$V^{\frac{1}{n}}(H_t) \geq (1-t)\, V^{\frac{1}{n}}(A) + t V^{\frac{1}{n}}(X),$$

в котором знак равенства для собственных тел A и X стоит в том и только том случае, когда A и X гомотетичны.

Минковский, введя в рассмотрение смешанные объемы тел, записал $V(H_t)$ в виде

$$V(H_t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1-t)^{n-k} t^k V_k(A, X).$$

Неравенство $g'(0) \geq g(1) - g(0)$, вытекающее из выпуклости функции

$g(t)$ при $t \in [0, 1]$, привело Минковского к изопериметрическому неравенству

$$\Delta(A, X) = V_1^n(A, X) - V^{n-1}(A) V(X) \geqslant 0,$$

в котором знак равенства, как и в неравенстве Брунна, для собственных тел A и X стоит в том и только том случае, когда A и X гомотетичны.

Введем в рассмотрение уравнения Брунна и Минковского. Положим

$$\Phi(A, X, t) = V^{\frac{1}{n}}(H_t) - (1 - t) V^{\frac{1}{n}}(A) - t V^{\frac{1}{n}}(X).$$

По теореме Брунна $\Phi(A, X, t) \geqslant 0$ при $t \in [0, 1]$. *Уравнением Брунна* назовем уравнение $\Phi(A, X, t) = 0$ при $t \in [0, 1]$, в котором A фиксировано, а X является переменным телом. *Уравнением Минковского* назовем уравнение $\Delta(A, X) = 0$, в котором A фиксировано, X — переменное тело. Из сказанного выше следует, что каждое из уравнений Брунна и Минковского при дополнительном условии $V(X) = V(A) \neq 0$ имеет единственное решение $X = A$.

Оказывается, что теорема единственности в проблеме Минковского является следствием единственности решения уравнения Минковского. Покажем это, следуя Минковскому, для проблемы Минковского в постановке Александрова. Пусть собственные тела A и X имеют равные поверхностные функции, т. е. $F(A, \omega) = F(X, \omega)$ для любого борелевского множества $\omega \subset \Omega$. Тогда

$$V_1(A, X) = \frac{1}{n} \int_\Omega H_X(\bar{u}) F(A, d\omega) = \frac{1}{n} \int_\Omega H_X(\bar{u}) F(X, d\omega) = V(X).$$

Заменяя в неравенстве $\Delta(A, X) \geqslant 0$ величину $V_1(A, X)$ на $V(X)$, придем к неравенству $V(X) \geqslant V(A)$. Меняя в рассуждениях ролями A и X, получим $V(A) \geqslant V(X)$. Тогда $V_1(A, X) = V(A) = V(X)$, откуда $\Delta(A, X) = 0$. Так как $V(X) = V(A) \neq 0$, то в силу единственности решения уравнения Минковского $X = A$.

Таким образом, для решения вопроса о единственности решений уравнений Брунна и Минковского, о единственности в проблеме Минковского достаточно установить единственность решения уравнения Минковского. Аналогичная ситуация имеет место и для теорем устойчивости. Отметим, что впервые теорема устойчивости в проблеме Минковского в постановке Александрова была доказана Ю. А. Волковым [26]. В теореме Волкова порядок функции устойчивости равен $1/(n+2)$. В теореме, доказанной в п. 2.4, порядок функции устойчивости равен $1/n$. Тем самым улучшен порядок функции устойчивости по сравнению с порядком в теореме Волкова. Для регулярных тел удается еще более улучшить порядок функции устойчивости, доведя его до $1(n-1)$ (см. п. 2.5).

2.2. Теорема устойчивости решения уравнения Минковского.

Пусть A — выпуклое тело в $\mathbf{R}^n$, r_A — радиус вписанного в A шара, R_A — радиус описанного около A шара. Обозначим через $\delta(A, X)$ отклонение тел A и X. По определению $\delta(A, X) = \min\limits_{\widetilde{X} \in \{X\}} \rho(A, X)$, где $\{X\}$ — множество тел, которые получаются из X параллельным сдвигом. В теоремах этого параграфа тело A собственное, константы $\varepsilon_0, C_1, \ldots, C_{34}$ зависят от n, r_A, R_A.

Теорема 2.2.1. *Если* $\Delta(A, X) < \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, $V(A) = V(X)$, *то* $\delta(A, X) \leqslant C_1 \varepsilon^{1/n}$.

Доказательство. Из (1.10) при $k = 1$, $B = X$ для $q = q(A, X)$ имеем

$$q \geqslant \left[\frac{V_1(A,\ )}{V(X)}\right]^{\frac{1}{n-1}} - \frac{\left[V_1^{\frac{n}{n-1}}(A, X) - V(A) V^{\frac{1}{n-1}}(X)\right]^{\frac{1}{n}}}{V^{1/(n-1)}(X)}, \tag{2.1}$$

а из (1.11) при $k=n-1$, $B=X$ для $1/Q$, где $Q=Q(A, X)$,—

$$\frac{1}{Q}\geqslant\frac{V_1(A, X)}{V(A)}-\frac{[V_1^n(A, X)-V(X)V^{n-1}(A)]^{\frac{1}{n}}}{V(A)}. \tag{2.2}$$

Оценим снизу q в условиях теоремы. Заметим, что изопериметрическое неравенство $V_1^n(A, X)\geqslant V^{n-1}(A)V(X)$ при $V(A)=V(X)$ приводит к неравенству $V_1(A, X)\geqslant V(X)$. Отсюда следует, что уменьшаемое в правой части (2.1) не меньше единицы. Положив $x=V_1^{n/(n-1)}(A, X)$, $y=V(A)V^{1/(n-1)}(X)$, имеем $x\geqslant y\geqslant V^{1/(n-1)}(r_AE)$. Вычитаемое в правой части (2.1) допускает следующую оценку сверху:

$$\frac{(x-y)^{1/n}}{V^{\frac{1}{n-1}}(X)}\leqslant\frac{(x^{n-1}-x^{n-2}y)^{1/n}}{V^{\frac{1}{n-1}}(X)\,x^{\frac{n-2}{n}}}\leqslant\frac{(x^{n-1}-y^{n-1})^{1/n}}{V^{\frac{1}{n-1}}(A)\,x^{\frac{n-2}{n}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{[\Delta(A, X)]^{1/n}}{V^{\frac{1}{n-1}}(A)\,V^{\frac{n-2}{n-1}}(r_AE)}\leqslant\frac{\varepsilon^{1/n}}{V(r_AE)}=C_2\varepsilon^{\frac{1}{n}}.$$

Итак, $q\geqslant 1-C_2\varepsilon^{1/n}$, где C_2 зависит от n и r_A.

Оценим теперь снизу величину $1/Q$ в условиях теоремы. Так как $V_1(A, X)\geqslant V(A)$ и $V(A)\geqslant V(r_AE)$, то из (2.2)

$$\frac{1}{Q}\geqslant 1-\frac{\varepsilon^{1/n}}{V(r_AE)}=1-C_2\varepsilon^{1/n}.$$

Тогда при надлежащем выборе ε (например, при $C_2\varepsilon^{1/n}<1/2$) для Q получаем оценку сверху:

$$Q\leqslant\frac{1}{1-C_2\varepsilon^{1/n}}\leqslant 1+2C_2\varepsilon^{1/n}=1+C_3\varepsilon^{1/n}.$$

Не умаляя общности, можем считать, что $qX\subset A\subset QX$ и начало координат лежит внутри X. Тогда учитывая, что $V(X)=V(A)$, получим $q\geqslant 1$, $Q\geqslant 1$ и $qX\subset X\subset QX$. Поэтому $\delta(A, X)\leqslant\rho(qX, QX)\leqslant(Q-q)d(X)$. Так как $qX\subset A$, то $qd(X)\leqslant 2R_A$. Следовательно,

$$\delta(A, X)\leqslant(Q-q)\frac{2R_A}{q}\leqslant(C_3\varepsilon^{1/n}+C_2\varepsilon^{1/n})\frac{2R_A}{1-C_2\varepsilon^{1/n}}\leqslant C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}. \quad \square$$

Замечание. Условие $V(A)=V(X)$ в теореме 2.2.1 можно заменить на условие $|V(A)-V(X)|<\varepsilon$. Действительно, возьмем s таким, чтобы $V(sA)=V(X)$. Тогда из $|V(A)-V(sA)|<\varepsilon$ следует, что $1-C_4\varepsilon\leqslant s\leqslant 1+C_4\varepsilon$ и

$$\Delta(sA, X)=V_1^n(sA, X)-V^{n-1}(sA)V(X)=s^{n(n-1)}\Delta(A, X)<C_5\varepsilon,$$

где C_4, C_5 зависят от n, r_A, R_A. Таким образом, условия теоремы 2.2.1 выполнены для тел sA, X, поэтому $\delta(sA, X)\leqslant C_6\varepsilon^{1/n}$. Из оценок для s получаем $\delta(A, X)<C_7\varepsilon^{1/n}$. $\square$

2.3. Теорема устойчивости решения уравнения Брунна.

Теорема 2.3.1. *Если* $\Phi(A, X, t)<\varepsilon$ *при всех* $t\in[0, 1]$, $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_0$, $V(A)=V(X)$, *то* $\delta(A, X)<C_8\varepsilon^{1/n}$.

Доказательство. Рассмотрим семейство тел $H_t=(1-t)A+tX$. Отметим, что $V(H_0)=V(H_1)$, так как $H_0=A$, $H_1=X$ и $V(A)=V(X)$. По теореме Ролля найдется точка t_1, $0<t_1<1$, в которой $V'(H_{t_1})=0$.

Выразим $V'(H_t)$ через смешанные объемы тел H_t, A и тел H_t, X. Имеем

$$V'(H_t)=\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} V_k(A, X)\right)' =$$

$$=\sum_{k=1}^{n} C_n^k k t^{k-1}(1-t)^{n-k} V_k - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k t^k (n-k)(1-t)^{n-k-1} V_k =$$

$$=\sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} t^{k-1}(1-t)^{n-k} V_k - \sum_{k=0}^{n-1} nC_{n-1}^k t^k (1-t)^{n-k-1} V_k =$$

$$=n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k t^k (1-t)^{n-k-1} V_{k+1} - nV(A, H_t, \ldots, H_t) =$$

$$=n(V_1(H_t, X)-V_1(H_t, A)). \tag{2.3}$$

В точке t_1

$$V_1(H_{t_1}, X)=V_1(H_{t_1}, A). \tag{2.4}$$

Выразим $V(H_t)$ через те же смешанные объемы:

$$V(H_t)=V((1-t)A+tX,\ H_t,\ \ldots,\ H_t)=(1-t)V(A,\ H_t,\ \ldots,\ H_t)+$$
$$+tV(X,\ H_t,\ \ldots,\ H_t)=(1-t)V_1(H_t,\ A)+tV_1(H_t,\ X).$$

Отсюда и из (2.4) получаем $V(H_{t_1})=V_1(H_{t_1}, X)=V_1(H_{t_1}, A)$. Поэтому $\Delta(H_{t_1}, X)=V_1^n(H_{t_1}, X)-V^{n-1}(H_{t_1})V(X)=V^{n-1}(H_{t_1})(V(H_{t_1})-V(X))$ Из условий теоремы имеем $V^{1/n}(H_{t_1})-V^{1/n}(X)<\varepsilon$. Следовательно, $\Delta(H_{t_1}, X)<C_9\varepsilon$ и $|V(H_{t_1})-V(X)|<C_{10}\varepsilon$. По теореме 2.2.1 и замечанию из п. 22 $\delta(H_{t_1}, X)<C_{11}\varepsilon^{1/n}$. Заменив в последних рассуждениях X на A, придем к оценке $\delta(H_{t_1}, A)<C_{12}\varepsilon^{1/n}$.

Покажем, что $\delta(H_t,\ X)=(1-t)\delta(A,\ X)$. Для этого заметим, что если $\widetilde{H}_t\in\{H_t\}$, $t\in[0,\ 1)$, то найдется такое $\widetilde{A}\in A$, что $\widetilde{H}_t=(1-t)\widetilde{A}+tX$. Это следует из равенства $\widetilde{H}_t=\bar{a}+H_t=(1-t)\bar{a}_1+(1-t)A+tX=(1-t)(\bar{a}_1+A)+tX=(1-t)\widetilde{A}+tX$ при $t\neq 1$. По определению

$$\delta(H_t, X)=\min_{\widetilde{H}_t\in\{H_t\}}\rho(\widetilde{H}_t, X)=\min_{\widetilde{A}\in\{A\}}\rho((1-t)\widetilde{A}+tX, X),\quad t\neq 1.$$

Нетрудно показать, что для любых выпуклых тел A и B

$$\rho(A, B)=\max_{\bar{u}\in\Omega}|H_A(\bar{u})-H_B(\bar{u})|.$$

Поэтому $\rho((1-t)\widetilde{A}+tX, X)=\max\limits_{\bar{u}\in\Omega}|(1-t)H_{\widetilde{A}}(\bar{u})+tH_X(\bar{u})-H_X(\bar{u})|=$
$=\max\limits_{\bar{u}\in\Omega}(1-t)|H_{\widetilde{A}}(\bar{u})-H_X(\bar{u})|=(1-t)\rho(\widetilde{A}, X).$

Следовательно, при $t\neq 1$

$$\delta(H_t, X)=\min_{\widetilde{H}_t\in\{H_t\}}\rho(\widetilde{H}_t, X)=\min_{\widetilde{A}\in\{A\}}(1-t)\rho(\widetilde{A}, X)=(1-t)\delta(A, X). \tag{2.5}$$

Аналогично можно показать, что при $t\neq 0$

$$\delta(H_t,\ A)=t\delta(A,\ X). \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) имеем

$$\delta(A,\ H_t)+\delta(H_t,\ X)=\delta(A,\ X). \tag{2.7}$$

Равенства (2.5)—(2.7) справедливы при любом $t\in[0, 1]$. Тогда в условиях теоремы $\delta(A, X)=\delta(A, H_{t_1})+\delta(H_{t_1}, X)\leqslant C_{12}\varepsilon^{1/n}+C_{11}\varepsilon^{1/n}=C_8\varepsilon^{1/n}$. □

Замечание. Условие $V(A)=V(X)$ в теореме 2.3.1 можно заменить на условие $|V(X)-V(A)|<\varepsilon$. Действительно, возьмем $s>0$ таким, чтобы $V(sA)=V(X)$. Тогда $s_1=1-C_4\varepsilon\leqslant s\leqslant 1+C_4\varepsilon=s_2$ и

$$\Phi(sA,\ X,\ t)=V^{1/n}((1-t)sA+tX)-(1-t)V^{1/n}(sA)-tV^{1/n}(X)\leqslant$$
$$\leqslant V^{1/n}((1-t)s_2A+ts_2X)-(1-t)s_1V^{1/n}(A)-ts_1V^{1/n}(X)=$$
$$=s_2\Phi(A,\ X,\ t)+(s_2-s_1)[(1-t)V^{1/n}(A)+tV^{1/n}(X)]\leqslant C_{13}\varepsilon.$$

Таким образом, условия теоремы 2.3.1 выполнены для тел sA, X. Поэтому $\delta(sA,\ X)<C_{14}\varepsilon^{1/n}$, откуда $\delta(A,\ X)<C_{15}\varepsilon^{1/n}$. □

2.4. Теорема устойчивости в проблеме Минковского (в постановке Александрова).

Теорема 2.4.1. *Если* $|F(X,\ \omega)-F(A,\ \omega)|<\varepsilon F(A,\ \omega)$ *для любого борелевского множества* $\omega\subset\Omega$, $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_0$, *то* $\delta(A,\ X)<C_{17}\varepsilon^{1/n}$.

Доказательство. Покажем выполнение оценок

$$|V_1(A,\ X)-V(A)|<C_{18}\varepsilon,\ |V(A)-V(X)|<C_{19}\varepsilon,\ \Delta(A,\ X)<C_{20}\varepsilon. \qquad (2.8)$$

Имеем

$$|V_1(X,A)-V(A)|\leqslant\frac{1}{n}\int\limits_\Omega H_A(\bar u)\,|F(X,d\omega)-F(A,d\omega)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{n}\int\limits_\Omega H_A(\bar u)\,F(A,d\omega)=\varepsilon V(A).$$

Отсюда $0<(1-\varepsilon)V(A)\leqslant V_1(X,\ A)\leqslant(1+\varepsilon)V(A)$. Так как $V_1^n(X,A)\geqslant V^{n-1}(X)V(A)$, то $(1+\varepsilon)^nV^n(A)\geqslant V^{n-1}(X)V(A)$. Поэтому $V(X)\leqslant V(A)+C_{19}\varepsilon$. Отметим, что из $V_1(X,\ A)>0$ следует $V_1(A,\ X)>0$. Действительно, заменяя в (1.5) A на X, B на A и полагая $k=n-2$, $m=1$, придем к неравенству $V_1^{n-1}(A,X)\geqslant V_1(X,A)\,V^{n-2}(A)$, из которого и следует высказанное утверждение.

Далее,

$$|V_1(A,X)-V(X)|\leqslant\frac{1}{n}\int\limits_\Omega H_X(\bar u)\,|F(A,d\omega)-F(X,d\omega)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{n}\int\limits_\Omega H_X(\bar u)\,F(A,d\omega)=\varepsilon V_1(A,X).$$

Отсюда

$$\frac{V(X)}{1+\varepsilon}\leqslant V_1(A,X)\leqslant\frac{V(X)}{1-\varepsilon}. \qquad (2.9)$$

Из (2.9) имеем $V(X)>0$. Из (2.9) и неравенства $V_1^n(A,X)\geqslant V^{n-1}(A)V(X)$ вытекает, что $V(X)\geqslant V(A)-C_{19}\varepsilon$. Тогда из $V(X)\leqslant V(A)+C_{19}\varepsilon$ и последнего неравенства следует второе неравенство в (2.8), а из второго неравенства в (2.8) и (2.9) — первое неравенство в (2.8). Из выражения $\Delta(A,X)=V_1^n(A,X)-V^{n-1}(A)V(X)$ видим, что третье неравенство в (2.8) является следствием первого и второго. Второе и третье неравенства в (2.8) согласно замечанию из п. 2.2 являются условиями теоремы 2.2.1, поэтому $\delta(A,\ X)<C_{17}\varepsilon^{1/n}$. □

2.5. Теорема устойчивости в проблеме Минковского (в постановке Минковского). Пусть A и X — выпуклые регулярные тела в $\mathbf{R}^n$, $D_{n-1}(A,\ \bar u)$, $D_{n-1}(X,\ \bar u)$ — их $(n-1)$-е функции кривизны.

Теорема 2.5.1. *Если* $|D_{n-1}(A,\ \bar u)-D_{n-1}(X,\ \bar u)|<\varepsilon D_{n-1}(A,\ \bar u)$, $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_0$, *для любого* $\bar u\in\Omega$, *то* $\delta(A,\ X)<C_{21}\varepsilon^{1/(n-1)}$.

Отметим, что из неравенства

$$|D_{n-1}(A,\ \bar u)-D_{n-1}(X,\ \bar u)|<\varepsilon D_{n-1}(A,\ \bar u)$$

интегрированием по множеству $\omega\subset\Omega$ получаем неравенство $|F(A,\ \omega)-F(X,\ \omega)|<\varepsilon F(A,\ \omega)$, являющееся условием теоремы 2.4.1. Поэтому при доказательстве теоремы 2.5.1 мы можем пользоваться результатами п. 2.4. Предварительно докажем пять лемм.

Лемма 2.5.1. *В условиях теоремы* 2.5.1 $|V(H_t)-V(A)|<C_{22}\varepsilon$ *при* $t\in[0,\ 1]$.

Доказательство. По теореме Брунна $\Phi(t)=\Phi(A,\ X,\ t)$ выпукла вверх как функция аргумента $t\in[0,\ 1]$. При этом $\Phi(0)=\Phi(1)=0$. Следовательно, $\Phi'(0)\geqslant\Phi(t)\geqslant 0$. Так как

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{1}{n}V^{\frac{1}{n}-1}(H_t)\frac{dV(H_t)}{dt}+V^{\frac{1}{n}}(A)-V^{\frac{1}{n}}(X)$$

и согласно (2.3)

$$\frac{dV(H_t)}{dt}=n(V_1(H_t,\ X)-V_1(H_t,\ A)),$$

то

$$\Phi'(0)=\frac{V_1(A,\ X)-V^{(n-1)/n}(A)V^{1/n}(X)}{V^{(n-1)/n}(A)}\leqslant C_{23}\varepsilon.$$

Последнее неравенство следует из второго и третьего неравенств в (2.8). Поэтому в силу $\Phi'(0)\geqslant\Phi(t)\geqslant 0$ и $\Phi(t)=V^{1/n}(H_t)-(1-t)V^{1/n}(A)-tV^{1/n}(X)$

$$(1-t)V^{1/n}(A)+tV^{1/n}(X)\leqslant V^{1/n}(H_t)\leqslant(1-t)V^{1/n}(A)+tV^{1/n}(X)+C_{23}\varepsilon.$$

Пользуясь вторым неравенством в (2.8), получаем утверждение леммы.

Лемма 2.5.2. *В условиях теоремы* 2.5.1 $|V_1(H_t,\ E)-V_1(A,\ E)|<C_{24}\varepsilon$ *при* $t\in[0,\ 1]$.

Доказательство. Известно [1], что

$$V_1(H_t,\ E)=\frac{1}{n}\int\limits_\Omega D_{n-1}(H_t,\ \bar u)\,d\omega.$$

Из неравенства [5]

$$\sqrt[n-1]{D_{n-1}(H_t,\ \bar u)}\geqslant(1-t)\sqrt[n-1]{D_{n-1}(A,\ \bar u)}+t\sqrt[n-1]{D_{n-1}(X,\ \bar u)}$$

и условия теоремы 2.5.1 имеем

$$D_{n-1}(H_t,\ \bar u)\geqslant D_{n-1}(A,\ \bar u)-C_{25}\varepsilon. \qquad (2.10)$$

Рассмотрим интеграл

$$I=\frac{1}{n}\int\limits_\Omega H_{H_t}(\bar u)(D_{n-1}(H_t,\ \bar u)-D_{n-1}(A,\ \bar u)+C_{25}\varepsilon)\,d\omega.$$

С одной стороны, в силу леммы 2.5.1 и (2.8)

$$I=\frac{1}{n}\int\limits_\Omega H_{H_t}(\bar u)D_{n-1}(H_t,\ \bar u)\,d\omega-\frac{1}{n}\int\limits_\Omega((1-t)H_A(\bar u)+$$
$$+tH_X(\bar u))D_{n-1}(A,\ \bar u)\,d\omega+C_{25}V(E)\varepsilon=V(H_t)-$$
$$-(1-t)V(A)-tV_1(A,\ X)+C_{25}V(E)\varepsilon\leqslant C_{26}\varepsilon.$$

С другой стороны, применяя к I теорему о среднем (что можно сделать ввиду (2.10)) и полагая $H_{H_t}(\bar u)>r_A/2$, получим

$$I\geqslant\frac{r_A}{2n}\int\limits_\Omega(D_{n-1}(H_t,\ \bar u)-D_{n-1}(A,\ \bar u)+C_{25}\varepsilon)\,d\omega=$$
$$=\frac{r_A}{2}(V_1(H_t,\ E)-V_1(A,\ E))+\frac{r_A}{2}C_{25}V(E)\varepsilon.$$

Поясним возможность оценки $H_{H_t}(\bar u) > (1/2) r_A$. Пусть начало координат находится в центре шара, вписанного в тело H_t. Из определения H_t следует, что радиус шара, вписанного в H_t, не меньше $\min(r_A, r_X)$. По теореме 2.4 $\delta(A, X) < C_{17}\varepsilon^{1/n}$. Поэтому при достаточно малом ε будет $r_X > (1/2) r_A$. Так как $H_{H_t}(\bar u) \geqslant r_{H_t}$ при любом $\bar u$, то $H_{H_t}(\bar u) > (1/2) r_A$. Из оценок для I получаем $V_1(H_t, E) - V_1(A, E) < C_{27}\varepsilon$. Интегрируя по Ω обе части (2.10), приходим к оценке $V_1(H_t, E) - V_1(A, E) > C_{28}\varepsilon$. Последние два неравенства и составляют утверждение леммы. □

Для вектора $\bar v \in \Omega$ обозначим через $\mathbf{R}_{\bar v}^{n-1}$ гиперплоскость, проходящую через начало координат и ортогональную к вектору $\bar v$, через $A_{\bar v}$ — проекцию тела A на $\mathbf{R}_{\bar v}^{n-1}$, через $\Omega_{\bar v}$ — границу шара $E_{\bar v}$, через $V(A_{\bar v})$ — объем тела $A_{\bar v}$.

Лемма 2.5.3. *В условиях теоремы* 2.5.1 $|V(H_{t\bar v}) - V(A_{\bar v})| < C_{29}\varepsilon$ *для любых* $\bar v \in \Omega$ *и* $t \in [0, 1]$.

Доказательство. Известно [3], что

$$V(H_{t\bar v}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\overline{vu}|\, D_{n-1}(H_t, \bar u)\, d\omega.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\overline{vu}|\,(D_{n-1}(H_t, \bar u) - D_{n-1}(A, \bar u) + C_{25}\varepsilon)\, d\omega =$$
$$= V(H_{t\bar v}) - V(A_{\bar v}) + C_{25}V(E_{\bar v})\,\varepsilon.$$

Из (2.10) вытекает, что $I_1 \geqslant 0$. С другой стороны, из (2.10), леммы 2.5.2 и неравенства $|\overline{vu}| \leqslant 1$ имеем

$$I_1 \leqslant \int_\Omega (D_{n-1}(H_t, \bar u) - D_{n-1}(A, \bar u) + C_{25}\varepsilon)\, d\omega =$$
$$= n(V_1(H_t, E) - V_1(A, E)) + C_{25}F(\Omega)\,\varepsilon < C_{30}\varepsilon.$$

Из неравенств для I_1 получаем утверждение леммы. □

Лемма 2.5.4. *Пусть векторы* $\bar t_1, \bar t_2, \ldots, \bar t_{n-1} \in \Omega_{\bar u}$ *попарно ортогональны. Если* $\delta(A_{\bar u}, X_{\bar u}) < \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, *и* $|H_{A_{\bar u}}(\bar t_i) - H_{X_{\bar u}}(\bar t_i)| < \varepsilon$, $i = \overline{1, n-1}$, *то для любого* $\bar n \in \Omega_{\bar u}$ *будет* $|H_{A_{\bar u}}(\bar n) - H_{X_{\bar u}}(\bar n)| < C_{31}\varepsilon$.

Доказательство. Из $\delta(A_{\bar u}, X_u) < \varepsilon$ следует существование такого параллельного сдвига тела $A_{\bar u}$ на вектор $\bar a = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \bar t_i$, при котором тело $A_{\bar u}$ переходит в тело $A'_{\bar u}$, причем $\rho(A'_{\bar u}, X_{\bar u}) < \varepsilon$. Тогда для любого $\bar n \in \Omega_{\bar u}$ будет $H_{A'_{\bar u}}(n) = H_{A_{\bar u}}(\bar n) + \overline{na}$, $\left|H_{A'_{\bar u}}(\bar n) - H_{X_{\bar u}}(\bar n)\right| < \varepsilon$. Так как $H_{A'_{\bar u}}(\bar t_i) = H_{A_{\bar u}}(\bar t_i) + a_i$, то $|H_{A_{\bar u}}(\bar t_i) - H_{X_{\bar u}}(\bar t_i) + a_i| < \varepsilon$. Отсюда $|a_i| - |H_{A_{\bar u}}(\bar t_i) - H_{X_{\bar u}}(\bar t_i)| < \varepsilon$. Следовательно, $|a_i| < 2\varepsilon$, и для любого вектора $\bar n \in \Omega_{\bar u}$

$$|H_{X_{\bar u}}(\bar n) - H_{A_{\bar u}}(\bar n)| = \left|H_{X_{\bar u}}(\bar n) - H_{A'_{\bar u}}(\bar n) + \overline{na}\right| \leqslant |H_{X_{\bar u}}(\bar n) -$$
$$- H_{A'_{\bar u}}(\bar n)\Big| + |\overline{na}| \leqslant \varepsilon + |\bar n|\,|\bar a| < \varepsilon + 2\sqrt{n-1}\,\varepsilon = C_{31}\varepsilon. \quad □$$

Лемма 2.5.5. *Если для любого* $\bar u \in \Omega$ *в* $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ *выполняется неравенство* $\delta(A_{\bar u}, X_{\bar u}) < \varepsilon$, *то* $\delta(A, X) < C_{31}\varepsilon$.

Лемма 2.5.5. является леммой устойчивости для соответствующей леммы единственности [3]: если $\delta(A_{\bar{u}}, X_{\bar{u}})=0$ для любого $\bar{u}\in\Omega$ в $\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 3)$, то $\delta(A, X)=0$.

Доказательство. Пусть $\bar{t}_1\in\Omega$. Из $\delta\left(A_{\bar{t}_1}, X_{\bar{t}_1}\right)<\varepsilon$ следует существование такого параллельного сдвига тела A в тело A', при котором $\left|H_{A'_{\bar{t}_1}}(\bar{n})-H_{X_{\bar{t}_1}}(\bar{n})\right|<\varepsilon$ для любого вектора $\bar{n}\in\Omega_{\bar{t}_1}$. Сдвинем A' параллельно вектору $\bar{t}_1$ так, чтобы для результата сдвига — тела A'' — выполнялось неравенство

$$|H_{A''}(\bar{t}_1)-H_X(\bar{t}_1)|<\varepsilon. \tag{2.11}$$

При этом для $\bar{n}\in\Omega_{\bar{t}_1}$ будет иметь место неравенство

$$\left|H_{A''_{\bar{t}_1}}(\bar{n})-H_{X_{\bar{t}_1}}(\bar{n})\right|<\varepsilon, \tag{2.12}$$

так как опорные плоскости к телам A' и A'' в направлении $\bar{n}\in\Omega_{\bar{t}_1}$ совпадают.

Пусть $\bar{n}$ — произвольный вектор Ω. Покажем, что для $\bar{n}$ найдется вектор $\bar{u}\in\Omega$ такой, что $\bar{u}\perp\bar{n}$ и

$$\left|H_{A''_{\bar{u}}}(\bar{n})-H_{X_{\bar{u}}}(\bar{n})\right|<C_{31}\varepsilon. \tag{2.13}$$

Запишем вектор $\bar{n}$ в виде $\bar{n}=\bar{n}_1+\bar{n}_2$, где $\bar{n}_1$ — составляющая на $\bar{t}_1$, а $\bar{n}_2$ — составляющая на $R^{n-1}_{\bar{t}_1}$. Возьмем в $\mathbf{R}^{n-1}_{\bar{t}_1}$ вектор $\bar{u}\perp\bar{n}_2$, $\bar{u}\in\Omega_{\bar{t}_1}$. Если $\bar{n}_2=\bar{0}$, то $\bar{u}$ — любой вектор $\Omega_{\bar{t}_1}$. Вектор $\bar{u}$ всегда существует, так как размерность $\mathrm{R}^{n-1}_{\bar{t}_1}$ больше единицы. В пространстве $\mathbf{R}^{n-1}_{\bar{t}_1}\cap\mathbf{R}^{n-1}_{\bar{u}}$ выберем базис из $n-2$ взаимно ортогональных векторов $\bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_{n-1}\in\in\Omega_{\bar{t}_1}$. Векторы $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_{n-1}\in\Omega_{\bar{u}}$ образуют базис из взаимно ортогональных векторов в $\mathbf{R}^{n-1}_{\bar{u}}$. Из (2.11) и (2.12) имеем $\left|H_{A''_{\bar{u}}}(\bar{t}_i)-H_{X_{\bar{u}}}(\bar{t}_i)\right|<\varepsilon$, $i=\overline{1, n-1}$. Тогда по лемме 2.5.4 для любого вектора $\bar{n}\in\Omega_{\bar{u}}$ будет $\left|H_{A''_{\bar{u}}}(\bar{n})-H_{X_{\bar{u}}}(\bar{n})\right|<C_{31}\varepsilon$. Поскольку взятый нами вектор n ортогонален вектору $\bar{u}$, (2.13) доказано.

Заметим, что если $\bar{u}\perp\bar{n}$, то $H_{A''_{\bar{u}}}(\bar{n})-H_{X_{\bar{u}}}(\bar{n})=H_{A''}(\bar{n})-H_X(\bar{n})$, так как опорные плоскости к телам A'' и X, перпендикулярные к $\bar{n}$, проектируются на $\mathbf{R}^{n-1}_{\bar{u}}$ в опорные плоскости к телам $A''_{\bar{u}}$, $X_{\bar{u}}$, перпендикулярные к $\bar{n}$. Поэтому из (2.13) для произвольного $\bar{n}\in\Omega$ имеем $|H_{A''}(\bar{n})-H_X(\bar{n})|<C_{31}\varepsilon$. Следовательно, $\rho(A'', X)=\max\limits_{\bar{n}\in\Omega}|H_{A''}(\bar{n})-H_X(\bar{n})|<C_{31}\varepsilon$, откуда $\delta(A, X)<C_{31}\varepsilon$. □

Доказательство теоремы 2.5.1. Если $H_t=(1-t)A+tX$, то для произвольного $\bar{u}\in\Omega$ будет $H_{t\bar{u}}=(1-t)A_{\bar{u}}+tX_{\bar{u}}$. Из леммы 2.5. для $\Phi(A_{\bar{u}}, X_{\bar{u}}, t)=\sqrt[n-1]{V(H_{t\bar{u}})}-(1-t)\sqrt[n-1]{V(A_{\bar{u}})}-t\sqrt[n-1]{V(X_{\bar{u}})}$ получаем оценку сверху $\Phi(A_{\bar{u}}, X_{\bar{u}}, t)<C_{32}\varepsilon$, где C_{32} зависит от n, r_A, R_A, так как у тела $A_{\bar{u}}$ радиус вписанного шара не меньше r_A, а описанного не больше R_A. По той же лемме $|V(X_{\bar{u}})-V(A_{\bar{u}})|<C_{23}\varepsilon$. Тем самым для тел семейства $H_{t\bar{u}}$ выполняются условия теоремы 2.3.1 с учетом замечания к ней. На основании этой теоремы будет $\delta(A_{\bar{u}}, X_{\bar{u}})<<C_{33}\varepsilon^{1/(n-1)}$. Тогда по лемме 2.5.5 имеем $\delta(A, X)<C_{34}\varepsilon^{1/(n-1)}$. □

§ 3. Устойчивость в проблеме Александрова

3.1. Проблема Александрова. Обобщенные неравенства Брунна и Минковского. Теорема единственности в проблеме Александрова. Единственность решений обобщенных уравнений Брунна и Минковского.

Пусть A — регулярное выпуклое тело в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $D_m(A, \bar{u}) = \{R_1 \ldots R_m\}$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, элементарно-симметрическую функцию радиусов кривизны $R_1, \ldots, R_{n-1}$ степени m. Функция $D_m(A, \bar{u})$ называется m-й *функцией кривизны тела* A. Пусть теперь A — произвольное выпуклое тело в $\mathbf{R}^n$ и $F(A, \omega)$ — его поверхностная функция. Тогда, как показал А. Д. Александров [2], для тела $H = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i H_i$ поверхностная функция $F(H, \omega)$ является однородным многочленом степени $n-1$ относительно коэффициентов λ_i, т. е.

$$F\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i H_i, \omega\right) = \sum_{i_1=1}^{s} \cdots \sum_{i_{n-1}=1}^{s} F\left(H_{i_1}, \ldots, H_{i_{n-1}}, \omega\right) \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_{n-1}},$$

где индексы $i_1, \ldots, i_{n-1}$ пробегают независимо друг от друга все значения от 1 до s, а коэффициент $F\left(H_{i_1}, \ldots, H_{i_{n-1}}, \omega\right)$ зависит только от тел $H_{i_1}, \ldots, H_{i_{n-1}}$. Он определяется так, что не зависит от перестановки тел $H_{i_1}, \ldots, H_{i_{n-1}}$. Этот коэффициент называется *смешанной поверхностной функцией тел* $H_{i_1}, \ldots, H_{i_{n-1}}$.

Положим $F_m(A, \omega) = F(\underbrace{A, \ldots, A}_{m}, \underbrace{E, \ldots, E}_{n-m-1}, \omega)$. Тогда, если $H = A + \lambda E$, то

$$F_{n-1}(A + \lambda E, \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \lambda^k F_{n-k-1}(A, \omega).$$

Если A регулярное, то

$$F_{n-1}(A + \lambda E, \omega) = \int_{\omega} (R_1 + \lambda) \ldots (R_{n-1} + \lambda)\, d\omega = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \int_{\omega} D_{n-k-1}(A, \bar{u})\, d\omega$$

и в этом случае

$$F_m(A, \omega) = \frac{1}{C_{n-1}^{m}} \int_{\Omega} D_m(A, \bar{u})\, d\omega.$$

На этом основании смешанную поверхностную функцию $F_m(A, \omega)$ А. Д. Александров назвал *m-й функцией кривизны тела* A, определив тем самым понятие m-й функции кривизны для любого выпуклого тела в $\mathbf{R}^n$.

Проблема Александрова для регулярного случая состоит в решении вопроса о существовании и единственности выпуклого тела A, для кокоторого заданная положительная непрерывная функция $f(\bar{u})$, $\bar{u} \in \Omega$, является его m-й функцией кривизны $D_m(A, \bar{u})$ при $2 \leqslant m \leqslant n-2$. В случае $m = n-1$ — это проблема Минковского, при $m = 1$ — проблема Христоффеля.

А. Д. Александров показал (см. [4]), что условие $\int\limits_{\Omega} \bar{u} f(\bar{u})\, d\omega = 0$ не является достаточным для того, чтобы непрерывная положительная функция $f(\bar{u})$ была m-й функцией кривизны $D_m(A, \bar{u})$ некоторого выпуклого тела A в $\mathbf{R}^n$ при $m < n-1$. Аналогичный результат имеет место и для m-й функции кривизны $F_m(A, \omega)$. Вместе с тем А. Д. Александров доказал [3] единственность выпуклого тела с данной m-й функцией кривизны $F_m(A, \omega)$: если два выпуклых собственных тела имеют одинаковые m-е функции кривизны, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, то они равны и параллельно расположены. Там же А. Д. Александров доказал обобщенное неравенство Брунна

$$\Phi_m(A, X, t) = \sqrt[m]{V_m(H_t)} - (1-t)\sqrt[m]{V_m(A)} - t\sqrt[m]{V_m(X)} \geqslant 0,$$

где $H_t = (1-t)A + tX$, а $nV_m(H_t) = nV_m(E, H_t) = \int\limits_{\Omega} F_m(H_t, d\omega)$ — m-й интеграл кривизны тела H_t.

Так же как из неравенства Брунна следует изопериметрическое неравенство Минковского, из обобщенного неравенства Брунна вытекает обобщенное неравенство Минковского

$$\Delta_m(A, X) = V_{m-11}^m(A, X) - V_m^{m-1}(A)\, V_m(X) \geqslant 0,$$

где $V_{m-11}(A, X) = V(\underbrace{E, \ldots, E}_{n-m}, \underbrace{A, \ldots, A}_{m-1}, X)$, $\quad 2 \leqslant m \leqslant n-1$.

А. Д. Александров доказал [3], что знак равенства в обобщенных неравенствах Брунна и Минковского для собственных тел A и X при $2 \leqslant m \leqslant n-1$ стоит тогда и только тогда, когда A и X гомотетичны. Из этого следует, что обобщенное уравнение Брунна $\Phi_m(A, X, t) = 0$ при $t \in [0, 1]$ и обобщенное уравнение Минковского $\Delta_m(A, X) = 0$ для собственного тела A при условиях $V_m(A) = V_m(X)$, $m \geqslant 2$, имеют единственное решение $X = A$. Отметим, что единственность в проблеме Александрова является следствием единственности решения обобщенного уравнения Минковского.

3.2. Устойчивость решений обобщенных уравнений Брунна и Минковского для шара. Для интегралов кривизны тела X справедливы неравенства (см. [3])

$$V_k^m(X) \geqslant V_m^k(X)\, V^{m-k}(E), \tag{3.1}$$

где $1 \leqslant k < m \leqslant n$. Положим

$$\Delta_{mk}(X) = V_k^m(X) - V_m^k(X)\, V^{m-k}(E),$$

$$\Phi_m(X, t) = \sqrt[m]{V_m(H_t)} - (1-t)\sqrt[m]{V_m(X)} - t\sqrt[m]{V(E)},$$

где $H_t = (1-t)X + tE$. Уравнение $\Delta_{mk}(X) = 0$ назовем *обобщенным уравнением Минковского*, а уравнение $\Phi_m(X, t) = 0$ при $t \in [0, 1]$ — *обобщенным уравнением Брунна для шара*. Из результатов А. Д. Александрова [3] следует, что каждое из этих уравнений при $V_m(X) = V(E)$, $m \geqslant 2$, имеет единственное решение $X = E$.

Теорема 3.2.1. *Если* $\Delta_{mk}(X) < \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, *и* $V_m(X) = V(E)$, *то* $\delta(X, E) < c_1\varepsilon^a$.

Теорема 3.2.2. *Если* $\Phi_m(X, t) < \varepsilon$ *для всех* $t \in [0, 1]$, $m \geqslant 2$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ *и* $V_m(X) = V(E)$, *то* $\delta(X, E) < c_2\varepsilon^a$.

В этих теоремах $a = 1/n!2^{n-2}$, константы $c_1, c_2, c_3, c_{11}, \ldots, c_{22}, \varepsilon_0$ зависят от m, k, n и не зависят от размеров тела X. Предварительно докажем четыре леммы.

Лемма 3.2.1. $\Delta_{21}(X) \leqslant c_3\Delta_{mk}(X)$.

Доказательство. Положим

$$V_{mk}(A, K, L) = V(A_1, \ldots, A_{n-m-k}, \underbrace{K, \ldots, K}_{m}, \underbrace{L, \ldots, L}_{k}),$$

где $A_1, \ldots, A_{n-m-k}$, K, L — выпуклые тела в $\mathbf{R}^n$, $0 \leqslant m \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$ [21]. Справедливо неравенство

$$V_{mk}^{m+k}(A, K, L) \geqslant V_{m+k0}^m(A, K, L)\, V_{0m+k}^k(A, K, L),$$

которое является следствием неравенств Александрова [3]. Запишем

$V_k(X)$ в виде

$$V(X, E, \ldots, E, \underbrace{E, \ldots, E}_{m-k}, \underbrace{X, \ldots, X}_{k-1})$$

и применим к нему предыдущее неравенство $V_k^{m-1}(X) \geqslant V_1^{m-k}(X)\, V_m^{k-1}(X)$, откуда

$$V_1(X) \leqslant \left(\frac{V_k^{m-1}(X)}{V_m^{k-1}(X)}\right)^{\frac{1}{m-k}}.$$

Из (3.1) имеем $V_2(X) \geqslant (V_m^2(X)\, V^{m-2}(E))^{1/m}$. Из последних оценок для $V_1(X)$ и $V_2(X)$ получаем

$$\Delta_{21}(X) = V_1^2(X) - V_2(X)\, V(E) \leqslant \left(\frac{V_k^{m-1}(X)}{V_m^{k-1}(X)}\right)^{\frac{2}{m-k}} - (V_m^2(X)\, V^{m-2}(E))^{\frac{1}{m}}\, V(E) =$$

$$= \frac{1}{V_m^{2(k-1)/(m-k)}(X)}\left[V_k^{\frac{2(m-1)}{m-k}}(X) - V_m^{\frac{2k(m-1)}{m(m-k)}}(X)\, V^{\frac{2(m-1)}{m}}(E)\right] =$$

$$= \frac{V_k^m(X) - V_m^k(X)\, V^{m-k}(E)}{V_m^{\frac{2(k-1)}{m-k}}(X)\,(q^{p-1} + q^{p-2}b + \ldots + b^{p-1})},$$

где

$$p = \frac{m(m-k)}{2(m-1)}, \quad q = V_k^{\frac{2(m-1)}{m-k}}(X), \quad b = V_m^{\frac{2k(m-1)}{m(m-k)}}(X)\, V^{\frac{2(m-1)}{m}}(E).$$

Так как $V_m(X) = V(E)$, то в силу последнего неравенства $\Delta_{21}(X) \leqslant \leqslant c_3\Delta_{mk}(X)$. □

Замечание. Так же как лемму 3.2.1, можно доказать более общее утверждение:

$$\Delta_{m'k'}(X) \leqslant c_3'\Delta_{mk}(X) \text{ при } m' \leqslant m,\ k' \leqslant k. \quad \square$$

Пусть A и B — выпуклые тела в $\mathbf{R}^n$, $A_{\bar{u}}$, $B_{\bar{u}}$ — их проекции на $\mathbf{R}_{\bar{u}}^{n-1}$, $\bar{u} \in \Omega$, $V_i(A_{\bar{u}}, B_{\bar{u}}) = V(\underbrace{A_{\bar{u}}, \ldots, A_{\bar{u}}}_{n-i-1}, \underbrace{B_{\bar{u}}, \ldots, B_{\bar{u}}}_{i})$.

Лемма 3.2.2. *Если для линейной комбинации*

$$\alpha(\bar{u}) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i V_i(A_{\bar{u}}, B_{\bar{u}})$$

величин $V_i(A_{\bar{u}}, B_{\bar{u}})$ *при любом* $\bar{u}$ *справедливы неравенства* $\alpha(\bar{u}) \geqslant \geqslant -c_4\varepsilon^a$ *и* $\int_\Omega \alpha(\bar{u})\, d\omega \leqslant c_5\varepsilon^b$, *то при любом* $\bar{u}$ $\alpha(\bar{u}) \leqslant c_6\varepsilon^{m/n}$, *где* $a > 0$, $b > 0$, $m = \min(a, b)$.

Доказательство. Воспользуемся формулой [3]

$$V_i(A_{\bar{u}}, B_{\bar{u}}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\overline{un}|\, F_i(A, B, d\omega). \tag{3.2}$$

Для векторов $\bar{u}$, $\bar{v} \in \Omega$ имеем

$$|V_i(A_{\bar{u}}, B_{\bar{u}}) - V_i(A_{\bar{v}}, B_{\bar{v}}) \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega ||\overline{nu}| -$$

$$- |\overline{nv}||\, F_i(A, B, d\omega) \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |\overline{nu} - \overline{nv}|\, F_i(A, B, d\omega) =$$

$$= \int_{\Omega} \left| \sin \frac{\widehat{\bar n \bar u} + \widehat{\bar n \bar v}}{2} \sin \frac{\widehat{\bar n \bar u} - \widehat{\bar n \bar v}}{2} \right| F_i(A, B, d\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varphi_0}{2} n V_{i1}(A, B, E) \leqslant \frac{\varphi_0}{2} n V(E) R^{n-1} = c_7 \varphi_0,$$

где $\widehat{\bar n \bar u}$ — угол между векторами $\bar n$ и $\bar u$, $\varphi_0 = \widehat{\bar u \bar v}$, $\int_{\Omega} F_i(A, B, d\omega) = nV_{i1}(A, B, E)$ [2], c_7 зависит от n, $R = \max(R_A, R_B)$ и не зависит от i. Из (3.2) видно, что $\alpha(\bar u)$ непрерывна от $\bar u \in \Omega$. Поэтому существует такое u_0, что $\alpha(\bar u_0) = \max_{\bar u \in \Omega} \alpha(\bar u)$.

Рассмотрим на Ω сегмент Ω' с центром в точке $\bar u_0$, для точек $\bar u$ которого выполнено неравенство $\widehat{\bar u \bar u_0} \leqslant \varphi_0$, $0 < \varphi_0 \leqslant \pi/2$. В силу (3.3)

$$\alpha(\bar u) = \alpha(\bar u_0) + (\alpha(\bar u) - \alpha(\bar u_0)) = \alpha(\bar u_0) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \left(V_i\left(A_{\bar u}, B_{\bar u}\right) - \right.$$

$$\left. - V_i\left(A_{\bar u_0}, B_{\bar u_0}\right)\right) \geqslant \alpha(\bar u_0) - \sum_{i=0}^{n-1} |p_i| n c_7 \varphi_0 = \alpha(\bar u_0) - c_8 \varphi_0.$$

Из условий леммы

$$\int_{\Omega} (\alpha(\bar u) + c_4 \varepsilon^a)\, d\omega \leqslant c_5 \varepsilon^b + c_4 \varepsilon^a F(\Omega) \leqslant c_9 \varepsilon^m.$$

С другой стороны, из оценки $\alpha(\bar u) \geqslant \alpha(\bar u_0) - c_8 \varphi_0$ имеем

$$\int_{\Omega} (\alpha(\bar u) + c_4 \varepsilon^a)\, d\omega \geqslant \int_{\Omega'} \alpha(\bar u)\, d\omega \geqslant \alpha(\bar u_0) - c_8 \varphi_0 F(\Omega') \geqslant$$

$$\geqslant (\alpha(\bar u_0) - c_8 \varphi_0) V\left(E_{\bar u}\right) \left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^{n-1}.$$

Из оценок для $\int_{\Omega} (\alpha(\bar u) + c_4 \varepsilon^a)\, d\omega$ получаем $\alpha(\bar u_0) \leqslant c_{10} \varepsilon^m / \varphi_0^{n-1} + c_8 \varphi_0$. Возьмем $\varphi_0 = \varepsilon^{m/n}$. Тогда $\alpha(\bar u) \leqslant \alpha(\bar u_0) \leqslant c_{10} \varepsilon^{m/n} + c_8 \varepsilon^{m/n} \leqslant c_6 \varepsilon^{m/n}$. □

Лемма 3.2.3. *Если* $\Delta_{21}(X) < \varepsilon$, *то* $\Delta_{21}\left(X_{\bar u}\right) < c_{11} \varepsilon^{1/2n}$.

Доказательство. Воспользуемся n-мерным обобщением неравенства Бенсона, полученным Хакерканом [27]:

$$\Delta_{21}(X) = V_1^2(X) - V_2(X) V(E) \geqslant \frac{1}{4} \left(\frac{V_2(X)}{\lambda(\bar u)} - V(E) \lambda(\bar u)\right)^2, \qquad (3.4)$$

где $\lambda(\bar u) = \dfrac{V_1\left(X_{\bar u}\right)}{V\left(E_{\bar u}\right)}$ и $\bar u$ — произвольный вектор Ω. Из (3.4) имеем

$$V^2(E) \lambda^4 - (4\Delta_{21}(X) + 2V_2(X) V(E)) \lambda^2 + V_2^2(X) \leqslant 0.$$

Отсюда

$$V_1^2\left(X_{\bar u}\right) \leqslant V^2\left(E_{\bar u}\right) \left(\frac{V_2(X)}{V(E)} + c_{12} \sqrt{\varepsilon}\right). \qquad (3.5)$$

Тогда

$$\Delta_{21}\left(X_{\bar u}\right) = V_1^2\left(X_{\bar u}\right) - V_2\left(X_{\bar u}\right) V\left(E_{\bar u}\right) \leqslant V^2\left(E_{\bar u}\right) \left(\frac{V_2(X)}{V(E)} + c_{12} \sqrt{\varepsilon}\right) -$$

$$- V_2\left(X_{\bar u}\right) V\left(E_{\bar u}\right) = V\left(E_{\bar u}\right) \left(\left(\frac{V_2(X)}{V(E)} + c_{12} \sqrt{\varepsilon}\right) V\left(E_{\bar u}\right) - V_2\left(X_{\bar u}\right) = \right.$$

$$= V\left(E_{\bar u}\right) \alpha(\bar u), \qquad (3.6)$$

где $\alpha(\bar{u}) = \left(\frac{V_2(X)}{V(E)} + c_{12}\sqrt{\varepsilon}\right) V(E_{\bar{u}}) - V_2(X_{\bar{u}})$ — линейная комбинация величин $V(E_{\bar{u}})$ и $V_2(X_{\bar{u}})$. С одной стороны, $\alpha(\bar{u}) \geqslant 0$, так как $\Delta_{21}(X_{\bar{u}}) \geqslant 0$. С другой стороны, ввиду формулы Куботы [27]

$$\int_{\Omega} V_2(X_{\bar{u}})\, d\omega = nV(E_{\bar{u}})\, V_2(X),$$

получим

$$\int_{\Omega} \alpha(\bar{u})\, d\omega = \left(\frac{V_2(X)}{V(E)} + c_{12}\sqrt{\varepsilon}\right) nV(E_{\bar{u}})\, V(E) - nV(E_{\bar{u}})\, V(X) < c_{13}\sqrt{\varepsilon}.$$

По лемме 3.2.2 $\alpha(\bar{u}) \leqslant c_{14}\varepsilon^{1/2n}$. Из (3.6) и последней оценки для $\alpha(\bar{u})$ следует утверждение леммы. □

Пусть X_2 — проекция тела X на произвольную плоскость $\mathbf{R}^2$ пространства $\mathbf{R}^n$, E_2 — единичный круг в $\mathbf{R}^2$.

Лемма 3.2.4. *Если* $\Delta_{21}(X) < \varepsilon$, *то* $\Delta_{21}(X_2) < c_{15}\varepsilon^{2\alpha}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{R}^{n-1}, \ldots, \mathbf{R}^2$ — последовательность плоскостей в $\mathbf{R}^n$ таких, что $\mathbf{R}^{n-1} \supset \ldots \supset \mathbf{R}^2$. Обозначим через X_i проекцию X на $\mathbf{R}^i$, $i = \overline{2, n-1}$. Легко видеть, что X_i — проекция X_j на $\mathbf{R}^i$ $(i < j)$. Если $\Delta_{21}(X_i) < \gamma$, то по лемме 3.2.3 $\Delta_{21}(X_{i-1}) < c_{16}\gamma^{1/2i}$ $(i > 2)$. Следовательно, из $\Delta_{21}(X) < \varepsilon$ имеем $\Delta_{21}(X_2) < c_{15}\varepsilon^{2\alpha}$. □

Замечание. Если $\Delta_{21}(X) < \varepsilon$ и $|V_2(X) - V(E)| < \varepsilon$, то $|V_2(X_2) - V(E_2)| < c_{17}\varepsilon^{2\alpha}$. Это утверждение можно получить из оценок для $\alpha(\bar{u})$ леммы 3.2.3, проектируя X последовательно на плоскости $\mathbf{R}^{n-1}, \ldots, \mathbf{R}^2$.

Доказательство теоремы 3.2.1. Покажем, что условия теоремы $\Delta_{mk}(X) < \varepsilon$ и $V_m(X) = V(E)$ можно заменить на условия $\Delta_{21}(X) < \varepsilon c_3$ и $|V_2(X) - V(E)| < c_{18}\varepsilon$. Действительно, из $\Delta_{mk}(X) < \varepsilon$ по лемме 3.2.1 и замечанию к ней $\Delta_{21}(X) < c_3\varepsilon$, $\Delta_{k1}(X) < c_{19}\varepsilon$. Из $V_m(X) = V(E)$, $\Delta_{mk}(X) < \varepsilon$, $\Delta_{k1}(X) < c_{19}\varepsilon$, $\Delta_{21}(X) < c_3\varepsilon$ следует, что $|V_2(X) - V(E)| < c_{18}\varepsilon$.

Тогда по лемме 3.2.4 и замечанию к ней $\Delta_{21}(X_2) < c_{20}\varepsilon^{2\alpha}$, $|V_2(X_2) - V(E_2)| < c_{21}\varepsilon^{2\alpha}$ для любой $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}^n$. Но величина $\Delta_{21}(X_2)$ для фигуры X_2 является ее изопериметрической разностью. Поэтому на основании теоремы 2.2.1 и замечания к ней можем утверждать, что $\delta(X_2, E_2) < c_{22}\varepsilon^{\alpha}$. Следовательно, по лемме 2.5.5 $\delta(E, X) < c_1\varepsilon^{\alpha}$. □

Теорема 3.2.2 может быть получена из теоремы 3.2.1 так же, как теорема 2.3.1 была получена из теоремы 2.2.1. □

3.3. Устойчивость решения обобщенного уравнения Брунна для тела с фиксированной проекцией на некоторую гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 3.3.1. *Если* $\Phi_{k+1}(A, X, t) < \varepsilon$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, $|V_{k+1}(A) - V_{k+1}(X)| < \varepsilon$, $k \geqslant 3$, *для выпуклых тел* A, X *в* $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 5)$ *и в* $\mathbf{R}^n$ *существует гиперплоскость* $\mathbf{R}_0^{n-1}$ *такая, что* $\delta(A(\mathbf{R}_0^{n-1}), X(\mathbf{R}_0^{n-1})) < \varepsilon$, *то* $\delta(A, X) < c_{23}\varepsilon^q$, *где* $q = \frac{(k+1)!\,k!}{4k^{n-k}(n!)^2}$.

В этой и последующих теоремах параграфа тело A собственное, константы $c_{23}, \ldots, c_{90}, \tilde{c}_i, \tilde{c}'_i, \tilde{c}''_i, \tilde{c}'''_i, \bar{c}_i$ зависят от n, k, r_A и R_A, через $A(\mathbf{R}_0^{n-1}), X(\mathbf{R}_0^{n-1})$ обозначены проекции тел A и X на гиперплоскость $\mathbf{R}_0^{n-1}$. Обозначим далее через $\mathbf{R}^m$, $m = \overline{1, n}$, m-мерную плоскость в $\mathbf{R}^n$, проходящую через начало координат, через $A(\mathbf{R}^m)$ — проекцию тела A на плоскость $\mathbf{R}^m$.

Положим

$$V_{ij}(A(\mathbf{R}^m), B(\mathbf{R}^m)) =$$

$$= V(\underbrace{E(\mathbf{R}^m), \ldots, E(\mathbf{R}^m), \overbrace{A(\mathbf{R}^m), \ldots, A(\mathbf{R}^m)}^{i}, \overbrace{B(\mathbf{R}^m), \ldots, B(\mathbf{R}^m)}^{j}}_{m}),$$

$V_i(A(\mathbf{R}^m))=V_{i0}(A(\mathbf{R}^m),\ B(\mathbf{R}^m)),\quad V(A(\mathbf{R}^m))=V_m(A(\mathbf{R}^m))$ — объем тела $A(\mathbf{R}^m)$ в $\mathbf{R}^m$. В частности, $A(\mathbf{R}^n)=A$, $V_{ij}(A(\mathbf{R}^n),\ B(\mathbf{R}^n))=V_{ij}(A,\ B)$, $V_i(A(\mathbf{R}^n))=V_i(A)$, $V(A(\mathbf{R}^n))=V(A)$. Будем считать, что для каждого тела его опорная функция неотрицательна.

Замечание. При доказательстве теоремы можем считать, что $r_{H_t}\geqslant(1/2)r_A$, а R_{H_t} допускает оценку сверху величиной, зависящей от k, n, r_A, R_A. Действительно, из выполнения условий теоремы для семейства тел $H_t=(1-t)A+tX$, $0\leqslant t\leqslant 1$, следует их выполнение для семейства $G_\theta=(1-\theta)A+\theta H_{\frac{1}{2}}$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$. В частности $\Phi_{k+1}\left(A, H_{\frac{1}{2}}, \theta\right)<\varepsilon$, $\left|V_{k+1}(A)-V_{k+1}\left(H_{\frac{1}{2}}\right)\right|<c_{24}\varepsilon$, а из (2.6) вытекает, что $\delta\left(A(\mathbf{R}_0^{n-1}), H_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_0^{n-1})\right)<\varepsilon/2$. Кроме того, если теорема будет доказана для семейства G_θ (т. е. будет доказано, что $\delta\left(A, H_{\frac{1}{2}}\right)<c_{25}\varepsilon^q\right)$, то будет доказана и теорема 3.3.1, так как $\delta(A, X)=2\delta\left(A, H_{\frac{1}{2}}\right)$. Таким образом, теорему достаточно доказать для тел семейства G_θ. Но для тел этого семейства $r_{G_\theta}\geqslant(1/2)r_A$, а R_{G_θ} допускает оценку сверху величиной, зависящей от k, n, r_A, R_A. Покажем это. По определению смешения тел шар с радиусом $(1-t)r_A+tr_X$ лежит в теле H_t. Поэтому при $t\leqslant 1/2$ в каждом теле H_t (следовательно, в каждом теле G_θ, $0\leqslant\theta\leqslant 1$) лежит шар с радиусом $(1/2)r_A$. Из условий теоремы и $A\subseteq R_AE$ имеем

$$V_{k+1}\left(H_{\frac{1}{2}}\right)\leqslant V_{k+1}(A)+c_{24}\varepsilon\leqslant R_A^{k+1}V(E)+c_{24}\varepsilon.$$

С другой стороны, если l — отрезок, соединяющий точки тела $H_{\frac{1}{2}}$, расстояние между которыми равно диаметру D тела $H_{\frac{1}{2}}$, то

$$V_{k+1}\left(H_{\frac{1}{2}}\right)\geqslant V\Big(\underbrace{E, \ldots, E}_{n-k-1}, \underbrace{\tfrac{1}{2}r_AE, \ldots, \tfrac{1}{2}r_A, E}_{k}, l\Big)=$$
$$=\left(\frac{1}{2}r_A\right)^k V_1(E, l)=\left(\frac{1}{2}r_A\right)^k\frac{D}{n}V(ER^{n-1})).$$

Здесь использовано выражение для $V_1(E,\ l)$ из [1]. Из неравенств для $V_{k+1}\left(H_{\frac{1}{2}}\right)$ вытекает оценка сверху для D величиной, зависящей от k, n, r_A, R_A. А из неравенства $R\leqslant D\sqrt{\dfrac{n}{2n+2}}$ [1] между R и D для любого выпуклого тела, получается аналогичная оценка для $R_{H_{\frac{1}{2}}}$. Так как $R_{G_\theta}\leqslant(1-\theta)R_A+\theta R_{H_{\frac{1}{2}}}$, то и R_{G_θ} допускает аналогичную оценку сверху. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что $r_{H_t}\geqslant(1/2)r_A, R_{H_t}\leqslant c_{26}$ при $t\in[0, 1]$.

Таким образом, все смешанные объемы тел семейства H_t и их проекций на плоскости в $\mathbf{R}^n$ допускают оценки снизу положительными величинами и оценки сверху величинами, зависящими от k, n, r_A, R_A.

Предварительно докажем восемь лемм. Пусть $\mathbf{R}^{k+1}$ — произвольная $(k+1)$-мерная плоскость в $\mathbf{R}^n$. Запишем для тел $A(\mathbf{R}^{k+1})$, $X(\mathbf{R}^{k+1})$ неравенство Боннезена [1]:

$$\varphi(\tau,\ \mathbf{R}^{k+1})=kV(A(\mathbf{R}^{k+1}))-(k+1)\tau V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}),\ X(\mathbf{R}^{k+1}))+$$
$$+\tau^{k+1}V(X(\mathbf{R}^{k+1}))\leqslant 0. \qquad (3.7)$$

Этому неравенству удовлетворяют значения τ, для которых τ^k является отношением объемов проекций тел $A(\mathbf{R}^{k+1})$, $X(\mathbf{R}^{k+1})$ на одну и ту же произвольную k-мерную плоскость $\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^{k+1}$. Пусть $\tau(\mathbf{R}^k) = \sqrt[k]{V(A(\mathbf{R}^k))/V(X(\mathbf{R}^k))}$. Тогда из замечания 1 к теореме 3.3.1 следует, что $0 < c_{27} < \tau(\mathbf{R}^k) < c_{28}$.

Лемма 3.3.1. *В каждой плоскости* $\mathbf{R}^{k+1}$ *найдется такая плоскость* R_0^k, *что для величины* $\tau_0 = \tau(\mathbf{R}_0^k)$ *справедлива оценка* $|\tau_0 - 1| < c_{29}\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{R}_0^k \subset \mathbf{R}^{k+1} \cap \mathbf{R}_0^{n-1}$. Такая плоскость $\mathbf{R}_0^k$ существует, так как размерность $\mathbf{R}^{k+1} \cap \mathbf{R}_0^{n-1}$ не меньше k. Поскольку $A(\mathbf{R}_0^k), X(\mathbf{R}_0^k)$ являются проекциями тел $A(\mathbf{R}_0^{n-1}), X(\mathbf{R}_0^{n-1})$, то $\delta(A(\mathbf{R}_0^k), X(\mathbf{R}_0^k)) < \varepsilon$. Тогда $\left|\sqrt[k]{\dfrac{V(A(R_0^k))}{V(X(R_0^k))}} - 1\right| < c_{29}\varepsilon$. □

Лемма 3.3.2. *Для любой плоскости* $\mathbf{R}^{k+1}$ *имеют место оценки* $|\varphi(1, \mathbf{R}^{k+1})| < c_{30}\varepsilon^b$, $|\varphi(\tau_0, \mathbf{R}^{k+1})| < c_{31}\varepsilon^b$, *где* $b = \dfrac{(k+1)!}{n!}$.

Доказательство. Так как $\varphi(\tau_0, \mathbf{R}^{k+1}) \leqslant 0$ и $|\tau_0 - 1| < c_{29}\varepsilon$, то

$$\begin{aligned}\varphi(1, \mathbf{R}^{k+1}) = kV(A(\mathbf{R}^{k+1})) - (k+1)V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}),\\ X(\mathbf{R}^{k+1})) + V(X(\mathbf{R}^{k+1})) < c_{32}\varepsilon.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Пусть Ω_{k+2} — единичная сфера в $\mathbf{R}^{k+2}$ с центром в начале координат, $\bar{u} \in \Omega_{k+2}$, $\mathbf{R}_{\bar{u}}^{k+1}$ — гиперплоскость в $\mathbf{R}^{k+2}$ с нормалью $\bar{u}$. Положим $\varphi(1, \mathbf{R}^{k+2}) = \int\limits_{\Omega_{k+2}} \varphi(1, \mathbf{R}_{\bar{u}}^{k+1})\, d\omega_{k+2}$, где $d\omega_{k+2}$ — элемент площади сферы Ω_{k+2}. Аналогично определим $\varphi(1, \mathbf{R}^{k+i})$ при $i = \overline{2, n-k}$ по формуле $\varphi(1, \mathbf{R}^{k+i}) = \int\limits_{\Omega_{k+i}} \varphi(1, \mathbf{R}_{\bar{u}}^{k+i-1})\, d\omega_{k+i}$, где Ω_{k+i} — единичная сфера в $\mathbf{R}^{k+i}$ с центром в начале координат, $\bar{u} \in \Omega_{k+i}$, $\mathbf{R}_{\bar{u}}^{k+i-1}$ — гиперплоскость в $\mathbf{R}^{k+i}$ с нормалью $\bar{u}$, $d\omega_{k+i}$ — элемент площади Ω_{k+i}. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(1, \mathbf{R}^{k+i}) = [kV_{k+1}(A(\mathbf{R}^{k+i})) - (k+1)V_{k+1}(A(\mathbf{R}^{k+i}), X(\mathbf{R}^{k+i})) +\\ + V_{k+1}(X(\mathbf{R}^{k+i}))](k+2)\ldots(k+i)V(E(\mathbf{R}^{k+1}))\ldots V(E(\mathbf{R}^{k+i-1})).\end{aligned}$$

Из (3.8) следует, что

$$\varphi(1, \mathbf{R}^{k+i}) \leqslant \bar{c}_i\varepsilon, \quad i = \overline{2, n-k}. \tag{3.9}$$

Покажем, что для $\varphi(1, \mathbf{R}^n) = [kV_{k+1}(A) - (k+1)V_{k1}(A, X) + V_{k+1}(X)]c_{33}$ справедлива оценка $\varphi(1, \mathbf{R}^n) \geqslant -c_{34}\varepsilon$. Действительно, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.3.1, можем к условию $\Phi_{k+1}(A, X, t) < \varepsilon$ присоединить условие $V_{k1}^{k+1}(A, X) - V_{k+1}^k(A)V_{k+1}(X) < c_{35}\varepsilon$. Из последнего неравенства и условия теоремы $|V_{k+1}(A) - V_{k+1}(X)| < \varepsilon$ следует неравенство $\varphi(1, \mathbf{R}^n) \geqslant -c_{34}\varepsilon$, которое вместе с неравенством $\varphi(1, \mathbf{R}^{n-1}) \leqslant \bar{c}_{n-k-1}\varepsilon$ из (3.9) дает возможность утверждать на основании леммы 3.2.2, что $\varphi(1, \mathbf{R}^{n-1}) \geqslant -c_{36}\varepsilon^{1/n}$. Из последнего неравенства и неравенства $\varphi(1, \mathbf{R}^{n-2}) \leqslant \bar{c}_{n-k-2}\varepsilon$ следует, что $\varphi(1, \mathbf{R}^{n-2}) \geqslant -c_{37}\varepsilon^{1/n(n-1)}$.

Действуя аналогично, придем к неравенству $\varphi(1, \mathbf{R}^{k+1}) \geqslant -c_{38}\varepsilon^b$ и, присоединяя к нему оценку (3.8), получим $|\varphi(1, \mathbf{R}^{k+1})| < c_{30}\varepsilon^b$. Из этой оценки и $|\tau_0 - 1| < c_{29}\varepsilon$ выводим оценку леммы для $|\varphi(\tau_0, \mathbf{R}^{k+1})|$. □

Лемма 3.3.3. *Если* $\varphi(1, \mathbf{R}^{k+1}) \geqslant -c_{39}\gamma$ *и* $\tau > 1$ *такое, что* $\varphi(\tau, \mathbf{R}^{k+1}) \leqslant 0$, *то* $\tau V(X(\mathbf{R}^{k+1})) \leqslant V(A(\mathbf{R}^{k+1})) + \dfrac{c_{39}\gamma\tau}{k(\tau-1)}$.

Доказательство. Складывая соответствующие части неравенства

$$-kV(A(\mathbf{R}^{k+1})) + (k+1)V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}), X(\mathbf{R}^{k+1})) - V(X(\mathbf{R}^{k+1})) \leqslant c_{39}\gamma,$$

$$kV(A(\mathbf{R}^{k+1}))-(k+1)\tau V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}),\ X(\mathbf{R}^{k+1}))+\tau^{k+1}V(X(\mathbf{R}^{k+1}))\leqslant 0, \tag{3.10}$$

получим

$$-(k+1)(\tau-1)V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}),\ X(\mathbf{R}^{k+1}))+(\tau^{k+1}-1)V(X(\mathbf{R}^{k+1}))\leqslant c_{39}\gamma,$$

откуда

$$V(X(\mathbf{R}^{k+1}))(\tau^k+\tau^{k-1}+\ldots+1)\leqslant$$
$$\leqslant(k+1)V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}),X(\mathbf{R}^{k+1}))+\frac{c_{39}\gamma}{\tau-1}. \tag{3.11}$$

Для величины $(k+1)V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}),\ X(\mathbf{R}^{k+1}))$ из (3.10) имеем оценку

$$(k+1)V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}),\ X(\mathbf{R}^{k+1}))\leqslant kV(A(\mathbf{R}^{k+1}))+V(X(\mathbf{R}^{k+1}))+c_{39}\gamma$$

и при $\tau>1$ — оценку $\tau^k+\tau^{k-1}+\ldots+1>k\tau+1$. Подставляя эти оценки в (3.11), получим утверждение леммы. □

Лемма 3.3.4. *Для любой плоскости* $\mathbf{R}^{k+1}$ *справедливо неравенство* $|V(H_t(\mathbf{R}^{k+1}))-(1-t)V(A(\mathbf{R}^{k+1}))-tV(X(\mathbf{R}^{k+1}))|<c_{40}\varepsilon^b$.

Доказательство. Неравенству (см. [1])

$$\psi(\tau,\ \mathbf{R}^{k+1},\ t)=V(H_t(\mathbf{R}^{k+1}))-$$
$$-[(1-t)\tau^{-k}V(A(\mathbf{R}^{k+1}))+tV(X(\mathbf{R}^{k+1}))][(1-t)\tau+t]^k\geqslant 0$$

удовлетворяют значения $\tau(\mathbf{R}^k)$, где $\mathbf{R}^k$ — произвольная k-мерная плоскость в $\mathbf{R}^{k+1}$. В частности, при $\tau=\tau_0$ имеем $\psi(\tau_0,\ \mathbf{R}^{k+1},\ t)\geqslant 0$, откуда, пользуясь оценками леммы 3.3.1 для τ_0, получаем

$$\psi(1,\ \mathbf{R}^{k+1},\ t)=V(H_t(\mathbf{R}^{k+1}))-$$
$$-[(1-t)V(A(\mathbf{R}^{k+1}))+tV(X(\mathbf{R}^{k+1}))]\geqslant -c_{41}\varepsilon.$$

Для произвольной плоскости $\mathbf{R}^{k+i}$, $i=\overline{2,\ n-k}$, положим

$$\psi(1,\mathbf{R}^{k+i},t)=\int\limits_{\Omega_{k+i}}\psi(1,\mathbf{R}_u^{k+i-1},t)\,d\omega_{k+i}.$$

Дальнейшее доказательство леммы совершенно аналогично доказательству леммы 3.3.2. □

Следствие.

$$\left|\frac{2V\left(H_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{k+1})\right)}{V(A(\mathbf{R}^{k+1}))+V(X(\mathbf{R}^{k+1}))}-1\right|<c_{42}\varepsilon^b.$$

Доказательство. Достаточно положить $t=1/2$ в неравенстве леммы 3.3.4 и разделить обе части полученного неравенства на $V(A(\mathbf{R}^{k+1}))+V(X(\mathbf{R}^{k+1}))$. □

Лемма 3.3.5. *Если* $V(A(\mathbf{R}^k))\leqslant V(X(\mathbf{R}^k))$ *и* $\sqrt[k]{\dfrac{V\left(H_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^k)\right)}{V(X(\mathbf{R}^k))}}=q_0>1$, *то*

$$q_0\leqslant\frac{2V\left(H_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{k+1})\right)}{V(A(\mathbf{R}^{k+1}))+V(X(\mathbf{R}^{k+1}))}+\frac{c_{43}q_0\varepsilon^b}{q_0-1}, \tag{3.12}$$

где $\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^{k+1}$.

Доказательство. Рассмотрим семейство $B_\theta=(1-\theta)H_{\frac{1}{2}}+\theta A$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$, и функцию $\tilde{\varphi}(\tau,\mathbf{R}^{k+1})=kV\left(H_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{k+1})\right)-(k+1)\tau V_{k1}\left(H_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{k+1}),\ A(\mathbf{R}^{k+1})\right)+\tau^{k+1}V(A(\mathbf{R}^{k+1}))$. Для B_θ выполняются условия теоремы и, следовательно, утверждения лемм 3.3.1—3.3.4. В частности, справедливо неравенство $\tilde{\varphi}(1, \mathbf{R}^{k+1}) \geqslant -c_{44}\varepsilon^b$, доказанное в лемме 3.3.2 для функции $\varphi(\tau, \mathbf{R}^{k+1})$. В силу леммы 3.3.3

$$q_0 V(A(\mathbf{R}^{k+1})) \leqslant V\left(H_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{k+1})\right) + \frac{c_{45} q_0 \varepsilon^b}{k(q_0 - 1)}.$$

Аналогичные рассуждения, примененные к семейству тел $D_\theta = (1 - \theta) H_{\frac{1}{2}} + \theta X$, приводят к неравенству

$$q_0 V(X(\mathbf{R}^{k+1})) \leqslant V\left(H_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{k+1})\right) + \frac{c_{46} q_0 \varepsilon^b}{k(q_0 - 1)}.$$

Складывая соответствующие части двух последних неравенств и деля обе части полученного неравенства на $V(A(\mathbf{R}^{k+1})) + V(X(\mathbf{R}^{k+1}))$, придем к утверждению леммы. □

Следствие. *Величина* q_0 *из условия леммы* 3.3.5 *удовлетворяет неравенству* $q_0 \leqslant 1 + c_{47}\varepsilon^{b/2}$.

Доказательство. Если $q_0 \leqslant 1 + \varepsilon^{b/2}$, то утверждение очевидно. Если $q_0 > 1 + \varepsilon^{b/2}$, то из (3.12) и следствия леммы 3.3.4 имеем $q_0 \leqslant 1 + c_{47}\varepsilon^{b/2}$. □

Лемма 3.3.6. *Если*

$$\left|\sqrt[k]{\frac{V(A(\mathbf{R}^k))}{V(X(\mathbf{R}^k))}} - 1\right| < \varepsilon^h, \text{ то } \delta(A(\mathbf{R}^k), X(\mathbf{R}^k)) < c_{48}\varepsilon^{d/k},$$

где $h > 0$ *и* $d = \min(h, b/2)$.

Доказательство. Из условия леммы вытекает, что $|V(A(\mathbf{R}^k)) - V(X(\mathbf{R}^k))| < c_{49}\varepsilon^h$. Положим для определенности $V(A(\mathbf{R}^k)) \leqslant V(X(\mathbf{R}^k))$. Если $\sqrt[k]{V\left(H_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^k)\right) \Big/ V(X(\mathbf{R}^k))} = q_0 \leqslant 1$, то ввиду выпуклости функции $\sqrt[k]{V(H_t(\mathbf{R}^k))}$ при $t \in [0, 1]$ верно $|V(H_t(\mathbf{R}^k)) - V(A(\mathbf{R}^k))| \leqslant c_{50}\varepsilon^h$. Тогда $\Phi(A(\mathbf{R}^k), X(\mathbf{R}^k), t) < c_{51}\varepsilon^h$ и по теореме 2.3.1 имеем $\delta(A(\mathbf{R}^k), X(\mathbf{R}^k)) < c_{52}\varepsilon^{h/k}$. Если $q_0 > 1$, то по следствию леммы 3.3.5 $\left|V\left(H_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^k)\right) - V(X(\mathbf{R}^k))\right| < c_{53}\varepsilon^{b/2}$. Из последнего неравенства, а также неравенства $|V(A(\mathbf{R}^k)) - V(X(\mathbf{R}^k))| < c_{49}\varepsilon^h$ и выпуклости функции $\sqrt[k]{V(H_t(\mathbf{R}^k))}$ следует, что $|V(H_t(\mathbf{R}^k)) - V(X(\mathbf{R}^k))| < c_{54}\varepsilon^d$. Пользуясь вновь теоремой 2.3.1, получаем $\delta(A(\mathbf{R}^k), X(\mathbf{R}^k)) < c_{55}\varepsilon^{d/k}$. □

Лемма 3.3.7. *График функции* $y = \varphi(\tau, \mathbf{R}^{k+1})$ *для фиксированной плоскости* $\mathbf{R}^{k+1}$ *пересекает ось* τ *по крайней мере в одной из точек интервала* $(1 - c_{56}\varepsilon^{b/4}, 1 + c_{56}\varepsilon^{b/4})$.

Доказательство. Имеем $\varphi'_\tau(\tau, \mathbf{R}^{k+1}) = (k+1)(\tau^k V(X(\mathbf{R}^{k+1})) - V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}), X(\mathbf{R}^{k+1})))$.

(а) Если $|V(X(\mathbf{R}^{k+1})) - V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}), X(\mathbf{R}^{k+1}))| > \varepsilon^{b/2}$, то $|\varphi'_\tau(\tau_0, \mathbf{R}^{k+1})| > c_{57}\varepsilon^{b/2}$. Так как $-c_{31}\varepsilon^b \leqslant \varphi(\tau_0, \mathbf{R}^{k+1}) \leqslant 0$, то касательная к линии $y = \varphi(\tau, \mathbf{R}^{k+1})$ в точке $(\tau_0, \varphi(\tau_0, \mathbf{R}^{k+1}))$ пересекает ось τ в точке q, для которой $|\tau_0 - q| < c_{58}\varepsilon^{b/2}$. Из выпуклости вниз функции $y = \varphi(\tau, \mathbf{R}^{k+1})$ при $0 \leqslant \tau < \infty$ следует, что $\varphi(\tau, \mathbf{R}^{k+1})$ обращается в нуль в точке, лежащей между τ_0 и q. Отсюда и получаем утверждение леммы.

(б) Если $|V(X(\mathbf{R}^{k+1})) - V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}), X(\mathbf{R}^{k+1}))| \leqslant \varepsilon^{b/2}$, то в силу $|\varphi(1, \mathbf{R}^{k+1})| < c_{30}\varepsilon^b$ имеем $|V(A(\mathbf{R}^{k+1})) - V(X(\mathbf{R}^{k+1}))| \leqslant c_{59}\varepsilon^{b/2}$. Тогда для любой точки $\bar{\tau}$, в которой $\varphi(\bar{\tau}, \mathbf{R}^{k+1}) = 0$, будет $k - (k+1)\bar{\tau} + \bar{\tau}^{k+1} \leqslant c_{60}\varepsilon^{b/2}$. Поскольку левая часть в последнем неравенстве может быть записана в виде $(\bar{\tau} - 1)^2(\bar{\tau}^{k-1} + 2\bar{\tau}^{k-2} + 3\bar{\tau}^{k-3} + \ldots + (k-1)\tau + k)$, то $(\tau - 1)^2 \leqslant c_{61}\varepsilon^{b/2}$. Откуда и следует утверждение леммы. □

Лемма 3.3.8. *Если* $\varphi(q, \mathbf{R}^{k+1})>0$ *и* $0<q<\tau_0$, *то* $q^{k+1}V(X(\mathbf{R}^{k+1}))< V(A(\mathbf{R}^{k+1}))$. *Если* $\varphi(q, \mathbf{R}^{k+1})>0$ *и* $\tau_0<q$, *то* $V(A(\mathbf{R}^{k+1}))\leqslant q^{k+1}V(X(\mathbf{R}^{k+1}))$.

Доказательство. Складывая левые части неравенств

$$\tau_0(kV(A(\mathbf{R}^{k+1}))-q(k+1)V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}),\ X(\mathbf{R}^{k+1}))+ + q^{k+1}V(X(\mathbf{R}^{k+1})))>0,$$

$$q(-kV(A(\mathbf{R}^{k+1}))+\tau_0(k+1)V_{k1}(A(\mathbf{R}^{k+1}),X(\mathbf{R}^{k+1}))- -\tau_0^{k+1}V(X(\mathbf{R}^{k+1})))\geqslant 0,$$

получим

$$k(\tau_0-q)V(A(\mathbf{R}^{k+1}))+\tau_0 q(q^k-\tau_0^k)V(X(\mathbf{R}^{k+1}))>0.$$

Отсюда при $q<\tau_0$ имеем

$$kV(A(\mathbf{R}^{k+1}))>\tau_0 q(\tau_0^{k-1}+\tau_0^{k-2}q+\ldots+q^{k-1})V(X(\mathbf{R}^{k+1}))> > kq^{k+1}V(X(\mathbf{R}^{k+1})).$$

При $\tau_0<q$ рассуждения аналогичны. □

Доказательство теоремы 3.3.1. Для фиксированной плоскости $\mathbf{R}^{k+1}$ обозначим через τ_1 и τ_2 $(\tau_1\leqslant\tau_2)$ точки пересечения графика функции $\varphi(\tau, \mathbf{R}^{k+1})$ с осью τ. Тогда $\tau(\mathbf{R}^k)$ удовлетворяет неравенствам $\tau_1\leqslant\tau(\mathbf{R}^k)\leqslant\tau_2$. Это следует из выпуклости вниз функции $\varphi(\tau, \mathbf{R}^{k+1})$ и неравенства (3.7), которому удовлетворяет все $\tau(\mathbf{R}^k)$ при $\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^{k+1}$. Согласно лемме 3.3.7 либо $\tau_1>1-c_{56}\varepsilon^{b/4}$, либо $\tau_2<1+c_{56}\varepsilon^{b/4}$. Поэтому для фиксированной $\mathbf{R}^{k+1}$ либо все $\tau(\mathbf{R}^k)$ строго больше $1-c_{56}\varepsilon^{b/4}$, либо все $\tau(\mathbf{R}^k)$ строго меньше $1+c_{56}\varepsilon^{b/4}$. Это дает возможность провести классификацию $(k+1)$-мерных плоскостей в $\mathbf{R}^n$.

Назовем $\mathbf{R}^{k+1}$ *плоскостью первого* (соответственно второго) *типа*, если все $\tau(\mathbf{R}^k)>1-c_{56}\varepsilon^{b/4}$ (соответственно $\tau(\mathbf{R}^k)<1+c_{56}\varepsilon^{b/4}$) для $\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^{k+1}$. Пусть $\mathbf{R}^{k+i}$, $i=\overline{1,\ n-k}$,— фиксированная плоскость в $\mathbf{R}^n$. Покажем методом математической индукции, что при $\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^{k+i}$ для всех $\tau(\mathbf{R}^k)$ верно либо

$$\tau(\mathbf{R}^k)>1-\tilde{c}_i\varepsilon^{b/4k^{i-1}}, \tag{3.13}$$

либо

$$\tau(\mathbf{R}^k)<1+\tilde{c}_i\varepsilon^{b/4k^{i-1}}, \tag{3.14}$$

где $\tilde{c}_1=c_{56}$.

При $i=1$ справедливость (3.13) и (3.14) была показана выше. Предположим, что (3.13), (3.14) имеют место при $i=r$, $r=1, 2, \ldots, n-k-1$. Тогда для каждой фиксированной плоскости $\mathbf{R}^{k+r}$ при $\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^{k+r}$ либо все $\tau(\mathbf{R}^k)$ строго больше $1-\tilde{c}_r\varepsilon^{b/4k^{r-1}}$, либо все $\tau(\mathbf{R}^k)$ строго меньше $1+\tilde{c}_r\varepsilon^{b/4k^{r-1}}$. Подобно случаю $r=1$ назовем $\mathbf{R}^{k+r}$ соответственно плоскостью первого или второго типа.

Пусть $\mathbf{R}^{k+r+1}$ — фиксированная плоскость в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим три случая.

Случай 1: в $\mathbf{R}^{k+r+1}$ все $(k+r)$-мерные плоскости первого типа. Тогда для любой $\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^{k+r+1}$ будет $\tau(\mathbf{R}^k)>1-\tilde{c}_r\varepsilon^{b/4k^{r-1}}$, так что найдется такая $\mathbf{R}^{k+r}$, что $\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^{k+r}\subset\mathbf{R}^{k+r+1}$. В этом случае выполняется (3.13) при $i=r+1$. Если в $\mathbf{R}^{k+r+1}$ все $(k+r)$-мерные плоскости — плоскости второго типа, то выполняется (3.14) при $i=r+1$.

Случай 2: в $\mathbf{R}^{k+r+1}$ есть $(k+r)$-мерные плоскости обоих типов и, кроме того, в $\mathbf{R}^{k+r+1}$ есть такая двумерная плоскость $\mathbf{R}^2$, для которой любая содержащая ее плоскость $\mathbf{R}^{k+r}(\mathbf{R}^{k+r}\subset\mathbf{R}^{k+r+1})$ является плоскостью первого типа. Возьмем в $\mathbf{R}^{k+r+1}$ произвольную $(k+r)$-мерную плоскость

P^{k+r} второго типа и в ней — произвольную двумерную плоскость P^2. Пусть $\mathbf{R}^{k+r} \subset \mathbf{R}^{k+r+1}$ такая, что $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^{k+r}$ и $P^2 \subset \mathbf{R}^{k+r}$. Такая плоскость $\mathbf{R}^{k+r}$ существует, так как по условию теоремы $k \geqslant 3$, $n \geqslant 5$. Пересечение $\mathbf{R}^{k+r} \cap P^{k+r}$ есть плоскость в $\mathbf{R}^{k+r+1}$, размерность которой не меньше $k+$ $+r-1$ и потому не меньше k. Кроме того, $P^2 \subset \mathbf{R}^{k+r} \cap P^{k+r}$. Поэтому найдется такая k-мерная плоскость P^k, что $P^2 \subset P^k \subset \mathbf{R}^{k+r} \cap P^{k+r}$. Так как $P^k \subset \mathbf{R}^{k+r}$, то $\tau(P^k) > 1 - \tilde{c}_r \varepsilon^{b/4k^{r-1}}$. Так как $P^k \subset P^{k+r}$, то $\tau(P^k) < 1 +$ $+ \tilde{c}_r \varepsilon^{b/4k^{r-1}}$. Следовательно, $|\tau(P^k) - 1| < \tilde{c}_r \varepsilon^{b/4k^{r-1}}$ и по лемме 3.3.6 $\delta(A(P^k), X(P^k)) < c'_r \varepsilon^{b/4k^r}$. Тогда $\delta(A(P^2), X(P^2)) < \tilde{c}'_r \varepsilon^{b/4k^r}$, так как $P^2 \subset P^k$. Но P^2 — произвольная двумерная плоскость в P^{k+r}. Поэтому, если $\mathbf{R}^k$ — произвольная двумерная плоскость в P^{k+r}, то по лемме 2.5.5 $\delta(A(R^k), X(R^k)) < \tilde{c}''_r \varepsilon^{b/4k^r}$. Отсюда $|\tau(R^k) - 1| < \tilde{c}'''_r \varepsilon^{b/4rk}$.

Пусть $\mathbf{R}^k$ — произвольная плоскость в $\mathbf{R}^{k+r+1}$. Тогда найдется такая плоскость $\mathbf{R}^{k+r}$, что $R^r \subset \mathbf{R}^{k+r} \subset \mathbf{R}^{k+r+1}$. Если при этом $\mathbf{R}^{k+r}$ — плоскость первого типа, то $\tau(\mathbf{R}^k) > 1 - \tilde{c}_r \varepsilon^{b/4k^{r-1}}$. Если же $\mathbf{R}^{k+r}$ — плоскость второго типа, то, как было показано выше, $\tau(\mathbf{R}^k) > 1 - \tilde{c}'''_r \varepsilon^{b/4k^r}$. Таким образом, в рассматриваемом случае выполняется (3.13) при $i = r+1$.

Если в $\mathbf{R}^{k+r+1}$ имеются $(k+r)$-мерные плоскости обоих типов и через некоторую двумерную плоскость $\mathbf{R}^2$ проходит $(k+r)$-мерные плоскости только второго типа, то, рассуждая аналогично, придем к (3.14) при $i = r+1$.

Случай 3: в $\mathbf{R}^{k+r+1}$ имеются $(k+r)$-мерные плоскости обоих типов, но не выполняется случай 2. Для произвольной $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^{k+r+1}$ найдутся такие $\mathbf{R}_1^{k+r}$ и $\mathbf{R}_2^{k+r}$, что $\mathbf{R}_1^{k+r} \subset \mathbf{R}^{k+s+1}$ — плоскость первого типа, $\mathbf{R}_2^{k+r} \subset \mathbf{R}^{k+r+1}$ — плоскость второго типа и $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}_1^{k+r} \cap \mathbf{R}_2^{k+r}$. Тогда, как это было показано для P^2 в случае 2, для $\mathbf{R}^2$ будет $\delta(A(\mathbf{R}^2), X(\mathbf{R}^2)) < \tilde{c}'_r \varepsilon^{b/4k^r}$. Так как $\mathbf{R}^2$ — произвольная плоскость в $\mathbf{R}^{k+r+1}$, то по лемме 2.5.5 для любой $\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^{k+r+1}$ имеем $\delta(A(\mathbf{R}^k),$ $X(\mathbf{R}^k)) < \tilde{c}''_r \varepsilon^{b/4k^r}$, откуда $|\tau(\mathbf{R}^k) - 1| < \tilde{c}_{r+1} \varepsilon^{b/4k^r}$. В случае 3 выполняются (3.13) и (3.14) при $i = r+1$.

Положим теперь в (3.13) и (3.14) $i = n-k$. Получим утверждение: при $\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^n$ для всех $\tau(\mathbf{R}^k)$ либо

$$\tau(\mathbf{R}^k) > 1 - \tilde{c}_{n-k} \varepsilon^{b/4k^{n-k-1}}, \tag{3.15}$$

либо

$$\tau(\mathbf{R}^k) < 1 + \tilde{c}_{n-k} \varepsilon^{b/4k^{n-k-1}}. \tag{3.16}$$

Предположим, что в $\mathbf{R}^n$ выполняется (3.15). Если $\mathbf{R}^{k+1}$ такова, что $\tau_1 = \tau_1(\mathbf{R}^{k+1}) > 1 - c_{56}\varepsilon^{b/4} = q_0$, то $\varphi(q_0, \mathbf{R}^{k+1}) > 0$. Из леммы 3.3.8 тогда имеем $V(X(\mathbf{R}^{k+1})) - V(A(\mathbf{R}^{k+1})) < c_{62}\varepsilon^{b/4}$. Если $\tau_2 = \tau_2(\mathbf{R}^{k+1}) < 1 + c_{56}\varepsilon^{b/4}$ для $\mathbf{R}^{k+1}$, то для каждой $\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^{k+1}$ будут выполняться неравенства $1 - \tilde{c}_{n-k} \varepsilon^{b/4k^{n-k-1}} < \tau(\mathbf{R}^k) < 1 + c_{56}\varepsilon^{b/4}$. Тогда по лемме 3.3.6 $\delta(A(\mathbf{R}^k),$ $X(\mathbf{R}^k)) < c_{63}\varepsilon^{b/4k^{n-k}}$ и по лемме 2.5.5 $\delta(A(\mathbf{R}^{k+1}), X(\mathbf{R}^{k+1})) < c_{64}\varepsilon^{b/4k^{n-k}}$, откуда $V(X(\mathbf{R}^{k+1})) - V(A(\mathbf{R}^{k+1})) c_{65}\varepsilon^{b/4k^{n-k}}$. Таким образом, при выполнении (3.15) в $\mathbf{R}^n$ для каждой $\mathbf{R}^{k+1}$ будет

$$\eta(\mathbf{R}^{k+1}) = V(X(\mathbf{R}^{k+1})) - V(A(\mathbf{R}^{k+1})) < c_{65}\varepsilon^{b/4k^{n-k}}. \tag{3.17}$$

По условию теоремы $V_{k+1}(X) - V_{k+1}(A) > -\varepsilon$. Из последнего неравенства и (3.17) можно вывести оценку $|\eta(\mathbf{R}^{k+1})| < c_{66}\varepsilon^{b^2/4k^{n-k}}$ аналогично тому, как была получена оценка для $|\varphi(1, \mathbf{R}^{k+1})|$ в лемме 3.3.2. Из леммы 3.3.4 и неравенства $|V(X(\mathbf{R}^{k+1})) - V(A(\mathbf{R}^{k+1}))| < c_{66}\varepsilon^{b^2/4k^{n-k}}$ вытекает, что $\Phi(A(\mathbf{R}^{k+1}),\ X(\mathbf{R}^{k+1}), t) < c_{67}\varepsilon^{b^2/4k^{n-k}}$. Следовательно, для семейства тел $H_t(\mathbf{R}^{k+1}) = (1-t)A(\mathbf{R}^{k+1}) + tX(\mathbf{R}^{k+1})$ выполняются условия теоремы 2.3.1. Из теоремы 2.3.1 следует, что $\delta(A(\mathbf{R}^{k+1}), X(\mathbf{R}^{k+1})) < c_{68}\varepsilon^{b^2/4(k+1)k^{n-k}}$ для любой $\mathbf{R}^{k+1} \subset \mathbf{R}^n$. Отсюда на основании леммы 2.5.5 имеем $\delta(A, X) < c_{69}\varepsilon^{b^2/4(k+1)k^{n-k}}$. Случай, когда в $\mathbf{R}^n$ выполняется (3.16), рассматривается аналогично и приводит к тому же результату. □

Замечание. Условие $\delta(A(\mathbf{R}_0^{n-1}), X(\mathbf{R}_0^{n-1})) < \varepsilon$ в теореме 3.3.1 может быть заменено условием, совпадающим с утверждением леммы 3.3.1: в каждой плоскости $\mathbf{R}^{k+1} \subset \mathbf{R}^n$ найдется такая плоскость $\mathbf{R}_0^k$, что для величины $\tau_0 = \tau(\mathbf{R}_0^k)$ справедлива оценка $|\tau_0 - 1| < \varepsilon$. Действительно, это условие теоремы было использовано только при доказательстве леммы 3.3.1. □

3.4. Устойчивость в проблеме Александрова для тела, одна из проекций которого — шар.

Теорема 3.4.1. *Если для любого* $\bar{u} \in \Omega$ *в* $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 5)$ *и фиксированного* k $(k \geqslant 3)$ *выполняется неравенство* $|D_k(A, \bar{u}) - D_k(B, \bar{u})| < \varepsilon D_k(A, \bar{u})$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, *и в* $\mathbf{R}^n$ *существует гиперплоскость, проекция тела* A *на которую — шар, то* $\delta(A, B) < c_{70}\varepsilon^p$, *где* $p = \dfrac{k!\,(k+1)!}{2^n k^{n-k}(n!)^3}$.

Замечание. Из теоремы 3.4.1 вытекает теорема устойчивости в случае, когда A — тело вращения. □

Предварительно докажем пять лемм.

Лемма 3.4.1. *Имеют место неравенства*

$$|F_k(A, \omega) - F_k(B, \omega)| < \varepsilon F_k(A, \omega), \quad |V_{k1}(A, B) - V_{k+1}(A)| < c_{71}\varepsilon,$$
$$|V_{k+1}(A) - V_{k+1}(B)| < c_{72}\varepsilon, \quad \Delta_{k+1}(A, B) < c_{73}\varepsilon.$$

Доказательство. Известно [2], что

$$F_k(A, \omega) = \frac{1}{C_{n-1}^k} \int_\omega D_k(A, \bar{u})\, d\omega, \tag{3.18}$$

$$V_{k+1}(A) = \frac{1}{n} \int_\Omega H_A(\bar{u}) F_k(A, d\omega), \tag{3.19}$$

$$V_{k1}(A, B) = \frac{1}{n} \int_\Omega H_B(\bar{u}) F_k(A, d\omega). \tag{3.20}$$

Первое неравенство в условии леммы можно получить с помощью (3.18) путем интегрирования неравенства из условия теоремы по множеству $\omega \in \Omega$. Остальные неравенства могут быть доказаны с помощью (3.19) и (3.20) аналогично тому, как были доказаны (2.8) в теореме 2.4.1. □

Лемма 3.4.2. *В условиях теоремы* 3.4.1 $|V_{k+1}(H_t) - V_{k+1}(A)| < c_{74}\varepsilon$ *при* $t \in [0, 1]$, *где* $H_t = (1-t)A + tB$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.5.1, в котором n следует заменить на $k+1$. □

Лемма 3.4.3. *В условиях теоремы* 3.4.1 $|V_k(H_t) - V_k(A)| < c_{74}\varepsilon$ *при* $t \in [0, 1/2]$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.5.2. При этом $n-1$ следует заменить на k и воспользоваться очевидной оценкой $H_{H_t}(\bar{u}) \geqslant (1/2) r_A$ при $t \in [0, 1/2]$. □

Лемма 3.4.4. *В условиях теоремы* 3.4.1 $|V_k(H_t(\mathbf{R}^{n-1})) - V_k(A(\mathbf{R}^{n-1}))| < c_{75}\varepsilon$ *при* $t \in [0, 1/2]$ *для любой* $\mathbf{R}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.5.3. □

Лемма 3.4.5. *Пусть* Q^{n-1} — *гиперплоскость в* $\mathbf{R}^n$ *такая, что* $A(Q^{n-1})$ — *шар. Тогда* $\delta(A(Q^{n-1}),\ H_{\frac{1}{2}}(Q^{n-1})) < c_{76}\varepsilon^a$, *где* $a = (2^{n-2} n!)^{-1}$.

Доказательство. Так как для радиуса r шара $A(Q^{n-1})$ справедливы оценки $r_A \leqslant r \leqslant R_A$, то, не умаляя общности, можем считать, что $r=1$. Из леммы 3.4.4 заключаем, что выражение

$$\Phi_k\left(H_{\frac{1}{2}}(Q^{n-1}), \theta\right) = \sqrt[k]{V_k(G_\theta(Q^{n-1}))} - (1-\theta)\sqrt[k]{V_k\left(H_{\frac{1}{2}}(Q^{n-1})\right)} - \theta\sqrt[k]{V_k(E(Q^{n-1}))},$$

где $G_\theta = (1-\theta)H_{\frac{1}{2}} + \theta E$, допускает оценку $\Phi_k\left(H_{\frac{1}{2}}(Q^{n-1}), \theta\right) < c_{77}\varepsilon$ при $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Отсюда в силу неравенства $\left|V_k\left(H_{\frac{1}{2}}(Q^{n-1})\right) - V_k(A(Q^{n-1}))\right| < c_{75}\varepsilon$ вытекает, что для семейства тел G_θ выполняются условия теоремы 3.2.2, согласно которой $\delta\left(H_{\frac{1}{2}}(Q^{n-1}, A(Q^{n-1})\right) < c_{76}\varepsilon^a$. □

Доказательство теоремы 3.4.1. Ввиду леммы 3.4.2 $\left|V_{k+1}(A) - V_{k+1}\left(H_{\frac{1}{2}}\right)\right| < c_{74}\varepsilon$ и $\Phi_{k+1}\left(A, H_{\frac{1}{2}}, \theta\right) < c_{78}\varepsilon$ при $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Присоединив к этим неравенствам утверждение леммы 3.4.5, получим условия теоремы 3.3.1 для семейства G_θ. По теореме 3.3.1 $\delta\left(A, H_{\frac{1}{2}}\right) < c_{79}\varepsilon^p$, где $p = aq$. Отсюда и следует оценка для $\delta(A, B)$ в утверждении теоремы. □

3.5. Устойчивость решения обобщенного уравнения Брунна для $(n-1)$-го интервала кривизны.

Теорема 3.5.1. *Если* $\Phi_{n-1}(A, X, t) < \varepsilon$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *и* $|V_{n-1}(A) - V_{n-1}(X)| < \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, $n \geqslant 5$, *то* $\delta(A, X) < c_{80}\varepsilon^l$, *где* $l = [8n^2(n-1) \times (n-2)^2]^{-1}$.

Доказательство. Запишем неравенство Боннезена (3.7) при $k = n-2$ для тел $A_{\bar u}$ и $X_{\bar u}$:

$$\varphi(\tau, \bar u) = (n-2)V(A_{\bar u}) - (n-1)\tau V_1(A_{\bar u}, X_{\bar u}) + \tau^{n-1}V(X_{\bar u}) \leqslant 0, \quad (3.21)$$

где $A_{\bar u}$, $X_{\bar u}$ — проекции тел A и X на гиперплоскость $\mathbf{R}^{n-1}_{\bar u}$ с нормалью $\bar u \in \Omega$. Неравенству (3.21) удовлетворяют значения τ, для которых τ^{n-2} является отношением объемов проекций тел $A_{\bar u}$ и $X_{\bar u}$ на одну и ту же произвольную $(n-2)$-мерную плоскость $\mathbf{R}^{n-2} \subset \mathbf{R}^{n-1}_{\bar u}$. В [1] показано, что существует такое значение τ_0 для τ, которое удовлетворяет неравенству (3.21) при любом $\bar u$. Как следует из замечания к теореме 3.3.1, можем считать, что $c_{27} < \tau_0 < c_{28}$.

Покажем, что для τ_0 справедлива оценка $|\tau_0 - 1| < c_{81}\varepsilon$. Действительно, подставляя τ_0 в (3.21) и интегрируя (3.21) по Ω, получим

$$(n-2)V_{n-1}(A) - (n-1)V_{n-21}(A, X)\tau_0 + V_{n-1}(X)\tau_0^{n-1} \leqslant 0. \quad (3.22)$$

Так же как и при доказательстве теоремы 2.3.1, можно показать, что условия теоремы 3.5.1 могут быть дополнены условием

$$\Delta_{n-1}(A, X) = V_{n-21}^{n-1}(A, X) - V_{n-1}^{n-2}(A)V_{n-1}(X) < c_{82}\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $|V_{n-21}(A, X) - V_{n-1}(A)| < c_{83}\varepsilon$. Используя два последних неравенства, из (3.22) получаем для τ_0 неравенство

$$(n-2) - (n-1)\tau_0 + \tau_0^{n-1} \leqslant c_{84}\varepsilon. \quad (3.23)$$

Записывая левую часть (3.23) в виде произведения $(\tau_0 - 1)^2$ и некоторого многочлена так, как это сделано при доказательстве леммы 3.3.7, получим $(\tau_0 - 1)^2 < c_{85}\varepsilon$. Откуда и следует оценка $|\tau_0 - 1| < c_{81}\sqrt{\varepsilon}$.

Присоединим к условиям теоремы следующее условие: в каждой плоскости $\mathbf{R}^{n-1}$ имеется такая плоскость $\mathbf{R}_0^{n-2}$, что для велчины $\tau_0 = \tau(\mathbf{R}_0^{n-2})$ справедлива оценка $|\tau_0 - 1| < c_{81}\sqrt[l]{\varepsilon}$. Тогда согласно замечанию в конце п. 33 из условий теоремы 3.5.1 вытекают условия теоремы 3.3.1 при $k = n-2$. Применяя теорему 3.3.1, получаем утверждение данной теоремы. □

3.6. Теорема устойчивости в проблеме Александрова для $(n-2)$-й функции кривизны.

Теорема 3.6.1. *Если* $|F_{n-2}(A, \omega) - F_{n-2}(X, \omega)| < \varepsilon F_{n-2}(A, \omega)$ *для любого борелевского множества* $\omega \subset \Omega$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, $n \geqslant 5$, *то* $\delta(A, X) < c_{86}\varepsilon^l$.

Доказательство. Пользуясь формулами (3.19) и (3.20), рассуждая так же, как и при доказательстве (2.8), придем к неравенствам $|V_{n-1}(X) - V_{n-1}(A)| < c_{87}\varepsilon$, $\Delta_{n-1}(A, X) < c_{88}\varepsilon$.

Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 2.5.1, и используя последние неравенства, можно показать, что $|V_{n-1}(H_t) - V_{n-1}(A)| < c_{89}\varepsilon$ при $t \in [0, 1]$. Откуда следует, что $\Phi_{n-1}(A, X, t) < c_{90}\varepsilon$ при $t \in [0, 1]$. Таким образом, из условий теоремы 3.6.1 вытекают условия теоремы 3.5.1. Из последней получаем утверждение данной теоремы. □

§ 4. Теорема устойчивости в проблеме Христоффеля и другие теоремы устойчивости в теории выпуклых тел

4.1. Устойчивость в проблеме Христоффеля (см. п. 3.1).

Единственность решения проблемы была доказана Христоффелем. А. Д. Александров, как уже отмечалось в п. 3.1, показал, что условие $\int\limits_\Omega \bar{u} f(\bar{u})\, d\omega = 0$ не является достаточным для того, чтобы непрерывная положительная функция $f(\bar{u})$, $\bar{u} \in \Omega$, была первой функцией кривизны выпуклого тела. А. В. Погорелов привел [11] некоторые достаточные условия на $f(\bar{u})$ для существования решения в проблеме Христоффеля в классе выпуклых тел. Там же А. В. Погорелов доказал следующую теорему устойчивости решения в проблеме Христоффеля для регулярных выпуклых тел в $\mathbf{R}^3$: если $|D_1(A, \bar{u}) - D_1(B, \bar{u})| < \varepsilon$, $\bar{u} \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, то $\delta(A, B) \leqslant (\ln 2 - 1/4)\varepsilon$.

Е. П. Сенькин [28, 29] доказал устойчивость ширины выпуклого тела A (в произвольном направлении) при изменении первой функции кривизны $F_1(A, \omega)$ в случае $n = 3$.

4.2. Устойчивость сферы в классе выпуклых поверхностей с почти омбилическими (шаровыми) точками.

Известно, что если в каждой точке замкнутой выпуклой поверхности F в $\mathbf{R}^3$ отношение главных радиусов кривизны $R_1/R_2 = 1$, то F — сфера. Если предположить, что $|R_1/R_2 - 1| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, можно ли утверждать, что при достаточно малом ε поверхность F близка к сфере?

Решению этого вопроса при различных определениях оценок отклонения от омбиличности и различных предположениях о размерности $\mathbf{R}^n$ посвящены работы [30—32]. Отметим и работу [33], в которой доказывается устойчивость основного тела в классе почти омбилических поверхностей в относительной дифференциальной геометрии.

Сформулируем результат А. В. Погорелова [11], посвященный решению этого вопроса: если в каждой точке границы выпуклого тела A пространства $\mathbf{R}^3$ выполняется неравенство $|R_1/R_2 - 1| < \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, то $\delta(A, E) < C\varepsilon$, где $C < 32\pi$.

4.3. Устойчивость шара при изменении некоторой функции кривизны, средней кривизны.

Устойчивость шара при изменении некоторой функции кривизны и различных предположениях относительно регулярности выпуклого тела рассматривалась в работах [34—42]. Результаты этих работ, без учета порядка функции устойчивости относительно ε, являются следствиями результатов п. 3.2.

Устойчивость шара при изменении средней кривизны рассматривалась в работах [35, 37, 43]. Приведем формулировку теоремы работы [43]: если в каждой точке границы выпуклого регулярного тела A в $\mathbf{R}^3$ для средней кривизны $N=\frac{1}{2}(1/R_1+1/R_2)$ выполняются неравенства $1-\varepsilon\leqslant N\leqslant 1$, $0\leqslant\varepsilon<10^{-10}$, то $\delta(A, E)<C\varepsilon\ln\varepsilon$, где $C<10^{10}$.

4.4. Устойчивость выпуклой поверхности при изменении ее внутренней метрики.

Однозначная определенность выпуклой поверхности с данной регулярной метрикой в классе регулярных выпуклых поверхностей была доказана Кон-Фоссеном. Кон-Фоссен поставил вопрос об устойчивости выпуклой поверхности при изменении ее внутренней метрики. А. В. Погорелов доказал [44] теорему об однозначной определенности выпуклой поверхности с данной метрикой в классе общих выпуклых поверхностей. Ю. А. Волков доказал [45] следующую теорему устойчивости замкнутой выпуклой поверхности при изменении ее метрики, соответствующую теореме однозначной определенности Погорелова: если F^0 и F^1 — замкнутые выпуклые поверхности в $\mathbf{R}^3$, φ — гомеоморфизм F^0 на F^1,

$$\varepsilon=\max_{x,y\in F^0}(\rho_0(x, y)-\rho_1(\varphi(x), \varphi(y))),\quad \delta=\max_{x,y\in F^0}(r(x, y)-r(\varphi(x), \varphi(y))),$$

где ρ_0 и ρ_1 — расстояния на поверхностях F^0 и F^1, а r — расстояние в $\mathbf{R}^3$, то $\delta<C\varepsilon^{1/18}$, где C зависит от диаметра F^0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bonnesen T., Fenchel W.** Theorie der konvexen Körper.— Berlin, 1934.
2. **Александров А. Д.** К теории смешанных объемов выпуклых тел // Мат. сб.— 1937.— Т. 2, № 5.— С. 947—970.
3. **Александров А. Д.** К теории смешанных объемов выпуклых тел // Там же.— 1937.— Т. 2, № 6.— С. 1205—1235.
4. **Александров А. Д.** К теории смешанных объемов выпуклых тел // Там же.— 1938.— Т. 3, № 1.— С. 27—44.
5. **Александров А. Д.** К теории смешанных объемов выпуклых тел // Там же.— 1938.— Т. 3, № 2.— С. 227—249.
6. **Bonnesen T.** Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes.— Paris, 1929.
7. **Hadwiger H.** Gegenseitige Bedeckbarkeit zweier Eibereiche und Isoperimetrie // Vjschr. naturforsch. Ges Zürich.— 1941.— V. 86.— S. 152—156.
8. **Dinghas A.** Bemerkung zu einer Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung durch H. Hadwiger // Math. Nachr.— 1948.— V. 1.— S. 284—286.
9. **Wills J. M.** Zum Verhältnis von Volumen zu Oberfläche bei konvexen Körpern // Arch. Math.— 1970.— V. 21, N 5.— S. 557—560.
10. **Lindelöf L.** Properiétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume // Bull. Acad. Sci. St. Pétersbourg.— 1869.— V. 14.— P. 257—269.
11. **Погорелов А. В.** Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.: Наука, 1969.
12. **Дискант В. И.** Оценки отклонения выпуклых тел через изопериметрическую разность // Сиб. мат. журн.— 1972.— Т. 13, № 4.— С. 767—772.
13. **Дискант В. И.** Устойчивость решения уравнения Минковского // Там же.— 1973.— Т. 14, № 3.— С. 669—673.
14. **Дискант В. И.** Усиления изопериметрического неравенства // Там же.— 1973.— Т. 14, № 4.— С. 873—877.
15. **Дискант В. И.** Обобщение неравенств Боннезена // Докл. АН СССР.— 1973.— Т. 213, № 3.— С. 519—521.
16. **Дискант В. И.** Устойчивость решений обобщенных уравнений Минковского для шара // Укр. геометр. сб.— 1975.— Вып. 18.— С. 53—59.
17. **Дискант В. И.** Устойчивость выпуклого тела при изменении $(n-2)$-й функции кривизны // Там же.— 1976.— Вып. 19.— С. 22—33.
18. **Дискант В. И.** К вопросу о порядке функции устойчивости в проблеме Минковского // Там же.— 1979.— Вып. 22.— С. 45—47.
19. **Дискант В. И.** Устойчивость решения уравнения Минковского для площади поверхности выпуклых тел // Там же.— 1982.— Вып. 25.— С. 43—51.
20. **Дискант В. И.** Устойчивость в проблеме Александрова для выпуклого тела, одна из проекций которого — шар // Там же.— 1985.— Вып. 28.— С. 50—62.
21. **Буземан Г.** Выпуклые поверхности. М.: Наука, 1964.

22. **Лейхтвейс К.** Выпуклые множества.— М.: Наука, 1985.
23. **Хадвигер Г.** Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.— М.: Наука, 1966.
24. **Бляшке В.** Круг и шар.— М.: Наука, 1967.
25. **Herz B.** Über die Willssche Verallgemeinerung einer Ungleichung von Bonnesen // Monatsh. Math.— 1971.— V. 75, № 4.— S. 316—319.
26. **Волков Ю. А.** Устойчивость решения проблемы Минковского // Вестн. ЛГУ.— 1963.— № 1.— С. 33—43.
27. **Chakerian G. D.** Higher Dimensional Analogues of an Isoperimetric Inequality of Benson // Math. Nachr.— 1971.— V. 48, N 1—6.— P. 33—41.
28. **Сенькин Е. П.** Об устойчивости ширины общей замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения средней интегральной кривизны // Укр. геометр. сб.— 1966.— Вып. 2.— С. 88—89.
29. **Сенькин Е. П.** Об устойчивости ширины общей замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения интегральной средней кривизны // Там же.— 1966.— Вып. 3.— С. 93—94.
30. **Невмержицкий Н. С.** Устойчивость в теореме об омбилических поверхностях. I // Вестн. ЛГУ.— 1969.— № 7.— С. 55—60.
31. **Решетняк Ю. Г.** Оценки отклонения от сферы почти омбилических поверхностей // Тр. III Казахстан. межвуз. науч. конф. по мат. и мех., 1967.— Алма-Ата, 1970.— С. 108—109.
32. **Guggenheimer H.** Nearly spherical surfaces // Aequat. Math.— 1969.— V. 3, N 1.—2.— P. 186—198.
33. **Алексеева В. Е., Волков Ю. А.** Почти омбилические поверхности в относительной дифференциальной геометрии // Геометрия.— Л., 1975.— Вып. 4.— С. 3—13.
34. **Фет А. И.** Теоремы устойчивости для выпуклых поверхностей, близких к сфере // Докл. АН СССР.— 1963.— Т. 153, № 3.— С. 537—540.
35. **Koutroufiotis D.** Ovaloids which are almost spheres // Comm. Pure and Appl. Math.— 1971.— V. 24, N 3.— P. 289—300.
36. **Motomiya K.** On hypersurfaces which are close to spheres // Proc. Jap. Acad.— 1972.— V. 48, N 6.— P. 398—401.
37. **Moore J. D.** Almost spherical convex hypersurfaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— V. 180.— P. 347—358.
38. **Дискант В. И.** Оценки для диаметра и ширины выпуклых поверхностей ограниченной гауссовой кривизны // Докл. АН СССР.— 1963.— Т. 153, № 3.— С. 516—518.
39. **Дискант В. И.** Устойчивость в теореме Либмана // Там же.— Т. 158, № 6.— С. 1257—1259.
40. **Дискант В. И.** Теоремы устойчивости для поверхностей, близких к сфере // Сиб. мат. журн.— 1965.— Т. 6, № 6.— С. 1254—1266.
41. **Дискант В. И.** Устойчивость сферы в классе выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны // Там же.— 1968.— Т. 9, № 4.— С. 816—824.
42. **Дискант Н. И.** Некоторые оценки для выпуклых поверхностей с ограниченной функцией кривизны // Там же.— 1971.— Т. 12, № 1.— С. 109—125.
43. **Дискант В. И.** Выпуклые поверхности с ограниченной средней кривизной // Там же.— 1971.— Т. 12, № 3.— С. 659—663.
44. **Погорелов А. В.** Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей.— Киев: Изд-во АН УССР, 1951.
45. **Волков Ю. А.** Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики // Укр. геометр. сб.— 1968.— Вып. 5—6.— С. 44—69.

А. Г. КУСРАЕВ, С. А. МАЛЮГИН

ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ПРОЕКТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ ВЕКТОРНЫХ МЕР

Ю. Г. Решетняку
в связи с шестидесятилетием

В теории векторных мер имеется весьма интересный круг вопросов, связанный с существованием произведения и проективного предела согласованного семейства мер. Отметим несколько основных публикаций, относящихся к этой проблематике. Тензорное произведение банаховозначных мер изучалось в [1—3]; о векторнозначном аналоге теоремы Фубини см. [4—6]. Произведение положительных мер со значениями в упорядоченном векторном пространстве рассмотрено в [7, 8]. О произведениях спектральных мер см., например, [9, 10]. Различные варианты