С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

УСТАНОВКИ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

Юрию Григорьевичу
Решетняку посвящаю

Начало шестидесятых годов нашего века отмечено выдающимся достижением А. Робинсона — созданием нестандартного анализа. Весьма долго нестандартный анализ рассматривали как довольно тонкую и даже экзотическую логическую технику, предназначенную для обоснования метода актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел. Считалось также, что эта техника имеет ограниченную сферу применимости и в любом случае принципиально не может привести к сколь-либо серьезному пересмотру общематематических представлений. В конце семидесятых годов после опубликования теории внутренних множеств Э. Нельсона [74] (и несколько позже теорий внешних множеств К. Хрбачека [62] и Т. Каваи [67]) взгляды на место и роль нестандартного анализа коренным образом обогатились и видоизменились. В свете новых концепций нестандартные элементы стало возможно рассматривать не как «мнимые, глухие, идеальные сущности», добавляемые к обычным множествам из соображений формального удобства, и как неотъемлемые части любых привычных математических объектов. Возникла установка, состоящая в том, что каждое множество образовано стандартными и нестандартными элементами. В свою очередь стандартные множества формируют своеобразную реперную сетку, плотно расположенную в совокупности всех предметов изучения математики. При этом обнаружилось, что фигурирующие в нестандартном математическом анализе объекты — монады фильтров, стандартные части чисел и векторов, тени операторов и т. п.— составляют «канторовские» множества, непопадающие ни на одну из канонизированных картин, рисуемых известными формальными теориями множеств. *Универсум фон Неймана не исчерпывает мир классической математики* — вот одно из очевидных следствий новых воззрений.

Важным достоинством возникших подходов является аксиоматический характер изложения, дающий возможность овладеть концепциями нестандартного математического анализа без предварительного изучения техники ультрапроизведений, булевозначных моделей или их аналогов. Выдвинутые аксиомы просты в обращении и отчетливо мотивируются на содержательном уровне в рамках привычной для анализа «наивной» теоретико-множественной установки. В то же время они существенно расширяют круг математических объектов, создают возможности развития нового формального аппарата, позволяют значительно уменьшить опасные разрывы между представлениями, методическими установками и уровнями строгости, принятыми в математике и в ее приложениях к естественным и социальным наукам.

В 1947 г. К. Гёдель отметил: «Могут существовать аксиомы, столь богатые проверяемыми следствиями, проливающие такой яркий свет на всю дисциплину и доставляющие настолько сильные методы решения задач (даже, насколько это возможно, решающие их в каком-либо конструктивистском смысле), что совершенно безотносительно к их внутренней необходимости эти аксиомы придется принять хотя бы в том же смысле, в каком принимают любую основательную физическую теорию» [58, с. 521]. Предсказание К. Гёделя сбывается на наших глазах.

Цель настоящей обзорной статьи — сделать появившиеся пути в нестандартный анализ более доступными. Для достижения этой цели решаются две конкретные задачи. Первая — дать изложение содержательных качественных представлений о стандартных и нестандартных объектах, о принципах нестандартного анализа на «наивном» уровне строгости, абсолютно достаточном для эффективных применений без апелляции к логическим формализмам. Вторая — предоставить краткий, но полный справочный материал, относящийся к аксиоматическим построениям нестандартного анализа в рамках канторовской установки — к теориям Э. Нельсона, К. Хрбачека и Т. Каваи. (Относительно альтернативного подхода к нестандартному анализу см. работы П. Вопенки и его школы [9].)

Указанные задачи определили план статьи. Собранные в начальных параграфах исторические сведения, качественные мотивировки принципов нестандартного анализа и обсуждение их простейших следствий для дифференциального и интегрального исчисления составляют «наивный» фундамент инфинитезимальных методов. Формальные детали сответствующего аппарата нестандартной теории множеств приведены в заключительных параграфах. Веским доводом в пользу концентрического изложения служат замечательные слова Н. Н. Лузина: «Математический анализ вовсе не есть совершенно законченная наука, как иногда склонны себе его представлять, с раз навсегда найденными принципами, из которых только остается извлекать дальнейшие следствия. ⟨...⟩ Математический анализ ничем не отличается от всякой другой науки и имеет свой ход идей, движущийся не только поступательно, и кругообразно, с возвращением к группе прежних идей, правда всегда в новом освещении» [30, с. 389].

В список литературы к статье вошли, как правило, только непосредственно цитируемые в ней источники, а также работы, содержащие достаточную библиографию в соответствующих областях. В частности, обширную информацию о конкретных исследованиях, использующих современные инфинитезимальные установки, можно извлечь из [14, 18, 41, 52, 53, 55, 56, 59, 60, 61, 64, 68, 69, 72, 73, 75, 76, 78, 79, 80].

Замысел настоящей статьи возник осенью 1984 г. под влиянием бесед о нестандартном анализе, состоявшихся в Новосибирском академгородке с академиками А. Д. Александровым, Я. Б. Зельдовичем, С. С. Кутателадзе, М. А. Стыриковичем и с в то время членом-корреспондентом АН СССР Ю. Г. Решетняком. За основу статьи взяты мультиграфированные записки [19] специального курса лекций, прочитанного мною в Новосибирском государственном университете. Выражаю глубокую признательность всем своим коллегам за проявленный интерес и критические замечания, способствовавшие улучшению статьи.

§ 1. Экскурс в историю математического анализа

1.1. Г. В. Лейбниц и И. Ньютон. Дифференциальное и интегральное исчисление имеет давнее название *«анализ бесконечно малых»*. Именно так был озаглавлен первый учебник математического анализа, вышедший в свет в 1696 г. Этот учебник был составлен Г. Лопиталем в результате контактов с И. Бернулли (старшим), одним из выдающихся последователей Г. В. Лейбница.

«Из всех теоретических успехов знания вряд ли какой-нибудь считается столь высоким триумфом человеческого духа, как изобретение исчисления бесконечно малых во второй половине XVII века. Если уж где-нибудь мы имеем перед собою чистое и исключительное деяние человеческого духа, то именно здесь»,— такую оценку дал новой дисциплине Ф. Энгельс [50, с. 582].

История создания математического анализа, творчество и взаимоотношения его основоположников подвергнуты детальному, можно сказать, скрупулезному изучению (см., например, [68, 80]). Нам здесь достаточно беглого обращения к собственным изложениям Г. В. Лейбница и И. Ньютона своих представлений о бесконечно малых.

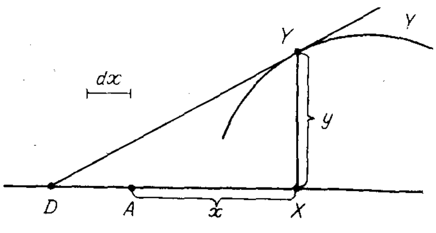

Рис. 1.

Первой опубликованной работой по дифференциальному исчислению является статья Г. В. Лейбница [25] в лейпцигском журнале Acta Eruditorum от 1684 г. Рассматривая кривую YY и отрезок касательной, проведенной в фиксированной точке кривой Y, отвечающей выбранной координате X на оси AX, и обозначая D точку пересечения касательной с указанной осью, Г. В. Лейбниц пишет: «Назовем произвольно взятую прямую dx, а другой отрезок, относящийся к dx так же как... y ...относится к XD назовем... dy или же разностью (differentia)... y...». К этому прилагается рисунок, существенные детали которого воспроизводятся здесь (рис. 1).

Значит, по Г. В. Лейбницу для функции $x \mapsto y(x)$ в точке x при произвольном dx мы имеем $dy := (YX/XD)dx$, т. е. дифференциал определен как соответствующее линейное отображение! Безусловно понимая, что обоснование изложенного им алгоритма дифференциального исчисления (так Г. В. Лейбниц называл правила дифференцирования) требует уточнения понятия касательной, он разъясняет: «...найти касательную — значит провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало, или же провести продолженную сторону бесконечноугольного многоугольника, который для нас равнозначен кривой». Иначе говоря, Г. В. Лейбниц базирует свое исчисление на апелляции к устройству кривых «в малом».

На статут бесконечно малых в те времена имелись практически две точки зрения. В силу первой, более близкой Г. В. Лейбницу, *бесконечно малое число мыслилось как меньшее любого «могущего быть заданным» количества.* Актуально существующие «неделимые» элементы, составляющие величины и фигуры,— вот образы, сопутствующие приведенной концепции. Для другого родоначальника анализа И. Ньютона *бесконечная малость* прежде всего *была связана с представлением об исчезающих количествах* [38, 44]. Знаменитый «метод первых и последних отношений» в классическом трактате «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) имеет следующую формулировку: «Количества, а также отношения количеств, которые в продолжении любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут напоследок равны» [44, с. 101]. Развивая идеи, которые сейчас прочно ассоциируются с теорией пределов, И. Ньютон демонстрировал проницательность и мудрую предусмотрительность, оценивая конкурирующие воззрения. Он писал: «...построение анализа посредством конечных величин и исследование первых или последних отношений нарождающихся или исчезающих конечных величин согласно с геометрией древних, и я желал обнаружить, что в методе флюксий нет необходимости вводить в геометрию бесконечно малые фигуры. Можно, правда, провести анализ на каких угодно фигурах и конечных и бесконечно малых, которые представляют себе подобными исчезающим, так же как и на фигурах, которые в методах неделимых обычно считаются бесконечно малыми, но только при этом следует действовать с должной осторожностью» [38, с. 169].

Столь же гибких, глубоко диалектических взглядов придерживался Г. В. Лейбниц. В известном письме к П. Вариньону [44], подчеркивая, что «нет нужды ставить математический анализ в зависимость от метафизических споров», он указывает на единство существующих представлений об объектах нового аппарата: «...если какой-либо противник желает возражать против наших утверждений, то из нашего исчисления следует, что ошибка будет меньше, чем любая ошибка, какую он сможет указать, ибо в нашей власти взять несравнимо малое достаточно малым для этой цели, поскольку такую величину всегда можно взять сколь угодно малой. Быть может, Вы, сударь, это и имеете в виду, говоря о неисчерпаемом, и в этом, без сомнения, состоит строгое доказательство применяемого нами исчисления бесконечно малых. <...> Также можно сказать, что бесконечные и бесконечно малые обоснованы так, что в геометрии и даже в природе все происходит, как если бы они представляли собой совершенные реальности. Об этом свидетельствует не только наш геометрический анализ трансцендентных, но еще мой закон непрерывности, в силу которого допустимо рассматривать покой как бесконечно малое движение (т. е. как равносильный роду своей противоположности), и совпадение — как бесконечно малое расстояние, и равенство — как последнее из неравенств и т. д.».

1.2. К. Маркс о мистическом дифференциальном исчислении. Высокий уровень требований к обоснованности новых методов, который характерен для цитированных сочинений Г. В. Лейбница и И. Ньютона, к сожалению, не был воспринят их последователями, не мало способствовавшими появлению добавочного флёра мистики на и без того уже весьма нетривиальных абстрактных идеях. Достаточно отметить, что упомянутый учебник Г. Лопиталя гласит: «...бесконечно малая часть, на которую непрерывно увеличивается или уменьшается переменная величина, называется ее дифференциалом». Видно, что здесь сделан колоссальный шаг назад от исходного определения Г. В. Лейбница. Не случайно при знакомстве с анализом XVII века К. Маркс назвал его «мистическим дифференциальным исчислением». При интерпретации набросков К. Маркса [35] из них иногда извлекают несколько драматизированную критику актуальных бесконечно малых. С целью прояснения деталей стоит привести полностью один из соответствующих фрагментов.

«Таким образом, не остается ничего другого, как представлять себе приращения переменной h бесконечно малыми и приписать им, как таковым, *самостоятельное существование*, например, в символах $\dot{x}$, $\dot{y}$ и т. д. или dx, dy [и т. д.]. Но бесконечно малые величины также величины, как и бесконечно большие (слово бесконечно [малое] на самом деле означает только неопределенно малое); эти dy, dx и т. д. или $\dot{y}$, $\dot{x}$ [и т. д.] тоже фигурируют поэтому в вычислении как обыкновенные алгебраические величины, и в приведенном выше уравнении

$$(y+k)-y \quad \text{или} \quad k = 2x\,dx + dx\,dx$$

член $dx\,dx$ имеет такое же право на существование, как и $2x\,dx$. Но самым удивительным является рассуждение, посредством которого этот член насильственно отбрасывается именно в силу того, что используется относительность понятия бесконечно малого; $dx\,dx$ отбрасывается, потому что он бесконечно мал по отношению с dx, а следовательно, и с $2x\,dx$ или $2x\dot{x}$. Или, если в

$$\dot{y} = \dot{u}z + \dot{z}u + \dot{u}\dot{z}$$

[слагаемое] $\dot{u}\dot{z}$ отбрасывается ввиду его бесконечной малости по сравнению с $\dot{u}z$ или $\dot{z}u$, то математическим оправданием этому может служить ссылка на то, что $\dot{u}z + \dot{z}u$ имеет в наших глазах приближенное значение, мыслимое сколь угодно близким к точному. Подобного рода маневр встречается и в обыкновенной алгебре. Но тогда мы оказываемся перед лицом еще большего чуда: благодаря этому методу мы получаем для производной функции [в] x отнюдь не приближенные, а совершенно точные значения (хотя бы, как выше, лишь символически правильные), как в примере $\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}$. Отбрасывая здесь $\dot{x}\dot{x}$, получают

$$\dot{y} = 2x\dot{x},$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x,$$

что и есть правильная первая производная функция от x^2, как это доказывает уже [теорема о] бином [е].

Но это чудо вовсе не чудо. Наоборот, было бы чудом, если бы насильственное отбрасывание $\dot{x}\dot{x}$ *не давало бы точного результата. Отбрасывается-то ведь только некоторая ошибка в вычислении*, являющаяся, однако, неизбежным следствием метода, позволяющего вводить неопределенное приращение, например, h, переменной сразу же как дифференциал dx или $\dot{x}$, как готовый оперативный символ и таким образом столь же непосредственно получать дифференциальное исчисление как самостоятельный, отличный от обыкновенной алгебры способ вычисления» [35, с. 151—153].

1.3. Л. Эйлер. Восемнадцатое столетие в истории математического анализа по праву называют веком Л. Эйлера [5, 22, 23]. Каждый, кто хотя бы бегло пролистает его учебники [46—48], будет потрясен виртуозной техникой и глубиной проникновения в суть дела. Для Л. Эйлера характерен многосторонний, как сейчас говорят, системный подход к исследованию математических задач — он широко использует весь разработанный к тому времени аппарат. Существенно подчеркнуть постоянное, эффективное и эффектное применение инфинитезимальных концепций и, прежде всего, актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел. Л. Эйлер достаточно подробно разъяснил свои методические установки, названные «исчислением нулей». Как станет видно из дальнейшего (см. 3.3, 4.12, 4.14), распространенное мнение о том, что Л. Эйлер дал «неверное обоснование» анализа, ошибочно.

1.4. Выступление Дж. Беркли. Идеи анализа в их общей форме прочно вплетены в канву мировоззренческих представлений XVIII века. Отражением глубины проникновения понятий бесконечно больших и бесконечно малых количеств в культурную среду того периода служат, в частности, вышедшие в 1726 г. из-под пера Дж. Свифта «Путешествия Лемюэля Гуливера...» (Лилипутия и Бробдингнег!) и знаменитый «Микромегас 1752», написанный Ф.— М. Аруэ — Вольтером. Интересно, что одно из высказываний Микромегаса [8, с. 91] А. Робинсон выбрал эпиграфом к [76].

Серьезное «обратное» воздействие на развитие математического анализа оказало выступление в 1734 г. крупного деятеля церкви Дж. Беркли с памфлетом «Аналитик, или рассуждение адресованное неверующему математику (астроному Э. Галлею.— С. С. К.), где исследуется являются ли предмет, принципы и заключения современного анализа более отчетливо познаваемыми и с очевидностью выводимыми, чем религиозные таинства и положения веры» [3, с. 396—422]. Антигуманистическая направленность сочинений Дж. Беркли сочетается с афористичностью, тонкостью наблюдений и убийственной точностью выражений. «...Ошибка может породить истину, хотя и не может породить науку» — вот лейтмотив его критики анализа.

В. И. Ленин, вскрывая ядовитый замысел Дж. Беркли, писал: «Будем считать внешний мир, природу — „комбинацией ощущений", вызываемых в нашем уме божеством. Признайте это, откажитесь искать вне сознания, вне человека „основы" этих ощущений — и я признаю в рамках своей идеалистической теории познания все естествознание, все значение и достоверность его выводов. Мне нужна именно эта рамка и только эта рамка для моих выводов в пользу „мира и религии" Такова мысль Беркли» [26, с. 22]. Вызов Дж Беркли не мог быть оставлен без ответа передовыми представителями научной мысли XVIII века — энциклопедистами.

1.5. Ж. Д'Аламбер. Поворотный пункт в истории формирования основных понятий анализа связан с идеями и деятельностью

Ж. Д'Аламбера. Один из организаторов и ведущих авторов бессмертного шедевра просветительской мысли «Энциклопедии или толкового словаря наук, искусств и ремесел» в статье «Дифференциал» заявил: «Ньютон никогда не считал дифференциальное исчисление исчислением бесконечно малых, а видел в нем метод первых и последних отношений» [44, с. 157]. Ж. Д'Аламбер стал первым математиком, объявившим себя обладателем доказательства, что бесконечно малые «на самом деле не существуют ни в природе, ни в допущениях геометров». Позиция Ж. Д'Аламбера, отраженная «Энциклопедией...», в немалой степени способствовала оформлению в конце XVIII века представления о бесконечно малой, как о величине, стремящейся к нулю.

1.6. Б. Больцано, О. Коши, К. Вейерштрасс. XIX век стал веком обоснования анализа с помощью теории пределов. Выдающийся вклад в этот процесс внесли Б. Больцано, О. Коши и К. Вейерштрасс. Достижения названных ученых отражены в любом курсе дифференциального и интегрального исчисления. Новый канон строгости, выдвинутый Б. Больцано [65], данное О. Коши определение бесконечно малого количества как переменной с нулевым пределом, наконец, ε-δ-техника К. Вейерштрасса составляют неотъемлемую часть математических воззрений, вошли в современную культуру.

1.7. Н. Н. Лузин. Начало XX века отмечено дальнейшим ростом недоверия к концепции актуальных бесконечно малых. Эта тенденция особенно усилилась в связи с переустройством математики на основе теоретико-множественной установки, завоевавшей себе в тридцатые годы прочные ключевые позиции.

Н. Н. Лузин в первом издании Большой Советской Энциклопедии в 1934 г. писал: «Что же касается постоянного бесконечно малого количества, отличного от нуля, то современный математический анализ, не отрицая формальной возможности определить идею постоянного бесконечно малого (например, как соответствующего отрезка «неархимедовой» геометрии), рассматривает эту идею как совершенно бесплодную, так как ввести такое бесконечно малое в исчисление оказывается невозможным» [30, с. 293—294]. На отношении Н. Н. Лузина к бесконечно малым стоит остановиться особо, как на важном свидетельстве того, обычно скрытого драматизма, которым наполнена история каждой глубокой идеи, волнующей людей. Н. Н. Лузин отличался редкой способностью проникать в ядро самых изощренных математических проблем и, можно сказать, владел замечательным даром предвидения [23, 28]. Идея бесконечно малых чисел при этом была чрезвычайно близка ему психологически. Он подчеркивал: «...мысль о них никогда не могла быть успешно изгнана из сознания. Имеются, очевидно, какие-то глубоко скрытые причины, еще до сих пор не выясненные полностью, которые заставляют наш ум быть расположенным всерьез считаться с ними» [30, с. 396]. В другом месте с подлинной скорбью Н. Н. Лузин отмечал: «Когда ум начинает свое знакомство с анализом, словом, когда для него весна, он начинает именно с актуально малых, которые можно назвать „элементами" количества. Но постепенно, шаг за шагом, по мере накопления у него знаний, теорий, пресыщения к абстракции, усталости, ум начинает забывать свои первоначальные стремления, улыбаться их „ребячеству". Короче говоря, когда приходит осень ума, он дает себя убедить в единственности правильного обоснования при помощи пределов» [7]. Последнюю точку зрения Н. Н. Лузин энергично развивал в учебнике «Дифференциальное исчисление», указывая, что «*никакая постоянная величина не является бесконечно малой, так же как никакое число, как бы мало оно ни было*. Поэтому, в сущности говоря, было бы гораздо правильнее употреблять не термин «*бесконечно малое*», но термин «бесконечно умаляющееся» как более ярко выражающий *идею переменности*» [29, с. 61].

1.8. А. Робинсон. Седьмое (посмертное) издание названного учебника Н. Н. Лузина увидело свет в том же 1961 г., в котором А. Робинсон опубликовал свой «Нестандартный анализ», содержащий современное обоснование метода актуальных бесконечно малых (см. [39, 76, 77]). А. Робинсон опирался на локальную теорему А. И. Мальцева, выделяя ее как результат «основополагающего значения для нашей теории» [76, с. 13] и прямо ссылаясь на работу А. И. Мальцева [33], относящуюся к 1936 г. Открытие А. Робинсона разъясняет идеи родоначальников дифференциального и интегрального исчисления, дает новое подтверждение диалектического характера развития математики.

§ 2. Понятие множества в нестандартном анализе

2.1. Нынешние изложения математического анализа строятся на понятии множества. Нестандартный анализ или, более полно, *нестандартный математический анализ является разделом математического анализа.* В этой связи становится очевидным, что в нем принимаются обычные взгляды на множества (см., например, [13]). Иными словами, в нестандартном анализе предполагаются множествами те и только те совокупности, которыми оперирует классическая теория. Стоит подчеркнуть, что справедлива и переформулировка приведенного утверждения: нестандартный анализ не считает множествами те и только те совокупности, которые не признает в качестве множеств «стандартная» математика. В то же время *нестандартный анализ связан с уточненными воззрениями на множества*, т. е. как иногда говорят, *строится в рамках нестандартной теории множеств.*

2.2. В основе наивной теории множеств лежат классические представления Г. Кантора: «множество есть многое, мыслимое нами как единое» и множество — это «соединение в некое целое определенных хорошо различимых предметов нашего созерцания или нашего мышления» [15, с. 173]. Общеизвестно, что подобные концепции чересчур широки. Это обстоятельство обходится детализацией различий множеств и немножеств. Например, для обозначения неприемлемых — «слишком больших» — совокупностей множеств применяется термин «*класс*». При этом подразумевается, что класс не обязан быть множеством. Иными словами, при формализации понятий наивной теории множеств более полно и тщательно регламентируются процедуры, позволяющие вводить то или иное «канторовское» множество в математический обиход. Все допущения в математику множества совершенно равноправны. Само собой, отсюда никак не следует, что все множества равны или не имеют отличий. Просто множества однотипны, обладают общим статутом — они элементы «класса всех множеств».

2.3. Решающий новый момент, главная посылка, формирующая нестандартную теорию множеств, чрезвычайно проста. Она заключена в том, что *множества бывают разные*: *стандартные и нестандартные*. Поэтому правильнее говорить не о нестандартной теории множеств, а о теории множеств, стандартных и нестандартных. Интуитивное представление, выделяемое фразой «множество A стандартно», состоит в том, что A ясно и отчетливо описано, стало «артефактом» познавательной деятельности людей. Понятием стандартности проводится разграничительная линия между объектами, определяемыми явными математическими конструкциями, например, с помощью теорем существования и единственности,— их называют *стандартными множествами*, и объектами, возникающими в процессе исследования неявным, косвенным образом — *нестандартными множествами.*

Прямыми недвусмысленными способами заданы числа π, e, $\sin 81$, конкретно и четко описаны множества натуральных и вещественных чисел. Названные объекты являются стандартными. В свою очередь, произвольное «абстрактное» вещественное число возникает косвенным образом, вводится как элемент ранее указанного множества всех вещественных чисел. Подобный способ введения объектов в рассмотрение чрезвычайно распространен: вектор — это элемент векторного пространства, фильтр — множество подмножеств данного множества, обладающее к тому же известными свойствами и т. п. Значит, среди вещественных чисел есть стандартные и нестандартные, существуют стандартные и нестандартные векторы и фильтры и, вообще, имеются стандартные и нестандартные множества.

Разберем пример множества песчинок на Земле. В классическом сочинении «Псаммит» Архимед указал: «...среди чисел, которые получили от нас название и опубликованы в написанной к Зевксиппу книге, некоторые превосходят не только число песчинок в объеме, равном заполненной, как мы сказали, Земле, но даже в объеме, равном миру» [2, с. 358]. Значит, число песчинок на Земле — конкретное натуральное число. Однако дать непосредственное определение этого числа, назвать именно это число практически невозможно. Последовательный перебор песчинок на Земле выражается «неосуществимым», «неопределимым» — нестандартным — натуральным числом и соответственно множество песчинок нестандартно (ср. [6, 9, 12]).

2.4. Разумеется, приведенные взгляды на различия стандартных и нестандартных множеств имеют вспомогательное значение для овладения правилами оперирования с ними. Здесь можно провести аналогию с положением в геометрии, где интуитивные наглядные представления о пространственных формах помогают выработать навыки использования аксиом, составляющих, в конечном счете, строгие определения точек, прямых, плоскостей и т. п. Следуя А. Д. Александрову, необходимо отметить, что «аксиомы сами по себе нуждаются в содержательном обосновании, они лишь суммируют другой материал и дают начало логическому построению теории» [1, с. 51]. В связи с этим *формальному введению аксиом нестандартной теории множеств необходимо предпослать их качественное обсуждение.*

2.5. Как мы уже знаем, нестандартная теория множеств начинается с фиксации первичного наблюдения: множества бывают разные — стандартные и нестандартные. Помимо этого принимаются следующие постулаты (или, более точно, варианты следующих постулатов).

2.6. Принцип переноса: *обычное утверждение, доказывающее существование некоторого множества, задает одновременно и стандартное множество.* Иными словами, теоремы существования и единственности, принятые в классической математике, считаются прямыми, явными определениями математических объектов. Эквивалентная переформулировка приведенного принципа, разъясняющая смысл его названия, гласит: для того чтобы доказать какое-либо утверждение ибо всех множествах, достаточно доказать его только для стандартных множеств. Интуитивным обоснованием принципа переноса служит тот бесспорный факт, что суждения, относящиеся к произвольным множествам, мы выносим, оперируя только с уже реально описанными — со стандартными — множествами.

2.7. Принцип идеализации: *в каждом бесконечном множестве имеется нестандартный элемент.* Адекватность приведенного положения общим представлениям о бесконечности несомненна. Принцип идеализации в дальнейшем часто дается в более сильных формах, отражающих концепцию неисчерпаемого разнообразия идеальных объектов. Например, иногда принимают, что все стандартные множества являются элементами некоторого конечного множества. Число элементов такого «универсального» множества колоссально и, что важнее всего, неосуществимо — нестандартно. Поэтому не может вызывать удивление нестандартность самого универсального множества.

Полезно подчеркнуть, что при работе с изложенными первыми двумя постулатами (как впрочем и везде) *необходимо проявлять осторожность*. Так, в силу принципа переноса стандартное множество определяется своими стандартными элементами однозначно в среде сородичей — стандартных множеств. Однако рассматриваемое множество не сводится, вообще говоря, к принадлежащим ему стандартным элементам. Могут существовать другие, нестандартные множества, содержащие в себе весь запас стандартных элементов исходного множества и не имеющих никаких иных стандартных элементов. Еще одно достойное упоминания обстоятельство заключается в том, что, как и в обычной теории множеств, *понятие «утверждение» следует применять осмотрительно*. В принципе переноса речь должна идти об обычных математических предложениях, не апеллирующих к новому, описанному на содержательном уровне свойству множеств — быть или не быть стандартными. В противном случае, исходя из того, что все стандартные множества стандартны, мы сделали бы вывод о стандартности произвольного множества. Последнее заключение противоречит принципу идеализации. Итак, констатация того, что некоторое множество стандартно — это не обычное утверждение.

2.8. Принцип стандартизации: *каждое стандартное множество и любое свойство определяют новое стандартное множество — подмножество исходного множества*, стандартные элементы которого обладают названным свойством. Подробнее говоря, пусть A — рассматриваемое стандартное множество и φ — какое-либо свойство. Принцип стандартизации утверждает, что имеется стандартное множество, обозначаемое обычно $^*\{x \in A\colon \varphi(x)\}$ и удовлетворяющее соотношению:

$$y \in {}^*\{x \in A\colon \varphi(x)\} \leftrightarrow y \in \{x \in A\colon \varphi(x)\} \leftrightarrow y \in A \wedge \varphi(y)$$

для всякого стандартного y. Множество $^*\{x \in A\colon \varphi(x)\}$ часто называют *стандартизацией*, опуская указания на параметры, участвующие в его определении. Интуитивное обоснование принципа стандартизации состоит в том, что имея в наличии явные описания математических объектов, мы можем оперировать составленными из них по тем или иным законам новыми вполне конкретными множествами. *Стандартизация дополняет общепринятый метод выделения подмножеств с помощью отбора элементов с наперед заданным свойством*. При обдумывании принципа стандартизации полезно обратить внимание на то, что в нем ничего не говорится о нестандартных элементах возникающего множества. Это неслучайно, такие элементы могут обладать, а могут и не обладать рассматриваемым свойством. Стоит здесь же подчеркнуть, что принцип стандартизации нужно применять с должной осмотрительностью. Попытка самовольно стандартизовать универсальное множество, содержащее все стандартные множества, приводит к немедленному противоречию.

2.9. Приведенные постулаты кладутся в основу аксиоматических изложений нестандартной теории множеств. Мы рассмотрим их детально в § 5—7, а пока, оставаясь в рамках изложенных «наивных» представлений, обсудим свойства элементарных объектов математического анализа (см. также [32, 36, 42, 59, 60, 63, 69]).

§ 3. Простейшие свойства стандартных и нестандартных вещественных чисел

3.1. Для множества A условимся писать $a \in {}^\circ A$ вместо выражения: «a — стандартный элемент A».

3.2. *Имеют место утверждения*:

(1) *справедлив принцип индукции по стандартным натуральным числам, т. е. если A — множество, для которого $1 \in A$ и при $n \in {}^\circ\mathbf{N}$*

верно $n \in A \to n+1 \in A$, *то* A *содержит все стандартные натуральные числа*: ${}^{\circ}\mathbf{N} \subset A$;

(2) *стандартное конечное множество имеет только стандартные элементы*;

(3) *если множество составлено из стандартных элементов, то оно конечно и стандартно*;

(4) *натуральное число* N *нестандартно в том и только в том случае, если* N *больше любого стандартного натурального числа*;

(5) *для бесконечного стандартного* A *символ* ${}^{\circ}A$ *не обозначает множества.*

◁ Установим (1) и (5), так как прочие утверждения проверяются проще.

(1) Используя принцип стандартизации, образуем следующее стандартное множество $B := {}^{*}\{n \in \mathbf{N}\colon\ n \notin A\}$. Допустим, что $B \neq \varnothing$. Тогда у B имеется наименьший стандартный (в силу принципа переноса) элемент m. По условию $m \neq 1$ (ибо $1 \in A$). Кроме того, $m \notin A$ и, стало быть, $m-1 \notin A$. Поскольку $m-1 \in {}^{\circ}\mathbf{N}$, то $m-1 \in B$. Получаем ложное неравенство $m-1 \geqslant m$. Итак, $B = \varnothing$, т. е. $(\forall n \in {}^{\circ}\mathbf{N})\, n \in A$.

(5) Допустим, что ${}^{\circ}A$ — множество. На основании (3) заключаем: ${}^{\circ}A$ конечно и стандартно. По принципу переноса $A = {}^{\circ}A$. Значит, A конечно. Получили противоречие. ▷

3.3. В связи с 3.2(4) нестандартные натуральные числа называют (*актуально*) *бесконечно большими* или, короче, бесконечными. Как указывал Л. Эйлер: «...бесконечное число и число, большее всякого могущего быть заданным,— это синонимы» [47, с. 89] (ср. [6, с. 61]). Бесконечность числа N выражают символом $N \approx +\infty$.

3.4. *Имеют место следующие факты*:

(1) $(N \approx +\infty,\ M \approx +\infty) \to (N+M \approx +\infty,\ NM \approx +\infty)$;

(2) $(N \approx +\infty,\quad n \in {}^{\circ}\mathbf{N}) \to (N+n \approx +\infty,\quad N-n \approx +\infty,\quad nN \approx +\infty)$; $(N \approx +\infty,\ M \geqslant N) \to M \approx +\infty$;

(3) «*...если* 1/0 *обозначает бесконечно большое число, то так как* 2/0 *есть, несомненно, удвоенное* 1/0 (по определению! — **С. С. К.**), *ясно, что число, хотя бы и бесконечно большое, может стать еще в два или несколько раз больше*» (Л. Эйлер [35, с. 620]).

3.5. Пусть $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ — расширенная числовая прямая. Элемент $t \in \overline{\mathbf{R}}$ называют *конечным* и пишут $t \in {}^{\approx}R$, если найдется стандартное число $n \in {}^{\circ}\mathbf{N}$, для которого $|t| \leqslant n$. При $t \notin {}^{\approx}\mathbf{R}$ и $t > 0$ пишут $t \approx +\infty$; аналогично понимают запись $t \approx -\infty$. Для бесконечных чисел часто используют условное соглашение типа $t \approx +\infty \leftrightarrow t \in \mu(+\infty)$ и соответствующий словесный оборот: «элемент t лежит в монаде $+\infty$». Число $t \in \mathbf{R}$ называют (*актуально*) *бесконечно малым* или *инфинитезимальным*, если $|t|$ меньше любого стандартного строго положительного числа или, что то же самое, если $|t| \leqslant 1/n$ для всякого $n \in {}^{\circ}\mathbf{N}$. При этом пишут $t \approx 0$ или $t \in \mu(\mathbf{R})$ и говорят, что t лежит в *монаде* нуля. (Символ $\mu(\mathbf{R})$ используют наряду с обозначением $\mu(0)$, подчеркивая очевидную связь с единственной отделимой векторной топологией $\mathbf{R}$.) Термин монада μοναζ имеет давнюю историю и традиционно (что не вполне точно) переводится в классических текстах как единица. По определению Евклида, монада «есть ⟨то⟩, через что каждое из существующих считается единым» [37, с. 9].

3.6. *Справедливы утверждения*:

(1) $(s \approx 0,\ t \approx 0) \to s+t \approx 0$;

(2) $(s \in {}^{\approx}R,\ t \approx 0) \to st \approx 0$;

(3) $z \approx 0 \leftrightarrow 1/z \approx +\infty$ (*при* $z > 0$)

«*...если z становится количеством, меньшим любого могущего быть заданным количества, т. е. бесконечно малым, то значение дроби* $^1/_z$ *должно стать большим, чем любое могущее быть заданным количество, т. е. бесконечно большим количеством*» (Л. Эйлер [47, с. 93]);

(4) ($t \approx 0$ *и* t *стандартно*) $\to t = 0$.

$\triangleleft$ (1) Пусть $n \in {}^{\circ}\mathbf{N}$. Ясно, что $|s| \leqslant 1/2n$ и $|t| \leqslant 1/2n$. Отсюда $|s+t| \leqslant |s| + |t| \leqslant 1/2n + 1/2n = 1/n$, т. е. $s+t$ бесконечно мало.

Прочие утверждения проверяются столь же просто. $\triangleright$

3.7. *Монада* $\mu(\mathbf{R})$ — *это не множество.*

$\triangleleft$ Допустим противное. Тогда $\mu(\mathbf{R})$ — подмножество $\mathbf{R}$. Для каждого $t > 0$, $t \in {}^{\circ}\mathbf{R}$, будет $t \geqslant \mu(\mathbf{R})$. Значит, $t \geqslant s := \sup \mu(\mathbf{R})$. Ясно, что число s бесконечно мало, $s > 0$ и, кроме того, $2s \leqslant s$. Последнее невозможно. $\triangleright$

3.8. Если $s - t \approx 0$ для s, $t \in \mathbf{R}$, то пишут $s \approx t$ и говорят о *бесконечной близости* s и t. Родоначальники математического анализа при необходимости не различали числа, разность между которыми инфинитезимальна. Такое положение Л. Эйлер выражал словами: «...бесконечно малое количество есть точно нуль» [47, с. 91].

3.9. Полезно специально подчеркнуть, что бесконечную близость чисел нельзя назвать подмножеством произведения $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. В самом деле, в противном случае множеством оказался бы образ элемента нуль при этом отношении, т. е. монада $\mu(\mathbf{R})$. Здесь же стоит заметить, что *монада* $\mu(\mathbf{R})$ *«неделима»*, т. е. для каждого стандартного n верно: $1/n\mu(\mathbf{R}) = \mu(\mathbf{R})$. При осмыслении роли монады $\mu(\mathbf{R})$ в построении системы целых чисел поучительно обратиться к определению Евклида: «Число же — множество, составленное из монад» (ср. [37, с. 9]). Аналогично, вся «нестандартная» расширенная числовая прямая $\overline{\mathbf{R}}$ и, что наиболее нетривиально, ее конечная часть ${}^{\approx}\mathbf{R}$ представляют собой наборы монад. Более строгая формулировка этого утверждения основывается на следующем фундаментальном факте.

3.10. *Для каждого конечного числа существует, и притом единственное, бесконечно близкое к нему стандартное число.*

$\triangleleft$ По принципу стандартизации при данном $t \in {}^{\approx}\mathbf{R}$ можно организовать стандартное множество $A := {}^{*}\{a \in \mathbf{R}\colon\ a \leqslant t\}$. Ясно, что $A \neq \varnothing$ и $A \leqslant n$, где стандартное число $n \in {}^{\circ}\mathbf{N}$ таково, что $-n \leqslant t \leqslant n$. В самом деле, для каждого стандартного $a \in A$ будет $a \leqslant t \leqslant n$. По принципу переноса заключаем: $A \leqslant n$. В силу полноты $\mathbf{R}$ имеется $s := \sup A \in \mathbf{R}$. Очевидно, s — стандартное число. Покажем, что $s \approx t$. В противном случае при некотором стандартном $\varepsilon > 0$ будет $|s - t| > \varepsilon$. Если $s \geqslant t$, то получится $s \geqslant t + \varepsilon$, т. е. $s \geqslant a + \varepsilon$ для каждого стандартного $a \in A$. Но тогда $s \geqslant s + \varepsilon$, что неверно. Оставшаяся возможность $s < t$ приводит к противоречию столь же скоро. В самом деле, было бы $t > s + \varepsilon$ и вновь $s \geqslant s + \varepsilon$. $\triangleright$

3.11. Стандартное число, бесконечно близкое к конечному числу $t \in {}^{\approx}\mathbf{R}$, называют *стандартной частью* t и обозначают $\operatorname{st}(t)$ или ${}^{\circ}t$. Полагают также ${}^{\circ}t := \pm\infty$, если $t \approx \pm\infty$.

3.12. Таким образом, расширенную прямую в нестандартном анализе нужно представлять себе в связи со следующей схемой (рис. 2). Выделяя (конечное) число t на оси, мы рисуем жирную точку — монаду $\mu(t) := t + \mu(\mathbf{R})$ — «неделимое точное изображение ${}^{\circ}t$». Если направить сильный микроскоп в район точки t, то в окуляре мы увидим расплывшееся облачко с неясными краями, представляющее образ $\mu(t)$. При выборе объектива с еще большей степенью увеличения наблюдаемый нами кусочек «точки — монады» детализируется, станет крупнее и частично выйдет из поля зрения. При этом всякий раз мы имеем дело с одним

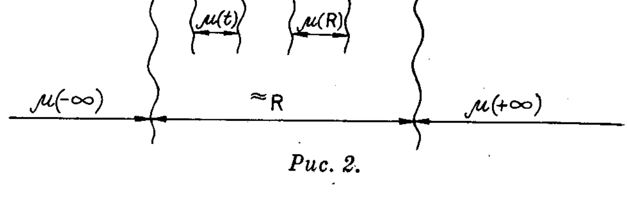

Рис. 2.

и тем же стандартным вещественным числом, которое, если угодно, описано приведенным процессом «изучения микроструктуры физической прямой».

3.13. *Справедливы утверждения:*

(1) *для* s, $t \in {}^{\approx}\mathbf{R}$ *выполнено:*

$$°(s+t) = °s + °t, \quad °(st) = (°s)(°t), \ s \leqslant t \to °s \leqslant °t;$$

(2) *переход от вещественного числа к его стандартной части не является множеством (и, в частности, функцией).*

◁ Докажем, например, (2). Если закон $t \to °t$ — множество, то множество и монада $\mu(\mathbf{R})$, ибо $t \in \mu(\mathbf{R}) \leftrightarrow °t = 0$. Осталось учесть 3.7. ▷

§ 4. Обсуждение начальных понятий анализа на прямой

4.1. Нестандартные критерии пределов. *Для стандартной последовательности* (a_n) *и стандартного числа* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *имеют место утверждения:*

(1) *число* a *— частичный предел* (a_n) *в том и только в том случае, если для некоторого бесконечного большого* N *выполнено* $a = °a_N$;

(2) *число* a *— предел* (a_n) *в том и только в том случае, если при всех бесконечно больших номерах* N *член* a_N *бесконечно близок к* a, *т. е.* $a = \lim a_n \leftrightarrow (\forall N \approx +\infty) a_N \approx a$.

◁ Установим, например, (2). Пусть сначала $a_n \to a$ и для определенности $a \in \mathbf{R}$. По условию, для каждого положительного числа $\varepsilon > 0$ и некоторого $n \in \mathbf{N}$ выполнено $|a_N - a| \leqslant \varepsilon$ как только $N \in \mathbf{N}$ и $N \geqslant n$. Значит, в силу принципа переноса, для стандартного $\varepsilon > 0$ имеется стандартное n с тем же свойством. Любое бесконечно большое N мажорирует найденное n, т. е. $a_N \approx a$.

Пусть теперь известно, что при $N \approx +\infty$ будет $a_N \in \mu(a)$. Для разнообразия считаем, что $a = -\infty$. Возьмем $n \in °\mathbf{N}$. В силу 3.4(2) и определения монады, если $N \geqslant M$, где M — какое-либо бесконечно большое число, то $a_N \leqslant -n$. Итак, для всякого стандартного n мы доказали «нечто» — $(\exists M)(\forall N \geqslant M) \ a_N \leqslant -n$. По принципу переноса это «нечто» верно при произвольном $n \in \mathbf{N}$, т. е. $a_n \to -\infty$. ▷

4.2. Отметим достоинства критериев 4.1. Мы увидели, что частичные пределы стандартной последовательности — это определимые числа, отвечающие бесконечным номерам. Иначе говоря, *частичный предел представляет собой наблюдаемое значение некоторого бесконечно далекого члена последовательности.* Приведенное утверждение имеет ясное интуитивное обоснование и чрезвычайно резко отличается от обычного определения, поучительное обсуждение которого дано Н. Н. Лузиным в [31, с. 98—99].

Признак 4.1(2) удачно схватывает динамическую идею предельного перехода, превосходно описанную Р. Курантом [20, с. 66—67] и охарактеризованную им как недопускающую точной математической формулировки. В то же время нестандартный критерий предела применим только к стандартным последовательностям (если $a_n := N/n$, где $N \approx +\infty$, то $a_n \to 0$ и $a_N = 1$). Другими словами, предложение 4.1 дополняет классические представления о пределе, а не отвергает или отменяет их. Более того, указывая сходящиеся стандартные последовательности, мы тем самым автоматически задаем стандартное множество всех сходящихся последовательностей с помощью принципа стандартизации. Итак, *привычные* ε-N-*конструкции и нестандартные формулировки теснейшим образом взаимосвязаны, находятся в неразрывном единстве.*

Полезно особо подчеркнуть, что в конкретных приложениях (в физике, в частности) приходится сталкиваться с «реальными», явно описанными, т. е. стандартными последовательностями. Кроме того, в подобных ситуациях «бесконечное» имеет ясный (физический) смысл —

прямо указываются соответствующие границы и масштабы. Учитывая также, что проблемы существования равным образом решаются на практике из содержательных соображений (если нет физической скорости, ее не стоит и искать), возникает задача опознания заведомо имеющегося предела. Нестандартный анализ дает простой рецепт: «возьмите общий член вашей последовательности с каким-нибудь (все равно каким) бесконечным номером; определяемое этим членом число и есть искомый предел». В этой связи становится более понятной обоснованность инфинитезимальных методов родоначальников дифференциального и интегрального исчисления, которые искали ответы на вопросы о точных числовых значениях стандартных величин: площадей конкретных фигур, уравнений касательных к «именным» кривым, интегралов явно выписанных аналитических выражений и т. п.

4.3. Важным новым вкладом нестандартного анализа является формирование понятия предела *конечной последовательности* $a[N]:=$ $:=(a_1, \ldots, a_N)$, где N — бесконечно большое натуральное число. Интуитивная идея, положенная в основу следующего определения, хорошо отражает практические приемы нахождения числовых характеристик необозримых дискретных совокупностей: термодинамических параметров объемов жидкости или газа, оценок спроса населения и т. п.

4.4. Число a называют *микропределом* последовательности $a[N]$, если для всех бесконечных M, меньших N, будет $a_M \approx a$. Покажем, что понятие микропредела согласовано с обычным представлением о сходимости.

4.5. *Пусть* (a_n) — *стандартная* (*счетная*) *последовательность*, $N \approx$ $\approx +\infty$ *и* $a \in {}^*\mathbf{R}$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) ${}^\circ a$ — *микропредел* $a[N]$;

(2) *последовательность* (a_n) *сходится к* ${}^\circ a$.

$\triangleleft$ Импликация $(2) \rightarrow (1)$ содержится в 4.1(2). Для доказательства $(1) \rightarrow (2)$ возьмем произвольное стандартное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество $A := \{m \in \mathbf{N}\colon\ (\forall n)\,(m \leqslant n \leqslant N) \rightarrow |a_n - {}^\circ a| \leqslant \varepsilon\}$. Множество A непусто, ибо $N \in A$. Значит, A содержит наименьший элемент m. Если $m \approx$ $\approx +\infty$, то $m-1 \approx +\infty$ и по условию $m-1 \in A$. Таким образом, m стандартно. Кроме того, если $n \geqslant m$ и n стандартно, то $n \leqslant N$ и $|a_n - {}^\circ a| \leqslant \varepsilon$. Итак, $(\forall \varepsilon \in {}^\circ\mathbf{R},\ \varepsilon > 0)\,(\exists m \in {}^\circ\mathbf{N})\ \ n \geqslant m \rightarrow |a_n - {}^\circ a| \leqslant \varepsilon$. По принципу переноса заключаем: (a_n) сходится к ${}^\circ a$. $\triangleright$

4.6. Нестандартный критерий непрерывности. *Пусть* f — *стандартная числовая функция и* x — *стандартная точка ее стандартной области определения. Эквивалентны утверждения*:

(1) f *непрерывна в точке* x;

(2) f *переводит точки, бесконечно близкие к* x, *в точки, бесконечно близкие к* $f(x)$, *т. е.* f *микронепрерывна в* x.

4.7. При обсуждении приведенного нестандартного критерия можно повторить аргументацию из 4.2. Стоит подчеркнуть следуя Р. Куранту, что «как и в случае предела последовательности, определение Коши покоится, так сказать, на обращении интуитивно приемлемого порядка, в каком хотелось бы рассматривать переменные» [20, с. 73]. Нестандартный анализ освобождает нас от неприятного обращения кванторов для всех доступных нам — стандартных — функций и точек. В то же время ε-δ-определение в полном объеме лишь косвенно восстанавливается через микронепрерывность в точке с помощью процедуры стандартизации. Понять микронепрерывность в большем объеме помогают следующие утверждения (см. [11, 53, 75]).

4.8. *Стандартная функция* f *микронепрерывна в каждой* (*не обязательно стандартной*) *точке в том и только в том случае, если* f *равномерно непрерывна.*

4.9. *Стандартное множество состоит из микронепрерывных* (*в каждой точке*) *функций в том и только в том случае, если это множество равностепенно* (*равномерно*) *непрерывно.*

4.10. Пусть y — стандартная функция, определенная в окрестности стандартной точки x и дифференцируемая в этой точке. Пусть, далее, dx — произвольное ненулевое бесконечно малое число. Обозначим, следуя Г. В. Лейбницу, символом dy *дифференциал функции* y в точке x, примененный к элементу dx.

4.11. *Справедливы соотношения*:

$$dy \approx 0, \quad dy \approx y(x+dx) - y(x),$$
$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx}.$$

4.12. Нестандартные представления 4.11 дополняют следующие указания Л. Эйлера: «В дифференциальном исчислении я уже отметил, что задачу разыскания дифференциалов нужно понимать не в абсолютном, а в относительном смысле; это значит, что если y есть некоторая функция от x, то нужно определить не столько сам ее дифференциал, сколько его отношение к дифференциалу dx. Действительно, так как все дифференциалы сами по себе равны нулю, то какова бы ни была функция y количества x, всегда $dy = 0$; таким образом, в абсолютном смысле здесь чего-нибудь большего нельзя и искать. Правильная же постановка вопроса такова: x получает бесконечно малое, т. е. исчезающее приращение dx; требуется определить, как относится к dx приращение, которое вследствие этого получает функция y. Правда, оба приращения $= 0$, однако между ними существует определенное отношение, которое и находится должным образом в дифференциальном исчислении» [48, с. 9].

Напомним, что Л. Эйлер употребляет знак $=$ там, где мы пишем $\approx$ (см. 3.8), и ищет производную, которую считает имеющейся, работая с конкретными дифференцируемыми функциями. При этих условиях вполне правомочно использовать любое — как угодно подобранное — инфинитезимальное dx. Повторяя афористичное выражение Ф. Энгельса, можно сказать: «...dx бесконечно мало, но тем не менее действенно и производит всё» [50, с. 580].

4.13. Нестандартное представление интеграла Римана. *Пусть* $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ — *стандартная непрерывная функция и* $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b$ — *разбиение* $[a, b]$, *причем* $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ *и* $x_k \approx x_{k+1}$ *для* $k := 1, \ldots, N$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = {}^\circ\!\left(\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)\right).$$

◁ Следует заметить, что N бесконечно велико и воспользоваться как определением интеграла, так и нестандартными критериями 4.1 (2) и 4.8. ▷

4.14. Предложение 4.13 дает формальное обоснование идущему из глубокой древности пониманию интегрирования как специфического варианта обычного процесса суммирования. В самом деле оказывается, что *при поиске интеграла стандартной непрерывной функции следует найти точное значение* (= стандартную часть) *всего одной конечной суммы* бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. Полезно в этой связи воспроизвести определение интеграла (с «переменным верхним пределом»), данное Л. Эйлером:

«Интегрирование обычно определяется так. Говорят, что это есть суммирование всех значений дифференциального выражения Xdx, если переменному x придавать последовательно все отличающиеся друг от друга на разность dx значения, начиная с некоторого данного значения вплоть до x, разность же эту нужно считать бесконечно малой. ⟨...⟩ Из изложенного же метода во всяком случае ясно, что интегрирование можно получить из суммирования с любой точностью; точно же его нельзя совершить иначе, как положив, что разности являются бесконечно малыми, т. е. нулями» [48, с. 163].

Подчеркнем здесь же, что для нестандартных функций прием, описанный в 4.13, вообще говоря, не годится. Иначе говоря, как и в предыдущих случаях, мы обнаруживаем, что *нестандартные представления об объектах математического анализа дополняют, уточняют и развивают (но ни в коей мере не отменяют) свои общеизвестные классические аналоги.*

4.15. Отмеченные обстоятельства свидетельствуют, что *нестандартный анализ — прямой наследник исчисления бесконечных малых.* Вот почему сейчас все большее распространение получает термин «инфинитезимальный анализ». Стоит обратить внимание на то, что *концепция актуальных бесконечно больших и бесконечно малых постоянных величин за последние триста лет никогда не исчезала из арсенала рабочих средств естествознания, а лишь отсутствовала в математике в течение тридцати лет.* Это дает возможность не останавливаться более подробно на применениях и значении нестандартного анализа.

§ 5. Теория внутренних множеств Нельсона

5.1. Проведенное на содержательном «наивном» уровне обсуждение различий между стандартным — осуществимым и нестандартным — косвенным способами задания объектов позволило вложить согласующийся с интуицией смысл в понятия, выдвинутые основоположниками математического анализа, глубже освоить принадлежащие им способы рассуждений. В то же время уже в простейших ситуациях мы сталкиваемся с серьезными трудностями. Прежде всего, остается неясным способ различения стандартных множеств от нестандартных, что заставляет считаться с опасностью неправильного применения принципов нестандартного анализа. Растущую тревогу вызывает появление объектов, сформированных по виду вполне приемлемыми средствами, за которыми не удается признать статуса обычных множеств. Здесь стоит назвать всевозможные монады, совокупности стандартных элементов, объекты $\approx$, $^{\approx}\mathbf{R}$, и т. п. Еще более неприятно, что «математический закон» $x \mapsto \operatorname{st}(x)$, действующий из $\overline{\mathbf{R}}$ в $\overline{\mathbf{R}}$, не является функцией. Дело в том, что понятие функции сложилось задолго до появления теоретико-множественной установки. Ведь еще в 1775 г. Л. Эйлер писал: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменениям, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других. Итак... все количества, которые как-либо зависят от x, т. е. определяются им, называются его функциями» [47, с. 38]. Динамическая концепция преобразования одних объектов в другие не отражена полностью в господствующем стационарном представлении о функции как о множестве. Последнее «является формальной теоретико-множественной *моделью* интуитивной идеи функции — моделью, которая охватывает лишь один аспект этой идеи, а не все ее значение в целом» [10, с. 32]. Напомним в этой связи, что при s, $t \in [0, 1]$ выполнено: $^{\circ}(s+t) = {}^{\circ}s + {}^{\circ}t$, $^{\circ}0 = 0$, $^{\circ}1 = 1$ и, кроме того, $\operatorname{st}(x) = 0$ в некотором подинтервале $x \in [0, h]$, где h — строго положительное число (любое актуально бесконечно малое). Наличие такой «числовой функции» свидетельствует присутствие антиномий. Названные обстоятельства требуют немедленного и явного уточнения используемых понятий и конструкций, указания фундамента, на котором они строятся.

5.2. Нестандартный анализ, как мы уже отмечали, получает обоснование в рамках теоретико-множественной установки. Иначе говоря, *наивную нестандартную теорию множеств можно поставить на те же основы, на которых покоится канторовская теория* [15] или, что более строго, «приближающие ее снизу» аксиоматические теории множеств (см. [16, 18, 21, 34, 45, 71]).

Стоит указать, что анализ, являясь «наукой о бесконечном» (по Г. В. Лейбницу) или «математикой бесконечного» (по Ф. Энгельсу), самим понятием бесконечность накрепко связан с теорией множеств. Имея это в виду, не нужно, однако, забывать, что классические работы Г. Кантора появились спустя двести лет после открытия дифференциального исчисления. *Нынешняя математика в своей существеннейшей части опирается на теорию множеств.* Более точно, под ее «жилые» этажи подведена теоретико-множественная база. Что будет дальше — это покажет время. А сейчас нам следует констатировать продолжение процесса построения математического здания, процесса, связанного с постоянными поисками новых идей и со столкновениями мнений (см. [4, 9, 17, 40, 57, 66, 70]). Специально подчеркнем, что только сознавая иллюзорность возможности окончательного «абсолютного» обоснования нестандартного анализа (как и всей математики в целом), можно приступать к изучению реализаций этого проекта.

5.3. Аксиоматические теории тщательно регламентируют корректные способы формирования множеств. Качественно говоря, они описывают миры — *универсумы* — множеств, которые призваны служить адекватными отображениями наших интуитивных представлений о «*канторовском рае*» — об универсуме наивной теории множеств.

5.4. В анализе наиболее широко используют теорию множеств Цермело — Френкеля (см. [16, 18, 43, 45, 71]). Напомним вкратце некоторые ее понятия, оттенив необходимые для дальнейшего детали. При этом (что в конечном счете неизбежно) мы будем оставаться на привычном уровне строгости и, в частности, вводить сокращения с помощью оператора присваивания $:=$, не вдаваясь в сопутствующие тонкости.

5.5. *Алфавит теории Цермело — Френкеля* (сокращенно: ZF или ZFC) содержит символы переменных; скобки (,); пропозициональные связи $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\neg$; кванторы $\forall$, $\exists$; знаки равенства $=$ и специального двуместного предиката принадлежности $\in$. Содержательно область изменения переменных теории ZF мыслят как *мир множеств*. Иначе говоря, в универсуме ZF нет никаких объектов, кроме множеств. Вместо $\in(x, y)$ пишут $x \in y$ и говорят, что *x элемент y*.

5.6. *Формулы теории* ZF определяются обычной процедурой, т. е. как конечные тексты, получающиеся из атомарных формул вида $x = y$ и $x \in y$, где x, y — переменные ZF, с помощью разумной расстановки скобок, кванторов и пропозициональных связок. Естественный смысл вкладывается в термины *свободная и связанная переменная* или (что эквивалентно) в понятие области действия квантора. В дальнейшем при желании подчеркнуть, что в формуле φ свободными являются переменные $x_1, \ldots, x_n$ и только они, мы пишем $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ или просто $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

5.7. Пусть $\varphi = \varphi(x)$ — формула ZF. Вместо текста $\varphi(y)$ пишут $y \in \{x\colon \varphi(x)\}$, т. е. $y \in \{x\colon \varphi(x)\} := \varphi(y)$. Встречая запись $y \in \{x\colon \varphi(x)\}$, говорят, что y обладает *свойством* φ или y лежит в *классе* $\{x\colon \varphi(x)\}$. В этом смысле свойство, формула и класс в ZF одно и то же. Стоит запомнить, что *символы классификации* — фигурные скобки — не принадлежат алфавиту ZF. При работе с ZF удобно пользоваться многими широко распространенными *сокращениями*, в частности:

$$V := \{x\colon x = x\} \text{ — \textit{класс всех множеств}};$$

$$\{x\colon \varphi(x)\} \in V := (\exists z)\,(\forall y)\varphi(y) \leftrightarrow y \in z;$$

$$\varnothing := \{x\colon x \neq x\} \text{ — \textit{пустой класс}};$$

$$x \subset y := (\forall z)\, z \in x \to z \in y := x \text{ — \textit{подмножество} } y;$$

$$\mathscr{P}(x) := \{z\colon z \subset x\} \text{ — \textit{класс подмножеств} } x;$$

$$f\colon x \to y := f \text{ — \textit{функция из} } x \text{ \textit{в} } y.$$

5.8. Аксиомы ZF включают в себя общелогические принципы теории первого порядка с равенством, фиксирующие классические правила вывода и следующие специальные постулаты:

(1) *аксиома экстенсиональности* — $(\forall x)(\forall y)(x \subset y \wedge y \subset x) \to x = y$;

(2) *аксиома объединения* — $(\forall x) \cup x \in V$;

(3) *аксиома множества подмножеств* — $(\forall x)\mathscr{P}(x) \in V$;

(4) *схема аксиом подстановки*:

$$(\forall x)(((\forall y)(\forall z)(\forall w)\,\varphi(y, z) \wedge \varphi(y, w) \to z = w) \to \{v\colon\ (\exists y \in x)\,\varphi(y, v)\} \in V)$$

для каждой формулы φ;

(5) *аксиома фундирования* — $(\forall x \neq \varnothing)\,(\exists y \in x)\, y \cap x = \varnothing$;

(6) *аксиома бесконечности* — $(\exists \omega)\,(\varnothing \in \omega \wedge (\forall x \in \omega)\, x \cup \{x\} \in \omega)$;

(7) *аксиома выбора* —

$$(\forall F)(\forall x)(\forall y)((x \neq \varnothing \wedge F\colon\ x \to \mathscr{P}(y)) \to$$
$$\to ((\exists f)(f\colon\ x \to y \wedge (\forall z \in x)\, f(z) \in F(z)))).$$

5.9. На основе приведенной аксиоматики создается точное представление о классе всех множеств V как об *«универсуме фон Неймана»*. Исходным объектом построения мыслится пустое множество. Элементарный шаг введения новых множеств состоит в формировании объединения множеств подмножеств имеющихся множеств. Трансфинитное повторение таких шагов исчерпывает *мир множеств* V, т. е.

$$V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Od}} V_\alpha, \quad V_\alpha := \{x\colon\ (\exists \beta \in \alpha)\, x \in \mathscr{P}(V_\beta)\},$$

где Od — класс всех ординалов. В «платонистском» стиле произвольный класс можно мыслить как внешний объект по отношению к V — как совокупность элементов универсума фон Неймана, удовлетворяющих фиксированному теоретико-множественному свойству, описанному формулой ZF. Поэтому класс, состоящий из элементов некоторого множества (по аксиоме подстановки), сам является множеством. Отметим, что существует некоторое расширение ZF — *теория Гёделя — Бернайса*, в которой имеются формальные возможности оперировать с классами. Важно подчеркнуть, что множество в упомянутой теории возникает как элемент класса. Следовательно, *ни в* ZF, *ни в теории Гёделя — Бернайса монады объектами не являются.*

5.10. Проведенное выше содержательное обсуждение свойств стандартных и нестандартных множеств выявило, что в универсуме фон Неймана есть место бесконечно малым числам, но нет места для всей их совокупности. Значит, *ни мир множеств Цермело — Френкеля, ни мир классов Гёделя — Бернайса не исчерпывают универсума «наивных» множеств*. Иначе говоря, упомянутые теории, призванные описывать объекты классической математики, выделяют собственную — внутреннюю часть «канторовского рая». Подчеркивая это обстоятельство, в нестандартной теории множеств элементы универсума фон Неймана называют *внутренними множествами*. Таким образом, множество в смысле ZF и внутреннее множество — это синонимы. Удобное формальное обоснование нестандартного анализа дает *теория внутренних множеств* — IST, предложенная Э. Нельсоном [74].

5.11. *Алфавит* IST получается добавлением к алфавиту ZF одного единственного нового символа — символа одноместного предиката St, выражающего свойство быть стандартным множеством. Иначе говоря, в текстах IST допускаются фрагменты вида $\mathrm{St}(x)$ или, более развернуто, «x — стандартное множество». Итак, содержательной областью изменения переменных IST является универсум фон Неймана, в котором теперь выделены стандартные и нестандартные множества.

5.12. *Формулы* IST определяются обычной процедурой. При этом к числу атомарных формул относят записи: $\mathrm{St}(x)$, где x — переменная.

Каждая формула ZF является формулой IST; символически: $\varphi \in (\mathrm{ZF}) \to \varphi \in (\mathrm{IST})$. Формулы ZF называют *внутренними*, а формулы IST, не являющиеся формулами ZF — *внешними* (строго внешними). Различие между формулами IST приводит к естественному вычленению *внешних и внутренних классов*. Так, если φ — внешняя формула IST, то текст $\varphi(y)$ описывают словами: «y — элемент внешнего класса $\{x\colon \varphi(x)\}$». Внешние классы элементов некоторого внутреннего множества называют *внешними множествами*, или, более полно, внешними подмножествами данного множества. Полезно обратить внимание на то, что внутренний класс, составленный из элементов внутреннего множества,— это снова внутреннее множество. Помимо сокращений, принятых в ZF, в IST используются дополнительные соглашения. Вот некоторые из них:

$$V^{\mathrm{st}} := \{x\colon \mathrm{St}(x)\} \text{ — \textit{класс стандартных множеств}};$$

$$x \in V^{\mathrm{St}} := x \textit{ стандартно} := (\exists y)\,\mathrm{St}(y) \wedge y = x;$$

$$(\forall^{\mathrm{St}} x)\varphi := (\forall x)\ (x \textit{ стандартно} \to \varphi);$$

$$(\exists^{\mathrm{St}} x)\,\varphi := (\exists x)(x \textit{ стандартно } \wedge \varphi);$$

$$(\forall^{\mathrm{St\,fin}} x)\,\varphi := (\forall^{\mathrm{St}} x)(x \textit{ конечно } \to \varphi);$$

$$(\exists^{\mathrm{St\,fin}} x)\,\varphi := (\exists^{\mathrm{St}} x)(x \textit{ конечно } \wedge \varphi).$$

5.13. Аксиомы IST получаются добавлением к перечню постулатов ZF следующих трех новых схем, носящих, как указывалось ранее, название принципов нестандартной теории множеств:

(1) *принцип переноса* —

$$(\forall^{\mathrm{St}} x_1)\ldots(\forall^{\mathrm{St}} x_n)\,((\forall^{\mathrm{St}} x)\varphi(x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \to (\forall x)\varphi(x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n))$$

для каждой внутренней формулы φ;

(2) *принцип идеализации* —

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\,((\forall^{\mathrm{St\,fin}} z)\,(\exists x)\,(\forall y \in z)\varphi(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists x)\,(\forall^{\mathrm{St}} y)\varphi(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)),$$

где $\varphi \in (\mathrm{ZF})$ — произвольная внутренняя формула;

(3) *принцип стандартизации* —

$$(\forall x_1)\ \ldots\ (\forall x_n)((\forall^{\mathrm{St}} x)\,(\exists^{\mathrm{St}} y)\,(\forall^{\mathrm{St}} z)\,z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi\,(z,\ x_1,\ \ldots,\ x_n))$$

для всякой формулы φ.

Подчеркнем, что при использовании формальной записи приведенных принципов нестандартного анализа необходимо строго придерживаться принятого нами в 5.7 правила указания полного списка свободных переменных формул.

5.14. Теорема Поуэлла [74]. *Теория* IST *является консервативным расширением* ZF.

5.15. Приведенное утверждение означает, что внутренние теоремы IST являются теоремами теории Цермело — Френкеля. Иначе говоря, при доказательстве «стандартных» предложений о множествах из универсума фон Неймана мы вправе пользоваться формализмом IST с той степенью надежности, которая имеется при работе в рамках ZF. Не следует забывать при этом, что ZF *обосновывается, в конечном счете, своей практической непогрешимостью и содержательной оправданностью.* О взаимоотношениях ZF и нестандартного анализа более подробно см. [61].

5.16. При обдумывании смысла формального выражения аксиом теории внутренних множеств бросается в глаза несколько громоздкая запись принципа идеализации. Поэтому, прежде всего, установим, что 5.13 (2) гарантирует наличие нестандартных элементов.

5.17. *Существует конечное внутреннее множество, среди элементов которого встречается каждое стандартное множество.*

$\lhd$ Пусть $\varphi := (x$ конечно $\bigwedge y \in x)$. Тогда $\varphi \in (\mathrm{ZF})$. Для каждого стандартного конечного z найдется x, что при всех $y \in z$ будет $\varphi(x, y)$. В качестве такого x можно взять z. Остается воспользоваться 5.13(2). $\rhd$

5.18. При применениях принципа идеализации полезно иметь в виду, что стандартные конечные множества — это в точности те множества, каждый элемент которых стандартен. Указанный факт установлен в 3.2. Поучительно рассмотреть его формальный вывод, основанный на 5.13.(2)

5.19. *Для внутреннего множества A выполнено*

$$A = {}^\circ A \leftrightarrow (A \textit{ стандартно } \bigwedge A \textit{ конечно}).$$

$\lhd$ Пусть $\varphi := (x \in A \quad x \neq y)$. Тогда по 5.13(2)

$$(\forall^{\mathrm{St\,fin}} z)(\exists x)(\forall y \in z)\,\varphi(x, y, A) \leftrightarrow (\exists x)(\forall^{\mathrm{St}} y)(x \in A \bigwedge x \neq y) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists x \in A)\ x \textit{ нестандартно} \leftrightarrow A \setminus {}^\circ A \neq \varnothing.$$

Иными словами, мы получаем

$$A = {}^\circ A \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{St\,fin}} z)(\forall x)(\exists y \in z)\,x \notin A \vee x = y \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{St\,fin}} z)(\forall x \in A)(\exists y \in z)\,x = y \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{St\,fin}} z)\,A \subset z. \rhd$$

5.20. *Пусть X, Y — стандартные множества и $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — некоторая формула* IST. *Справедливо следующее правило введения стандартных функций (= принцип конструирования):*

$$(\forall^{\mathrm{St}} x)(\exists^{\mathrm{St}} y)\,x \in X \to y \in Y \bigwedge \varphi(x, y, z) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{St}} y(\cdot))(\forall^{\mathrm{St}} x)(y(\cdot) \textit{ — функция из } X \textit{ в } Y \bigwedge$$

$$x \in X \to \varphi(x, y(x), z)).$$

$\lhd$ Рассмотрим стандартизацию $\bar{F}(x) := {}^*\{y \in Y\colon \varphi(x, y, z)\}$. Еще раз применяя 5.13(3), образуем стандартное множество

$$F := {}^*\{(x, A) \in X \times \mathscr{P}(Y)\colon \bar{F}(x) = A\}.$$

По условию имеем $(\forall^{\mathrm{St}} x \in X)\,\bar{F}(x) \neq \varnothing$. При этом $F(x) = \bar{F}(x)$ по определению F. Итак,

$$(\forall^{\mathrm{St}} x \in X)\,F(x) \neq \varnothing \to (\forall x \in X)\,F(x) \neq \varnothing$$

в силу 5.13(1). Используя аксиому выбора, заключаем:

$$(\exists y(\cdot))(y(\cdot) \textit{ — функция из } X \textit{ в } Y) \bigwedge (\forall x \in X)\,y(x) \in F(x).$$

Привлекая 5.13(1), выводим, что имеется стандартная функция $y(\cdot)$, определенная на X и со значениями в Y, для которой $y(x) \in F(x)$ при всех $x \in X$. $\rhd$

5.21. Приведенные правила дают возможность перевода многих (но, разумеется, не всех) понятий и предложений нестандартного анализа в равносильные определения и утверждения, не апеллирующие к стандартности. Иначе говоря, формулы IST, выражающие «нечто необычное» о стандартных объектах, можно преобразовать в эквивалентные формулы ZF, представляющие обычные математические записи рассматриваемых выражений. Процедура, приводящая к описанному результату, называется *алгоритмом Нельсона*. Качественно говоря, суть алгоритма «дешифровки» в том, что вводя стандартные функции, привлекая идеализацию и перестановки кванторов, мы редуцируем утверждение к форме, приспособленной для переноса. В конечном счете *перевод состоит в элиминации — исключении — внешнего понятия стандартности*. Необходимо подчеркнуть, что в каждом случае фактического использования соотношений 5.13 или 5.20 требования, обеспечивающие законность их применения, должны быть заранее удовлетворены.

5.22. Алгоритм Нельсона состоит из следующих шагов:

(1) высказывание нестандартного анализа выписывается как формула IST, т. е. осуществляется дешифровка всех сокращений;

(2) имеющаяся формула IST приводится к пренексной нормальной форме $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, где $\varphi \in (\mathrm{ZF})$, а $Q_k \in \{\forall, \exists, \forall^{\mathrm{st}}, \exists^{\mathrm{st}}\}$ для $k := 1, \ldots, n$;

(3) если Q_n — «*внутренний*» квантор, т. е. $\forall$ или $\exists$, то полагают $\varphi := (Q_nx_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и переходят к шагу (2);

(4) если Q_n — «*внешний*» квантор, т. е. $\forall^{\mathrm{st}}$ или $\exists^{\mathrm{st}}$, то отыскивают первый внутренний квантор при просматривании кванторной приставки $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)$ справа налево;

(5) если на шаге (4) внутренних кванторов не встретилось, то на основании 5.13(1) заменяют квантор Q_n на соответствующий внутренний квантор и переходят к шагу (2) (т. е. последовательно справа налево стирают верхний индекс $^{\mathrm{st}}$ над каждым квантором);

(6) пусть Q_m — первый встретившийся внутренний квантор. Допустим, что Q_{m+1} — внешний квантор того же типа, что и Q_m. Переставляя кванторы, возвращаемся к (2);

(7) если все кванторы $Q_{m+1}, \ldots, Q_n$ имеют один и тот же тип, то применяем 5.13(2) и переходим к (2);

(8) если происходит смена кванторов, т. е. Q_{p+1} имеет тот же тип, что и Q_m, а все кванторы $Q_{m+1}, \ldots, Q_p$ — другого — противоположного — типа, то используем 5.20. После этого вновь начинаем с (2).

5.23. Следует иметь в виду, что одно и то же содержательное утверждение можно высказать по-разному, в том числе и в формах, абсолютно недоступных для восприятия. В этой связи *при практическом применении алгоритма Нельсона необходимо учитывать конкретные возможности сокращения процедуры «протаскивания наружу внешних кванторов»*. В частности, не всегда целесообразно рассматривать формулы, приведенные с са́мого начала к пренексной нормальной форме (т. е. доводить до конца шаг 5.22(2)). Например, при дешифровке 3.6(1) получаем

$$(\forall s \in \mathbf{R})(\forall t \in \mathbf{R})\, s \approx 0 \wedge t \approx 0 \to s + t \approx 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{St}}\varepsilon > 0)(\forall s \in \mathbf{R})(\forall t \in \mathbf{R})\, s \approx 0 \wedge t \approx 0 \to |s + t| \leqslant \varepsilon \leftrightarrow \ldots$$
$$\ldots \leftrightarrow (\forall \varepsilon \to 0)(\exists \delta > 0)(\forall s \in \mathbf{R})(\forall t \in \mathbf{R})\, |s| \leqslant \delta \wedge |t| \leqslant \delta \to |s + t| \leqslant \varepsilon,$$

т. е., как и следовало ожидать, приходим к обычному ε-δ-определению непрерывности сложения в нуле.

§ 6. Теория внешних множеств

6.1. Основные установки нестандартного анализа имеют адекватное отображение в формальном аппарате теории внутренних множеств Нельсона. Теорема Поуэлла позволяет считать IST техникой исследования универсума фон Неймана. В то же время наличие внешних объектов полностью подрывает широко распространенное представление о том, что аксиоматика Цермело — Френкеля доставляет достаточную оперативную свободу с точки зрения наивной теории множеств. Оставаясь в рамках IST, мы не в состоянии, например, спросить: «А нельзя ли выделить такие числа, чтобы каждый элемент **R** записывался в виде некоторой их комбинации со стандартными коэффициентами — ведь **R** явно можно мыслить себе векторным пространством над $^\circ\mathbf{R}$?» Количество подобных недопустимых вопросов, имеющих бесспорное математическое содержание, столь велико, что потребность расширения рамок IST переходит в сферу жизненной необходимости. Практическое решение задачи возвращения в «канторовский рай» состоит, в частности, в нахождении формализма, позволяющего работать с внешними по отношению к универсуму фон Неймана множествами привычными средствами. Мы ознакомимся сейчас с аксиоматическими подходами к изучению внешних множеств. Первый вариант соответствующего формализма — теорию EXT — предложил К. Хрбачек [62, 63]. Близкую разновидность — теорию NST — построил затем Т. Каваи [67]. Упомянутые нестандартные теории множеств, содержательно говоря, показывают, что *мир внешних множеств устроен с точки зрения математического «прагматика-филистера» столь же хорошо, как и универсум наивных множеств*, ибо в нем допустимы классические теоретико-множественные операции, включая выделение подмножеств с помощью свойств (аксиомы свертывания) и полное упорядочение произвольных множеств (аксиома выбора). В то же время среди внешних множеств есть весь набор стандартных и нестандартных внутренних множеств, удовлетворяющих вариантам принципов переноса, идеализации и стандартизации, близким к их интуитивным формулировкам. Выражаясь строже, можно сказать, что внутренние множества включают в число внешних по определению.

С позиции реальных потребностей существующего (стандартного и нестандартного) математического анализа, теории EXT и NST предоставляют практически равные возможности, которых заведомо и с лихвой хватает для обоснованного использования употребительных аналитических конструкций. Необходимо, однако, внимательно и с должной критичностью проштудировать детали приводимых аксиоматик теорий внешних множеств, чтобы избежать иллюзий, сопутствующих эйфории вседозволенности. Так, стоит подчеркнуть, что *мир внешних множеств не является универсумом фон Неймана* (аксиома фундирования отсутствует и это обстоятельство существенно). Кроме того, точные выражения принципов нестандартного анализа в EXT имеют технические отличия от их аналогов в IST. Поэтому EXT, будучи консервативным расширением ZF, не содержит в себе полностью теорию Нельсона IST. Возникающий пробел восполнил Т. Каваи. Его теория NST обогащает формальный аппарат IST, оставаясь наряду с IST и EXT надежным средством изучения ZF.

6.2. *Алфавит формальной теории* EXT получается добавлением к алфавиту IST одного единственного нового символа — символа одноместного предиката Int, выражающего свойство быть внутренним множеством. Иначе говоря, в рассмотрение допускаются тексты, содержащие записи вида $\mathrm{Int}(x)$ или, более развернуто, «x — внутреннее множество». Интуитивно считают, что содержательной областью изменения переменных EXT является универсум всех внешних множеств $V^{\mathrm{Ext}} := \{x\colon\ x = x\}$, в котором лежат как мир стандартных множеств $V^{\mathrm{St}} := \{x \in V^{\mathrm{Ext}}\colon\ \mathrm{St}(x)\}$, так и расширяющий его мир внутренних множеств $V^{\mathrm{Int}} := \{x \in V^{\mathrm{Ext}}\colon \mathrm{Int}(x)\}$.

6.3. *Соглашения в* EXT аналогичны принятым в ZF и IST. В частности, конечно же, мы будем и дальше использовать «классификаторы» — фигурные скобки — в EXT (см. 5.7) и привычные знаки для обозначения простейших действий над классами внешних множеств. Следуя прежним образцам, для формулы φ из EXT (символически: $\varphi \in \in (\mathrm{EXT})$) условимся писать:

$$(\forall^{\mathrm{St}} x)\,\varphi := (\forall x)\,\mathrm{St}(x) \to \varphi; \quad (\exists^{\mathrm{Int}} x)\,\varphi := (\exists x)\,\mathrm{Int}(x) \wedge \varphi.$$

Подобные правила, понятные из контекста, в дальнейшем используются без особых разъяснений. Помимо этого, нам потребуются следующие понятия.

Пусть $\varphi \in (\mathrm{ZF})$ — некоторая формула EXT, являющаяся формулой ZF (т. е. не содержащая символов St и Int). Заменим каждый квантор Q в записи φ на Q^{St}. Полученную формулу обозначают φ^{St} и называют *стандартизацией* φ или *релятивизацией* φ *на* V^{St}. Аналогично, подставляя Q^{Int} вместо квантора Q, приходим к формуле φ^{Int}, носящей имя *интернализации* φ или *релятивизации* φ на V^{Int}. Подчеркнем, что со свободными переменными в φ при этом ничего не происходит. Наконец, условимся говорить, что внешнее множество A имеет *стандартный размер* (символически: $A \in V^{\mathrm{size}}$), если существуют стандартное множество a и внешняя функция f такие, что $(\forall X)\,(X \in A \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{St}} x \in a)\quad X = f(x))$.

6.4. Специальные аксиомы EXT делятся на три группы. Первую составляют правила образования внешних множеств, вторую — аксиомы связи миров множеств V^{St}, V^{Int} и V^{Ext} и, наконец, третью группу образуют принципы переноса, идеализации и стандартизации.

6.5. В EXT выполнены законы *теории множеств Цермело* Z, т. е. приняты следующие аксиомы конструирования внешних множеств:

(1) *аксиома экстенсиональности* — $(\forall A)\,(\forall B)\,A \subset B \wedge B \subset A \leftrightarrow A = B$;

(2) *аксиома пары* — $(\forall A)\,(\forall B)\ \{A, B\} \in V^{\mathrm{Ext}}$;

(3) *аксиома объединения* — $(\forall A) \cup A \in V^{\mathrm{Ext}}$;

(4) *аксиома множества подмножеств* — $(\forall A)\mathscr{P}(A) \in V^{\mathrm{Ext}}$;

(5) *схема аксиом свертывания* —

$$(\forall A)\,(\forall X_1)\ldots(\forall X_n)\{X \in A\colon\ \varphi(X,\ X_1,\ \ldots,\ X_n)\} \in V^{\mathrm{Ext}}$$

для произвольной формулы $\varphi \in (\mathrm{EXT})$;

(6) *аксиома полного упорядочения* — каждое внешнее множество может быть вполне упорядочено.

Последнее свойство («теорема Цермело») обеспечивает, как известно, аксиому выбора в обычной мультипликативной форме или в форме леммы Куратовского — Цорна. Отметим здесь же, что в теорию Z обычно включается аксиома бесконечности, которая в EXT появится ниже.

6.6. Вторая группа аксиом EXT содержит такие утверждения:

(1) *принцип моделирования* — мир внутренних множеств V^{Int} — это универсум фон Неймана, т. е. для каждой аксиомы φ теории Цермело — Френкеля интернализация φ^{Int} — аксиома EXT;

(2) *аксиома транзитивности* — $(\forall x \in V^{\mathrm{Int}})\,x \subset V^{\mathrm{Int}}$, т. е. внутренние множества составлены только из внутренних элементов;

(3) *аксиома вложения* — $V^{\mathrm{St}} \subset V^{\mathrm{Int}}$, т. е. стандартные множества являются внутренними.

6.7. Третью группу аксиом EXT составляют постулаты нестандартного анализа:

(1) *принцип переноса* —

$$(\forall^{\mathrm{St}} x_1)\ldots(\forall^{\mathrm{St}} x_n)\varphi^{\mathrm{St}}(x_1,\ \ldots,\ x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{Int}}(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

для каждой формулы $\varphi \in (\mathrm{ZF})$;

(2) *принцип идеализации* —

$$(\forall^{\mathrm{Int}} x_1)\ldots(\forall^{\mathrm{Int}} x_n)\,((\forall A \in V^{\mathrm{size}})\,((\forall^{\mathrm{fin}} z \subset A)\,(\exists^{\mathrm{Int}} x)$$
$$(\forall y \in z)\varphi^{\mathrm{Int}}(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)) \to (\exists^{\mathrm{Int}} x)\,(\forall^{\mathrm{Int}} y \in A)\varphi^{\mathrm{Int}}(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n))$$

для произвольной $\varphi \in (\mathrm{ZF})$;

(3) *принцип стандартизации* — $(\forall A)\,(\exists^{\mathrm{St}} {}^*A)\,(\forall^{\mathrm{St}} x)\,x \in {}^*A \leftrightarrow x \in A$, иначе говоря, для любого внешнего множества A существует его стандартизация ${}^*A$.

6.8. Теорема Хрбачека [62]. *Теория* EXT *является консервативным расширением* ZF, *т. е. для* $\varphi \in (\mathrm{ZF})$ *верно*

$$\varphi \text{ — теорема ZF} \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{Int}} \text{ — теорема EXT} \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{St}} \text{ — теорема EXT}.$$

6.9. При осмысливании изложенной аксиоматики полезно прежде всего дать себе отчет в том, что *теория* EXT *не служит расширением* IST. Иными словами, универсум V^{Int} не является моделью теории внутренних множеств Нельсона, поскольку принципы идеализации и стандартизации в EXT и IST имеют различные формулировки. В V^{Int} стандартизация допускается при существенно менее ограничительных предположениях, чем в IST. Так, для $\varphi \in (\mathrm{IST})$ и $A \in V^{\mathrm{Int}}$ можно организовать $^*\{x \in A\colon \varphi(x)\}$, ибо $\{x \in A\colon \varphi(x)\}$ — внешнее подмножество A. В IST при этом, вообще говоря, нужно дополнительно требовать стандартность A — ведь стандартизовать множество, содержащее каждый стандартный элемент, в IST не удается. В EXT, в свою очередь, совокупность всех стандартных элементов V^{St} не лежит вообще ни в одном внешнем (и тем более внутреннем) множестве.

6.10. *Не существует такого внешнего множества — элемента* V^{Ext}, *в число элементов которого попадают все стандартные множества.*

$\lhd$ Предположим противное, т. е. пусть при некотором $X \in V^{\mathrm{Ext}}$ будет $V^{\mathrm{St}} \subset X$. Применяя аксиому свертывания 6.5(5) для формулы $\varphi := \mathrm{St}(x)$, заключаем, что V^{St} — это внешнее множество. Стандартизация $^*V^{\mathrm{St}}$ оказывается стандартным конечным множеством, содержащим каждое стандартное множество. Последнее, очевидно, невозможно. $\rhd$

6.11. Приведенное предложение показывает, в частности, что принцип идеализации в EXT (релятивизированный на V^{Int}) не только по форме, но и по существу отличается от своего аналога в IST. В то же время указанные отличия не следует абсолютизировать.

6.12. *Имеют место утверждения:*

(1) *внешние натуральные числа и стандартные натуральные числа совпадают;*

(2) *конечное внешнее множество стандартно в том и только в том случае, если оно состоит исключительно из стандартных элементов;*

(3) *для произвольного внешнего множества A его стандартное ядро* $^\circ A := \{a \in A\colon \mathrm{St}(a)\}$ *— это множество стандартного размера;*

(4) *каждое бесконечное внутреннее множество содержит нестандартный элемент.*

$\lhd$ (1) В силу принципа индукции по стандартным натуральным числам (который, очевидно, верен в EXT — ср. 3.2(1)) для множества $\mathbf{N}^{\mathrm{Ext}}$ внешних натуральных чисел имеем $^\circ\mathbf{N} \subset \mathbf{N}^{\mathrm{Ext}}$. Кроме того, ясно, что $^*\varnothing = \varnothing$ и $^*1 = {}^*\{\varnothing\} = \{\varnothing\} = 1$. Итак, в силу обычного принципа индукции по внешним натуральным числам $\mathbf{N}^{\mathrm{Ext}} \subset {}^\circ\mathbf{N}$.

(2) Стандартное множество — внутреннее. Значит, с учетом 6.6(2) можно прибегнуть к 3.2.

(3) Пусть $^*A$ — стандартизация A. Положим $f(a) := a$ для $a \in {}^\circ A$. Очевидно, $(\forall X)\, X \in {}^\circ A \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{St}} x \in {}^*A)\, f(x) = X$.

(4) Обозначим A рассматриваемое внутреннее множество. В силу (3) $^\circ A$ имеет стандартный размер. Итак, мы можем применить 6.7(2) при $\varphi := x \neq y \wedge x \in A$. Для каждого конечного $z \subset {}^\circ A$ безусловно $(\exists x \in A)\, (\forall y \in z)\, x \neq y$, ибо множество A бесконечно. Окончательно, $(\exists x \in A)\, (\forall y \in {}^\circ A)\, x \neq y$. $\rhd$

6.13. В связи с 6.12 и 6.8 удобно выделить вариант теории внутренних множеств INT, являющийся консервативным расширением ZF и такой, что EXT, в свою очередь,— расширение INT. Отличие INT от теории IST в принятии принципов идеализации и стандартизации в следующих формах:

$$\textbf{(1)}\quad (\forall A)\, (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\, ((\forall^{\mathrm{St\,fin}} z \subset A)\, (\exists x)\, (\forall y \in z)$$

$$\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow (\exists x)\, (\forall^{\mathrm{St}} y \in A)\, \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n))$$

для всякой $\varphi \in (\mathrm{ZF})$;

$$\textbf{(2)}\quad (\forall A)\, (\exists^{\mathrm{St}}\, {}^*A)\, (\forall^{\mathrm{St}} x)\, x \in {}^*A \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi(x)$$

при произвольной $\varphi \in (\mathrm{INT})$.

6.14. Перейдем теперь к описанию теории NST в варианте, наиболее близком к EXT и IST (фактически Т. Каваи построил несколько иную систему, позволяющую рассматривать классы теории Гёделя — Бернайса в качестве внешних множеств).

6.15. *Алфавит и соглашения формальной теории* NST совпадают со своими аналогами в EXT. Более того, в NST принимаются все аксиомы конструирования внешних множеств, все аксиомы связи миров множеств и принцип переноса теории EXT. Отличия NST от EXT заключены в формулировках принципов стандартизации и идеализации и в следующем дополнительном постулате.

6.16. *Аксиома приемлемости* — $V^{\mathrm{St}} \in V^{\mathrm{Ext}}$, т. е. мир стандартных множеств теории Каваи — это внешнее множество. В связи со сформулированной аксиомой внешнее множество A в NST называют *множеством приемлемого размера* и пишут $A \in V^{\mathrm{acs}}$, если найдется внешняя функция f, отображающая V^{St} на A. Подчеркнем, что V^{St} имеет приемлемый размер. Отметим тут же, что в дальнейшем запись $\mathrm{acfin}(A)$ означает, что имеется взаимно однозначное внешнее отображение A на некоторое стандартное конечное множество.

6.17. *Принцип стандартизации* в NST гласит:

$$(\forall A)\,((\exists^{\mathrm{St}}X)\,X \supset A \to (\exists^{\mathrm{St}}{*}A)\,(\forall^{\mathrm{St}}x)\,x \in {*}A \leftrightarrow x \in A).$$

Иными словами, в NST можно стандартизовать внешние подмножества стандартных множеств (а не произвольные внешние множества, как в EXT).

6.18. *Принцип идеализации* в NST состоит в следующем:

$$(\forall^{\mathrm{Int}}x_1)\ldots(\forall^{\mathrm{Int}}x_n)\,(\forall A \in V^{\mathrm{acs}})\,(((\forall z)$$

$$z \subset A \wedge \mathrm{acfin}\,(z) \to (\exists^{\mathrm{Int}}x)\,(\forall y \in z)\,\varphi^{\mathrm{Int}}(x, y, x_1, \ldots, x_n)) \to$$

$$\to (\exists^{\mathrm{Int}}x)\,(\forall^{\mathrm{Int}}y \in A)\,\varphi^{\mathrm{Int}}(x, y, x_1, \ldots, x_n))$$

для произвольной формулы $\varphi \in (\mathrm{ZF})$.

6.19. Теорема Каваи [67]. *Теория* NST *является консервативным расширением* ZF.

6.20. Вновь обратим внимание на то, что *мир внутренних множеств* V^{Int} *в универсуме* NST *с релятивизированными принципами стандартизации, идеализации и переноса служит моделью* IST. Иными словами, технические средства, предоставляемые NST для работы с внешними множествами, возникающими в IST, можно без опаски использовать для получения утверждений «стандартной» математики. Отметим здесь же, что доказательство теоремы Каваи, так же как и теорем Хрбачека и Поуэлла, в существенном опирается на применение подходящих аналогов локальной теоремы Мальцева или, говоря точнее, на технику ультрапроизведений и ультрапределов [49, 53, 54, 79].

6.21. Проявляя известную вольность, обозначим символом V^E универсум внешних множеств (не уточняя, о какой из теорий NST или EXT идет речь). Аналогично будем использовать знак V^I (соответственно V^S) для указаний на мир внутренних (соответственно стандартных) множеств. Повторяя схему построения универсума фон Неймана, т. е. последовательно итерируя операции объединения и перехода к совокупности всех внешних подмножеств данного множества, из пустого множества можно вырастить мир V^c — *универсум «классических» множеств.* Подробнее говоря, полагают

$$V^C := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Od}^{\mathrm{St}}} V^C_\alpha, \quad V^C_\alpha := \{x\colon (\exists^{\mathrm{St}}\beta \in \alpha)\, x \in \mathscr{P}(V^C_\beta)\},$$

где $\mathrm{Od}^{\mathrm{St}}$ — класс всех стандартных ординалов. Таким образом, пустое множество является «классическим и каждое «классическое» множество составлено только из «классических» элементов. С помощью рекурсии — «прогулки по этажам» универсума «классических» множеств — определяется робинсоновская стандартизация или $*$-изображение.

6.22. Стандартное множество $*A$ называется *робинсоновской стандартизацией* или $*$-изображением «классического» множества A в том и только в том случае, если каждый стандартный элемент $*A$ является

*-изображением некоторого элемента A. Символически: $*\varnothing := \varnothing$, $*A := *\{*a\colon a \in \mathrm{A}\}$.

Отметим, что рамках EXT законность применения обычной стандартизации не вызывает сомнений. В теории NST допустимость использования этой операции в определении робинсоновской стандартизации следует из способа построения V^C. Аналогичное рассуждение —«трансфинитная индукция по рангу»— показывает, что *-изображение отождествляет, и притом взаимно однозначным образом, миры V^C и V^S. Сверх того, обеспечивается справедливость *принципа переноса*:

$$(\forall A_1 \in V^C)\ldots(\forall A_n \in V^C)\varphi^C(A_1, \ldots, A_n) \leftrightarrow \varphi^S(*A_1, \ldots, *A_n)$$

для произвольной формулы φ теории Цермело — Френкеля (как обычно, φ^C и φ^S — релятивизации φ на V^C и V^S соответственно).

§ 7. Теоретико-множественные установки нестандартного анализа

7.1. Проведенные в предыдущих параграфах рассмотрения обогатили и расширили исходные «наивные» представления о множестве, используемые в нестандартном анализе. От обычного универсума фон Неймана V мы перешли к миру V^I теории внутренних множеств с отмеченными в нем «реперными» точками — стандартными множествами, составляющими класс V^S (рис. 3). Дальнейший анализ показал, что V^I лежит в новом классе — в универсуме V^E внешних множеств, составляющих мир Цермело. В V^E выделен универсум «классических» множеств V^C — еще одна реализация мира стандартных множеств и построено соответствующее робинсоновское *-изображение, поэлементно отождествляющее V^C и V^S. При этом в силу принципов переноса V^C, V^S и V^I можно рассматривать как ипостаси универсума фон Неймана (рис. 4).

7.2. Изложенная картина расположения и другие известные взаимосвязи миров V^E, V^I, V^S и V^C приводят к выделению трех общих теоретико-множественных установок нестандартного анализа. В этих установках — их называют классической, неоклассической и радикальной — фиксируются представления о предмете и средствах исследования. Принятие той или иной концепции определяет, в частности, способ изложения математических результатов, полученных с помощью нестандартных методов. В этой связи знакомство с упомянутыми установками нужно считать совершенно необходимым.

7.3. *Классическая установка* нестандартного анализа отвечает методике его основоположника А. Робинсона и в настоящее время соответствующий формализм наиболее распространен (см., в частности, [11]). При этой установке *главным предметом изучения объявляется мир классической математики*, отождествляемый с универсумом «классических» множеств V^C. Последний считают «стандартным универсумом» (на практике чаще всего работают с достаточно большим фрагментом V^C, содержащим рассматриваемые конкретные объекты — с так называемой «суперструктурой»). В качестве техники исследования исходного «стандартного универсума» предъявляется «нестандартный универсум» внутренних множеств V^I (или его подходящая часть) и *-изображение, подклеивающее обычные «стандартные» мно-

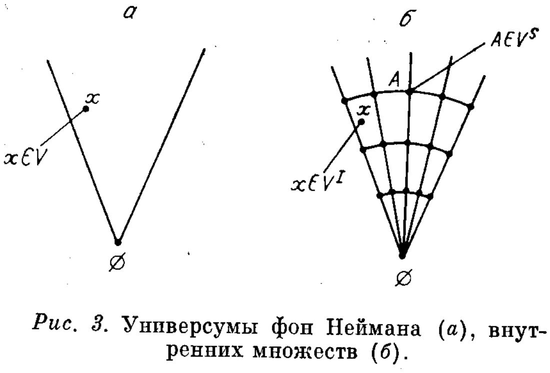

Рис. 3. Универсумы фон Неймана (*а*), внутренних множеств (*б*).

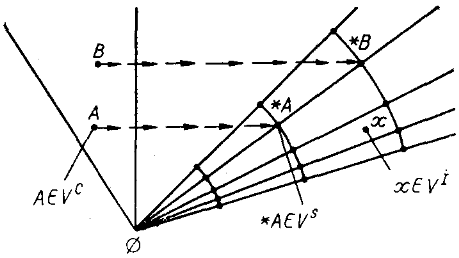

Рис. 4. Универсум внешних множеств.

жества к их образам в нестандартном универсуме. Полезно подметить своеобразное использование слов «стандартный» и «нестандартный» при излагаемом подходе. Робинсоновские стандартизации — элементы универсума V^S — воспринимаются как «нестандартные» объекты. *«Стандартное» множество — это по понятию произвольный представитель мира «классических» множеств V^C — член «стандартного универсума».* Указывается, что *-изображение, как правило, добавляет новые *«идеальные»* элементы в множество. Здесь подразумевают, что $*A = \{*a\colon\ a \in A\}$ только в том случае, если «классическое»—«стандартное» — множество A конечно. Например, помещая $\mathbf{R}$ в V^C и в соответствии со сказанным изучая его *-изображение $*\mathbf{R}$, мы видим, что $*\mathbf{R}$ играет роль поля вещественных чисел в смысле универсума внутренних множеств — «во внутреннем смысле нестандартного универсума». В то же самое время, $*\mathbf{R}$ не сводится к набору своих стандартных элементов: $^\circ(*\mathbf{R}) = \{*t\colon\ t \in \mathbf{R}\}$. Учитывая, что $*\mathbf{R}$ есть внутреннее множество вещественных чисел $\mathbf{R}$», а $^\circ(*\mathbf{R})$ — его стандартное ядро, допускают известную вольность, полагая $^\circ\mathbf{R} := \{*t\colon\ t \in \mathbf{R}\}$ и даже $\mathbf{R} := \{*t\colon\ t \in \mathbf{R}\}$. Образно наличие новых элементов в $*\mathbf{R}$ выражают символом $*\mathbf{R}\backslash\mathbf{R} \neq \varnothing$ и говорят о построении системы *«гипердействительных чисел»* $*\mathbf{R}$, расширяющей обычное поле вещественных чисел $\mathbf{R}$. Аналогичную политику проводят при рассмотрении произвольного классического множества X. Именно, считают, что $X := \{*x\colon\ x \in X\}$ и, тем самым, $X \subset *X$. Если X бесконечно, то $*X\backslash X \neq \varnothing$. Иными словами, *все бесконечные множества при помощи робинсоновской стандартизации насыщаются новыми элементами.* Более того, «идеальных» объектов добавляется значительное количество — ведь в V^I действует принцип идеализации, который в излагаемой установке часто называют *техникой направленности* или *насыщения.*

7.4. Пусть U — произвольное соответствие, а A и B — множества. Говорят, что U *направлено* (из A в B), если для каждого непустого конечного подмножества A_0 в A найдется элемент $b \in B$ такой, что $(a_0, b) \in U$ при всех $a_0 \in A_0$.

7.5. Принцип направленности. *Для любого соответствия U, направленного из A в B, имеется элемент $b \in *B$, удовлетворяющий соотношению $(*a, b) \in *U$ при каждом $a \in A$.*

7.6. Иногда принимают формулировки, обеспечивающие дополнительные возможности введения нестандартных элементов и более адекватные содержанию принципа идеализации в точных его выражениях.

7.7. Принцип направленности в сильной форме. *Пусть соответствие U таково, что $*U$ направлено из A в $*B$. Тогда имеется элемент $b \in *B$, для которого при всех $a \in A$ будет $(*a, b) \in *U$.*

7.8. Принцип насыщения. *Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ — убывающая последовательность непустых внутренних множеств.* Тогда $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} A_n \neq \varnothing$.

7.9. Полезно напомнить, что в «расширенном», «нестандартном» мире — в универсуме внутренних множеств V^I — действует принцип переноса, т. е. с учетом свойств робинсоновской стандартизации

$$(\forall x_1 \in V^C) \ldots (\forall x_n \in V^C)\, \varphi^C(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi^I(*x_1, \ldots, *x_n)$$

для каждой формулы φ теории множеств Цермело — Френкеля. В такой форме принцип переноса часто называют *принципом Лейбница.*

7.10. При работе с нестандартным универсумом иногда специально выделяют *«технику внутренних множеств».* Имеется в виду способ доказательства, основанный на том, что внешние множества, заданные «обычными способами», внутренние. Вот одна из возможных детализаций отмеченного положения.

7.11. *Пусть A — бесконечное множество. Для каждого теоретико-множественного свойства φ не верно, что $\{x\colon \varphi^I(x)\} = {}^*A \backslash A$.*

◁ Допустим противное. Тогда класс $\{x\colon \varphi^I(x)\}$ — это внутреннее подмножество ${}^*A$. Стало быть, A — это внутреннее множество. Но для бесконечного A внешнее множество ${}^*A \backslash A$ не является внутренним по 6.12. ▷

7.12. Подводя итоги, можно сказать, что при классической установке работают с двумя универсумами — стандартным и нестандартным. Имеются формальные возможности связывать свойства стандартных и нестандартных объектов с помощью процедуры «навешивания звездочек» — с помощью $*$-изображения. При этом предоставлено право свободно переносить утверждения об объектах одного мира в другой — действует принцип Лейбница. Нестандартный мир богат «идеальными» элементами — в нем актуально осуществимы всевозможные трансфинитные конструкции, ибо справедлив принцип направленности. Множества, выпадающие за пределы нестандартного универсума, называют внешними (здесь проявляется особенность принимаемой терминологии: внутренние множества при излагаемом подходе внешними не считаются). Полезный прием исследования составляет техника внутренних множеств.

Главное достоинство классической установки — это наличие $*$-изображения, которое позволяет применять аппарат нестандартного анализа к самым произвольным обычным множествам. Например, можно утверждать, что функция $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ равномерно непрерывна в том и только в том случае, если ${}^*f\colon {}^*[a, b] \to {}^*\mathbf{R}$ микронепрерывна, т. е. если ${}^*f$ не теряет бесконечную близость «гипердействительных» чисел. Основное затруднение в усвоении описываемых представлений связано с необходимостью вообразить себе колоссальное количество новых «идеальных» объектов, присоединяемых к обычным множествам. Заметные сложности вызывает естественное желание работать (по крайней мере на первых порах) с двумя наборами переменных, относящимися, соответственно к стандартному и нестандартному универсумам. (При построении интернализации φ^I формулы φ мы, фактически, предполагаем такую процедуру.) Словом, *«двуязычность» и робинсоновская стандартизация — неотъемлемые атрибуты классической установки* — определяют все ее особенности, преимущества и дефекты присущего ей аппарата.

7.13. *Неоклассическая установка* нестандартного анализа соответствует взглядам, развитым Э. Нельсоном. При этой установке *главным предметом изучения объявляется мир математики, рассматриваемый как универсум V^I*, лежащий в среде внешних множеств — элементов V^E. «Классические» множества отдельно к анализу не привлекаются. *Стандартные и нестандартные элементы указываются в обычных объектах* — во (внутренних) множествах, составляющих V^I. Так, в качестве поля вещественных чисел фигурирует $\mathbf{R}$ из мира V^I, совпадающее, разумеется, с полем ${}^*\mathbf{R}$ гипердействительных чисел — «идеальным» объектом классической установки. Позиции, освещенные в § 2—4, отвечают указанной неоклассической установке. Связанные с ней преимущества определяются возможностью изучать уже хорошо знакомые множества и отыскивать новое в их устройстве. Недостатки неоклассической установки вызваны необходимостью неявного (= основанного на стандартизации) переноса определений и свойств со стандартных объектов на внутренние. С этим обстоятельством мы уже сталкивались в § 4.

7.14. *Радикальная установка* нестандартного анализа состоит в том, что *предметом изучения математики объявляется универсум внешних множеств* во всей полноте и сложности его собственного устройства. Классические и неоклассические представления о нестандартном анализе как о технике изучения математики (основанной на формализме Цермело — Френкеля), при радикальном подходе объявляются «узкими», «стыдливыми» и отметаются. В первый момент описанный подход воспринимается в качестве явно несерьезного и крайнего. Необходимо, по размышлению, отвести возникающие обвинения в экстремизме от радикальной установки нестандартного анализа. Этот «экстремизм» — иллюзорный, кажущийся. Весьма распространенное воззрение на математику как на науку о формах и отношениях, взятых в отвлечении от их содержания, и даже существенно менее обязывающая классическая теоретико-множественная установка, восходящая к Г. Кантору, безусловно охватывают «крайние» мысли о предмете нестандартного анализа. Следовательно, наиболее «смелые» взгляды на множества, сформировавшиеся в итоге довольно кропотливого исследования, в конечном счете вошли составной частью в исходную посылку, расширив и обогатив ее. Ведь начальным пунктом для нас служило «скромное» положение о том, что нестандартный анализ оперирует в точности теми же множествами, как и вся математика (см. 2.1). Здесь уместно вспомнить образные наблюдения В. И. Ленина, относящиеся к динамике процесса познания.

«*Каждый оттенок мысли = круг на великом круге (спирали) развития человеческой мысли вообще*» [27, с. 221].

«*Познание человека не есть (respective не идет по) прямая линия, а кривая линия, бесконечно приближающаяся к ряду кругов, к спирали*» [27, с. 322].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров А. Д.** Общий взгляд на математику // Математика, ее содержание, методы и значение.— М.: Изд-во АН СССР, 1956.— Т. 1.— С. 5—78.
2. **Архимед.** Сочинения.— М.: ГИФМЛ, 1962.— 639 с.
3. **Беркли Дж.** Сочинения.— М.: Мысль, 1978.— 556 с.
4. **Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко А. Г.** Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики.— М.: Наука, 1983.— 328 с.
5. **Боголюбов А. Н.** «Читайте, читайте Эйлера: он учитель всех нас» // Наука в СССР.— 1984.— № 6.— С. 98—104.
6. **Борель Э.** Вероятность и достоверность.— М.: ГИФМЛ, 1961.— 119 с.
7. **Виленкин Н.** Командор «Лузитании» // Знание — сила.— 1984.— № 1.— С. 27—29.
8. **Вольтер Ф.-М.** Микромегас 1752 // Философские повести.— М.: ГИХЛ, 1960.— С. 77—98.
9. **Вопенка П.** Математика в альтернативной теории множеств.— М.: Мир, 1983.— 150 с.
10. **Голдблатт Р.** Топосы. Категорный анализ логики.— М.: Мир, 1983.— 486 с.
11. **Девис М.** Прикладной нестандартный анализ.— М.: Мир, 1980.— 236 с.
12. **Есенин-Вольпин А. С.** Анализ потенциальной осуществимости // Логические исследования.— М.: Изд-во АН СССР, 1959.— С. 218—262.
13. **Зорич В. А.** Математический анализ.— М.: Наука, 1981.— Ч. 1.— 543 с.
14. **Звонкин А. К., Шубин М. А.** Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.— 1984.— Т. 39, № 2.— С. 77—127.
15. **Кантор Г.** Труды по теории множеств.— М.: Наука, 1985.— 430 с.
16. **Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.** Математическая логика. Дополнительные главы.— М.: Изд-во МГУ, 1984.— 119 с.
17. **Коэн П. Дж.** Об основании теории множеств // Успехи мат. наук.— 1974.— Т. 29, № 5.— С. 169—176.
18. **Коэн П. Дж.** Теория множеств и континуум-гипотеза.— М.: Мир, 1969.— 347 с.
19. **Кутателадзе С. С.** Основы нестандартного математического анализа.— Новосибирск: НГУ, 1986.— Ч. 1—3.
20. **Курант Р.** Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Наука, 1967.— Т. 1.— 804 с.
21. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств.— М.: Мир, 1970.— 416 с.
22. **Лаврентьев М. А.** Наука. Технический прогресс. Кадры.— Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1980.— 287 с.
23. **Лаврентьев М. А.** Николай Николаевич Лузин // Успехи мат. наук.— 1979.— Т. 29, № 5.— С. 177—182.
24. **Леге Ж.-М.** Наука, техника и мир // Наука и жизнь.— 1986.— № 11.— С. 3—11.
25. **Лейбниц Г. В.** Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины и особый для этого род исчисления // Успехи мат. наук.— 1948.— Т. 3, № 1.— С. 166—173.
26. **Ленин В. И.** Полное собрание сочинений.— М.: ГИПЛ, 1961.— Т. 18.— 525 с.

27. **Ленин В. И.** Полное собрание сочинений.— М.: ГИПЛ, 1963.— Т. 29.— 782 с.
28. **Лузин Н. Н. — выдающийся математик и педагог** // Вестн. АН СССР.— 1984.— № 11.— С. 95—102.
29. **Лузин Н. Н.** Дифференциальное исчисление.— М.: Высш. шк., 1961.— 477 с.
30. **Лузин Н. Н.** Собрание сочинений.— М.: Изд-во АН СССР, 1959.— Т. 3.— 507 с.
31. **Лузин Н. Н.** Теория функций действительного переменного.— М.: ГУПИ, 1940.— 302 с.
32. **Лянце В. Э.** О нестандартном анализе // Математика сегодня.— Киев: Вища шк., 1986.— С. 26—44.
33. **Мальцев А. И.** Untersuchungen aus dem Gebeite der matematischen Logik // Мат. сб.— 1976.— Т. 1, № 3.— С. 323—336.
34. **Манин Ю. И.** Доказуемое и недоказуемое.— М.: Советское радио, 1979.— 168 с.
35. **Маркс К.** Математические рукописи.— М.: Наука, 1968.— 640 с.
36. **Молчанов В. А.** Введение в исчисление бесконечно малых.— Саратов: Пед. ин-т им. К. А. Федина, 1986.— 70 с.
37. **Начала Евклида.** Книги VII—X.— М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.— 511 с.
38. **Ньютон И.** Математические работы.— М.; Л.: ОНТИ, 1937.— 452 с.
39. **Робинсон А.** Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры.— М.: Наука, 1967.— 376 с.
40. **Рузавин Г. И.** Философские проблемы оснований математики.— М.: Наука, 1983.— 302 с.
41. **Строян К. Д.** Инфинитезимальный анализ кривых и поверхностей // Справочная книга по математической логике.— М.: Наука, 1982.— Ч. 1.— С. 199—234.
42. **Успенский В. А.** Что такое нестандартный анализ.— М.: Наука, 1987.— 128 с.
43. **Френкель А., Бар-Хиллел И.** Основания теории множеств.— М.: Мир, 1966.— 555 с.
44. **Хрестоматия по истории математики.**— М.: Просвещение, 1977.— 224 с.
45. **Шенфильд Дж. Р.** Аксиомы теории множеств // Справочная книга по математической логике.— М.: Наука, 1982.— Ч. 2.— С. 9—34.
46. **Эйлер Л.** Введение в анализ бесконечно малых.— М.: ОНТИ, 1936.— Т. 1.— 352 с.
47. **Эйлер Л.** Дифференциальное исчисление.— Л.: ГИТТЛ, 1949.— 580 с.
48. **Эйлер Л.** Интегральное исчисление.— М.: ГИТТЛ, 1956.— Т. 1.— 415 с.
49. **Эклоф П.** Теория ультрапроизведений для алгебраистов // Справочная книга по математической логике.— М.: Наука, 1982.— Ч. 1.— С. 109—140.
50. **Энгельс Ф.** Диалектика природы // К. Маркс, Ф. Энгельс. Сочинения.— М.: ГИПЛ, 1961.— Т. 20.— С. 339—626.
51. **Юшкевич А. П.** Лейбниц и основание исчисления бесконечно малых // Успехи мат. наук.— 1948.— Т. 3, № 1.— С. 150—164.
52. **Alberio S., Fenstad J. E. et al.** Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics.— Orlando: Academic Press, 1986.— 514 p.
53. **Applications** of model theory to algebra, analysis and probability.— N. Y,: Holt, rinehart and Winston, 1966.— 307 p.
54. **Bell J. L., Slomson A. B.** Models and ultraproducts, an introduction.— Amsterdam — London: North-Holland, 1971.— 322 p.
55. **Contributions** to non-standard analysis.— Amsterdam: North-Holland, 1972.— 289 p.
56. **Cutland N.** Nonstandard measure theory and its applications // Bull. London. Math. Soc.— 1983.— V. 15, N 6.— P. 530—589.
57. **Gandy R. O.** Limitations to mathematical knowledge // Logic colloquim-80.— N. Y.— London: North-Holland, 1982.— P. 129—146.
58. **Gödel K.** What is Cantor's continuum problem // Amer. Math. Monthly.— 1947.— V. 54, N 9.— P. 515—525.
59. **Harnik V.** Infinitesimals from Leibniz to Robinson time — to bring them back to school // Math. Intelligencer.— 1986.— V. 8, N 2.— P. 41—47.
60. **Henle J. M., Kleinberg E. M.** Infinitesimal calculus.— Cambrige — London: Alpine Press, 1979.— 135 p.
61. **Henson W., Keisler J.** On the strength of nonstandard analysis // J. Symb. Logic.— 1986.— V. 51, N 2.— P. 377—386.
62. **Hrbaček K.** Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. math.— 1978.— V. 98, N 1.— P. 1—24.
63. **Hrbaček K.** Nonstandard set theory // Amer. Math. Monthly.— 1979.— V. 86, N 8.— P. 659—677.
64. **Hurd A. E., Loeb H.** An introduction to nonstandard analysis.— Orlando a. o.: Academic Press, 1985.— 232 p.
65. **Jarnik V.** Bolzano and the foundations of mathematical analysis.— Praque: Society of Czechosl. Math. Phys., 1981.— 89 p.
66. **Jaffe A.** Ordering the universe: the role of mathematics // SIAM Review.— 1984.— V. 26, N 4.— P. 473—500.
67. **Kawai T.** Axiom system of nonstandard set theory // Logic symposia, Hakone 1979, 1980.— Berlin a. o.: Springer, 1981.— P. 57—65.
68. **Keisler H. J.** An infinitesimal approach to stochastic analysis // Memouir Amer. Math. Soc.— 1984.— N 48.— 184 p.
69. **Kopperman R.** Model theory and its applications.— Boston: Allyn and Bacon, 1972.— 333 p.

70. **Kreisel G.** Observations of popular discussions on foundations // Axiomatic set theory. Proc. Symposia in Pure Math.— Providence; Amer. Math. Soc., 1971.— V. 1.— P. 183—190.
71. **Levy A.** Basic set theory.— Berlin a. o.: Springer, 1979.— 391 p.
72. **Lutz R., Goze M.** Nonstandard analysis. A practical guide with applications.— Berlin a. o.: Springer, 1981.— 261 p.— (Lecture notes in math.; 881).
73. **Mochover M., Hirschfeld J.** Lectures on non-standard analysis.— Berlin a. o.: Springer, 1969.— 79 p.— (Lecture notes in math.; 94).
74. **Nelson E.** Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.— 1977.— V. 83, N 6.— P. 1165—1198.
75. **Nonstandard analysis.** Recent developments.— Berlin a. o.: Springer, 1983.— 213 p.— (Lecture notes in math.; 983).
76. **Robinson A.** Non-standard analysis.— Amsterdam — London: North-Holland, 1970.— 293 p.
77. **Robinson A.** The metaphysics of the calculus // Problems in the Philosophy of Mathematics.— Amsterdam: North-Holland, 1967.— V. 1.— P. 28—46.
78. **Stroyan K. D., Bayod J. M.** Foundations of infinitesimal stochastic analysis.— Amsterdam a. o.: North-Holland, 1986.— 478 p.
79. **Stroyan K. D., Luxemburg W. A. J.** Introduction to the theory of infinitesimals.— N. Y. a. o.: Academic Press, 1976.— 326 p.
80. **Westfall R.** Never at rest. A bibliography of Isaak Newton.— Cambrige: Cambrige Univ. Press, 1982.— 908 p.
81. **Zivaljevic R.** Infinitesimals, microsimplexes and elementary homology theory // Amer. Math. Monthly.— 1986.— V. 93, N 7.— P. 540—544.

В. Г. МАЗЬЯ, С. В. ПОБОРЧИЙ

СЛЕДЫ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ С ПИКОМ

Посвящается Ю. Г. Решетняку

Согласно теореме Гальярдо [1] граничные значения функций из пространства Соболева $W_p^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, образуют пространство $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, если $1 < p < \infty$, а поверхность $\partial\Omega$ липшицева. При наличии вершины внешнего или внутреннего пика на границе области эта закономерность нарушается. В случае плоской области с пиком на границе описание пространства следов на $\partial\Omega$ функций из $W_p^1(\Omega)$ получено в статьях [2, 3]. В работе [4] охарактеризованы граничные значения функций из $W_2^1(\Omega)$, где Ω — многомерная область с пиком на границе. Отметим, что использованный в [4] метод основан на преобразовании Фурье и к случаю произвольного p неприменим. В настоящей работе дается описание пространства граничных значений функций из $W_p^1(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, для области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\text{п} \geqslant 3$, с вершиной внешнего или внутреннего пика на $\partial\Omega$.

Норма $\|\cdot\|_{W_p^1(\Omega)}$ порождает норму следа как элемента фактор-пространства $W_p^1(\Omega)/\mathring{W}_p^1(\Omega)$. В доказанных далее теоремах упомянутой фактор-норме ставится в соответствие эквивалентная ей, определяемая явно норма функции на границе области. Последняя может быть записана в виде

$$\|qf\|_{L_p(\partial\Omega)} + \left(\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} Q(x, \xi)\,|f(x) - f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\right)^{1/p}, \qquad (0.1)$$

где f — функция на $\partial\Omega$, q и Q — некоторые неотрицательные весовые функции, зависящие от заострения пика в окрестности его вершины, а ds_x, ds_ξ — элементы площади поверхности на $\partial\Omega$.

Опишем более подробно полученные в работе результаты на примере n-мерного пика $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n\colon\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < \varphi(x_n)^2,\ x_n \in (0, 1)\}$. Не стремясь к общности, предположим, что φ — возрастающая