В силу неравенства (4.15) (в левую часть которого добавлено слагаемое $|g|_S$) величина (4.17) не превосходит $c\|f\|^p$, где $\|\cdot\|$ — норма (4.14). Итак, для функции f с носителем в множестве $\{x \in \Gamma\colon z < \varepsilon\}$ и конечной нормой (4.14) построен линейный оператор $f \to u$ со следующими свойствами: $u|\Gamma = f, u \in W_p^1(\widehat{D})$ и $\|u\|_{W_p^1(\widehat{D})} \leqslant c\|f\|$. Здесь $\widehat{D} = \{x \in \mathbf{R}^n\colon z \in (0, 1), |y| < z\}$. Обозначим через χ гладкую функцию на $\mathbf{R}^n$ с носителем в U, равную единице на множестве $\{x \in \mathbf{R}^n\colon |z| \leqslant \varepsilon, |y| \leqslant \varphi(\varepsilon)\}$, а через $\widehat{\mathscr{E}}$ — линейный непрерывный оператор продолжения: $W_p^1(\widehat{D}) \to \to W_p^1(\mathbf{R}^n)$ (см., например, [6]). Тогда функция $\chi\widehat{\mathscr{E}}u$ есть требуемое продолжение функции f с поверхности $\partial\Omega$ на $\mathbf{R}^n$. Доказательство теоремы закончено.

Следствие 4.1. *В условиях теоремы* 4.1 *соотношение* (4.1) *останется верным, если в правой его части опустить величину* $\|f\|^p_{L_p(\partial\Omega \setminus U)}$.

Это утверждение обосновывается так же, как и следствие 3.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gagliardo E.** Caratterizzazionic delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi difunzioni in piu variabili // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova.— 1957.— V. 27.— P. 284—305.
2. **Яковлев Г. Н.** Граничные свойства класса $W_p^{(l)}$ в областях с угловыми точками // Докл. АН СССР.— 1961.— Т. 140, № 1.— С. 73—76.
3. **Яковлев Г. Н.** Задача Дирихле для области с нелипшицевой границей // Дифференц. уравнения.— 1965.— Т. 1, № 8.— С. 1085—1098.
4. **Мазья В. Г.** О функциях с конечным интегралом Дирихле в области с вершиной пика на границе // Зап. научн. семин. ЛОМИ/Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-ние.— 1983.— Т. 126.— С. 117—137.
5. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л., 1950.— 255 с.
6. **Стейн Н.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М.: Мир, 1973.— 342 с.
7. **Мазья В. Г.** Пространства С. Л. Соболева.— Л., 1985.— 416 с.

Л. В. САБИНИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КВАЗИГРУППЫ

Посвящается Ю. Г. Решетняку

В настоящей статье мы дадим краткий обзор идей, методов и результатов нового направления научных исследований на стыке алгебры и геометрии —«Нелинейной геометрической алгебры» — и сформулируем некоторые проблемы. Основные структуры, появляющиеся здесь, возникают из тонкого анализа алгебраических основ дифференциальной геометрии, в первую очередь геометрии аффинной связности. Эти структуры относятся к неассоциативной алгебре, и наиболее важные из них связаны с теорией луп и квазигрупп. Весьма примечательно, что между Эрлангенской программой Клейна теоретико-группового обоснования геометрии и программой Римана — Леви — Чивита — Вейля (геометрия аффинной связности) проходит идеологический барьер. Попытки Э. Картана и других математиков теоретико-групповым образом (хотя и в обобщенном смысле) истолковать теорию аффинной связности (G-структуры) не являются убедительными. Это — лишь попытка обойти трудности. Между тем использование неассоциативной алгебры, и в первую очередь квазигрупп, позволяет прийти к единой точке зрения на обе программы. Поразительное между прочим высказывание можно найти в заключительных строчках сочинения Н. И. Лобачевского «О началах геометрии» [1], вот оно: «Однако же можно предвидеть, что перемены в Механике при новых началах Геометрии будут того же рода, какие показал Г. Лаплас [Mécanique céleste. T. I, Liv. I, Ch. II], предполагая возможной всякую зависимость скорости от силы, или — выражаясь вернее — *предполагая силы, измеряемые всегда скоростью, подчиненными другому закону в соединении, нежели принятому сложению их»*. Но что значит другой закон, нежели сложение? Это и есть отказ от ассоциативности и коммутативности композиции векторов, что приводит к понятию лупы. Как будто классик предвидел роль неассоциативной алгебры (тогда еще не созданной) в геометрии! Мы не будем здесь подробно останавливаться на исторических предпосылках и истоках «Нелинейной геометрической алгебры», отсылая читателя к работе [2, Введение].

Непосредственным первым важным результатом «Нелинейной геометрической алгебры» было открытие того факта, что левые лупы и левые однородные пространства описывают одни и те же структуры, т. е. после необходимых уточнений мы имееем дело с эквивалентными категориями (см. работы автора [3, 4], где введена важная конструкция полупрямого произведения левой лупы и ее трансассоцианта).

Обращаясь к произвольной аффинной связности, можно в окрестности каждой точки ввести геодезическую локальную лупу, которая однозначно определяется данной связностью при помощи параллельного переноса геодезических вдоль геодезических. Эта конструкция получена независимо Киккавой [5] и автором [6, 7]. Построенное этим способом семейство локальных луп однозначно определяет пространство аффинной связности (отметим, что хотя в силу гладкости структура таких луп двусторонняя, геометрический смысл имеет, как правило, лишь структура левой лупы). Однако не всякое семейство локальных луп на многообразии определяет таким путем аффинную связность, существуют некоторые связи между лупами различных точек. Эти связи нельзя выразить чисто алгебраически на языке луп. Но, если принять во внимание, что в окрестности любой точки пространство аффинной связности кроме структуры лупы имеет еще операцию умножения точек на скаляры в силу существования канонического параметра вдоль геодезических и структуру векторного пространства, которые индуцируются экспоненциальным отображением из касательного пространства точки, то такие связи можно уже выразить алгебраическими тождествами. Вместо луп в окрестностях точек пространства аффинной связности возникают тогда одули и двуодули, однозначно порожденные геометрией аффинной связности (см. работы автора [2, 7]). Полученное из многообразия аффинной связности семейство локальных одулей и двуодулей (по одному для каждой точки) удовлетворяет некоторым естественным алгебраическим тождествам и называется естественной геоодулярной (геодвуодулярной) структурой многообразия аффинной связности. Она содержит всю информацию о многообразии аффинной связности, т. е. позволяет однозначно восстановить последнюю.

Если взять произвольную гладкую геоодулярную структуру (не обязательно полученную из какой-либо аффинной связности), то она однозначно порождает аффинную связность, для которой является естественной геоодулярной структурой. Отсюда следует, что гладкое геоодулярное многообразие есть многообразие аффинной связности, но описываемое на другом языке (т. е. имеется некоторая эквивалентность соответствующих категорий); см. работы автора [2, 7]. Далее естественно рассматривать семейство гладких луп на многообразии как одну частичную тернарную операцию. Аналогично поступаем и с операциями умножения на скаляры. Таким образом многообразие аффинной связности можно интерпретировать как гладкую универсальную алгебру с двумя тернарными операциями, семейством $(\omega_t)_{t\in\mathbf{R}}$ бинарных частичных операций и некоторыми тождествами. Выражаясь языком теории категорий, можно сказать, что категория гладких многообразий аффинной связности эквивалентна категории гладких геодвуодулярных многообразий. Такой подход привносит новую идеологию в геометрию, позволяя, в частности, корректно определить понятие многообразия аффинной связности класса C^0, C^1.

Структуры, появляющиеся на этом пути, имеют самостоятельную алгебраическую ценность. Если игнорировать гладкость и считать операции всюду определенными, то можно определить аффинную связность над произвольными полями, телами и даже кольцами. Можно даже определить «конечные пространства аффинной связности». Все это поразительным образом напоминает геометрическую алгебру (аффинные и проективные плоскости) в нелинейном варианте и нетрудно предвидеть на этом пути дальнейшее развитие «Нелинейной геометрической алгебры», что привносит новую идеологию уже в алгебру.

Следует отметить, что метод включения заданной гладкой лупы в семейство луп (по одной для каждой точки, являющейся ее нейтральным элементом) оказывается весьма перспективным, особенно, если такое семейство геоодулярно (геодвуодулярно). Тогда мощные методы дифференциальной геометрии можно применить к исследованию данной лупы, пользуясь понятием касательной аффинной связности лупускулярной структуры (см. работу автора [8]). Такие методы эффективны, например, в случае правомоноальтернативных луп (в частности, правых луп Бола); см. [9, 10].

Важным разделом «Нелинейной геометрической алгебры» является инфинитезимальная теория гладких локальных луп (аналог теории Ли для групп Ли); см. [11—13]. Здесь можно ввести соответствующие инфинитезимальные объекты — гипералгебры — и построить содержательную теорию.

Методы «Нелинейной геометрической алгебры» дают возможность исследовать различные важные классы гладких алгебраических систем, таких, например, как геометрические и голономические одули, см. [14]. Отметим, в частности, что геометричность одуля является необходимым и достаточным условием возможности его реализации как геодезического одуля некоторого (вообще говоря не единственного) пространства аффинной связности.

Относительно связей «Нелинейной геометрической алгебры» с «Теорией тканей» заметим, что последняя, по нашему мнению, дает эффективный инструмент исследований лишь в случаях изотопически инвариантных свойств квазигрупп. В других случаях следует применять иные методы. Отметим лишь нашу трактовку известной связности Черна на три-ткани как касательной аффинной связности к лупускулярной структуре на антипроизведении лупы, что показывает, что теорию тканей следует рассматривать как некоторый раздел «Нелинейной геометрической алгебры». Относительно Теории тканей см. [15, 16].

Отметим, наконец, связи «Нелинейной геометрической алгебры» с физикой и механикой (теория калибровочных полей, механика со связями и т. д.); см. [17, 18]. Здесь следует ожидать дальнейших плодотворных приложений к теории относительности, теории дислокаций, теории конфайнмента и т. д.

Наше изложение не претендует на подробности в деталях, последние, равно как и более обширные списки литературы, можно найти в цитируемых нами работах.

Данный обзор содержит расширенное изложение часового пленарного доклада «Квазигруппы и геометрия» прочитанного автором на международной конференции «Теория тканей» (Венгрия, Сегед, Август 1987 г.).

Гладкая локальная лупа (лупускула). Пусть $\langle M, \cdot, \varepsilon\rangle$ — частичная магма (группоид) с бинарной операцией $(x, y) \mapsto x \cdot y$ и нейтралом ε, $x \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot x = x$, где M — гладкое многообразие (по крайней мере класса C^1), а операция $(x, y) \mapsto x \cdot y$ по крайней мере класса C^1 и определена на окрестности $U \ni \varepsilon$. Тогда, как известно, она локально обратима справа и слева, т. е. если $x \cdot y = L_x y = R_y x$, то в некоторой окрестности нейтрала ε существуют L_x^{-1} и R_y^{-1}. Это позволяет ввести операции левого и правого деления,

$$a \backslash x = L_a^{-1} x,\ x/b = R_b^{-1} x,$$

удовлетворяющие тождествам

$$a \cdot (a \backslash x) = x,\ (x/b) \cdot b = x,\ a \backslash (a \cdot x) = x,\ (x \cdot b)/b = x.$$

Таким путем мы, в действительности, получаем гладкую локальную лупу на M.

Ссылки: [2, 5]. Алгебраическую теорию луп см. в [19].

Базисные векторные поля. Канонические унарные операции. Предодуль. Преддвуодуль. Взяв в гладкой частичной лупе

$$\left(\frac{\partial (x \cdot y)^{\alpha}}{\partial y^{\beta}}\right)_{y=\varepsilon} = A^{\alpha}_{\beta}(x) = [(L_x)_{*,\varepsilon}]^{\alpha}_{\beta},$$

мы получаем линейно независимые в каждой точке *левые базисные векторные поля* A_β вблизи ε. Аналогично вводятся и *правые базисные векторные поля* α_λ:

$$\left(\frac{\partial (x \cdot y)^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right)_{x=\varepsilon} = \alpha^{\mu}_{\lambda}(y) = [(R_y)_{*,\varepsilon}]^{\mu}_{\lambda}.$$

Будем рассматривать левые поля; рассмотрение правых аналогично (здесь необходима гладкость класса C^2, по крайней мере). Решая уравнение

$$\frac{d\varphi^{\alpha}(t)}{dt} = A^{\alpha}_{\beta}(\varphi(t))\, \xi^{\beta},\ \varphi(0) = \varepsilon,$$

получаем *экспоненциальную функцию* $\varphi(t) = \operatorname{Exp} t\xi$ и *экспоненциальное отображение*, которое есть локальный диффеоморфизм, $\operatorname{Exp}\colon X \in T_\varepsilon(M) \mapsto \operatorname{Exp} X \in M$. Вводя $tx = \operatorname{Exp} t \operatorname{Exp}^{-1} x$, получаем *канонические* (*левые*) *унарные операции* лупы $\langle M, \cdot, \varepsilon\rangle$. Наделив ими лупу, получаем *канонический левый предодуль* данной лупы, $\langle M, \cdot, (t)_{t\in\mathbf{R}}, \varepsilon\rangle$ Очевидно, $(tu)x = t(ux)$, $1 \cdot x = x$. Вводя еще бинарную операцию

$$x + y = \operatorname{Exp}(\operatorname{Exp}^{-1} x + \operatorname{Exp}^{-1} y)$$

и наделяя ею канонический левый предодуль, получим *канонический левый преддвуодуль лупы* $\langle M, \cdot, \varepsilon\rangle$, т. е. $\langle M, \cdot, +, (t)_{t\in\mathbf{R}}, \varepsilon\rangle$. Очевидно, $\langle M, +, (t)_{t\in\mathbf{R}}, \varepsilon\rangle$ — векторное конечномерное пространство. Обычным образом, Exp позволяет ввести в лупе нормальные координаты. Следовательно, в дальнейшем любую гладкую лупу имеет смысл рассматривать как левый или правый предодуль (преддвуодуль), что мы, как правило, и будем делать.

Ссылки: [2, 7].

Одуль. Моноальтернативность. Геометричность. Если в каноническом левом предодуле (левом преддвуодуле) выполнено тождество

$$tx \cdot ux = (t + u)x \quad (\textit{моноассоциативность}),$$

то такой предодуль (преддвуодуль) называется *левым одулем* (*левым линейным двуодулем*).

Заметим, что в гладком левом одуле его правые канонические унарные операции $\bar{t}\colon x \mapsto \bar{t}x$ совпадают с левыми, $tx = \bar{t}x$, как и экспоненциальные отображения. Так что в этом случае левые и правые одули (двуодули) можно было бы не различать. Более сильными, чем моноассоциативность, являются условия:

$$(x \cdot ta) \cdot ua = x \cdot (t + u)a \quad (\textit{правая моноальтернативность}),$$

$$ta \cdot (ua \cdot x) = (t + u)a \cdot x \quad (\textit{левая моноальтернативность}).$$

Замечание. Левый одуль может быть определен как чисто алгебраический объект $\langle M, \cdot, (t)_{t\in\mathbf{R}}, \varepsilon\rangle$, где $\langle M, \cdot, \varepsilon\rangle$ — левая лупа с двусторонним нейтралом ε ($a \cdot x = b$ — однозначно разрешимо, $x = a\backslash b$ и имеют место тождества $a \cdot (a\backslash b) = b$, $a\backslash(a \cdot b) = b$, $a \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot a = a$), а t: $x \mapsto tx$ — унарные операции со свойствами $(t+u)x = tx \cdot ux$, $(tu)x = t(ux)$, $1_K x = x$. Здесь K — ассоциативное кольцо с единицей.

Введем еще *геометрический* левый одуль как одуль, удовлетворяющий условию

$$l(x, a)\,ta = tl(x, a)\,a \text{ (\textit{правое тождество геометричности})},$$

где $l(x, a) = L^{-1}_{x\cdot a} \circ L_x \circ L_a$.

Очевидно, правая моноальтернативность влечет правую геометричность.

Ссылки: [2, 7, 13, 14].

Лупускулярные структуры. Одулярные структуры. Геоодулярные структуры. Определив на некоторой окрестности каждой точки многообразия лупу (одуль) с нейтралом в этой точке, мы получаем лупускулярную (одулярную) структуру.

Итак, $\langle M, L\rangle$, где M — гладкое многообразие, а L: $(x, y, z) \in M^3 \mapsto L(x, y, z)$ — гладкая частичная тернарная операция такая, что $x \underset{a}{\cdot} y = L(x, a, y)$ определяет на окрестности точки a лупу с нейтралом a, называется *лупускулярной структурой* (*многообразием*).

Аналогично можно определить *одулярную структуру* $\langle M, L(\omega_t)_{t\in\mathbf{R}}\rangle$ как гладкое многообразие с гладкой частичной тернарной операцией L и частичными гладкими бинарными операциями ω_t: $(a, b) \in M^2 \mapsto \omega_t(a, b) = t_a b$ такую, что $x \underset{a}{\cdot} y = L(x, a, y)$ и $t_a z = \omega_t(a, z)$ определяет на некоторой окрестности точки a одуль с нейтралом a.

Можно определить и *двуодулярную* структуру $\langle M, L, \Lambda, (\omega_t)_{t\in\mathbf{R}}\rangle$, где $\langle M, L, (\omega_t)_{t\in\mathbf{R}}\rangle$ и $\langle M, \Lambda, (\omega_t)_{t\in\mathbf{R}}\rangle$ — одулярные структуры. Если $x \underset{a}{+} y = \Lambda(x, a, y)$ и $t_a x = \omega_t(a, x)$ определяют векторное пространство, то такую двуодулярную структуру назовем *линейной двуодулярной*.

Замечание. Можно определить одулярные (двуодулярные) структуры, игнорируя гладкость, чисто алгебраически, и не только над полем $\mathbf{R}$, но и над произвольным кольцом K. Тогда следует различать левые и правые структуры (в первом случае $(tu)x = t(ux)$, во втором $(tu)x = u(tx)$, или, в «правой записи», $x(tu) = (xt)u$).

Одулярная структура $\langle M, L, (\omega_t)_{t\in\mathbf{R}}\rangle$ — *левая геоодулярная*, если выполнены два тождества геоодулярности

$$L^{t_a b}_{u_a b} \circ L^a_{t_a b} = L^a_{u_a b} \text{ (\textit{I-геоодулярное тождество})},$$

$$L^a_b \circ t_a = t_b \circ L^a_b \text{ (\textit{II-геоодулярное тождество})}.$$

Здесь $L^a_b x = L(b, a, x) = b \underset{a}{\cdot} x$.

Аналогично определяется *левая геодвуодулярная структура с главной операцией* L, $\langle M, L, \Lambda, (\omega_t)_{t\in\mathbf{R}}\rangle$, где нужно добавить еще тождество

$$L^a_b \Lambda(x, a, z) = \Lambda\left(L^a_b x, b, L^a_b z\right) \text{ (\textit{III-геоодулярное тождество})}.$$

Доказывается, что одуль $\langle M, \underset{a}{\cdot}, (t_a)_{t\in\mathbf{R}}\rangle$ левой геоодулярной (геодвуодулярной) структуры, центрированный в произвольной точке $a \in M$, правогеометричен.

Ссылки: [2, 7, 8].

Пример геодвуодулярной структуры. Естественная геоодулярная структура пространства аффинной связности (M, ∇). Взяв

$$L(x, a, y) = \mathrm{Exp}_x \tau^a_x \, \mathrm{Exp}^{-1}_a y,$$

$$\omega_t(a, z) = t_a z = \mathrm{Exp}_a\, t\, \mathrm{Exp}_a^{-1} z,$$

$$\Lambda(x, a, y) = \mathrm{Exp}_a\left(\mathrm{Exp}_a^{-1} x + \mathrm{Exp}_a^{-1} y\right),$$

где Exp_a — экспоненциальное отображение в точке a, τ_x^a — параллельный перенос вдоль дуги геодезической, соединяющей a с x (а это $\{t_a x\}_{t\in[0,1]}$), мы получаем [2] *естественную линейную геодвуодулярную структуру пространства* (M, ∇).

Итак, любое C^k-гладкое $(k \geqslant 3)$ пространство аффинной связности можно рассматривать как геоодулярную структуру. В частности, и аффинное (или евклидово) пространство — геоодулярная структура.

Ссылки: [2, 7].

Касательная связность лупускулярных и одулярных структур. Пусть $\langle M, L\rangle$ — лупускулярная структура на гладком многообразии M. Тогда

$$\nabla_{X_a} Y = \left\{\frac{d}{dt}\left(\left[\left(L^a_{\gamma(t)}\right)_{*,a}\right]^{-1} Y_{\gamma(t)}\right)\right\}_{t=0},$$

$\gamma(0) = a$, $\dot\gamma(0) = X_a$, Y — векторное поле в окрестности точки a, определяет касательную аффинную связность [8]. В координатах:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}(a) = -\left[\frac{\partial^2 \underset{a}{(x\cdot y)^\alpha}}{\partial x^\beta\, \partial y^\lambda}\right]_{x=y=a}.$$

Ее геодезическими являются кривые $\{t_c b\}$, где $t_c\colon b \mapsto t_c b$ — канонические унарные операции лупы, центрированной в точке c. Exp этой лупы совпадает с Exp_c в смысле аффинной связности.

Ссылки: [2, 7, 8].

Эквивалентность категорий геоодулярных (геодвуодулярных) структур и аффинных связностей [7].

1. Касательная аффинная связность $\overline{\nabla}$ естественной геоодулярной (геодвуодулярной) структуры гладкого многообразия аффинной связности (M, ∇) совпадает с ∇.

2. Естественная геоодулярная (геодвуодулярная) структура касательной аффинной связности к гладкой геоодулярной (геодвуодулярной) структуре совпадает с ней.

Следовательно, всю геометрию аффинной связности можно трактовать на языке лупускулярных и одулярных структур (левых).

Ссылки: [2, 7].

Характеризация геодезических одулей. Одуль, центрированный в точке геоодулярной структуры пространства аффинной связности, называется *геодезическим одулем.*

Возникает вопрос, любой ли гладкий одуль может быть реализован как геодезический одуль некоторого пространства аффинной связности. Имеет место утверждение:

Одуль (гладкий) может быть реализован как геодезический, если и только если он геометрический.

Эта реализация неоднозначна (т. е. существует много таких неизоморфных пространств аффинной связности). Есть точная теория, описывающая этот произвол [14]. Она связана с дифференциальными уравнениями геометрических и голономических одулей.

Ссылки: [2, 7, 13, 14].

Элементарная голономия. Лупускулярные и одулярные пространства без кривизны. Имея лупускулярную структуру $\langle M, L\rangle$, можно ввести $h^a(b, c) = \left(L^a_c\right)^{-1} \circ L^b_c \circ L^a_b$ — *преобразование элементарной голономии.* Лупускулярная структура *без кривизны* (или *с абсолютным параллелизмом*), если $h^a(b, c) = \mathrm{id}\,(\forall a, b, c)$, или, что то же, $L^a_c \circ \left(L^a_b\right)^{-1} = L^b_c$.

Имеет место теорема наследственности:

Касательная аффинная связность лупускулярной структуры без кривизны будет без кривизны $\left(R^{\cdot}_{\cdot,\cdot\cdot} = 0\right)$. Отметим еще, что *геодези-*

ческая лупа пространства аффинной связности без кривизны — правомоноальтернативна.

Необходимым и достаточным условием того, что одуль может быть реализован как геодезический одуль пространства аффинной связности без кривизны, является его правая моноальтернативность. Такой одуль определяет пространство аффинной связности однозначно (локально).

Заметим, что хороших алгебраических необходимых и достаточных условий пространств без кручения нет. Это наводит на мысль, что кручение — порождение анализа (гладкости структуры).

Ссылки: [2, 7, 8].

Плоские структуры. *Лупускулярная структура называется плоской, если она без кривизны и канонический предодуль каждой точки — векторное пространство.*

Геоодулярное пространство будет плоским, если и только если соответствующее ему пространство аффинной связности плоское.

Ссылки: [2, 7].

Редуктивные лупускулярные и одулярные структуры. Лупускулярная одулярная структура *редуктивна*, если ее левые сдвиги L_b^a являются ее автоморфизмами, т. е.

$$L_b^a L(c, p, q) = L(L_b^a c, L_b^a p, L_b^a q)$$

(в случае одулярности еще $L_b^a \circ t_c = t_{L_b^a c} \circ L_b^a$, а в случае двуодулярности дополнительно $L_b^a \Lambda(c, p, q) = \Lambda(L_b^a c, L_b^a p, L_b^a q)$).

Геоодулярное пространство редуктивно, если и только если соответствующая ему аффинная связность редуктивна (т. е. $\nabla R = 0$, $\nabla T = 0$) (см. [2]).

Для того чтобы одуль мог быть реализован как геодезический одуль редуктивного пространства аффинной связности, необходимо и достаточно, чтобы он был левым А-одулем, т. е. $l(a, b) = L_{ab}^{-1} \circ L_a \circ L_b$ — *его автоморфизмы со свойством левой моноальтернативности.*

Такой одуль определяет редуктивное пространство аффинной связности однозначно (локально).

Отметим еще теорему наследственности:

касательная аффинная связность редуктивной лупускулярной структуры редуктивна.

Ссылки: [2, 7].

Симметрические лупускулярные и одулярные пространства. Лупускулярная (одулярная) структура — *симметрическая*, если $(-1)_a$ будут ее автоморфизмами.

Геоодулярное пространство будет симметрическим, если и только если соответствующая (касательная) аффинная связность — симметрическая $(T = 0, \nabla R = 0)$.

Для того чтобы лупа могла быть реализована как геодезическая лупа симметрического пространства аффинной связности, необходимо и достаточно, чтобы она обладала левым свойством Бола $x(y(xz)) = [x(yx)]z$ *и автоморфным свойством обратимости* $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

Отметим здесь лупы со *свойством псевдолинейности*: $xy = \alpha(x, y)x + \beta(x, y)y$ (относительно канонически присоединенного сложения и умножения на скаляры, т. е. структуры предодуля). Геоодулярные структуры с таким строением геодезических луп связаны с проективно плоскими пространствами аффинной связности. В частности, симметрические пространства постоянной кривизны имеют такое строение геодезических луп.

Ссылки: [2, 7].

s-Пространства. Геометрия идемпотентных леводистрибутивных гладких квазигрупп: $x \cdot x = x$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$. Напомним, что квазигруппа — магма с левым и правым делением (т. е. уравнения $a \cdot x = b$

и $y\cdot c=d$ однозначно разрешимы). С такой квазигруппой можно связать лупускулярную структуру $\underset{a}{x\cdot y}=R_a^{-1}x\cdot L_a^{-1}y$. Она оказывается редуктивной, так что касательная аффинная связность ∇ тоже редуктивна. Отображения s_x: $z\to x\cdot z$ оказываются автоморфизмами структуры ∇ с изолированной неподвижной точкой x (локально). Достаточно знать s_{x_0}, тогда s_x получаются как $s_x=\lambda_x^{x_0}\circ s_{x_0}\circ(\lambda_x^{x_0})^{-1}$, где $\lambda_x^{x_0}$ — левые сдвиги геоодулярной структуры связности ∇. Кроме того, здесь $S_x=(s_x)_{*,x}$ ковариантно постоянно, $\nabla S=0$. Мы приходим к обобщенным симметрическим пространствам (s-пространствам). Пространства аффинной связности с обобщенными симметриями впервые ввел в рассмотрение Леджер. Итак, гладкая идемпотентная леводистрибутивная квазигруппа вполне определяется семейством обобщенных симметрий (по одной в каждой точке) редуктивного пространства аффинной связности (с некоторыми дополнительными условиями:

$$l^{x_0}(a,b)\circ s_{x_0}=s_{x_0}\circ l^{x_0}(a,b);$$

здесь $l^{x_0}(a,b)=\left(\lambda^{x_0}_{\substack{a\cdot b\\ x_0}}\right)^{-1}\circ\lambda_a^{x_0}\circ\lambda_b^{x_0}\Bigg)$. В этой конструкции $s_x\circ s_x=id$ приводит к симметрическим пространствам и тогда $s_x=(-1)_x$. Симметрические пространства образуют подкласс среди так называемых *совершенных s-пространств*, которые можно охарактеризовать, например, как такие s-пространства, для которых лупы $\underset{a}{x\cdot y}=R_a^{-1}x\cdot L_a^{-1}y$ совпадают с геодезическими лупами касательной связности в точках $a\in M$ (вместо этого можно потребовать левомоноальтернативность луп $\underset{a}{x\cdot y}$). Имеется подробная теория совершенных s-пространств. Их геодезические лупы являются лупами Бола.

Ссылки: [20—24].

Вложение луп в группы. Полупрямые произведения луп и их трансассоциантов. Рассмотрим левое однородное пространство $M=G/H$ с группой $\langle G.\ \cdot\rangle$ и подгруппой H, т. е. пространство классов $\{gH\}_{g\in G}$. Рассмотрим сечение Q, которое назовем *квазиредуктантом*, состоящее из элементов группы G, взятых по одному из каждого класса смежности (т. е. $Q\cdot H=G$ и $Q\cap gH$ одноэлементно); пусть еще $Q\cap H=\{1_G\}$. Определим проекцию $g\mapsto\pi g\in Q\cap gH$. Тогда операция $q\Delta q'=\pi(q\cdot q')\ (q,\ q'\in Q)$ наделяет Q структурой левой лупы с двусторонней единицей $\varepsilon=1_G$ (если $a\Delta x=b$ однозначно разрешимо, то говорят, что задана левая лупа; тогда можно ввести левое деление $x=a\backslash b$). В гладком случае, выбрав гладкое сечение, получаем просто лупу.

Любая лупа (левая) с двусторонней единицей может быть реализована вышеуказанным способом на квазиредуктанте некоторого однородного пространства [6].

Эта конструкция описывается на языке полупрямого произведения лупы (левой) на ее трансассоциант. Пусть $\langle Q,\cdot,\varepsilon\rangle$ — лупа (левая), $\mathrm{as}_l Q$ — группа, порожденная преобразованиями $l(a,b)=L_{ab}^{-1}\circ L_a\circ L_b$, назовем ее *ассоциантом*, а $\mathrm{as}_l Q\subset P\subset\mathfrak{S}_Q$, где P — подгруппа в $\mathfrak{S}_Q$, назовем ее *трансассоциантом* лупы Q. На множестве пар $(q,\ h)$, $q\in Q$, $h\in P$, определим умножение

$$(q,h)\cdot(q',h')=(q\cdot hq',\,l(q,hq')\circ m_{q'}h\circ h\circ h'),$$

где

$$m_{q'}h=L_{hq'}^{-1}\circ h\circ L_{q'}\circ h^{-1},\ l(q,\ hq')=L_{q\cdot hq'}^{-1}\circ L_q\circ L_{hq'}.$$

Мы получаем группу $Q\,\boxed{*}\,P$ — *полупрямое произведение лупы (левой) на ее трансассоциант*; $(\varepsilon,\ P)=\widetilde{P}$ дает подгруппу, изоморфную P. Так что с точностью до изоморфизма имеем $Q\boxed{*}P\,\big|\,\widetilde{P}$ — левое однородное пространство. Его редуктант $(Q\,\mathrm{id})$ при помощи проектирования $\pi(q, h) = (q, \mathrm{id})$ наделяется структурой лупы $\pi[(q, id)\cdot(q', \mathrm{id})] = (q, \mathrm{id})\Delta(q', \mathrm{id})$, изоморфной первоначальной.

Если лупа Q есть группа, а P — группа ее автоморфизмов, то получаем обычное полупрямое произведение группы на ее группу (подгруппу) автоморфизмов.

Квазиредуктант называется *редуктантом*, если $hQh^{-1} \subset Q$ для каждого $h \in H$. В этом случае лупа, индуцированная на нем, будет левой специальной (левой A-лупой). Любую A-лупу можно реализовать на редуктанте некоторого однородного пространства. Если для квазиредуктанта Q имеет место $a \cdot b \cdot a \in Q$ для каждых a, $b \in Q$ (здесь $\cdot$ — умножение в группе G), то лупа на нем болова (слева). И любую лупу с левым свойством Бола можно реализовать на квазиредуктанте с таким свойством некоторого однородного пространства.

Ссылки: [3, 4].

Голономические одули. Имея одулярную или лупускулярную структуру, можно сконцентрировать информацию в одуле (лупе) заданной точки, присоединив к ней элементарную голономию как новые операции. Имеем тогда $x \cdot y = x \underset{\varepsilon}{\cdot} y$, $h^{\varepsilon}(a, b)x = h(a, b, x)$ (для лупускулярного случая). Это есть лупа с мультиоператорами — *голономическая лупа* (*одуль*).

В геоодулярном случае получаем *голономический геоодуль*, в нем, в силу I и II тождеств геоодулярности имеют место тождества

$$h(a, b, tx) = th(a, b, x) \quad (\textit{тождество однородности, подобия}),$$

$$h(a, a \cdot b, tb) = l(a, b)tb \quad (\textit{тождество связи}),$$

$$h(c \cdot ta, c \cdot ua, h(c, c \cdot ta, x)) = h(c, c \cdot ua, x) \quad (h\textit{ — тождество}),$$

$$h(\varepsilon, q, x) = x \quad (\varepsilon\textit{-тождество}).$$

Эта структура описывает геоодулярное пространство однозначно, достаточно взять $x \underset{a}{\cdot} y = x \cdot h(a, x, a\backslash y)$, $t_a y = a \cdot t(a\backslash y)$.

Можно (см. [14]) написать в гладком случае дифференциальные уравнения голономического геоодуля, откуда, в частности следуют дифференциальные уравнения Картана для форм связности в «полярных координатах» и много другое, например доказательство того, что всякий геометрический одуль есть геодезический одуль некоторой не единственной аффинной связности.

Ссылки: [13, 14].

Инфинитезимальная теория гладких луп. Можно построить далеко идущий аналог теории Ли (групп Ли) для гладких луп. Конечно, в общем случае инфинитезимальный эквивалент не сводится здесь к одной бинарной алгебре (алгебре Ли). Необходима счетная совокупность многоместных полилинейных операций, или «нелинейное» умножение в касательном пространстве, разложив которое в ряд в нормальных координатах, мы и получим счетную совокупность полилинейных операций как коэффициенты разложения. Касательный инфинитезимальный объект здесь называется гиперлагебра (ν-гиперлагебра, Ф-гиперлагебра и т. д.). Итак, пусть $\langle Q, \cdot, \varepsilon\rangle$ — локальная гладкая лупа, $A^{\alpha}_{\beta}(x) = \left[\frac{\partial (x\cdot y)^{\alpha}}{\partial y^{\beta}}\right]_{y=\varepsilon}$ — ее левые векторные поля, Exp — экспоненциальное отображение. Напомним, что

$$\frac{d\,(\mathrm{Exp}\,t\xi)^{\alpha}}{dt} = A^{\alpha}_{\beta}(\mathrm{Exp}\,t\xi)\,\xi^{\beta}, \quad \mathrm{Exp}\,0 = \varepsilon.$$

Мы присоединим к лупе ее канонические операции структуры преддвуодуля $tx = \operatorname{Exp} t \operatorname{Exp}^{-1} x$, $x + y = \operatorname{Exp}(\operatorname{Exp}^{-1} x + E\mathrm{xp}^{-1} y)$. Введем еще $\tilde{l}(a, b) = [l(a, b)]_{*,\varepsilon}$ и $c^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$, определяемые из однозначного разложения $[A_\beta, A_\gamma](x) = c^{\alpha}_{\beta\gamma}(x) A_\alpha(x)$. Введем функции

$$\tilde{c}^{\alpha}_{\beta\gamma}(\xi) = c^{\alpha}_{\beta\gamma}(\operatorname{Exp} \xi) \quad (\xi \in T_\varepsilon(Q)),$$

$$\tilde{\tilde{l}}{}^{\lambda}_{\mu}(\eta, \zeta) = \tilde{l}^{\lambda}_{\mu}(\operatorname{Exp} \eta, \operatorname{Exp} \zeta) \quad (\eta, \zeta \in T_\varepsilon(Q))$$

(в нормальных координатах все проще: $\operatorname{Exp} \xi = \xi$). Определим на $V = T_\varepsilon(Q)$ операции

$$\nu(\eta, \zeta) = \tilde{\tilde{l}}{}^{\lambda}_{\mu}(\eta, \zeta)\, \zeta^{\mu} (\partial_\lambda)_\varepsilon, \quad d(\xi, \eta) = \tilde{c}^{\alpha}_{\beta\gamma}(\xi)\, \xi^{\beta} \eta^{\gamma} (\partial_\alpha)_\varepsilon.$$

Касательное векторное пространство $V = T_\varepsilon(Q)$, наделенное этими операциями, назовем *ν-гипералгеброй, касательной к лупе* $\langle Q, \cdot, \varepsilon\rangle$. Эта алгебра обладает некоторыми свойствами, которые мы абстрагируем в следующем определении.

Определение. Пусть V — векторное пространство (над $\mathbf{R}$ или любым полем k), $\dim V = n$, $\tilde{d}(\xi, \eta)$ — непрерывная (по крайней мере) бинарная операция на V, допускающая представление в (произвольном) базисе $e_1, \ldots, e_n$ вида $d(\xi, \eta) = [d^{\gamma}_{\alpha\beta}(\xi) \xi^{\alpha} \eta^{\beta}] e_\gamma$, такая, что $d(\xi, \xi) = 0$. Будем тогда говорить, что *V — гипералгебра.* Если дополнительно на V задана непрерывная (по крайней мере) бинарная операция $\nu(\eta, \zeta)$, допускающая представление в (произвольном) базисе $e_1, \ldots, e_n$ вида $\nu(\eta, \zeta) = \nu^{\alpha}_{\beta}(\eta, \zeta) \zeta^{\beta} e_\alpha$, такая, что $\nu(0, \zeta) = \zeta$, $\nu^{\alpha}_{\beta}(\eta, 0)\zeta^{\beta} = \zeta^{\alpha}$, то будем говорить, что V есть *ν-гипералгебра с мультиоператором* ν.

Предложение. *Любая ν-гипералгебра с операцией d однозначно (локально) определяет гладкую лупу $\langle Q, \cdot, \varepsilon\rangle$, касательной ν-гипералгебре которой она изоморфна. Морфизм гладких луп индуцирует морфизм соответствующих ν-гипералгебр и наоборот.*

Представления, указанные для операций ν и d, неоднозначны. Если операции ν и d аналитические, то можно получить счетную систему полилинейных операций (с тождествами), эквивалентную первоначальной ν-гипералгебре (при соблюдении некоторых условий сходимости). Такую систему полилинейных операций на V мы также будем называть *ν-гипералгеброй.*

Гладкая лупа правомоноальтернативна, если и только если для ее касательной ν-гипералгебры имеет место $\nu(\eta, \zeta) = \zeta$ (эквивалентно, если $\nu(\eta, \zeta)$ линейна по ζ).

В конкретных приложениях приходится вовлекать в рассмотрение и производные от операций ν и d. Так обстоит дело, например, для геометрических одулей, где требуются первые производные от ν для характеризации их. Это приводит к модификации понятия ν-гипералгебры (полностью эквивалентной). Так возникают F- и Φ-гипералгебры и т. д.

Отметим, наконец, где в контексте ν-гипералгебр находятся группы Ли: лупа будет группой Ли, если и только если $d(\eta, \zeta)$ билинейна и удовлетворяет тождествам алгебры Ли, а $\nu(\eta, \zeta) = \zeta$ (т. е. лупа правомоноальтернативна).

Наличие дополнительных тождеств в лупе сильно влияет на структуру ее касательной ν-гипералгебры (что собственно и демонстрирует тождество ассоциативности в случае групп Ли).

Ссылки: [11—13].

Лупы Бола (гладкие) и алгебры Бола. Инфинитезимальная теория. Случай луп Муфанг (левых и правых Боловых луп одновременно). Правое свойство Бола для лупы имеет вид

$$((x \cdot a) \cdot y) \cdot a = x \cdot ((a \cdot y) \cdot a). \tag{1}$$

Гладкая лупа с правым тождеством Бола правомоноальтернативна, $(x \cdot ta) \cdot ua = x \cdot (t+u)a$, и потому, зная ее левые базисные поля $A^{\alpha}_{\beta}(x)$, можно ее восстановить, решая уравнение $\frac{d\,(x \cdot tb)^{\alpha}}{dt} = A^{\alpha}_{\beta}(x \cdot tb)(\mathrm{Exp}^{-1}\,b)^{\beta}$ с начальным условием $(x \cdot 0b) = x$.

Можно написать, дифференцируя (1) по a, при $a = \varepsilon$ некоторое вспомогательное дифференциальное уравнение, условия интегрируемости которого показывают, что базисные векторные поля лупы с правым свойством Бола образуют тройную систему, т. е.

$$[A_{\alpha}, [A_{\beta}, A_{\gamma}]](x) = \rho^{\sigma}_{\alpha,\beta\gamma} A_{\sigma}(x) \left(\rho^{\cdot}_{\cdot,\cdot\cdot} = \mathrm{const}\right).$$

Введем $[A_{\beta}, A_{\gamma}](\varepsilon) = c^{\nu}_{\beta\gamma}(\partial_{\nu})_{\varepsilon}$. Константы $\rho^{\cdot}_{\cdot,\cdot\cdot}$ и $c^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ позволяют определить на $V = T_{\varepsilon}(Q)$ некоторую бинарно-тернарную алгебру с операциями

$$(\xi \cdot \eta) = c^{\gamma}_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\eta^{\beta}(\partial_{\gamma})_{\varepsilon}, \ (\xi, \eta; \zeta) = \rho^{\alpha}_{\beta,\gamma\sigma}\zeta^{\beta}\xi^{\gamma}\eta^{\sigma}(\partial_{\alpha})_{\varepsilon}.$$

Относительно операции $(\xi, \eta; \zeta)$ эта алгебра оказывается тройной системой Ли, т. е.

$$\begin{gathered} (\xi, \xi; \zeta) = 0, \ (\xi, \eta; \zeta) + (\zeta, \xi; \eta) + (\eta, \zeta; \xi) = 0, \\ D_{\xi,\eta}(\lambda, \mu; \nu) = (D_{\xi,\eta}\lambda, \mu; \nu) + (\lambda, D_{\xi,\eta}\mu; \nu) + (\lambda, \mu; D_{\xi,\eta}\nu), \end{gathered} \tag{2}$$

где $D_{\xi,\eta}\colon \tau \mapsto (\xi, \eta; \tau)$. Кроме того,

$$\begin{gathered} D_{\xi,\eta}(\lambda \cdot \mu) = (D_{\xi,\eta}\lambda) \cdot \mu + \lambda \cdot (D_{\xi,\eta}\mu) + (\lambda, \mu; \xi \cdot \eta) + (\lambda \cdot \mu) \cdot (\xi \cdot \eta), \\ \xi \cdot \xi = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Такую бинарно-тернарную полилинейную алгебру назовем *касательной алгеброй Бола лупы с правым тождеством Бола* $\langle Q, \cdot, \varepsilon\rangle$.

Оказывается, что *лупа с правым свойством Бола однозначно определяется своей касательной алгеброй Бола. Лупы с правым свойством Бола изоморфны, если и только если изоморфны их алгебры Бола.*

Тройная система Ли векторных полей однозначно определяет лупу с правым свойством Бола на многообразии (локально).

Наконец, введем *абстрактную алгебру Бола, как бинарнотернарную алгебру на векторном пространстве* V, *удовлетворяющую тождествам* (2) *и* (3).

Любая алгебра Бола может быть реализована как касательная алгебра Бола единственной лупы с правым свойством Бола.

Мы построили аналог теории Ли для луп Бола. Имеет место замечательная геометрическая характеристика луп Бола (правых).

Гладкая лупа имеет правое свойство Бола, если и только если она может быть реализована как геодезическая лупа пространства аффинной связности без кривизны $(R = 0)$ *со свойством* $\nabla_r(\nabla_l T^i_{jk} + T^s_{jk}T^i_{sl}) = 0$.

Случай луп Муфанг получается из рассмотрения правого и левого тождества Бола, имеющих место одновременно. В результате тернарная операция выражается через бинарную, которая становится при этом алгеброй Мальцева. Имеется замечательная геометрическая характеристика.

Гладкая лупа имеет свойство Муфанг, если и только если она может быть реализована как геодезическая лупа пространства аффинной связности без кривизны $(R = 0)$ *со свойством*

$$\nabla_l T^i_{jk} = \frac{1}{3}\left(T^i_{ls}T^s_{jk} + T^i_{js}T^s_{kl} + T^i_{ks}T^s_{lj}\right).$$

Существуют лупы Бола, промежуточные между произвольными лупами Бола и лупами Муфанг. Это такие лупы Бола, все изотопы которых им изоморфны. Этот класс приводит к интересным алгебрам Бола (которые тогда называются *однородными*), где все выражается через две бинарные операции (вместо бинарной и тернарной в общем случае).

Было бы весьма желательно построить теорию однородных алгебр Бола. Наконец, следовало бы развить и теорию алгебр Бола общего вида, хотя здесь, например, нет хорошего аналога теоремы Леви.

Ссылки: [9, 10].

О теории представлений луп. Такой теории на сегодня не существует и ее следует построить. Отдельные попытки, не очень убедительные, были предприняты физиками-теоретиками (см. [17]). Для отдельных классов луп, например Бола, положение более ясное, представлением можно было бы назвать тройное семейство Ли (в смысле Ямагути). Такие семейства интенсивно изучались лет 20 назад в связи с тройными системами Ли векторных полей. Впрочем и здесь до полной теории — далеко.

Ссылки: [17, 25].

Ткани как антипроизведения. Имея лупу $\langle Q, \cdot, \varepsilon\rangle$, мы можем ввести умножение пар $X=(x, \tilde{x})$ и $Y=(y, \tilde{y})$ из $Q\times Q$: $(x, \tilde{x})\cdot(y, \tilde{y})=(x\cdot y, \tilde{y}\cdot\tilde{x})$. Это дает лупу на $Q\times Q$, которую назовем *антипроизведением лупы* Q на себя.

С конструкцией связана три-ткань со слоями вида $\{(x, \widetilde{a})\}_{x\in Q}$, $\{(a, \widetilde{x})\}_{\widetilde{x}\in Q}$, $\{(x, x\setminus c)\}_{x\in Q}$. Любая три-ткань может быть так реализована.

Достраивая различными способами лупу $\langle Q\times Q, \cdot, (\varepsilon, \varepsilon)\rangle$ до лупускулярной структуры и переходя к ее касательной аффинной связности, можно получить все известные в теории три-тканей связности, например связность Черна и много новых. Так, для случая связности Черна лупускулярная структура на антипроизведении имеет вид

$$L(X, A, Y) = R^{-1}_{\mathcal{J}A}L_X L^{-1}_A R_{\mathcal{J}A}Y,$$

где $X=(x, \tilde{x})$, $Y=(y, \tilde{y})$, $A=(a, \tilde{a})$, $L_X Y=R_Y X=X\cdot Y$, $\mathcal{J}X=\mathcal{J}(x, \tilde{x})=(\tilde{x}, x)$. Здесь много открытых вопросов для исследований.

Ссылки: [15, 16].

Пространства с геодезическими. Пусть M — гладкое многообразие (более общо — топологическое пространство), наделенное частичными гладкими бинарными операциями $(\omega_t)_{t\in\mathbf{R}}$, которые запишем в виде $\omega_t(a, b)=t_a b$. Пусть выполняются тождества $u_x(t_x y)=(ut)_x y$, $1_x y=y$, $t_x y=(1-t)_y x$, причем $t_x y$ имеет смысл для $t\in[0, 1]$ и y из некоторой подходящей окрестности U_x точки x и $t_x y\in U_x$. Тогда $\langle M, (\omega_t)_{t\in\mathbf{R}}\rangle$ называется гладким (частичным) *пространством с геодезическими*. Под геодезической дугой, соединяющей a и b, при этом понимается $\{t_a b\}_{t\in[0, 1]}$. Понятие пространства с геодезическими обобщает понятие G-пространства Буземана. Отметим также, что любое пространство аффинной связности является пространством с геодезическими. В гладком случае любое пространство с геодезическими можно наделить аффинной связностью без кручения с сохранением геодезических, для чего достаточно взять касательную аффинную связность к лупускулярному покрытию $L(x, a, y)=(2)_a(1/2)_x y$. В случае метрического пространства с дополнительными условиями геометрического характера такая связность тоже существует (см. [26]).

Пространства с геодезическими позволяют построить чисто алгебраическую теорию геодезических отображений в рамках «Нелинейной геометрической алгебры».

Ссылки: [25, 26].

Основания геометрии. Рассматривая абстрактное линейное геодвуодулярное симметрическое пространство $\langle M, L, \Lambda, (\omega_t)_{t\in\mathbf{R}}\rangle$, каждый двуодуль которого удовлетворяет тождеству псевдолинейности $L(x, a, y) = [\alpha(x, y)]_a x \underset{a}{+} [\beta(x, y)]_a y$, можно, присоединив положительно определенные билинейные симметрические формы $g^a(x, y)\in\mathbf{R}$

$(g^a(t_a x \underset{a}{+} u_a y,\ z) = tg^a(x,\ z) + ug^a(y,\ z),\ g^a(x,\ y) = g^a(y,\ x),\ g^a(x,\ x) \geqslant 0,$ $g^a(x,\ x) = 0 \Leftrightarrow x = a)$, инвариантные при действии левых сдвигов, $g^b(L_b^a x,\ L_b^a y) = g^a(x,\ y)$, получить абстрактный аналог пространства Лобачевского (потребовав, чтобы пространство было неприводимым и не плоским). В условиях гладкости и конечномерности эта конструкция приводит к настоящему пространству Лобачевского. Возникает вопрос, существуют ли пространства Лобачевского класса C^0, C^1, не являющиеся пространствами более высокой гладкости. Если да, то описать все такие пространства.

Ссылки: [2].

Некоторые проблемы для исследований.

1. Построить инфинитезимальную теорию гладких одулей, моноальтернативных справа и слева: $(x \cdot ta) \cdot ua = x \cdot (t+u)a$, $ta \cdot (ua \cdot x) = (t+u)a \cdot x$.

2. Построить инфинитезимальную теорию гладких одулей, геометрических справа и слева: $l(x,\ ty)uy = ul(x,\ ty)y$, $r(ty,\ x)uy = ur(ty,\ x)y$ (где $l(x, y) = L_{x \cdot y}^{-1} \circ L_x \circ L_y$, $r(y, x) = R_{y \cdot x}^{-1} \circ R_x \circ R_y$).

3. Построить инфинитезимальную теорию гладких одулей, левомоноальтернативных и геометрических справа: $ta \cdot (ua \cdot b) = (t+u)a \cdot b$, $l(x,\ ty)uy = ul(x,\ ty)y$.

4. Построить инфинитезимальную теорию гладких одулей с изотопически инвариантным свойством правой геометричности $l(x,\ ty)uy = ul(x,\ ty)y$ (сюда входят правые лупы Бола).

5. Построить инфинитезимальную теорию гладких одулей с изотопически инвариантным свойством моноассоциативности: $ta \cdot ua = (t+u)a$.

6. Геодезические лупы многообразия аффинной связности левогеометричны $(r(ty,\ x)uy = ur(ty,\ x)y)$. Исследовать такие пространства.

7. Геодезические лупы многообразия аффинной связности левомоноальтернативны. Исследовать такие пространства. (Сюда входят редуктивные и симметрические пространства.)

8. Гладкий одуль Q моноальтернативен справа и слева. Будет ли группа, порожденная множеством $\{l(x,\ y)\}_{x,y \in Q}$, локальной группой Ли? (Здесь $l(x, y) = L_{x \cdot y}^{-1} \circ L_x \circ L_y$.)

9. Гладкая лупа Q диассоциативна. Будет ли группа, порожденная множеством $\{l(x,\ y)\}_{x,y \in Q}$, локальной группой Ли?

10. Преобразования $l(x, y) = L_{x \cdot y}^{-1} \circ L_x \circ L_y$ являются левыми псевдоавтоморфизмами гладкой лупы. Построить инфинитезимальную теорию таких луп. (Таковы лупы Бола и левые A-лупы.)

11. Описать гипералгебры однородных луп Киккавы.

12. Описать пространства аффинной связности, имеющие одули, моноальтернативные в каждой точке.

13. Каковы пространства аффинной связности, имеющие в каждой точке одуль, моноальтернативный справа и геометрический слева.

14. Описать гладкие одули с изотопически инвариантным свойством правой и левой геометричности.

15. Развить дифференциальную геометрию *предредуктивных пространств* $(L_b^a \circ l^a(x,\ y) = l^b(L_b^a x,\ L_b^a y) \circ L_b^a)$.

16. Геоодулярное гладкое пространство (пространство аффинной связности) имеет свойство: $(-1)_a \circ (-1)_b$ есть его автоморфизм для каждых a, b (*почти симметрическое пространство*). Развить теорию таких пространств.

17. Пусть $(-1)_x$ — антиавтоморфизм лупускулярной структуры гладкого геоодулярного пространства, т. е. $(-1)_x(p \underset{a}{\cdot} q) = (-1)_x q \underset{(-1)_x a}{\cdot} (-1)_x p$ (*антисимметрическое пространство*). Это — частный случай почти симметрических пространств. Развить дифференциальную геометрию таких пространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Об основаниях** геометрии.— М.: ГИТТЛ, 1956.
2. **Сабинин Л. В.** Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии // Основы дифференциальной геометрии/Кобаяси Ш., Номидзу К.— М.: Наука, 1981.— Т. I. Добавление.— С. 293—339.
3. **Сабинин Л. В.** К эквивалентности категорий луп и однородных пространств // Докл. АН СССР.— 1972.— Т. 205, № 3.— С. 533—536.
4. **Сабинин Л. В.** О геометрии луп // Мат. заметки.— 1972.— Т. 12, № 5.— С. 605.
5. **Kikkawa M.** On local loops in affine manifolds // J. Sci. Hiroshima Univ.— 1964.— V. 28.— P. 199—207.
6. **Сабинин Л. В.** О геометрии луп // Тез. 5-й конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии, Самарканд, окт. 1972 г.— Самарканд, 1972.
7. **Сабинин Л. В.** Одули как новый подход к геометрии со связностью // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 233, № 5.— С. 800—803.
8. **Сабинин Л. В.** Касательные аффинные связности лупускулярных структур // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1986.— С. 86—89.
9. **Сабинин Л. В., Михеев П. О.** О дифференциальной геометрии луп Бола // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 281, № 5.— С. 1055—1057.
10. **Сабинин Л. В., Михеев П. О.** Теория гладких луп Бола.— М., 1985.
11. **Сабинин Л. В., Михеев П. О.** О локальных аналитических лупах и соответствующих им гипералгебрах // Матер. 9-й конф. молодых ученых: математика, физика, химия.: Деп. в ВИНИТИ, 25.09.86, № 6848 — В86.— С. 34—54.
12. **Сабинин Л. В., Михеев П. О.** Об инфинитезимальной теории локальных аналитических луп // Докл. АН СССР.— 1980.— Т. 279, № 4.— С. 801—804.
13. **Сабинин Л. В.** Дифференциальные уравнения гладких луп // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— М.: Изд-во МГУ, 1988.— Вып. 23.
14. **Сабинин Л. В.** Геометрические одули // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1987.
15. **Акивис М. А.** Дифференциальная геометрия тканей // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.— М.: ВИНИТИ, 1983.— Т. 15.— С. 187—213.
16. **Акивис М. А., Герасименко С. А.** Многомерные ткани Боля // Там же.— М.: ВИНИТИ, 1986.— Т. 18.— С. 73—103.
17. **Batalin I. A.** Qasigroup construction and first ciass constraints // J. Math. Phys.— 1981.— V. 22.— P. 1837—1850.
18. **Нестеров А. И., Степаненко В. А.** О методах неассоциативной алгебры в геометрии и физике.— Красноярск, 1986.— 48 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т физики; № 400Ф).
19. **Белоусов В. Д.** Основы теории квазигрупп и луп.— М.: Наука, 1967.
20. **Феденко А. С.** Пространства с симметриями.— Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1977.
21. **Ковальский О.** Обобщенные симметрические пространства.— М.: Мир, 1984.
22. **Ledger A. J.** Espaces de Riemann symetriquess generalises // C. r. Acad. sci.— 1967.— V. 264.— P. 947—948.
23. **Сбитнева Л. В.** Совершенные S-структуры // Дифференциальная геометрия многообразий фигур.— Калинин: КГУ, 1979.— Вып. 10.— С. 97—103.
24. **Сбитнева Л. В.** Об алгебрах Ли совершенных S-пространств // Ткани и квазигруппы.— Калинин: КГУ, 1982.— С. 128—133.
25. **Nono J.** Sur les Familles Triple Locales de Transformations Locales de Lie // J. Sci. Hiroshima Univ.— 1961.— V. 25.— P. 357—366.
26. **Александров А. Д., Берестовский В. Н., Николаев И. Г.** Обобщенные римановы пространства // Успехи мат. наук.— 1986.— Т. 41, № 3.— С. 3—44.
27. **Матвеев О. А.** О многообразиях с геодезическими // Ткани и квазигруппы.— Калинин: КГУ, 1986.— С. 44—49.

В. А. ШАРАФУТДИНОВ

ЛУЧЕВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Посвящается Ю. Г. Решетняку
к его шестидесятилетию

Лучевым преобразованием определенного на $\mathbf{R}^n$ симметричного тензорного поля $f=(f_{i_1\ldots i_m})$ называется функция $If(x,\ \xi)$, определяемая для $x\in\mathbf{R}^n$, $0\neq\xi\in\mathbf{R}^n$ равенством

$$If(x,\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{i_1\ldots i_m}(x+t\xi)\,\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_m}\,dt.$$