22. **Булгаков А. Я.** Эффективно вычисляемый параметр качества устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 3.— С. 32—41.
23. **Godounov S. K., Boulgakov A. J.** Difficultes de calcul dans le probleme de Hurwitz et methodes pour les surmonter // Analysis and Optimization of Systems: Versailles, 1982.— Springer-Verlag, 1982.— P. 843—851.
24. **Булгаков А. Я.** Расчет экспоненты от асимптотически устойчивой матрицы // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 4—17.
25. **Булгаков А. Я., Годунов С. К.** Расчет положительно определенных решений уравнений Ляпунова // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 17—38.
26. **Булгаков А. Я.** Расчет положительно определенных решений уравнения Ляпунова: Описание применения программы *mle*. ГосФАП инф. № 50850000719 в Зап. Сиб. отд-нии АН СССР.— Новосибирск, 1984.— 30 с.— (Ин-т математики СО АН СССР).
27. **Ward R. C.** Numerical computation of the matrix exponential with accuracy estimate // SIAM j. Numerical Anal.— 1977.— Vol. 14, N 4.— P. 600—610.
28. **Колмогоров А. И., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1981.— 542 с.
29. **Годунов С. К., Гордиенко В. М.** Матрица Грина краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1984.— Т. 39, вып. 1 (235).— С. 39—76.
30. **Наймарк М. А.** Линейные дифференциальные операторы.— М.: Наука, 1969.— 373 с.
31. **Повзнер А. Я., Павлов Б. В.** Об одном методе численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1973.— Т. 13, № 4.— С. 256—259.
32. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1961.— Т. 16, вып. 3.— С. 171—174.
33. **Годунов С. К.** Метод ортогональной прогонки для решения систем разностных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1962.— Т. 2, № 6.— С. 972—982.
34. **Абрамов А. А.** Вариант метода прогонки // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1961.— Т. 1, № 2.— С. 349—351.
35. **Абрамов А. А.** О переносе граничных условий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Вариант метода прогонки // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1961.— Т. 1, № 3.— С. 542—545.
36. **Кузнецов С. В.** Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 85—110.
37. **Булгаков А. Я., Годунов С. К.** Параметр дихотомии спектра матрицы и схема расчета.— Новосибирск, 1985.— 20 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 8).
38. **Per Hagander.** Numerical Solution of $A^*S + SA + Q = 0$ // Information Sciences.— 1972.— Vol. 4.— P. 35—50.
39. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 576 с.
40. **Ланкастер П.** Теория матриц.— М.: Наука, 1978.— 272 с.

В. Л. ВАСКЕВИЧ

К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В СОСТАВНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Введение

Конструирование различных методов приближенного решения эллиптических краевых задач весьма актуально и в настоящее время [1—6]. Наряду с работами, развивающими традиционные методы (конечно-разностные методы [4], методы интегральных уравнений [4, 7]), появляются статьи, предлагающие новые подходы [2, 3, 5, 8], суть которых, как правило, в более удачном использовании тех или иных аналитических свойств решения соответствующей краевой задачи.

В данной работе рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа в составной области. Условимся называть осесимметричную область Ω составной, если она получается объединением конечного числа односвязных областей Ω_j, $j=1, 2, \ldots, N$, т. е. $\Omega=\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_N$, причем каждая область Ω_j имеет общую с Ω ось симметрии и для всех j от 1 до $(N-1)$ пересечение $\Omega_j \cap \Omega_{j+1}$ — также односвязная область.

Перечислим аналитические свойства решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в составной области, которые должны учитываться при конструировании приближенного метода. Как известно, гармоническая в составной области функция

1) бесконечно дифференцируема в любой внутренней точке Ω,

2) имеет в угловых точках границы определенную асимптотику,

3) имеет производные, которые в любой внутренней точке Ω определенным образом растут с увеличением порядка дифференцирования, причем этот рост существенно зависит от расстояния, на которое взятая точка отстоит от границы Ω.

Отметим, что третье свойство представляет собой прямой аналог неравенств Коши для аналитических функций.

Перечисленные свойства в той или иной степени использованы в работах ряда авторов. Охарактеризуем некоторые работы в этом направлении, отмечая последовательно, как в них решены следующие три вопроса.

1. Каким именно образом составная область разбивается на компоненты?

2. Как аппроксимируется решение в каждой из выбранных компонент разбиения?

3. Каким образом согласуются друг с другом получающиеся локальные представления решения? (Иными словами, как эти представления «сшиваются» [9] или «склеиваются» [10, 11]?)

Пожалуй, наиболее удачно использованы аналитические свойства гармонических функций в методе, описанном в [8] для случая двумерного уравнения Лапласа. Соответствующий подход назван автором [8] методом квадратурных сумм [3]. Задача Дирихле решается им в произвольном многоугольнике T. В качестве типичной компоненты разбиения T используется угол Δ, ограниченный дугой окружности с центром в вершине Δ. Все множество T покрывается этими «элементарными» компонентами так, чтобы соседние из них обязательно перекрывались. Далее, в фиксированном элементе разбиения Δ автор [8] получает по формуле Пуассона интегральное представление решения, а затем интеграл по дуге окружности приближает элементарной квадратурной формулой. Тем самым он конструирует в Δ интерполяционную формулу. Наконец, условие согласования локальных аппроксимаций устанавливается требованием их совпадения в узлах использованных ранее квадратур. Как доказано в [8], в результате таких построений удается получить экспоненциально сходящееся приближенное решение.

В [5, гл. 3] приведена схема метода разделения областей, модифицирующая классический итерационный алгоритм Шварца. Исходная область при таком подходе разбивается на конечное число подмножеств, непересекающихся друг с другом. Таким образом, соседние компоненты могут иметь общими лишь граничные точки. Потребовав, чтобы во всех таких точках значения оператора $(\alpha_k \partial/\partial \mathbf{v}+\beta_k)$*) на локальных реализациях решения совпадали, авторы [5], по существу, задают некоторые условия согласования. Искомое приближение к решению рекомендуется получать посредством некоторого итерационного процесса. Исследование сходимости метода проведено в [5] для случая двух независимых переменных. Способ решения задач Дирихле в компонентах разбиения не конкретизирован. Отметим, что используемые в настоящей статье пространства гармонических функций весьма схожи с функциональными классами, рассмотренными в [5, гл. 3].

*) Здесь $\mathbf{v}$ — нормаль к граничной поверхности, разделяющей соседние компоненты.

В работах [12, 13] рассмотрен метод приближенного решения некоторой краевой задачи математической физики, которая не является задачей Дирихле. Однако используемый при этом подход близок по духу тем методам, которые нас интересуют. Как и в [5], исходная область разбивается на непересекающиеся подмножества. Условие согласования локальных реализаций в соседних областях состоит, грубо говоря, в требовании поточечного равенства этих реализаций во всех общих граничных точках рассматриваемой пары компонент. С учетом этого условия организуется некоторый итерационный процесс, результат которого и рекомендуется брать в качестве приближенного решения. Обоснована сходимость такого приближенного решения к точному в энергетической норме. Способ решения краевой задачи в компоненте разбиения не конкретизирован.

В [10] описан приближенный метод решения задачи Дирихле для двумерного уравнения Лапласа в области, полученной стыковкой без налегания локальных компонент. В каждой из них решение предлагается аппроксимировать конечной линейной комбинацией базисных гармонических функций. Коэффициенты этих сумм получаются минимизацией некоторого квадратичного функционала, представленного интегралом по общей части границы соседних компонент. Аналогичная задача в [11] сведена к бесконечной системе линейных уравнений.

Метод переопределенных рядов, изложенный в [9], подразумевает разбиение исходной области на непересекающиеся компоненты, в каждой из которых переменные в уравнении Лапласа разделяются. В локальной подобласти решение задачи Дирихле разлагается в ряд по базисным гармоническим функциям. Условие согласования этих разложений в соседних подобластях состоит в требовании равенства как их значений, так и значений их нормальных производных во всех общих граничных точках.

На этом закончим краткий обзор известных нам работ и охарактеризуем по той же схеме метод, предлагаемый в настоящей статье. Исходная осесимметричная область Ω предполагается разбитой на попарно пересекающиеся компоненты Ω_j с той же осью симметрии, что и Ω. Пересечение соседних компонент при этом должно быть настолько велико, чтобы в него можно было вписать некоторую сферическую линзу. Отметим, что это геометрическое условие аналогично так называемому критерию луночки из теории альтернирующего метода Шварца [14]. Для каждой из локальных областей Ω_j вводится некоторое гильбертово пространство гармонических функций, в котором имеется определенным образом нормированный базис. Не углубляясь в проблему построения такого базиса в общем случае, отметим лишь, что несложно привести содержательные примеры, в которых нужный базис можно отыскать методом разделения переменных. При этом весьма полезной может оказаться тороидальная система координат с полюсами в угловых точках границы, лежащих вне оси симметрии Ω. Если локальные базисы построены, то в качестве интерполяционной формулы для решения в области Ω_j естественно брать конечный отрезок соответствующего ряда. Коэффициенты таких интерполяционных сумм выбираются таким образом, чтобы сумма интегралов Дирихле, взятых последовательно по всем пересечениям соседних компонент от разности соответствующих локальных разложений, достигала минимального значения.

Изложение метода в статье проводится для случая, когда область Ω разбита на две части, т. е. $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Однако полученные результаты естественным образом распространяются на случай разбиения области Ω на любое конечное число компонент. Доказано, что минимизируемый квадратичный функционал F, задаваемый интегралом Дирихле по пересечению $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ от разности локальных разложений решения, в некотором смысле «слабо» положительно определен. Примененный к нему процесс минимизации Ритца приводит к квадратичной функции с самосопряженной положительно определенной матрицей A_N в главной части. Произвольный элемент матрицы A_N при этом представим в виде интеграла по пересечению Ω_{12} от произведения градиентов локальных базисных функций. Для такого типа интегралов сконструирована специальная кубатурная формула. С ее помощью удалось получить более простое представление функционала F, которое именуется в статье его «дифференциальной формой». Минимизация F в дифференциальной форме приводит к переопределенной системе линейных уравнений. Решив ее, получим локальные интерполяционные формулы для решения. При этом слабая положительная определенность функционала F обеспечивает непрерывную в некотором смысле зависимость качества интерполяции от величины невязки, получающейся при решении переопределенной системы. Отсюда следует, что построенная последовательность приближений по Ритцу сходится к точному решению не только по энергетической норме, но и в некотором более сильном смысле.

§ 1. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть в ограниченной области Ω трехмерного пространства требуется решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа. Будем предполагать, что область Ω удовлетворяет также некоторым условиям геометрического характера. Укажем эти условия и попутно введем необходимые обозначения.

Будем считать, что область Ω получается объединением двух областей Ω_1 и Ω_2, т. е. $\Omega=\Omega_1 \cup \Omega_2$, причем все три множества Ω_1, Ω_2 и Ω имеют одну и ту же ось симметрии. Пересечение $\Omega_1 \cap \Omega_2$ при этом также будет областью ненулевого объема.

Введем в исходном пространстве систему декартовых координат $\mathbf{r}=(x, y, z)$. Ось z направим по оси симметрии Ω таким образом, чтобы Ω_1 лежала левее Ω_2 (рис. 1). Начало координат поместим в центр окружности C_ε, по которой пересекаются поверхности, ограничивающие компоненты Ω_1 и Ω_2. Радиус окружности C_ε обозначим через ε, тогда уравнение C_ε в плоскости $z=0$ имеет вид $x^2+y^2=\varepsilon^2$.

Предположим, что в область $\Omega_1 \cap \Omega_2$ можно вписать сферическую линзу (луночку) S, т. е. такое пространственное тело, которое получается пересечением каких-нибудь двух шаров. Множество S при этом z-осесимметрично, проходит через окружность C_ε и других общих точек с границей Ω не имеет. Это требование аналогично так называемому условию луночки, которому подчиняют пересечение двух плоских множеств при доказательстве сходимости приближений задачи Дирихле, полученных по методу Шварца [14, § 22].

Пусть на границе исходной области Ω, удовлетворяющей всем перечисленным условиям, задана непрерывная функция f, обладающая осевой симметрией относительно оси z. Иначе говоря, f представляет собой функцию координат (ρ, z), где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Пусть кроме того, существует функция F из пространства $W_2^1(\Omega)$, след которой на границе Ω совпадает с f.

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти в Ω гармоническую функцию $u=u(x, y, z)$, принадлежащую пространству $W_2^1(\Omega)$ и совпадающую на границе Ω с f, т. е. требуется найти функцию u, удовлетворяющую одновременно следующим трем соотношениям:

$$\Delta u=0 \text{ в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega}=f, \qquad (1.1)$$
$$\int_\Omega [|u|^2+|\nabla u|^2]\, d\mathbf{r}<+\infty.$$

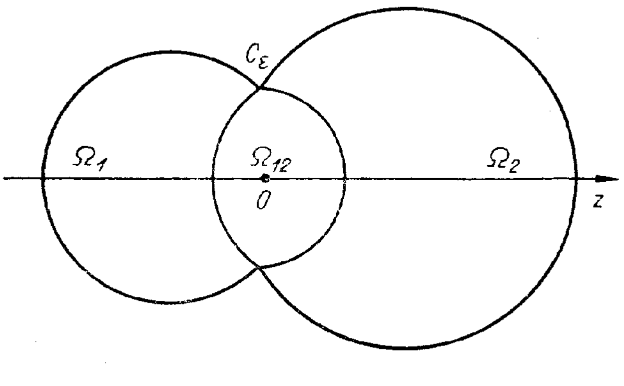

Рис. 1. Сечение Ω плоскостью, проходящей через ось Z.

Хорошо известны достаточные условия, при которых задача (1.1) имеет единственное решение. Так будет, например, если граница Ω — достаточно гладкая поверхность. Будем далее предполагать, что заведомо выполнены условия какой-нибудь теоремы существования и единственности для задачи (1.1).

Граница области Ω разбивается на две поверхности, пересекающиеся по окружности C_ε. Одна из этих поверхностей представляет собой пересечение $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$, а вторая — пересечение $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_2$. Обозначим их γ_1 и γ_2 соответственно. Тогда, очевидно, $\partial\Omega=\gamma_1\cup\gamma_2$, $\gamma_1\cap\gamma_2=\varnothing$. Сужение на поверхность γ_j функции f, задающей краевое условие в (1.1), нам удобно будет обозначать f_j, $j=1, 2$. Краевое условие в задаче (1.1) можно переписать при этом в виде

$$u\,|_{\gamma_1}=f_1,\ u\,|_{\gamma_2}=f_2. \tag{1.2}$$

Перейдем теперь от дифференциальной постановки (1.1) задачи Дирихле к классу вариационных задач, решения которых совпадают с решением задачи (1.1). При этом минимизируемые функционалы и функциональное пространство, на котором они определены, выберем специальным образом. Идея, положенная в основу дальнейших построений, в какой-то степени заимствована из метода Шварца. Состоит она в том, что решение задачи Дирихле во всей области Ω конструируется из решений двух задач Дирихле в компонентах Ω_1 и Ω_2.

§ 2. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА

Пусть функция u — решение краевой задачи (1.1) и f_1, f_2 — z-осесимметричные функции, определенные и гармонические в Ω_1, Ω_2 соответственно. При этом f_1 принимает на части γ_1 границы Ω_1 те же значения, что и u, а f_2 удовлетворяет аналогичному краевому условию на части γ_2 границы Ω_2. Отметим, что f_1 и f_2 обозначаются тем же символом, что и функции в краевом условии (1.2). Предположим, что f_1 принадлежит пространству $W_2^1(\Omega_1)$, а f_2 — пространству $W_2^1(\Omega_2)$.

Разложим решение u задачи (1.1) в каждом из множеств Ω_j на два слагаемых

$$u(\mathbf{r})=u_j(\mathbf{r})+f_j(\mathbf{r}),\quad \mathbf{r}\in\Omega_j,\quad j=1,\ 2. \tag{2.1}$$

Функция $u_j(\mathbf{r})$ из равенства (2.1) z-осесимметрична и удовлетворяет следующим трем условиям: 1) u_j гармоническая в Ω_j; 2) u_j обращается в нуль на γ_j; 3) u_j имеет конечный интеграл Дирихле по Ω_j, т. е.

$$\int\limits_{\Omega_j}|\nabla u_j(\mathbf{r})|^2\,d\mathbf{r}<+\infty.$$

Очевидно, что совокупность всех функций, удовлетворяющих перечисленным трем условиям, образует гильбертово пространство. Обозначим его $G_{2,0}^1(\Omega_j)$. Скалярное произведение и норма элементов u, v из $G_{2,0}^1(\Omega_j)$ определяются равенствами

$$\begin{gathered}(u,v)_j=\int\limits_{\Omega_j}\nabla u(\mathbf{r})\,\nabla v(\mathbf{r})\,d\mathbf{r},\quad j=1,2,\\ \|\mathbf{u}\|_j=(u,u)_j^{1/2},\quad \|v\|_j=(v,v)_j^{1/2}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Пусть область Ω_3 с осью симметрии z есть подмножество Ω и включает в себя пересечение $\Omega_{12}=\Omega_1\cap\Omega_2$. При этом граница Ω_3 не имеет с границей Ω других общих точек кроме точек окружности C_ε. В частности, Ω_3 может совпадать с Ω_{12}. Кроме того, область Ω_3 подбирается так, чтобы функции f_1 и f_2 из равенства (2.1) можно было бы гармонически продолжить на Ω_3, и полученные при этом продолжения принадлежали бы пространству $W_2^1(\Omega_3)$.

Обозначим объединение $\Omega_1 \cup \Omega_3$ через Ω^{13}, а $\Omega_2 \cup \Omega_3$ — через Ω^{23} и образуем пространства $G^1_{2,0}(\Omega^{13})$ и $G^1_{2,0}(\Omega^{23})$. Функции u, v из $G^1_{2,0}(\Omega^{j3})$ обращаются в нуль на γ_j, а их скалярное произведение задается равенством

$$(u, v)_{j3} = \int\limits_{\Omega^{j3}} \nabla u(\mathbf{r}) \nabla v(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \quad j = 1, 2.$$

Прямое произведение $G^1_{2,0}(\Omega^{13}) \times G^1_{2,0}(\Omega^{23})$ обозначим H. Таким образом, пара функций $(v_1(\mathbf{r}),\ v_2(\mathbf{r}))$ принадлежит H тогда и только тогда, когда $v_1(\mathbf{r}) \in G^1_{2,0}(\Omega^{13})$, $v_2(\mathbf{r}) \in G^1_{2,0}(\Omega^{23})$. Скалярное произведение и нормы элементов $U = (u_1,\ u_2)$ и $V = (v_1,\ v_2)$ из H определим равенствами

$$\begin{gathered}(U, V)_H = \int\limits_{\Omega^{13}} \nabla u_1 \nabla v_1\, d\mathbf{r} + \int\limits_{\Omega^{23}} u_2 \nabla v_2\, d\mathbf{r},\\ \|U\|_H = (U, U)_H^{1/2}, \quad \|V\|_H = (V, V)_H^{1/2}.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Пространство H полно по норме $\|\cdot\|_H$ и является, таким образом, гильбертовым.

Пара функций $U = (u_1,\ u_2)$, где $u_j(\mathbf{r})$ соответствует решению u по формуле (2.1), очевидно, принадлежит H. Таким образом, найти решение u исходной краевой задачи все равно, что найти соответствующий ему элемент $(u_1,\ u_2)$ пространства H.

Далее, согласно выбору области Ω_3 на любой паре функций $V = (v_1,\ v_2)$ из H определено значение функционала

$$F(V) = \int\limits_{\Omega_3} \left| \nabla (v_1 + f_1 - v_2 - f_2)(\mathbf{r}) \right|^2 d\mathbf{r}. \tag{2.4}$$

Его минимальное значение на H равно нулю и достигается при $V = (u_1,\ u_2)$, где u_j соответствует решению u по формуле (2.1).

Пусть $p(V) = (F(V))^{1/2}$, тогда $p(\cdot)$ — выпуклый функционал на H, т. е. для любых двух элементов U, V из H имеет место неравенство

$$p((U+V)/2) \leqslant (p(U) + p(V))/2.$$

Знак равенства здесь возможен тогда и только тогда, когда $u = v$.

Несложно убедиться, что элемент, на котором в H достигает минимума $p(\cdot)$, а значит, и $F(\cdot)$, единствен. Итак, для решения исходной задачи достаточно при фиксированных функциях f_1 и f_2 минимизировать значение $F(\cdot)$ на гильбертовом пространстве H, т. е. найти элемент $U = (u_1,\ u_2)$ из H такой, что

$$F(U) = \inf_{V \in H} F(V). \tag{2.5}$$

Это и есть искомая вариационная постановка.

Минимизируем функционал $F(\cdot)$ методом Ритца. Как известно, для реализации этого метода необходимо иметь базис пространства H. Предположим, что в каждом из пространств-сомножителей $G^1_{2,0}(\Omega^{j3})$ уже имеется полная ортонормированная система функций. Иными словами, есть две последовательности линейно независимых гармонических функций $\{u_k(\mathbf{r})\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{u_l^{\mathrm{I}}(\mathbf{r})\}_{l=1}^{\infty}$, первая из которых определена для $\mathbf{r}$ из Ω^{13}, а вторая — для $\mathbf{r}$ из Ω^{23}. При этом $u_k^{\mathrm{I}}(\mathbf{r})$ принадлежит пространству $G^1_{2,0}(\Omega^{13})$, $u_l^{\mathrm{II}}(\mathbf{r})$ — пространству $G^1_{2,0}(\Omega^{23})$ и

$$(u_i^{\mathrm{I}}, u_j^{\mathrm{I}})_{13} = (u_i^{\mathrm{II}}, u_j^{\mathrm{II}})_{23} = \delta_i^j, \tag{2.6}$$

где δ_i^j — символ Кронекера, $i,\ j \geqslant 1$. Кроме того, последовательность $\{u_k^{\mathrm{I}}(\mathbf{r})\}$ полна в $G^1_{2,0}(\Omega^{13})$, а $\{u_l^{\mathrm{II}}(\mathbf{r})\}$ — в $G^1_{2,0}(\Omega^{23})$.

Базисы с такими свойствами иногда можно построить, пользуясь обычным методом разделения переменных (см., например, [5, § 2, гл. 2 и § 1—3, гл. 1]).

По известным базисам в пространствах-сомножителях легко построить базис в их произведении, т. е. в H. Он будет состоять из всевозможных пар вида $\left(u_k^{\mathrm{I}}(\mathbf{r}), 0\right)$ и $\left(0, u_l^{\mathrm{II}}(\mathbf{r})\right)$, где k, l меняются от 1 до ∞.

Зададимся теперь каким-нибудь значением мультииндекса $N = (N_1, N_2)$, где N_j — натуральное число. Линейное подпространство H, натянутое на пары функций

$$\begin{gathered} \left(u_k^{\mathrm{I}}(\mathbf{r}), 0\right), \ 1 \leqslant k \leqslant N_1, \\ \left(0, u_l^{\mathrm{II}}(\mathbf{r})\right), \ 1 \leqslant l \leqslant N_2, \end{gathered} \tag{2.7}$$

обозначим через H_N. Ясно, что H_N конечномерно и его размерность равна $|N| = N_1 + N_2$.

В качестве приближенного по Ритцу решения задачи (2.5) возьмем элемент U_N, минимизирующий функционал $F(\cdot)$ на H_N, т. е. такой, что

$$F(U_N) = \inf_{V \in H_N} F(V). \tag{2.8}$$

Эта задача, как известно, сводится к системе линейных уравнений конечного порядка. Выпишем ее в явном виде.

Заметим, что сужение $F(\cdot)$ на H_N можно рассматривать как квадратичную функцию, определенную на $R^{N_1+N_2}$. В самом деле, пусть $V = (v_1, v_2)$, где

$$v_1(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{N_1} c_k^{(1)} u_k^{\mathrm{I}}(\mathbf{r}), \quad v_2(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{N_2} c_l^{(2)} u_l^{\mathrm{II}}(\mathbf{r}). \tag{2.9}$$

Тогда, как показывают несложные выкладки:

$$F(V) = (A_N \mathbf{c}_N, \mathbf{c}_N) - 2(\mathbf{b}_N, \mathbf{c}_N) + d, \tag{2.10}$$

где A_N — квадратная матрица размером $|N| \times |N|$; $\mathbf{b}_N$, $\mathbf{c}_N$ — вектор-столбцы высоты $|N|$; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $R^{|N|}$. Точная информация о коэффициентах квадратичной функции содержится в следующих формулах:

$$\begin{gathered} a_{ij}^{(1)} = \int_{\Omega_3} \nabla u_i^{\mathrm{I}} \nabla u_j^{\mathrm{I}} d\mathbf{r}, \\ a_{ij}^{(2)} = \int_{\Omega_3} \nabla u_i^{\mathrm{II}} \nabla u_i^{\mathrm{II}} d\mathbf{r}, \\ a_{kl}^{(12)} = \int_{\Omega_3} \nabla u_k^{\mathrm{I}} \nabla u_l^{\mathrm{II}} d\mathbf{r}, \\ A_N = \begin{bmatrix} \left(a_{ij}^{(1)}\right)_{i,j=1}^{N_1} & \left(a_{kl}^{(12)}\right)_{\substack{k=\overline{1,N_1} \\ l=\overline{1,N_2}}} \\ \left(a_{lk}^{(12)}\right)_{\substack{l=\overline{1,N_2} \\ k=\overline{1,N_1}}} & \left(a_{ij}^{(2)}\right)_{i,j=1}^{N_2} \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered} b_k^{(1)} = \int_{\Omega_3} \nabla u_k^{\mathrm{I}}(\mathbf{r}) \nabla (f_2 - f_1)(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}, \\ b_l^{(2)} = \int_{\Omega_3} \nabla u_l^{\mathrm{II}}(\mathbf{r}) \nabla (f_1 - f_2)(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}, \\ \mathbf{b}_N = \begin{bmatrix} \left(b_k^{(1)}\right)_{k=1}^{N_1} \\ \left(b_l^{(2)}\right)_{l=1}^{N_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_N = \begin{bmatrix} \left(c_k^{(1)}\right)_{k=1}^{N_1} \\ \left(c_l^{(2)}\right)_{l=1}^{N_2} \end{bmatrix}, \\ d = \int_{\Omega_3} |\nabla (f_1 - f_2)(\mathbf{r})|^2 \, d\mathbf{r}. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Как известно (см., например, [15, § 6.2]), вектор $\bar{\mathbf{c}}_N^*$, на котором квадратичная функция (2.10) достигает минимального значения, является решением системы линейных уравнений

$$A_N \mathbf{c}_N^* = \mathbf{b}_N. \tag{2.13}$$

Решив систему (2.13) и построив по формуле (2.9) элемент U_N^* из H_N, соответствующий $\mathbf{c}_N^*$, получим искомое приближение пары (u_1, u_2) из H. Вопрос о сходимости получившихся приближений и качестве аппроксимации решения исходной задачи Дирихле будет разобран в § 8 этой статьи.

Сделаем некоторые замечания о практической реализации метода. Чтобы вычислить матрицу и правую часть системы (2.13), нужно уметь вычислять интегралы видов (2.11)—(2.12). В силу осевой симметрии задачи каждый из таких интегралов сводится к интегралу по ограниченной плоской области. Далее, каждый из базисов $\{u_k^{\mathrm{I}}(\mathbf{r})\}$ и $\{u_l^{\mathrm{II}}(\mathbf{r})\}$ удобно задавать в своей системе координат, связанной с геометрией компонент Ω_1 и Ω_2. Поэтому, например, в интеграле, задающем элемент вида $a_{ij}^{(12)}$, присутствуют сразу три координатных системы. Интегралы подобного типа, так называемые двуцентровые, встречаются в задачах физики твердого тела. Известно, что их вычисление связано с определенными затруднениями и требует привлечения аппарата приближенного интегрирования, как правило, квадратурных или кубатурных формул.

В этой статье исследуется способ вычисления матрицы A_N, отличный от обычно используемых. Он основан на предложенной в § 4 «дифференциальной форме» минимизируемого функционала $F(\cdot)$, названной так, чтобы отличать ее от «интегрального» представления $F(\cdot)$, задаваемого равенством (2.4). Нам нужны будут некоторые подготовительные сведения. Их изложению посвящен следующий параграф.

§ 3. ОПЕРАТОР ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА ТИПА G_2^1 В l_2

В этом параграфе мы определим и исследуем оператор вложения из пространства типа $G_{2,0}^1$ в пространство l_2 последовательностей, суммируемых с квадратом. Напомним, что норма последовательности $\mathbf{c} = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ из l_2 определяется равенством

$$\|\mathbf{c}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть Ω_0 — произвольная ограниченная область с осью симметрии z. Через $G_2^1(\Omega_0)$ обозначим пространство гармонических в Ω_0 функций, обладающих осевой симметрией относительно z и имеющих конечный интеграл Дирихле по Ω_0. Норму элемента u из $G_2^1(\Omega_0)$ определим равенством

$$\| u \mid G_2^1(\Omega_0) \| = \left[\int_{\Omega_0} (|u|^2 + |\nabla u|^2)\, d\mathbf{r} \right]^{1/2}. \tag{3.1}$$

Пусть γ — какая-нибудь замкнутая односвязная часть границы Ω_0, обладающая ненулевой площадью. Пространство $G_{2,0}^1(\Omega_0)$ представляет собой подмножество $G_2^1(\Omega_0)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на γ. Норма элемента u из $G_{2,0}^1(\Omega_0)$ задается равенством

$$\| u \mid G_{2,0}^1(\Omega_0) \| = \left[\int_{\Omega_0} |\nabla u|^2\, d\mathbf{r} \right]^{1/2}. \tag{3.2}$$

В $G_{2,0}^1(\Omega_0)$ нормировки (3.1), (3.2) эквивалентны. В самом деле, норма (3.2), очевидно, не превосходит нормы (3.1). Оценку же в другую сторону несложно получить, если воспользоваться известным неравенством [16, с. 116]

$$c_1\left(\int\limits_{\Omega_0} u^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla u|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2}.$$

Нам удобно пространства $G_2^1(\Omega_0)$ и $G_{2,0}^1(\Omega_0)$ обозначать единым символом X, а соответствующую норму — $\|\cdot\|_X$. Смысл X в каждом конкретном случае ясен из контекста.

Возьмем какую-нибудь точку $\mathbf{r}=(0,\ 0,\ z)$, лежащую внутри Ω_0 на ее оси симметрии. В дальнейшем будем обозначать $\mathbf{r}$ сокращенно, просто как z. Пусть $R=R(z)$ — расстояние от z до границы Ω_0. Иными словами, R представляет собой максимально возможный радиус шара с центром в z, вложенного в Ω_0. Далее произвольной функции u из X сопоставим последовательность $\mathbf{u}(z)$ всех ее производных по z, нормированных по определенному правилу. Более точно положим

$$\mathbf{u}(z)=\left\{u(z),\ \frac{R}{1!}\frac{\partial u}{\partial z}(z),\ \ldots,\ \frac{R^k}{k!}\frac{\partial^k u}{\partial z^k}(z),\ \ldots\right\}. \tag{3.3}$$

Последовательность $\mathbf{u}(z)$ назовем *следом функции* u *в точке* z.

Теорема 3.1. *Равенство* (3.3) *определяет ограниченный оператор вложения из* X *в* l_2, *т. е. существует положительная постоянная* K *такая, что для любой функции* u *из* X *имеет место оценка*

$$\|\mathbf{u}(z)\|_2 \leqslant K\|u\|_X. \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть сначала $X=G_2^1(\Omega_0)$. Точке z_0, лежащей на оси z внутри Ω_0, сопоставим шар B с центром в z_0 и радиусом $R=R(z_0)$. Докажем, что для любой функции u из X справедливо равенство

$$\left\|u\,|\,W_2^1(B)\right\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{R^k}{k!}\frac{\partial^k u}{\partial z^k}(z_0)\right|^2. \tag{3.5}$$

Норма в левой части (3.5) определяется следующим образом:

$$\left\|u\,|\,W_2^1(B)\right\|^2=\frac{1}{4\pi R^2}\int\limits_{S_R}|u|^2\,dS+\frac{1}{2\pi R}\int\limits_B|\nabla u|^2\,d\mathbf{r}. \tag{3.6}$$

Здесь S_R — сфера, ограничивающая шар B.

Выведем формулу (3.5). Пусть $(r,\ \theta,\ \varphi)$ — локальные сферические координаты с центром в z_0. Тогда любая функция u из X разложима в ряд:

$$u(\mathbf{r})=\sum_{k=0}^{\infty} f_k\,(r/R)^k\,P_k(\cos\theta), \tag{3.7}$$

где $P_k(\cdot)$ — полином Лежандра степени k, а коэффициенты f_k удовлетворяют условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2\,\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{4\pi R^2}\int\limits_{S_R}|u|^2\,dS<+\infty. \tag{3.8}$$

Выразим через $\{f_k\}$ интеграл Дирихле функции u по шару B. Имеем

$$\int\limits_B|\nabla u|^2\,d\mathbf{r}=\int\limits_{S_R}u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS=2\pi R\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2\,\frac{2k}{2k+1}. \tag{3.9}$$

Учитывая, что норма в $W_2^1(B)$ задается равенством (3.6), из (3.8), (3.9) получим

$$\|u \mid W_2^1(B)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2. \tag{3.10}$$

Далее, положив в (3.7) $x=y=0$, $z>z_0$, видим, что в точках оси z, лежащих правее z_0, функция u представима в виде

$$u(\mathbf{r})\,|_{\mathbf{r}=(0,0,z)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{(z-z_0)^k}{R^k}.$$

Дифференцируя последнее равенство k раз в точке z_0, несложно убедиться в том, что

$$f_k = \frac{R^k}{k!}\frac{\partial^k u}{\partial z^k}(z_0), \quad k=0, 1, \ldots. \tag{3.11}$$

Подставив, наконец, в (3.10) коэффициенты f_k, выраженные через производные функции u в точке z_0, получим формулу (3.5).

Заметим теперь, что норма $\|u\|_X$, определяемая равенством (3.1), оценивается снизу величиной $K\|u\| W_2^1(B)\|$ с положительной постоянной K, одинаковой для всех u из X. Норма же последовательности $\mathbf{u}(z_0)$ в l_2 определяется как величина

$$\|\mathbf{u}(z_0)\|_2 = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{R^k}{k!}\frac{\partial^k u}{\partial z^k}(z_0)\right|^2\right]^{1/2}.$$

Из этих двух замечаний и равенства (3.5) следует оценка (3.4) в точке $z=z_0$.

Пусть теперь $X=G_{2,0}^1(\Omega_0)$. Как уже отмечалось, нормы (3.1), (3.2) в этом пространстве эквивалентны. Поскольку с одной из норм (3.1), (3.2) оценка (3.4) уже получена, то (3.4) имеет место и с другой. Теорема доказана.

Найдем теперь матричное представление оператора вложения (3.3), когда задан ортонормированный базис $\{u_k(\mathbf{r})\}_{k=1}^{\infty}$ пространства X. В этом случае любая функция u разлагается в сходящийся по норме X ряд вида

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(\mathbf{r}) \tag{3.12}$$

и при этом

$$\|u\|_X^2 = \sum_{k=1} c_k^2. \tag{3.13}$$

Верно и обратное, т. е. для любой последовательности коэффициентов $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ из l_2 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k u_k(\mathbf{r})$ сходится в X к некоторой функции u, и при этом справедливо (3.13).

Образуем матрицу бесконечного порядка, столбцы которой представляют собой следы в точке z базисных функций: $U(z)=[\mathbf{u}_1(z), \mathbf{u}_2(z), \ldots$ $\ldots, \mathbf{u}_k(z), \ldots]$. Будем называть $U(z)=(u_{ij})$ *базисной матрицей следов в точке* z.

Для последовательности $\mathbf{c}={}^{\dagger}(c_1, \ldots, c_k, \ldots)$ определим произведение $U(z)\cdot\mathbf{c}$ как вектор $\mathbf{v}={}^{\dagger}(v_1, \ldots, v_i, \ldots)$, компоненты v_i которого получаются по формуле

$$v_i = \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}c_j. \tag{3.14}$$

Следующая лемма содержит условие, гарантирующее существование и непрерывность произведения $U(z)\cdot\mathbf{c}$.

Лемма 3.1. *Базисная матрица следов $U(z)$ определяет ограниченный линейный оператор из l_2 в l_2, имеющий к тому же левый обратный.*

Доказательство. Пусть $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит l_2, $u_N(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{N} c_k u_k(\mathbf{r})$, Тогда определена сумма ряда $u(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(\mathbf{r})$ и при этом $\|u - u_N\|_X \to 0$ при $N \to \infty$. Согласно теореме 3.1 справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}(z) - \mathbf{u}_N(z)\|_2 \leqslant K\|u - u_N\|_X,$$

т. е. $\mathbf{u}_N(z)$ сходится в l_2 к $\mathbf{u}(z) = \dagger(u_1, \ldots)$ при $N \to \infty$. В частности, имеет место покоординатная сходимость:

$$\sum_{j=1}^{N} u_{ij} c_j \to u_i \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{3.15}$$

Тем самым ряды в правой части (3.14) сходятся, т. е. произведение $U(z) \cdot \mathbf{c}$ определено и равно $\mathbf{u}(z)$. Более того,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} c_j \right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 = \|\mathbf{u}(z)\|_2^2 \leqslant K\|u\|_X^2 \leqslant K\left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_i|^2\right). \tag{3.16}$$

Первое из неравенств в этой цепочке справедливо по теореме 3.1, а второе — в силу равенства (3.13). Оценка (3.16) означает, что $U(z)$ действует из l_2 в l_2 ограниченно.

Докажем, что существует левый обратный к $U(z)$ оператор, т. е. такой оператор $T = T(z)$, что $T \cdot U(z) = I$, где I — тождественный оператор в l_2. Достаточно убедиться, что ядро оператора $U(z)$ тривиально.

Пусть $\mathbf{c}_*$ из l_2 принадлежит $\ker U(z)$ — ядру оператора $U(z)$, т. е. $U(z) \cdot \mathbf{c}_* = \mathbf{0}$. Последовательности коэффициентов $\mathbf{c}_*$ соответствует в силу формулы (3.12) функция u_* из X. При этом, как мы уже убедились, $\mathbf{u}_*(z) = U(z) \cdot \mathbf{c}_* = \mathbf{0}$. Таким образом, все производные в точке z гармонической функции $u_*(z)$ равны нулю. Согласно теореме единственности u_* равно нулю во всей области Ω_0. Но тогда $\|\mathbf{c}_*\|^2 = \|u_*\|_X^2 = 0$, т. е. $\mathbf{c}_* = 0$. Тем самым $\ker U(z)$ действительно состоит из единственного нулевого элемента. Лемма доказана.

Отметим некоторые факты, вытекающие из леммы 3.1.

Обозначим через $l_2(\Omega_0, z)$ совокупность следов в точке z всех функций, входящих в X. В силу леммы 3.1 $l_2(\Omega_0, z)$ — подпространство l_2, совпадающее с $R_U(l_2)$ — областью значений оператора $U(z)$.

Далее если функция u из X разложена в ряд (3.12), то, как уже отмечалось в процессе доказательства леммы 3.1, имеет место равенство

$$\mathbf{u}(z) = U(z) \cdot \mathbf{c}. \tag{3.17}$$

Это и есть искомое матричное представление следа функции.

Пусть $T = T(z)$ — левый обратный оператор к $U(z)$, тогда из (3.17) следует, что T представим в виде матрицы бесконечного порядка, являющейся левой обратной к матрице $U(z)$.

Наконец, пусть $U(z) = (u_{ij})$, тогда справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|^2 < +\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}|^2 < +\infty. \tag{3.18}$$

Первое из них легко получить, пользуясь соотношением

$$\|\mathbf{u}_j(z)\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}|^2.$$

Второе же следует из (3.16), так как для некоторого $K > 0$ и любого элемента $\mathbf{c} = \{c_k\}$ из l_2 имеем

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} c_j \right| \leqslant K \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \right)^{1/2}.$$

Интересен вопрос, является ли левый обратный к $U(z)$ оператор T, существование которого гарантирует лемма 3.1, ограниченным. Если Ω_0 представляет собой шар, z совпадает с центром этого шара и при этом выбрана подходящая нормировка X, то T тождествен, т. е. не только ограничен, но даже изометричен. Если подпространство $l_2(\Omega_0, z)$ замкнуто в l_2 (само является гильбертовым пространством), то оператор T также ограничен. Это следует из теоремы Банаха о замкнутом графике (см., например, [17, с. 59]). Является ли $l_2(\Omega_0, z)$ в общем случае гильбертовым пространством (т. е. полно ли оно по норме l_2), автору неизвестно.

Проиллюстрируем введенное понятие базисной матрицы следов, разобрав пример, в котором она легко строится аналитически.

Пусть B — шар с радиусом R_0 и центром в начале координат, а точка z_* такова, что $0<z_*<R_0$. Введем сферические координаты (r, θ, φ) и положим

$$u_k(\mathbf{r}) = \left(\frac{r}{R_0}\right)^k P_k(\cos\theta), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Тогда последовательность $\{u_k(\mathbf{r})\}_{k=0}^{\infty}$ образует в $W_2^1(B)$ базис. Элементы соответствующей базисной матрицы следов $U(z)=(u_{ij})$ можно рассчитать по формуле

$$u_{m+1,k+1} = \begin{cases} \dfrac{k!}{m!\,(k-m)!}(1-q)^m q^{k-m} & \text{при} \quad k \geqslant m \\ 0 & \text{при} \quad k < m. \end{cases} \tag{3.19}$$

Здесь $q = |z_*|/R_0$, $0 < q < 1$. При этом для нормы $U(z_*)$ как оператора из l_2 в l_2 справедлива оценка

$$\|U(z_*)\|_2 \leqslant 1/(1-q)^{1/2}.$$

Так как $U(z_*)$ — верхняя треугольная матрица, причем все ее диагональные элементы отличны от нуля, то $U(z_*)$ имеет левостороннюю обратную матрицу $T(z_*)$, которая также будет верхней треугольной.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА МИНИМИЗИРУЕМОГО ФУНКЦИОНАЛА

Используя результаты § 3, получим здесь представление функционала $F(\cdot)$, определенного в § 2, через вектор производных варьируемых элементов в фиксированной точке.

Пусть $X = G_2^1(\Omega_3)$ и последовательность $\{u_k^{\mathrm{III}}(\mathbf{r})\}_{k=0}^{\infty}$ образует в X базис. При этом $u_0^{\mathrm{III}}(\mathbf{r})$ тождественно постоянна, а функции $u_k^{\mathrm{III}}(\mathbf{r})$ при $k > 0$ ортонормированы, т. е.

$$\int_{\Omega_3} \nabla u_k^{\mathrm{III}} \nabla u_j^{\mathrm{III}} d\mathbf{r} = \delta_i^j, \quad i, j \geqslant 1. \tag{4.1}$$

Символ H, как и ранее, обозначает прямое произведение $G_{2,0}^1(\Omega^{13}) \times G_{2,0}^1(\Omega^{23})$. Возьмем в H произвольную пару функций $(v_1(\mathbf{r}), v_2(\mathbf{r}))$, тогда разность $v_1 - v_2 + f$, где $f = f_1 - f_2$, разлагается в сходящейся по норме $\|\cdot\|_X$ ряд:

$$v_1(\mathbf{r}) - v_2(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(3)} u_k^{\mathrm{III}}(\mathbf{r}). \tag{4.2}$$

Выразим значение $F(V)$ через коэффициенты $\{c_k^{(3)}\}$ этого разложения. Пользуясь условием (4.1), несложно убедиться, что

$$F(V) = \int_{\Omega_3} \nabla (v_1 - v_2 + f)|^2 d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{(3)}|^2. \tag{4.3}$$

Возьмем какую-нибудь точку z, лежащую внутри $\Omega_1 \cap \Omega_2$ на оси симметрии. Через $R_j = R_j(z)$ обозначим расстояние от z до границы области Ω_j, $j = 1, 2, 3$. Так как $\Omega_3 \supset \Omega_{12}$, то, очевидно, $R_3 \geqslant \max(R_1, R_2)$. Сопоставим последовательности $\{u_k^{\mathrm{III}}(\mathbf{r})\}_{k=0}^{\infty}$ матрицу

$$U_3(z) = \left[\mathbf{u}_0^{\mathrm{III}}(z),\ \mathbf{u}_1^{\mathrm{III}}(z), \ldots, \mathbf{u}_k^{\mathrm{III}}(z), \ldots\right],$$

$(k+1)$-й столбец которой, определяемый функцией $u_k^{\mathrm{III}}(\mathbf{r})$, строится по формуле (3.3) при значении R, равном $R_3(z)$. Следы функций $v_1(\mathbf{r})$, $v_2(\mathbf{r})$ и $f(\mathbf{r})$ в точке z, также нормированные при $R = R_3$, обозначим $\mathbf{v}_{1,*}(z)$, $\mathbf{v}_{2,*}(z)$ и $\mathbf{f}_*(z)$. Звезда в индексе указывает на отличия этих последовательностей от следов $\mathbf{v}_j(z)$, $j = 1, 2$, которые также получаются по формуле (3.3), но при значении R, равном R_j.

Отметим, что следы $\mathbf{v}_j(z)$ и $\mathbf{v}_{j,*}(z)$ связаны между собой следующей системой равенств:

$$\mathbf{v}_j(z) = \Lambda(q_j)\,\mathbf{v}_{j,*}(z), \quad j = 1, 2.$$

Здесь $\Lambda(q_j)$ — диагональная матрица, $(k+1)$-й диагональный элемент которой равен q_j^k, и $q_j = R_j/R_3 < 1$.

Далее, пользуясь формулой матричного представления (3.17), получаем

$$\mathbf{v}_{1,*}(z) - \mathbf{v}_{2,*}(z) + \mathbf{f}_*(z) = U_3(z)\cdot \mathbf{c}^{(3)}, \tag{4.4}$$

где $\mathbf{c}^{(3)} = \uparrow \{c_k^{(3)}\}_{k=0}^{\infty}$ — вектор-столбец из коэффициентов ряда (4.2). Пусть $T_3 = T_3(z)$ — левая обратная к $U_3(z)$ матрица, которая существует согласно лемме 3.1. Тогда из (4.4) следует, что

$$\mathbf{c}^{(3)} = T_3(z)\,[\mathbf{v}_{1,*}(z) - \mathbf{v}_{2,*}(z) + \mathbf{f}_*(z)]. \tag{4.5}$$

Условимся, что i-я строка матрицы $T_3^+ = T_3^+(z)$ совпадает с $(i+1)$-й строкой T_3.

Формулы (4.3) и (4.5) позволяют выразить $F(V)$ через вектор производных функций $v_1(\mathbf{r})$ и $v_2(\mathbf{r})$ в точке z. Имеем равенство

$$F(V) = \left\| T_3^+(z)\cdot(\mathbf{v}_{1,*} - \mathbf{v}_{2,*} + \mathbf{f}_*)(z)\right\|_2^2, \tag{4.6}$$

которое и дает искомое представление. Назовем его *дифференциальной формой функционала* $F(\cdot)$. Чтобы отличать эту форму от интегрального представления (2.4), обозначим правую часть (4.6) через $F_1(\overline{V})$.

Внесем изменения в вариационную постановку (2.5).

Напомним, что пара функций $U = (u_1(\mathbf{r}), u_2(\mathbf{r}))$, где $u_j(\mathbf{r})$ соответствует решению исходной задачи $u(\mathbf{r})$ по формуле (2.1), принадлежит H и при этом

$$F(V) = \inf_{V \in H} F(V). \tag{4.7}$$

Из определения пространства $l_2(\Omega_0, z)$ следует, что для любого $V = (v_1(\mathbf{r}), v_2(\mathbf{r}))$ из H пара последовательностей $\overline{V} = (\mathbf{v}_{1,*}(z), \mathbf{v}_{2,*}(z))$ принадлежит прямому произведению $l_2(\Omega^{13}, z) \times l_2(\Omega^{23}, z)$. Множество всех таких $\overline{V}$ обозначим h и возьмем его в качестве области определения функционала $F_1(\cdot)$. Тогда задача (4.7) эквивалентна следующей: найти элемент $\overline{U}$ из h, на котором $F_1(\cdot)$ достигает минимума:

$$F_1(\overline{U}) = \inf_{\overline{V} \in h} F_1(\overline{V}). \tag{4.8}$$

Это и есть измененная вариационная постановка, которую мы будем рассматривать наряду с (2.5). Как и в случае функционала $F(\cdot)$, минимизацию $F_1(\cdot)$ проведем методом Ритца.

Построим базис в пространстве h, пользуясь уже известными полными ортонормированными системами в пространствах $G_{2,0}^1(\Omega^{13})$ и $G_{2,0}^1(\Omega^{23})$ соответственно.

Пусть $\overline{V} = (\mathbf{v}_{1,*}(z), \mathbf{v}_{2,*}(z))$ принадлежит h, тогда функции v_1 и v_2 разлагаются в ряды

$$v_1(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} u_k^{\mathrm{I}}(\mathbf{r}), \quad v_2(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(2)} u_l^{\mathrm{II}}(\mathbf{r}). \tag{4.9}$$

Из (4.9), (3.17) и леммы 3.1 следует, что

$$\mathbf{v}_{1,*}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} \mathbf{u}_{k,*}^{\mathrm{I}}(z), \quad \mathbf{v}_{2,*}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(2)} \mathbf{u}_{k,*}^{\mathrm{II}}(z), \tag{4.10}$$

причем ряды в (4.10) сходятся по норме $\|\cdot\|_2$, а их коэффициенты те же, что и у рядов (4.9). Тем самым доказано, что элементы вида

$$\begin{aligned} \overline{V}_i^{(1)} &= (\mathbf{u}_{i,*}^{\mathrm{I}}(z), \mathbf{0}), \quad i \geqslant 1, \\ \overline{V}_j^{(2)} &= (\mathbf{0}, \mathbf{u}_{j,*}^{\mathrm{II}}(z)), \quad j \geqslant 1, \end{aligned} \tag{4.11}$$

образуют базис пространства h. Здесь через $\mathbf{0}$ обозначена последовательность, состоящая из нулей.

Пусть теперь $n = (n_1, n_2)$ — произвольный мультииндекс, $n_i \geqslant 1$. Подмножество пространства h, состоящее из всех линейных комбинаций вида

$$\sum_{k=1}^{n_1} c_k^{(1)} \overline{V}_k^{(1)} + \sum_{l=1}^{n_2} c_l^{(2)} \overline{V}_l^{(2)}, \tag{4.12}$$

обозначим h_n. Ясно, что h_n — конечномерное подпространство h размерности $n_1 + n_2$. В качестве приближенного решения задачи (4.8) возьмем элемент $\overline{V}_n$, доставляющий в h минимум функционала $F_1(\cdot)$:

$$F_1(\overline{V}_n) = \inf_{\overline{V} \in h} F_1(\overline{V}). \tag{4.13}$$

Выразим значение функционала $F_1(\overline{V})$ на элементе $\overline{V}$ вида (4.12) через коэффициенты $\mathbf{c}_{n_1}^{(1)} = \{c_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1}$ и $\mathbf{c}_{n_2}^{(2)} = \{c_l^{(2)}\}_{l=1}^{n_2}$, но сначала условимся о некоторых обозначениях.

Пусть $U_1(z)$, $U_2(z)$ — базисные матрицы следов в точке z систем $\{u_k^{\mathrm{I}}(\mathbf{r})\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{u_l^{\mathrm{I}}(\mathbf{r})\}_{l=1}^{\infty}$, т. е.

$$U_1(z) = [\mathbf{u}_{k,*}^{\mathrm{I}}(z)]_{k=1}^{\infty}, \quad U_2(z) = [\mathbf{u}_{l,*}^{\mathrm{II}}(z)]_{l=1}^{\infty}.$$

Составим произведения $B^{(1)} = T_3^+(z) U_1(z)$ и $B^{(2)} = -T_3^+(z) U_2(z)$, где $T_3^+(z)$ — уже определенная матрица бесконечного порядка. Взяв в $B^{(1)}$ первые n_1 столбцов, а в $B^{(2)}$ — первые n_2 столбца, образуем из них в том же порядке матрицу B_n. Ясно, что B_n имеет бесконечное число строк и $(n_1 + n_2)$ столбцов, т. е. B_n действует из $R^{n_1+n_2}$ в l_2.

Пусть, кроме того, $\mathbf{b} = T_3^+(z)\mathbf{f}(z)$ — вектор из l_2 и $\mathbf{c}_n = \uparrow(\mathbf{c}_{n_1}^{(1)}, \mathbf{c}_{n_2}^{(2)})$ — вектор из $R^{n_1+n_2}$. Воспользовавшись определением (4.6) функционала $F_1(\cdot)$ и равенствами (4.10), несложно убедиться, что

$$F_1(\overline{V}) = \| B_n \mathbf{c}_n - \mathbf{b} \|_2^2. \tag{4.14}$$

Итак, выразим значение $F_1(\overline{V})$ через коэффициенты разложения $\overline{V}$ в сумму вида (4.12). Обозначим B_n^* сопряженный к B_n оператор, действующий из l_2 в $R^{n_1+n_2}$, тогда в силу (4.14)

$$F_1(\overline{V}) = (B_n^* B_n \mathbf{c}_n, \mathbf{c}_n) - 2(B_n^* \mathbf{b}, \mathbf{c}_n) + \|\mathbf{b}\|_2^2, \tag{4.15}$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает обычное скалярное произведение в $R^{n_1+n_2}$.

Пусть мультииндексы $n = (n_1, n_2)$ и $N = (N_1, N_2)$ совпадают. Из определения функционала $F_1(\cdot)$ следует, что $F_1(\overline{V}) = F(V)$. Пользуясь этим равенством, а также представлениями (2.10) и (4.15), получим $A_N = B_N^* B_N$, $\mathbf{b}_N = B_N^* \mathbf{b}$, $d = \|\mathbf{b}\|_2^2$. Таким образом, произвольный элемент матрицы A_N представим в виде скалярного произведения в l_2 двух столбцов матрицы B_N. Иначе говоря, этот элемент выражается через все производные по z от каких-либо двух базисных функций.

Вернемся к задаче (4.13). Квадратичная функция (4.15) достигает минимального значения на векторе $\overset{*}{\mathbf{c}}_n$, удовлетворяющем следующей системе линейных уравнений:

$$B_n^* B_n \mathbf{c}_n^* = B_n^* \mathbf{b}. \tag{4.16}$$

Матрица $B_n^* B_n$ этой системы квадратная, порядка $n_1 + n_2$. Каждый ее элемент можно записать как скалярное произведение в l_2 столбцов матрицы B_n, т. е. в виде суммируемого ряда. Ясно, что соответствующая сумма вычисляется лишь приближенно. Естественно получить это приближение, сложив несколько первых членов ряда. Такой же результат получится, если в матрице B_n оставить лишь конечное число строк, а остальные заменить тождественно нулевыми. Приведем точное описание этой процедуры.

Пусть $m = (m_1, m_2)$ — мультииндекс, $m_i \geqslant 1$. Обозначим $B_{m,n}$ матрицу, которая получится, если в матрице $B_n = (b_{ij})$ положить равными нулю все элементы b_{ij} с индексами i, j, удовлетворяющими одному из условий:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leqslant j \leqslant n_1 \\ m_1 + 1 \leqslant i < \infty \end{array}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{l} n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n_1 + n_2 \\ m_2 + 1 \leqslant i < \infty \end{array}\right\}.$$

Через $\mathbf{b}_m$ обозначим вектор, получающийся из $\mathbf{b} = (b_i)$ заменой нулями всех координат b_i с индексами $i \geqslant \max\{m_1, m_2\}$. Для $\bar{V}$ из h_n положим

$$F_{1,m}(\bar{V}) = \|B_{m,n}\mathbf{c}_n - \mathbf{b}_m\|_2^2 = \left(B_{m,n}^* B_{m,n}\mathbf{c}_n, \mathbf{c}_n\right) - 2\left(B_{m,n}^* \mathbf{b}_m, \mathbf{c}_n\right) + \|\mathbf{b}_m\|_2^2, \tag{4.17}$$

Из равенств (4.15) и (4.17) следует, что $F_{1,m}(\bar{V})$ при $m \to \infty$ стремится к $F_1(\bar{V})$. Поэтому в качестве приближенного решения задачи (4.13) возьмем элемент $\bar{V}_{m,n}$ из h_n, доставляющий минимум функционалу $F_{1,m}(\cdot)$:

$$F_{1,m}(\bar{V}_{m,n}) = \inf_{\bar{V} \in h_n} F_{1,m}(\bar{V}). \tag{4.18}$$

Чтобы при фиксированном n получить хорошее качество приближения, нужно выбирать m достаточно большим, т. е. брать $m \geqslant m_0(n)$, где $m_0(n)$ — некоторое «предельное» значение мультииндекса. Координаты $m_{1,0}(n)$ и $m_{2,0}(n)$ предельного мультииндекса $m_0(n)$ при $n \to \infty$ неограниченно возрастают, и при этом, как правило, $m_{i0}(n) > n_i$. Таким образом, матрица $B_{m,n}$ прямоугольная, имеющая больше строк, чем столбцов.

Как и в случае с $F_1(\cdot)$, задачу минимизации функционала $F_{1,m}(\cdot)$ на h_n можно свести к системе типа (4.16). Однако предпочтителен иной подход, связанный со следующей переопределенной системой линейных уравнений:

$$B_{m,n}\mathbf{c}_n^* = \mathbf{b}_m. \tag{4.19}$$

Решение системы (4.19) методом наименьших квадратов состоит как раз в том, чтобы минимизировать на $R^{|n|}$ квадратичную функцию $\|B_{m,n}\mathbf{c}_n - \mathbf{b}_m\|^2$. Вектор $\overset{*}{\mathbf{c}}_{m,n}$, доставляющий ей минимум, принято называть *нормальным решением* [18]. Качество нормального решения принято характеризовать величиной

$$\theta_{m,n}^{(1)} = \|B_{m,n}\mathbf{c}_{m,n}^* - \mathbf{b}_m\| / \|\mathbf{b}_m\|. \tag{4.20}$$

Очевидно, что $\theta_{m,n}^{(1)}$ стремится при $m\to\infty$ к величине $\theta_n^{(1)}$, определяемой равенством

$$\theta_n^{(1)} = \| B_n \mathbf{c}_{m,n}^* - \mathbf{b} \|_2 / \| \mathbf{b} \|_2. \tag{4.21}$$

Задачу (4.8) можно упростить, если известно, что оператор $T_3 = T_3(z)$, с помощью которого определена дифференциальная форма $F_1(\overline{V})$ минимизируемого функционала, действует из l_2 в l_2 ограниченно. В этом случае найдется постоянная K такая, что для любой пары следов $\overline{V} = (\mathbf{v}_{1,*}(z), \mathbf{v}_{2,*}(z))$ из h имеет место оценка

$$F_1(\overline{V}) \leqslant K \| \mathbf{v}_{1,*}(z) - \mathbf{v}_{2,*}(z) + \mathbf{f}_*(z) \|_2^2.$$

Обозначим правую часть этого неравенства через $F_2(\overline{V})$. Минимум функционала $F_2(\cdot)$ на пространстве h равен нулю и достигается на паре $\overline{U} = (u_{1,*}(z), u_{2,*}(z))$, где функции $u_j(\mathbf{r})$, $j = 1, 2$, соответствуют решению $u(\mathbf{r})$ исходной задачи по формуле (2.1). Значит, решение $\overline{U}$ задачи (4.8) удовлетворяет также условию

$$F_2(\overline{U}) = \inf_{\overline{V}\in h} F_2(\overline{V}). \tag{4.22}$$

Преимущество постановки (4.22) перед (4.8) состоит в том, что для вычисления значений минимизируемого функционала $F_2(\cdot)$ уже нет необходимости знать матрицу $T_3(z)$.

Применив к задаче (4.22) ту же схему рассуждений, что и в случае с минимизацией функционала $F_1(\cdot)$, получим в итоге переопределенную систему вида

$$A_{m,n}\mathbf{c}_n^* = \mathbf{f}_m. \tag{4.23}$$

Элементы $A_{m,n}$ и $\mathbf{f}_m$ можно получить, если в процедуре, определяющей матрицу $B_{m,n}$ и правую часть $\mathbf{b}_m$ системы (4.19), взять матрицу $T_3(z)$ единичной. Обозначив получающийся при этом аналог матрицы B_n через A_n, введем параметры $\theta_{m,n}^{(2)}$ и $\theta_n^{(2)}$, характеризующие качество нормального решения системы (4.23). Положим

$$\theta_{m,n}^{(2)} = \| A_{m,n}\mathbf{c}_n^* - \mathbf{f}_m \| / \| \mathbf{f}_m \|. \tag{4.24}$$

При $m\to\infty$ параметр $\theta_{m,n}^{(2)}$ стремится к $\theta_n^{(2)}$, где

$$\theta_n^{(2)} = \| A_n\mathbf{c}_n^* - \mathbf{f} \|_2 / \| \mathbf{f} \|_2. \tag{4.25}$$

Предположим теперь, что какая-нибудь одна из систем (2.13), (4.16) или (4.23) решена. Вектору $\mathbf{c}_N^*$ — решению системы — соответствуют согласно (2.9) интерполяционные формулы в компонентах Ω_1 и Ω_2. Возникает естественный вопрос, как зависит точность интерполяции от величины невязок $\theta_N^{(1)}$, $\theta_{N,M}^{(2)}$? В частности, интересно знать, является ли эта зависимость непрерывной? Ответ на этот вопрос оказывается положительным. Подробное обоснование приведено в § 8, а необходимые для него аналитические сведения содержатся в § 5—7.

§ 5. ДВЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этом параграфе построим и исследуем две конкретные гармонические функции ζ_1 и ζ_2 от трех переменных. Эти функции будут существенным образом использованы в § 6 при получении нужных априорных оценок.

Удобно задать ζ_1 и ζ_2 в тороидальных координатах (α, β, φ), связанных с декартовыми (x, y, z) следующими соотношениями:

$$x = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\cos\varphi;\quad y = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\sin\varphi;\quad z = \frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}. \tag{5.1}$$

Напомним некоторые известные сведения о тороидальных координатах. Преобразование (5.1) взаимно однозначно отображает пространство R^3, из которого исключены точки, лежащие в плоскости $z=0$ вне единичного круга, на множество

$$P_+ = \{(\alpha, \beta, \varphi):\ 0 \leqslant \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta < 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}.$$

При этом оси z соответствует линия уровня $\alpha=0$, в точках окружности

$$C_1 = \{(x, y, z):\ z=0,\ x^2+y^2=1\}$$

координата α принимает значение $+\infty$, а координата β не определена и ее значение может быть любым от 0 до 2π. Плоскость $z=0$ с вырезанным единичным кругом удобно рассматривать как двустороннюю поверхность. На ее части, примыкающей к полупространству $z \geqslant 0$, координата β равна нулю, а на противоположной части $\beta = 2\pi$.

Далее линии уровня переменных α, β и φ определяют в пространстве (x, y, z) три семейства ортогональных поверхностей. Линия уровня $\alpha(x, y, z) = \alpha_*$ представляет собой тор

$$T_{\alpha*} = \left\{(x, y, z):\ \left(\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{cth}\alpha_*\right)^2 + z^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha_*}\right\}. \qquad (5.2)$$

Поверхность $\beta(x, y, z) = \beta_*$ совпадает с одной из двух частей, на которые окружность C_1 разбивает сферическую поверхность

$$S_{\beta*} = \left\{(x, y, z):\ (z - \operatorname{ctg}\beta_*)^2 + \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{\sin^2\beta_*}\right\}. \qquad (5.3)$$

При $0 < \beta_* < \pi$ это та из двух частей, которая лежит в полупространстве $z \geqslant 0$. Наконец, линия уровня $\varphi(x, y, z) = \varphi_*$ — это полуплоскость, проходящая через ось z.

Интересующие нас функции ζ_1 и ζ_2 обладают симметрией относительно оси z, и потому каждая из них зависит только от α, β.

Функцию ζ_1 определим равенством

$$\zeta_1 = (2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta)^{1/2}\left[\int_{\beta+\pi-\beta_0}^{\pi} \frac{1}{(2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\varphi)^{1/2}}\,d\varphi - \frac{\beta_0-\beta}{\pi} Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\right]. \qquad (5.4)$$

Здесь β_0 — числовой параметр, $0 < \beta_0 < \pi$; $Q_{-1/2}(\cdot)$ — сферическая функция Лежандра второго рода. Если воспользоваться известным представлением

$$Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{1}{(2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\varphi)^{1/2}}\,d\varphi,$$

то равенство (5.4) можно переписать в виде

$$\zeta_1(\alpha, \beta) = (2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta)^{1/2} \times$$
$$\times\left[\int_{\beta+\pi-\beta_0}^{\pi} \frac{1}{(2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\varphi)^{1/2}}\,d\varphi - \frac{\beta_0-\beta}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\varphi)^{1/2}}\right]. \qquad (5.5)$$

Из определения следует, что ζ_1 конечна во всем пространстве за исключением точек оси z, где $\alpha=0$ и функция ζ_1 имеет особенность.

Поясним смысл параметра β_0 в определении ζ_1. Очевидно, что $\zeta_1(\alpha, \beta_0) = 0$. Иными словами, ζ_1 обращается в нуль на части сферической поверхности S_{β_0}, лежащей в полупространстве $z \geqslant 0$. Таким образом, изменяя параметр β_0 от 0 до π, можем добиться, чтобы ζ_1 принимала нулевое значение на правой части любой заранее заданной сферической луночки, проходящей через окружность C_1 и имеющей ось z осью симметрии.

Убедимся теперь, что функция ζ_1 гармоническая. Как известно, кооэффициенты Ламе пребразования (5.1) имеют вид

$$H_\alpha = H_\beta = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad H_\varphi = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}.$$

Поэтому условие $\Delta\zeta = 0$ запишется в тороидальных координатах следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right) = 0.$$

Проводя здесь обычную замену $\zeta = (2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta)^{1/2}v$, получим, что функция v должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + \operatorname{cth}\alpha\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{1}{4}v = 0. \tag{5.6}$$

Взяв в качестве v выражение из правой части формулы (5.5), заключенное в квадратные скобки, несложно убедиться, что уравнение (5.6) действительно выполнено и, значит, $\zeta_1(\alpha, \beta)$ — гармоническая функция. Впрочем, к тому же выводу удается прийти и без громоздких выкладок. Заметим, что функцию ζ_1 можно записать в виде

$$\zeta_1(\alpha, \beta) = (2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta)^{1/2}\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\frac{\operatorname{sh}(\beta_0 - \beta)\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau -$$
$$- (2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta)^{1/2}\frac{\beta_0 - \beta}{\pi} Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha),$$

а затем воспользоваться известным утверждением [19, § 8.10] о том, что функции

$$(2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta)^{1/2}(c_1\operatorname{sh}\tau\beta + c_2\operatorname{ch}\tau\beta)P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha),$$
$$(2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta)^{1/2}(A\beta + B)Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)$$

гармоничны при любых c_1, c_2, τ, A, B. Тем самым гармонична и $\zeta_1(\alpha, \beta)$.

Исследуем теперь поведение ζ_1 в окрестности C_1. При $\alpha \to +\infty$ имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\int_{\beta+\pi-\beta_0}^{\pi} \frac{d\varphi}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\varphi)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha}}\int_{\beta+\pi-\beta_0}^{\pi}\left(1 + \frac{\cos\varphi}{\operatorname{ch}\alpha} + \frac{\cos^2\varphi}{\operatorname{ch}^2\alpha} + \ldots\right)^{1/2} d\varphi =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha}}\int_{\beta+\pi-\beta_0}^{\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\cos\varphi}{\operatorname{ch}\alpha} + \frac{3}{8}\frac{\cos^2\varphi}{\operatorname{ch}^2\alpha}\right)d\varphi + O\left(e^{-\frac{5}{2}\alpha}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha}}\left[(\beta_0 - \beta) - \frac{\sin(\beta_0 - \beta)}{2\operatorname{ch}\alpha} + \frac{3}{8}\int_{\beta+\pi-\beta_0}^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha}\right] + O\left(e^{-\frac{5}{2}\alpha}\right). \tag{5.7}$$

Подставляя его в (4.5), видим, что

$$\zeta_1(\alpha, \beta) = \frac{\sin(\beta - \beta_0)}{2\operatorname{ch}\alpha} + \frac{3}{8}\int_{\beta+\pi-\beta_0}^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha} + O\left(e^{-3\alpha}\right). \tag{5.8}$$

В частности, имеет место оценка

$$|\zeta_1(\alpha, \beta)| \leqslant K_1 e^{-\alpha}, \tag{5.9}$$

где K_1 не зависит от α, β. Кроме того, в части пространства, задаваемой неравенствами $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0 - \varepsilon$ или $\beta_0 + \varepsilon \leqslant \beta \leqslant 2\pi$, где ε — любое число такое, что $0 < \varepsilon < \beta_0$, справедлива оценка снизу

$$|\zeta_1(\alpha, \beta)| \geqslant K_0 e^{-2\alpha} \tag{5.10}$$

с положительной постоянной K_0, не зависящей от α, β. Отсюда заключаем, что во внешности любого тора $T_{\alpha *}$ из семейства (5.2), т. е. при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_*$, функция $|\zeta_1|$ ограничена снизу строго положительной постоянной m_*:

$$\inf_{0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_*} |\zeta_1(\alpha, \beta)| \geqslant m_* > 0. \tag{5.11}$$

Заметим теперь, что имеет место равенство

$$z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)^2 = (2e^{-\alpha})/(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^2. \tag{5.12}$$

Из (5.12) следует, что при $\alpha \geqslant \alpha_* > 0$ справедливы оценки

$$K_1 e^{-\alpha} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} \left[z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)\right]^{1/3} \leqslant K_2 e^{-\alpha}, \tag{5.13}$$

где постоянные K_1, K_2 положительны и не зависят от α, β.

Перепишем теперь (5.9) и (5.10) в декартовых координатах. Имея в виду (5.13), заключаем, что внутри тора $T_{\alpha *}$ справедливы неравенства

$$K_0 (z^2 + (\rho - 1)^2)^{2/3} \leqslant |\zeta_1(\alpha, \beta)| \leqslant K_1 (z^2 + (\rho - 1)^2)^{1/3}, \tag{5.14}$$

где K_0, K_1 не зависят от α, β; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Объединяя оценки снизу (5.11) и (5.14) в одну, получим

$$\inf_{0 \leqslant \alpha < \infty} |\zeta_1(\alpha, \beta)| \geqslant \min\{m_*, (z^2 + (\rho - 1)^2)^{2/3}\}.$$

Так как область Ω пространства R^3 ограничена, то

$$\inf_{(\alpha, \beta) \in \Omega} |\zeta_1(\alpha, \beta)| \geqslant K_* (z^2 + (\rho - 1)^2)^{2/3}, \tag{5.15}$$

где K_* — положительная постоянная.

Последнее из свойств функции ζ_1, которое нас здесь интересует, касается поведения ее градиента $\nabla\zeta_1$ при $\alpha \to +\infty$. Из общего правила преобразования дифференциальной операции ∇ при ортогональной замене координат имеем

$$|\nabla\zeta_1|^2 = \frac{1}{H_\alpha^2}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{H_\beta^2}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\beta}\right)^2 =$$

$$= (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^2 \left[\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\beta}\right)^2\right]. \tag{5.16}$$

Далее, дифференцируя представление (5.5) по α и β, получаем

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha} = \frac{\sin(\beta - \beta_0)}{\operatorname{ch}\alpha} + O(e^{-2\alpha}), \quad \frac{\partial\zeta_1}{\partial\beta} = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos(\beta_0 - \beta)}{\operatorname{ch}\alpha} + O(e^{-2\alpha}).$$

Отсюда следует неравенство

$$\left|\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\beta}\right)^2\right| \leqslant K e^{-2\alpha},$$

где K не зависит от α, β. Пользуясь теперь равенством (5.16), видим, что модуль градиента ζ_1 ограничен в окрестности C_1. В частности, функция ζ_1 принадлежит пространству $W_2^1(T)$, где T — любой тор из семейства (5.2).

Функцию ζ_2 определим следующим равенством:

$$\zeta_2(\alpha, \beta) = (2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta)^{1/2}(\beta - \beta_0) P_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha), \tag{5.17}$$

где β_0 — тот же числовой параметр, что и в определении ζ_1, а $P_{-1/2}(\cdot)$ — сферическая функция Лежандра первого рода. Как известно [19, § 8.10], функция ζ_2 гармоническая во всем пространстве за исключением точек плоскости $z=0$, лежащих вне единичного круга. Из определения очевидно, что $\zeta_2(\alpha, \beta_0)=0$, т. е. ζ_2 обращается в нуль на той части сферической поверхности S_{β_0}, которая лежит в полупространстве $z \geqslant 0$.

Пусть $0<\varepsilon<\beta_0/2$, тогда пространственные множества $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, задаваемые соответственно неравенствами

$$0 \leqslant \alpha < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad \varepsilon \leqslant \beta \leqslant \beta_0 - \varepsilon,$$
$$0 \leqslant \alpha < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad \beta_0 + \varepsilon \leqslant \beta \leqslant 2\pi - \varepsilon,$$

непусты. На каждом из них функция $|\zeta_2(\alpha, \beta)|$ ограничена снизу некоторой положительной постоянной. Аналогичное утверждение имеет место для любого тора $T_{\alpha *}$, из которого удалены точки, лежащие внутри сферической линзы, задаваемой неравенством $\beta_0 - \varepsilon \leqslant \beta \leqslant \beta_0 + \varepsilon$.

Наконец, функция $\zeta_2(\alpha, \beta)$ принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$, где Ω — ограниченное множество, отделенное от окружности C_1.

Построенные нами функции тесно связаны с единичной окружностью C_1 в плоскости $z=0$. Обозначим через C_r окружность в той же плоскости, но не обязательно с единичным радиусом r. Очевидно, что окружности C_r можно сопоставить пару гармонических функций, аналогичных по свойствам ζ_1 и ζ_2. В самом деле, если $\tilde{\zeta}_1(x, y, z)$ и $\tilde{\zeta}_2(x, y, z)$ представляют собой функции ζ_1 и ζ_2, записанные в декартовых координатах, то нужная пара гармонических функций задается равенством

$$\tilde{\tilde{\zeta}}_j(x, y, z) = \tilde{\zeta}_j\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right), \quad j=1, 2.$$

В дальнейшем мы часто будем пользоваться этим замечанием, сохраняя и для окружности C_r старые обозначения ζ_1, ζ_2.

§ 6. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ НОРМ В КОМПОНЕНТАХ ЧЕРЕЗ НОРМУ В ПЕРЕСЕЧЕНИИ

В каждом из пространств $G_{2,0}^1(\Omega^{j3})$, $j=1, 2$, прямое произведение которых дает гильбертово пространство H, помимо основной нормы определим вспомогательную, весовую. Именно если $U=(u_1(\mathbf{r}), u_2(\mathbf{r})) \in H$, то

$$\|u_j\|_{j,*} = \left\{\int\limits_{\Omega_j} \rho_0(\mathbf{r}) \, |\nabla u_j(\mathbf{r})|^2 \, d\mathbf{r}\right\}^{1/2}, \quad j=1, 2. \tag{6.1}$$

Весовую функцию $\rho_0(\mathbf{r})$ из этого равенства определим следующим образом: $\rho_0(\mathbf{r}) = (z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - \varepsilon)^2)^{4/3}$, где $\mathbf{r}=(x, y, z)$, ε — радиус окружности C_ε, по которой пересекаются $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. В плоскости (ρ, z) функция $\rho_0(\mathbf{r})$, очевидно, представляет собой некоторую степень расстояния от точки с текущими координатами $(\sqrt{x^2+y^2}, z)$ до точки с координатами $(\varepsilon, 0)$. Функционал $\|\cdot\|_{j,*}$, как несложно убедиться, действительно задает в $G_{2,0}^1(\Omega_j)$ норму.

Основной результат этого параграфа состоит в доказательстве следующих двух оценок:

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{1,*} &\leqslant K\left[\int\limits_{\Omega_{12}} \rho_0(\mathbf{r}) \, |\nabla u_1|^2 \, d\mathbf{r}\right]^{1/2}, \\ \|u_2\|_{2,*} &\leqslant K\left[\int\limits_{\Omega_{12}} \rho_0(\mathbf{r}) \, |\nabla u_2|^2 \, d\mathbf{r}\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Постоянная K в (6.2) не зависит от U из H.

Введем некоторые геометрические обозначения. Напомним, что границы компонент Ω_1 и Ω_2 пересекаются по окружности C_ε с центром в

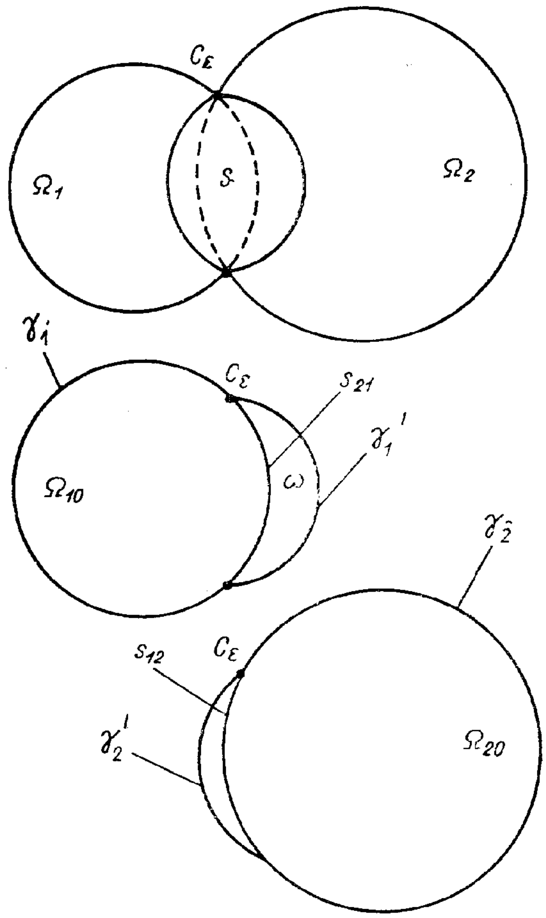

Рис. 2. Геометрические обозначения в компонентах области Ω.

начале координат и радиусом ε. Часть границы Ω_j, опирающуюся на C_ε и лежащую вне Ω_i, $i \neq j$, мы обозначаем γ_j, а остаток границы Ω_j — γ_j'. Согласно условию существует сферическая луночка S с осью симметрии z, лежащая в $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ и проходящая через C_ε. Граница луночки S разбивается окружностью C_ε на две части. Левую из них обозначим s_{12}, а правую — s_{21} (рис. 2). Подмножество Ω_1, ограниченное поверхностями γ_1 и s_{21}, обозначим Ω_{10}. Аналогично этому часть Ω_2, заключенную между γ_2 и s_{12}, обозначим Ω_{20}. Наконец, подмножество Ω_{10}, ограниченное поверхностями s_{21} и γ_2', обозначим через ω. Ясно, что как ω, так и $\Omega_{10} \backslash \omega$ имеют ненулевой объем.

Перейдем к доказательству неравенств (6.2). Докажем только первое из них, ибо второе выводится совершенно аналогично.

Важная роль в дальнейших рассуждениях принадлежит априорной оценке, содержащейся в следующей лемме.

Лемма 6.1. *Существует постоянная $K > 0$ такая, что для любой функции u из $W^1_{2,0}(\Omega_{10})$, лапласиан которой принадлежит $L_2(\Omega_{10})$, справедливо неравенство*

$$\left(\int\limits_{\Omega_{10}\backslash\omega} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} \leqslant K \left[\left(\int\limits_{\Omega_{10}} |\Delta u|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{\Omega_{10}} |u|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2}\right]^{*)}. \quad (6.3)$$

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь пространственную тороидальную окрестность T окружности C_ε и обозначим через U_1 пересечение $T \cap \Omega_{10}$, а через U_2 — дополнение $\Omega_{10} \backslash U_1$. Ясно, что U_1 строго отделено от оси z, а U_2 — от окружности C_ε и при этом $\Omega_{10} = U_1 \cup U_2$. Расширим U_1 и U_2 до множеств U_1^* и U_2^* соответственно таким образом, чтобы удовлетворялись два условия:

1) U_i^* включает в себя U_i, причем часть границы U_i^*, лежащая внутри Ω_{10}, строго отделена от соответствующей части границы U_i;

2) U_i^* вложено в Ω_{10}, причем U_1^* отделено от оси z, а U_2^* — от окружности C_ε.

Выберем две вспомогательные функции ξ_1 и ξ_2. Функция ξ_j при этом должна быть дифференцируемой в Ω_{10}, обращаться в нуль на части границы U_j^*, лежащей внутри Ω_{10} и равняться единице в U_j.

Далее по правилу, описанному в § 5, сопоставим окружности C_ε две гармонические функции ζ_1 и ζ_2. При этом параметр β_0 в их определении подберем таким образом, чтобы как ζ_1, так и ζ_2 обращались в нуль на части s_{21} сферической луночки S.

Пусть теперь u — произвольная функция из $W^1_{2,0}(\Omega_{10})$ и, в частности, обращается в нуль на γ_1. Тогда произведение $(\zeta_1\xi_1 u)$ принадлежит $\mathring{W}^1_2(U_1^*)$. Пусть $\rho_1 = \zeta_1\xi_1$. Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_{U_1^*} |\nabla(\rho_1 u)|^2 d\mathbf{r} = -\int\limits_{U_1^*} \Delta(\rho_1 u)\rho_1 u \, d\mathbf{r}. \quad (6.4)$$

*) Интересно сравнить эту оценку с полученной ранее в [20, лемма 8.2, с. 212].

Как следует из определения ρ_1 и свойств ζ_1, доказанных в § 5, функция ρ_1 дважды непрерывно дифференцируема внутри U_1^*, непрерывна в замыкании $\overline{U}_1^*$ и при этом

$$\sup_{\mathbf{r}\in U_1^*} \{|\rho_1(\mathbf{r})|, |\nabla\rho_1(\mathbf{r})|, |\Delta\rho_1(\mathbf{r})|\} \leqslant K < \infty. \tag{6.5}$$

С помощью несложных выкладок из (6.4) и (6.5) получаем оценку

$$\int_{U_1^*} |\nabla(\rho_1 u)|^2 d\mathbf{r} \leqslant K\left[\int_{U_1^*} |\Delta u|^2 d\mathbf{r} + \int_{U_1^*} u^2 d\mathbf{r} + 2\int_{U_1^*} |u\rho_1\nabla u|\, d\mathbf{r}\right]. \tag{6.6}$$

Имеют место соотношения

$$\rho_1\nabla u = \nabla(\rho_1 u) - \nabla\rho_1\cdot u,\quad 2|u\nabla(\rho_1 u)| \leqslant \delta^2|\nabla(\rho_1 u)|^2 + \frac{1}{\delta^2}u^2,$$

где $\delta > 0$ произвольное. Воспользовавшись ими, получаем из (6.6) неравенство

$$\int_{U_1^*} |\nabla(\rho_1 u)|^2 d\mathbf{r} \leqslant K\left[\int_{U_1^*} |\Delta u|^2 d\mathbf{r} + \int_{U_1^*} u^2 d\mathbf{r}\right] + K\delta^2\int_{U_1^*} |\nabla(\rho_1 u)|^2 d\mathbf{r}. \tag{6.7}$$

Взяв здесь δ малым настолько, что $1 - K\delta^2 > 0.5$, приходим к оценке

$$\int_{U_1^*} |\nabla(\rho_1 u)|^2 d\mathbf{r} \leqslant K\int_{U_1^*} (|\Delta u|^2 + u^2)\, d\mathbf{r} \tag{6.8}$$

с постоянной K, не зависящей от u из $W_{2,0}^1$. Так как функция ξ_1 равна единице в U_1, то

$$\int_{U_1} |\nabla(\zeta_1 u)|^2 d\mathbf{r} \leqslant \int_{U_1^*} |\nabla(\rho_1 u)|^2 d\mathbf{r}. \tag{6.9}$$

Неравенство Минковского, оценки (6.9), (6.8) и (6.5) приводят к следующей цепочке неравенств:

$$\left(\int_{U_1} \zeta_1^2|\nabla u|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} \leqslant \left[\int_{U_1} |\nabla(\zeta_1 u) - (\nabla\zeta_1)u|^2 d\mathbf{r}\right]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{U_1} |\nabla(\zeta_1 u)|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} + \left(\int_{U_1} |u\nabla\zeta_1|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant K\left[\left(\int_{\Omega_{10}} |\Delta u|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega_{10}} u^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2}\right]. \tag{6.10}$$

Аналогично доказывается, что

$$\left(\int_{U_2} \zeta_2^2|\nabla u|^2 d\zeta\right)^{1/2} \leqslant K\left[\left(\int_{\Omega_{10}} |\Delta u|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega_{10}} u^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2}\right]. \tag{6.11}$$

Пусть теперь $\zeta_0^2 = \min\{\zeta_1^2, \zeta_2^2\}$, тогда из (6.10), (6.11) заключаем, что

$$\left(\int_{\Omega_{10}} \zeta_0^2|\nabla u|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} \leqslant K\left[\left(\int_{\Omega_{10}} |\Delta u|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega_{10}} u^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2}\right]. \tag{6.12}$$

В соответствии с выбором ω на множестве $\Omega_{10}\setminus\omega$ функция ζ_2^2 ограничена снизу некоторой положительной постоянной, а функция ζ_1^2 — выражением вида $K\rho_0(\mathbf{r})$, где $\rho_0(\mathbf{r})$ — введенная в начале этого параграфа весовая функция. Поэтому справедлива оценка

$$\int_{\Omega_{10}\setminus\omega} \rho_0(\mathbf{r})|\nabla u|^2 d\mathbf{r} \leqslant K\int_{\Omega_{10}\setminus\omega} \zeta_0^2|\nabla u|^2 d\mathbf{r}.$$

Отсюда и из (6.12) следует (6.3). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Как видно из доказательства леммы 6.1, в качестве ω в оценке (6.3) может выступать любое подмножество Ω_{10}, проходящее через часть s_{21} его границы, в которое вложена сферическая луночка типа S, т. е. также проходящая через s_{21}, невырожденная и z-осесимметричная. Этим утверждением будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Опираясь на априорную оценку (6.3), докажем, что справедлива

Теорема 6.1. *Существует положительная строго меньшая единицы постоянная q такая, что для любой функции u из $G^1_{2,0}(\Omega_{10})$ имеет место неравенство*

$$\left(\int\limits_{\Omega_{10}\setminus\omega}\rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla u|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2}\leqslant q\left(\int\limits_{\Omega_{10}}\rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla u|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2}. \tag{6.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим на $G^1_{2,0}(\Omega_{10})$ два функционала

$$p_\omega(u)=\left(\int\limits_{\Omega_{10}\setminus\omega}\rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla u|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2},\quad p(u)=\left(\int\limits_{\Omega_{10}}\rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla u|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2},$$

а также множество B, состоящее из тех функций $G^1_{2,0}(\Omega_{10})$, для которых $p(u)=1$. Пусть q обозначает точную верхнюю грань функционала $p_\omega(u)$ на B:

$$q=\sup_{u\in B}p_\omega(u). \tag{6.14}$$

Тогда очевидно неравенство

$$\rho_\omega(u)\leqslant qp(u)\quad\forall u\in G^1_{2,0}(\Omega_{10}),$$

совпадающее с (6.13). Из определения (6.14) сразу следует, что q принадлежит полуинтервалу $(0,1]$ числовой оси. Докажем, что на самом деле имеет место строгое неравенство: $q<1$.

Убедимся сначала, что функционал $p_\omega(\cdot)$ достигает значения q на некотором элементе u из $G^1_{2,0}(\Omega_{10})$ таком, что $p(u)\leqslant 1$.

Пусть последовательность $\{u_n\}$, $u_n\in B$ выбрана так, что $p_\omega(u_n)$ стремится к q при $n\to\infty$. Докажем, что можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся на множестве $C^{(\infty)}_{0,\gamma_1}(\Omega_{10})$, состоящем из бесконечно дифференцируемых в Ω_{10} функций, обращающихся в нуль на γ_1 и в окрестности окружности C_ε.

С этой целью представим Ω_{10} как объединение последовательности возрастающих подобластей: $\Omega_{10}=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}Q_m$, каждая из которых строго отделена от C_ε. Благодаря этому имеет место неравенство

$$\left(\int\limits_{Q_m}|\nabla u_n|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\int\limits_{\Omega_{10}}\rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla u_n|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{A}}, \tag{6.15}$$

где $A=\inf\limits_{\mathbf{r}\in Q}\rho_0(\mathbf{r})>0$. Таким образом, $\{u_n\}$ принадлежит шару гильбертова пространства $W^1_2(Q_m)$ для каждого $m\geqslant 1$, т. е. слабо компактному множеству.

Индукцией по m построим теперь подпоследовательность $\{u_n\}$, слабо сходящуюся в любом из пространств $W^1_2(Q_m)$. Будем обозначать эту подпоследовательность так же, как исходную $\{u_n\}$, тогда $\{u_n\}$ искомая. В самом деле, пусть $\varphi\in C^{(\infty)}_{0,\gamma_1}(\Omega_{10})$, тогда $\operatorname{supp}\varphi\subset Q_m$ при некотором $m\geqslant 1$. Поэтому

$$\int\limits_{\Omega_{10}}\nabla u_n\nabla\varphi\,d\mathbf{r}=\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi}\nabla u_n\nabla\varphi\,d\mathbf{r}=\int\limits_{Q_m}\nabla u_n\nabla\varphi\,d\mathbf{r}.$$

Последний интеграл согласно выбору $\{u_n\}$ стремится при $n\to\infty$ к некоторому конечному числу.

Таким образом, $\{u_n\}$ представляет собой последовательность линейных функционалов над $W^1_{2,0}(\Omega_{10})$, слабо сходящуюся на плотном в этом пространстве множестве $C^{(\infty)}_{0,\gamma_1}(\Omega_{10})$. По теореме Банаха — Штейнгауза [21, с. 99] нормы $\|u_n \mid W^1_{2,0}(\Omega_{10})\|$ ограничены в совокупности некоторой постоянной R:

$$\left(\int\limits_{\Omega_{10}} |\nabla u_n|^2 \, d\mathbf{r}\right)^{1/2} \leqslant R.$$

Значит, $\{u_n\}$ принадлежит слабо компактному множеству в гильбертовом пространстве $W^1_{2,0}(\Omega_{10})$. Но тогда найдется подпоследовательность $\{u_n\}$, слабо сходящаяся к некоторой функции u из $W^1_{2,0}(\Omega_{10})$. Эта предельная функция u как раз и обладает нужным нам свойством, т. е.

$$p_\omega(u) = q, \ p(u) \leqslant 1. \tag{6.16}$$

Убедимся в истинности (6.16).

Известно [22, с. 94], что $W_2(\Omega_{10})$ вложено в $L_2(\Omega_{10})$ вполне непрерывно. Поэтому можно считать, что

$$\left(\int\limits_{\Omega_{10}} |u_n - u|^2 \, d\mathbf{r}\right)^{1/2} = \|u_n - u \mid L_2(\Omega_{10})\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда и из доказанной в лемме 6.1 оценки заключаем, что $p_\omega(u_n - u)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Однако

$$|p_\omega(u_n) - p_\omega(u)| \leqslant p_\omega(u_n - u),$$

поэтому $p_\omega(u) = \lim\limits_{n\to\infty} p_\omega(u_n) = q$, т. е. первое из свойств (6.16) доказано.

Установим теперь, что $p(u) \leqslant 1$. Выберем последовательность сферических луночек $\{\omega_m\}$, вложенных одна в другую, проходящих через часть s_{21} границы Ω_{10} и в пределе стремящуюся к ней. Согласно лемме 6.1 для любого номера $m \geqslant 1$ справедлива оценка

$$p_{\omega_m}(u) \leqslant K\left[\|\Delta u \mid L_2(\Omega_{10})\| + \|u \mid L_2(\Omega_{10})\|\right], \tag{6.17}$$

где K не зависит от u. Оценка (6.17) позволяет так же, как и в случае с функционалом $p_\omega(\cdot)$, доказать, что

$$p_{\omega_m}(u) = \lim_{n\to\infty} p_{\omega_m}(u_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} p(u_n).$$

Но по условию $u_n \in B$ и, значит, $p_{\omega_m}(u) \leqslant 1$. Переходя в этом неравенстве к пределу по $m \to \infty$, получим, что $p(u) \leqslant 1$. Таким образом, выполнено и второе из свойств (6.16).

Докажем, наконец, что $q < 1$. Разбивая интеграл в определении $p(u)$ в сумму интегралов по ω и по $\Omega_{10} \backslash \omega$, а также учитывая, что $p(u) \leqslant 1$, получим

$$p^2_\omega(u) + \int\limits_\omega \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u|^2 \, d\mathbf{r} = p^2(u) \leqslant 1.$$

Так как $p^2_\omega(u) = q^2$, то

$$\int\limits_\omega \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u|^2 \, d\mathbf{r} \leqslant 1 - q^2.$$

Предположим, что $q = 1$, тогда из последнего неравенства следует, что u постоянна в ω и ввиду гармоничности она постоянна во всей области Ω_{10}. Но тогда $p_\omega(u) = 0$, т. е. $q = 0$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Выведем первую из оценок (6.2), используя теорему 6.1.

Обозначим через ω_1 дополнение $\Omega_1 \setminus \Omega_{10}$, тогда, очевидно, $\omega_1 \cap \omega = \varnothing$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \omega \cup \omega_1$, $\Omega_1 = \Omega_{10} \cup \omega_1$. Поэтому

$$\|u_1\|_{1,*}^2 = \int\limits_{\Omega_{10}} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r} + \int\limits_{\omega_1} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r}. \tag{6.18}$$

Разбивая первый интеграл в правой части (6.18) в сумму двух — по $\Omega_{10} \setminus \omega$ и по ω, применяя затем к первому из них оценку (6.13), получим

$$\int\limits_{\Omega_{10}} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r} = \int\limits_{\Omega_{10} \setminus \omega} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r} + \int\limits_{\omega} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r} \leqslant$$

$$\leqslant q^2 \int\limits_{\Omega_{10}} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r} + \int\limits_{\omega} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r}.$$

Далее, так как $q < 1$, то

$$\int\limits_{\Omega_{10}} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r} \leqslant \frac{1}{1-q^2} \int\limits_{\omega} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r}. \tag{6.19}$$

Подставляя (6.19) в (6.18), имеем

$$\|u_1\|_{1,*}^2 \leqslant \frac{1}{1-q^2} \int\limits_{\omega_1 \cup \omega} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r},$$

т. е. первое из неравенств (6.2). Второе, как уже отмечалось, выводится аналогично.

§ 7. ОЦЕНКА СНИЗУ МИНИМИЗИРУЕМОГО ФУНКЦИОНАЛА

В этом параграфе мы оценим снизу значение функционала

$$F_3(U) = \int\limits_{\Omega_3} |\nabla (u_1 - u_2)|^2 d\mathbf{r}$$

на произвольном элементе $U = (u_1(\mathbf{r}), u_2(\mathbf{r}))$ из гильбертова пространства $H = G^1_{2,0}(\Omega^{13}) \times G^1_{2,0}(\Omega^{23})$.

Напомним, что множество Ω_3, по которому ведется интегрирование, включает в себя пересечение областей Ω_1 и Ω_2, а само вложено в объединение Ω_1 и Ω_2.

Помимо Ω_3 будем в дальнейшем использовать геометрические обозначения, определенные в начале § 6 (см. также рис. 2).

Кроме $F_3(\cdot)$ зададим на H еще один функционал:

$$\|U\|_{1,H} = \left\{ \int\limits_{\Omega_{10}} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r} + \int\limits_{\Omega_{20}} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_2|^2 d\mathbf{r} \right\}^{1/2}. \tag{7.1}$$

Функция $\rho_0(\mathbf{r})$ определена в § 6 равенством $\rho_0(\mathbf{r}) = (z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - \varepsilon)^2)^{4/3}$. Число ε здесь равно длине радиуса окружности C_ε, по которой пересекаются границы Ω_1 и Ω_2. Ясно, что $\|\cdot\|_{1,H}$ задает в H норму, причем более слабую, чем исходная $\|\cdot\|_H$.

Оказывается, что функционал $F_3(\cdot)$ «слабо» положительно определен в H. Более точно, существует положительная постоянная σ_1^2 такая, что для любого U из H имеет место неравенство

$$F_3(U) \geqslant \sigma_1^2 \|U\|_{1,H}^2. \tag{7.2}$$

В этой оценке и состоит основной результат настоящего параграфа.

Докажем оценку (7.2). Имеем, очевидно,

$$F_3(U) \geqslant \int\limits_{S} |\nabla (u_1 - u_2)|^2 d\mathbf{r} \geqslant \frac{1}{A} \int\limits_{S} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla (u_1 - u_2)|^2 d\mathbf{r}, \tag{7.3}$$

где $A = \sup_{\mathbf{r}\in S} \rho_0(\mathbf{r}) > 0$. Так как сферическая луночка S ограничена, то число A конечно. Раскрыв стоящий под интегралом в (7.3) квадрат разности, получим

$$\int_S \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla (u_1 - u_2)|^2 d\mathbf{r} = \int_S \rho_0(\mathbf{r}) (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2) d\mathbf{r} - \\ - 2 \int_S \rho^0(\mathbf{r}) \nabla u_1 \nabla u_2 \, d\mathbf{r}. \tag{7.4}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части этого равенства. Заметим, что найдется постоянная q_* такая, что

$$\int_S \rho_0(\mathbf{r}) \nabla u_1 \nabla u_2 \, d\mathbf{r} \leqslant \frac{q_*}{2} \int_S \rho_0(\mathbf{r}) (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2) d\mathbf{r} \tag{7.5}$$

для всех $U = (u_1, u_2)$ из H. Достаточно, например, взять $q_* = 1$. Оказывается, что на самом деле q_* в (7.5) возможно выбрать строго меньшим единицы. Эта теорема будет доказана чуть позднее, а пока применим ее к оценке $F_3(U)$. Из (7.4), (7.5) имеем

$$\int_S \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla (u_1 - u_2)|^2 d\mathbf{r} \geqslant (1 - q_*) \int_S \rho_0(\mathbf{r}) (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2) d\mathbf{r}. \tag{7.6}$$

В § 6 доказано, что справедливы неравенства (см. (6.19))

$$\int_{\Omega_{j0}} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_j|^2 d\mathbf{r} \leqslant K \int_S \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_j|^2 d\mathbf{r}. \tag{7.7}$$

Последовательно применяя оценки (7.3), (7.6), (7.7) и имея в виду, что норма $\|\cdot\|_{1,H}$ задается равенством (7.1), получим (7.2). Таким образом, для доказательства оценки (7.2) достаточно установить, что число q_* в (7.5) меньше единицы.

В ходе последующих рассуждений нам понадобится еще одно гильбертово пространство — H_0. По определению H_0 есть прямое произведение $G^1_{2,0}(\Omega_{10}) \times G^1_{2,0}(\Omega_{20})$. Норма элемента $U = (u_1, u_2)$ из H_0 задается равенством

$$\|U\|_{H_0} = \left\{ \int_{\Omega_{10}} |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r} + \int_{\Omega_{20}} |\nabla u_2|^2 d\mathbf{r} \right\}^{1/2}. \tag{7.8}$$

Вообще говоря, H — собственное подпространство H_0, однако в случае $\Omega_3 = \Omega_{12} = S$ пространства H и H_0 совпадают.

Имеет место следующая

Теорема 7.1. *Постоянную q_* в неравенстве (7.5) можно выбрать положительной строго меньшей единицы.*

Доказательство. Рассмотрим на пространстве H_0 два функционала

$$p(U) = \left\{ \int_S \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1|^2 d\mathbf{r} + \int_S \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_2|^2 d\mathbf{r} \right\}^{1/2},$$

$$b(U) = \int_S \rho_0(\mathbf{r}) \nabla u_1 \nabla u_2 \, d\mathbf{r}, \quad U = (u_1, u_2).$$

Пусть B обозначает подмножество H_0, состоящее из тех элементов U, для которых $p(U) = 1$. Если $U = (u_1, u_2) \in B$, то для $j = 1, 2$ имеем

$$\left(\int_{\Omega_{j0}} \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_j|^2 d\mathbf{r} \right)^{1/2} \leqslant K \left(\int_S \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_j|^2 d\mathbf{r} \right)^{1/2} \leqslant K. \tag{7.9}$$

Первым неравенством в этой оценке мы уже пользовались (см. (7.7)), а второе следует из определения B.

Обозначим через q_* точную верхнюю грань функционала $2b(U)$ на B: $q_* = 2 \sup\limits_{U \in B} b(U)$. Тогда для любого U из $H \subset H_0$ верно неравенство $b(U) \leqslant (q_*/2)\, p^2(U)$, которое, очевидно, совпадает с (7.5). Так как на любом элементе U из B имеем

$$b(U) \leqslant \frac{1}{2}\, p^2(U) = \frac{1}{2},$$

то q_* заведомо лежит в полуинтервале $(0, 1]$ числовой оси.

Докажем, что функционал $2b(U)$ достигает значения q_* на таком элементе $U = U_*$ из H_0, что $p(U_*) \leqslant 1$. Найдем сначала последовательность $U_n = (u_1^n, u_2^n)$, $U_n \in B$, такую, что $b(U_n)$ стремится к $q_*/2$ при $n \to \infty$. В ней обязательно существует подпоследовательность, слабо сходящаяся на множестве $C_{0,\gamma_1}^{(\infty)}(\Omega_{10}) \times C_{0,\gamma_2}^{(\infty)}(\Omega_{20})$. Поясним, почему это так.

Разобьем $\Omega = \Omega_{10} \cup \Omega_{20}$ в объединение последовательности $\{Q_m\}$ возрастающих подмножеств, каждое из которых строго отделено от окружности C_ε. Тогда, как следует из определения весовой функции $\rho_0(\mathbf{r})$, имеют место оценки

$$\left(\int\limits_{Q_m \cap \Omega_{j0}} |\nabla u_j^n|^2 d\mathbf{r} \right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\int\limits_{\Omega_{j0}} \rho_0(\mathbf{r})\, |\nabla u_j^n|^2\, d\mathbf{r} \right)^{1/2}, \tag{7.10}$$

где $A = \inf\limits_{\mathbf{r} \in Q_m} \rho_0(\mathbf{r}) > 0$. Поэтому из условия $U_n \in B$ и оценки (7.9) следует, что U_n принадлежит некоторому шару гильбертова пространства $H_m = W_{2,0}^1(Q_m \cap \Omega_{10}) \times W_{2,0}^1(Q_m \cap \Omega_{20})$, т. е. слабо компактному множеству. Индукцией по m построим теперь подпоследовательность $\{u_n\}$, слабо сходящуюся в любом из H_m. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что эта подпоследовательность совпадает с $\{u_n\}$.

Пусть пара (φ_1, φ_2) принадлежит $C_{0,\gamma_1}^{(\infty)}(\Omega_{10}) \times C_{0,\gamma_2}^{(\infty)}(\Omega_{20})$, тогда $\operatorname{supp} \varphi_j \subset Q_m \cap \Omega_{j0}$ при $j = 1, 2$ и некотором $m \geqslant 1$. Поэтому

$$\int\limits_{\Omega_{j0}} \nabla u_j^n \nabla \varphi_j d\mathbf{r} = \int\limits_{\operatorname{supp} \varphi_j} \nabla u_j^n \nabla \varphi_j\, d\mathbf{r} = \int\limits_{Q_m \cap \Omega_{j0}} \nabla u_j^n \nabla \varphi_j\, d\mathbf{r}.$$

Последний интеграл согласно выбору $\{u_n\}$ стремится при $n \to \infty$ к некоторому конечному числу.

Таким образом, $\{U_n\}$ определяет на H_0 последовательность функционалов, слабо сходящуюся на плотном в этом пространстве множестве $C_{0,\gamma_1}^{(\infty)}(\Omega_{10}) \times C_{0,\gamma_2}^{(\infty)}(\Omega_{20})$. Но тогда из теоремы Банаха — Штейнгауза следует, что нормы $\|U_n\|_{H_0}$ ограничены в совокупности некоторой постоянной, т. е. все U_n принадлежат некоторому слабо компактному множеству в H_0. Поэтому в $\{U_n\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой паре функций $U_* = (u_1^*, u_2^*)$ из H_0.

Элемент U_* из H_0 искомый, т. е. удовлетворяет следующим двум условиям:

$$p(U_*) \leqslant 1, \quad b(U_*) = q_*/2. \tag{7.11}$$

Для доказательства свойства (7.11) нам понадобятся оценки

$$\int\limits_S \rho_0(\mathbf{r})\, |\nabla u_j^*|^2\, d\mathbf{r} \leqslant \lim_{n \to \infty} \int\limits_S \rho_0(\mathbf{r})\, |\nabla u_j^n|^2 d\mathbf{r} \quad (j = 1, 2). \tag{7.12}$$

Получим (7.12) только при $j = 1$, так как при $j = 2$ рассуждения аналогичны.

Выберем последовательность $\{\omega_m\}$ сферических луночек, вложенных одна в другую, проходящих через часть s_{21} границы S и в пределе стремящихся к s_{21}. По лемме 6.1

$$\left(\int\limits_{S\setminus\omega_m} \rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla(u_1^* - u_1^n)|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2} \leqslant K\left(\int\limits_{\Omega_{10}} |u_1^* - u_1^n|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2}, \quad (7.13)$$

где K не зависит от m. Из слабой сходимости U_n к U_* в H_0 следует, что u_1^* слабо сходится к u_1^* в $G_{2,0}^1(\Omega_{10})$. Пространство $W_2^1(\Omega_{10})$ вложено в $L_2(\Omega_{10})$ вполне непрерывно. Поэтому можно считать, что u_1^n сходится к u_1^n по норме $L_2(\Omega_{10})$. Пользуясь теперь очевидным неравенством

$$\left(\int\limits_{S\setminus\omega_m} \rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla u_1^*|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} \leqslant \left(\int\limits_{S\setminus\omega_m} \rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla(u_1^* - u_1^n)|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2} + \\ + \left(\int\limits_{S\setminus\omega_m} \rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla u_1^n|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2}$$

и переходя в (7.13) к пределу по $n \to \infty$, получим

$$\int\limits_{S\setminus\omega_m} \rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla u_1^*|^2\,d\mathbf{r} \leqslant \lim_{n\to\infty} \int\limits_S \rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla u_1^n|^2\,d\mathbf{r}.$$

Устремляя здесь m к бесконечности, будем иметь в пределе оценку (7.12) для $j = 1$. Из определения $p(U)$, оценки (7.12) и условия $U_n \in B$ следует неравенство $p(U_*) \leqslant 1$, т. е. первое из свойств (7.11) доказано.

Проверим, что $b(U_*) = q_*/2$, но сначала вычислим предел последовательности $b(U_* - U_n)$ при $n \to \infty$. Через окружность C_ε проведем какой-нибудь шар такой, что часть его границы лежит внутри S. Этот кусок сферической поверхности разбивает S на две непересекающиеся части ненулевого объема: $S = S_1 \cup S_2$. Для определенности будем считать, что S_1 примыкает к части s_{12} границы S, а S_2 — к части s_{21}. Далее, интеграл по S в определении $b(\cdot)$ разобьем в сумму интегралов по S_1 и S_2:

$$b(U^* - U_n) = \int\limits_{S_1} \rho_0(\mathbf{r})\,\nabla(u_1^* - u_1^n)\,\nabla(u_2^* - u_2^n)\,d\mathbf{r} + \\ + \int\limits_{S_2} \rho_0(\mathbf{r})\,\nabla(u_1^* - u_1^n)\,\nabla(u_2^* - u_2^n)\,d\mathbf{r}. \quad (7.14)$$

Применив к каждому из слагаемых в правой части (7.14) неравенство Гельдера, получим

$$\left|\int\limits_{S_j} \rho_0(\mathbf{r})\,\nabla(u_1^* - u_1^n)\,\nabla(u_2^* - u_2^n)\,d\mathbf{r}\right| \leqslant \\ \leqslant \left(\int\limits_{S_j} \rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla(u_1^* - u_1^n)|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2} \left(\int\limits_{S_j} \rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla(u_2^* - u_2^n)|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2} \quad (j = 1, 2). \quad (7.15)$$

Оба сомножителя в правой части (7.15) ограничены равномерно по n. Это следует из уже установленного неравенства $p(U_*) \leqslant 1$ и условия $p(U_n) = 1$.

Кроме того, при фиксированном j в соответствии с выбором множеств S_1 и S_2 к одному из сомножителей в (7.15) применима оценка (6.3), в силу которой

$$\left(\int\limits_{S_j} \rho_0(\mathbf{r})\,|\nabla(u_j^* - u_j^n)|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2} \leqslant K\left(\int\limits_{\Omega_{j0}} |u_j^* - u_j^n|^2\,d\mathbf{r}\right)^{1/2} \quad (j = 1, 2). \quad (7.16)$$

Как уже отмечалось, u_j^n сходится к u_j^* по норме $L_2(\Omega_{j0})$. Значит, как следует из (7.14) — (7.16), последовательность $b(U_* - U_n)$ сходится при $n \to \infty$ к нулю.

Заметим теперь, что имеет место следующее алгебраическое равенство:

$$b(U_* - U_n) = b(U_*) + b(U_n) - \int_S \rho_0(\mathbf{r}) \left(\nabla u_1^* \nabla u_2^n + \nabla u_1^n \nabla u_2^*\right) d\mathbf{r}. \quad (7.17)$$

Вычислим предел при $n \to \infty$ его правой части. Учитывая, что $p(U_*) \leqslant 1$, $p(U_n) = 1$ и U_n слабо сходится к U_* в H_0, получаем

$$\int_S \rho_0(\mathbf{r}) \nabla u_1^* \nabla u_2^n \, d\mathbf{r} \to b(U_*) \text{ при } n \to \infty,$$

$$\int_S \rho_0(\mathbf{r}) \nabla u_1^n \nabla u_2^* \, d\mathbf{r} \to b(U_*) \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, искомый предел правой части (7.17) равен $(q_*/2 - b(U_*))$. Так как левая часть (7.17) при этом стремится к нулю, то $b(U_*) = q_*/2$. Таким образом, формула (7.11) доказана полностью.

Докажем, наконец, что $q_* < 1$. Предположим противное, т. е. что $q_* = 1$. (Напомним, что заведомо справедливо неравенство $0 < q_* \leqslant 1$. Имеем

$$b(U_*) = \int_S \rho_0(\mathbf{r}) \nabla u_1^* \nabla u_2^* \, d\mathbf{r} \leqslant \int_S \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1^*| \, |\nabla u_2^*| \, d\mathbf{r} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_S \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1^*|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} \left(\int_S \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_2^*|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\int_S \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_1^*|^2 d\mathbf{r} + \int_S \rho_0(\mathbf{r}) |\nabla u_2^*|^2 d\mathbf{r}\right) \leqslant \frac{1}{2} p^2(U^*) \leqslant \frac{1}{2}. \quad (7.18)$$

Первые два из содержащихся здесь неравенств очевидны, третье получается из неравенства Гёльдера, следующее за ним выводится из известного числового неравенства $2ab \leqslant a^2 + b^2$. Согласно предположению $q_* = 1$, т. е. $b(U_*) = q_*/2 = 1/2$. Поэтому во всей цепочке соотношений (7.18) имеет место знак точного равенства. Отсюда, в частности, заключаем, что

$$\operatorname{sign} \nabla u_1^*(\mathbf{r}) = \operatorname{sign} \nabla u_2^*(\mathbf{r}) \text{ при } \mathbf{r} \in S. \quad (7.19)$$

Известно, что в неравенстве Гёльдера знак точного равенства возможен только тогда, когда сомножители пропорциональны. В нашем случае это означает, что найдется постоянная λ с условием $|\nabla u_1^*(\mathbf{r})| = \lambda |\nabla u_2^*(\mathbf{r})|$ для всех $\mathbf{r}$ из S. Отсюда и из (7.19) следует, что при $\mathbf{r}$ из S имеют место равенства

$$\nabla(u_1^* - \lambda u_2^*) = 0, \quad u_1^* = \lambda u_2^* + A, \quad (7.20)$$

где A — некоторая постоянная. Выберем в S последовательность точек $\mathbf{r}_n$, стремящихся в пределе к точке, лежащей на окружности C_ε. В силу (7.20) $u_1(\mathbf{r}_n) = \lambda u_2(\mathbf{r}_n) + A$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что функции u_1, u_2 обращаются в нуль на C_ε, видим, что A равно нулю. Таким образом, $u_1^* = \lambda u_2^*$ в S. Но функция u_1^* принадлежит $G^1_{2,0}(\Omega_{10})$, а λu_2^* — элемент пространства $G^1_{2,0}(\Omega_{20})$. Поэтому функция $u_1^* = \lambda u_2^*$ лежит в пересечении этих двух пространств. Это возможно лишь в случае $u_1^* = u_2^* = 0$. Но тогда $q_* = 2b(U_*) = 0$, что противоречит предположению $q_* = 1$. Значит, на самом деле $q_* < 1$. Теорема доказана.

§ 8. СХОДИМОСТЬ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ

Перейдем к решению вопроса о сходимости приближений, построенных по одному из способов, описанных в § 2 и 4, к точному решению исходной задачи Дирихле. Основным аналитическим инструментом исследования будет при этом служить оценка (7.2).

Итак, пусть u — решение исходной задачи Дирихле и пара функций $U=(u_1(\mathbf{r}),\ u_2(\mathbf{r}))$ соответствует ему в силу формулы (2.1). Пусть, далее, $N=(N_1,\ N_2)$ — мультииндекс с натуральными координатами, а вектор-столбец $\mathbf{c}_N=\left(\mathbf{c}_{N_1}^{(1)},\ \mathbf{c}_{N_2}^{(2)}\right)$ — произвольный элемент $R^{N_1+N_2}$. Составляющие его вектор-столбцы имеют высоту N_1 и N_2 соответственно:

$$\mathbf{c}_{N_j}^{(j)}=\left(c_1^{(j)},\ c_2^{(j)},\ \ldots,\ c_{N_j}^{(j)}\right)\quad (j=1,2).$$

Сопоставим взятому вектору $\mathbf{c}_N$ две гармонические функции $u_{N_1}^{(1)}(\mathbf{r})$ и $u_{N_2}^{(2)}(\mathbf{r})$, определенные в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно следующими равенствами:

$$\begin{aligned} u_{N_1}^{(1)}(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^{N_1} c_j^{(1)} u_j^{\mathrm{I}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}\in\Omega_1,\\ u_{N_2}^{(2)}(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^{N_2} c_j^{(2)} u_j^{\mathrm{II}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}\in\Omega_2. \end{aligned}\tag{8.1}$$

Будем считать, что $u_{N_j}^{(j)}(\mathbf{r})$ аппроксимирует функцию $u_j(\mathbf{r})$ в области Ω_j, $j=1,\ 2$. Вектор $\mathbf{c}_N$, как и соответствующую ему по формуле (8.1) пару функций $U_N=\left(u_{N_1}^{(1)}(\mathbf{r}),\, u_{N_2}^{(2)}(\mathbf{r})\right)$, назовем *интерполяционным*. Правые части в равенствах (8.1) также будем называть *интерполяционными формулами.*

Оценим качество приближения элемента $U=(u_1(\mathbf{r}),\ u_2(\mathbf{r}))$ интерполяционной парой $U_N=\left(u_{N_1}^{(1)}(\mathbf{r}),\, u_{N_2}^{(2)}(\mathbf{r})\right)$, соответствующей вектору коэффициентов $\mathbf{c}_N$. Образовав разность $U-U_N=\left(u_1-u_{N_1}^{(1)},\ u_2-u_{N_2}^{(2)}\right)$ и применив к ней оценку (7.2), получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2\left\{\int_{\Omega_{10}}\rho_0(\mathbf{r})\left|\nabla\left(u_1-u_{N_1}^{(1)}\right)\right|^2 d\mathbf{r}+\int_{\Omega_{20}}\rho_0(\mathbf{r})\left|\nabla\left(u_2-u_{N_2}^{(2)}\right)\right|^2 d\mathbf{r}\right\}&\leqslant\\ \leqslant\int_{\Omega_3}\left|\nabla\left(u_1-u_{N_1}^{(1)}-u_2+u_{N_2}^{(2)}\right)\right|^2 d\mathbf{r}.& \end{aligned}\tag{8.2}$$

Напомним, что присутствующая здесь весовая функция $\rho_0(\mathbf{r})$ строится по формуле $\rho_0(\mathbf{r})=(z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-\varepsilon)^2)^{4/3}$. Согласно равенству (2.1) при любом $\mathbf{r}$ из Ω_3 справедлива формула $u_1(\mathbf{r})-u_2(\mathbf{r})=f_2(\mathbf{r})-f_1(\mathbf{r})$. Подставляя ее в (8.2) и вспоминая определение (2.4) функционала $F(\cdot)$, видим, что интеграл в правой части (8.2) совпадает со значением $F(\cdot)$ на элементе U_N пространства H.

Таким образом, оценку (8.2) можно записать как неравенство

$$\|U-U_N\|_{1,H}^2\leqslant\frac{1}{\sigma_1^2}F(U_N)\tag{8.3}$$

или, используя обозначение

$$\theta_N^{(0)}=F(U_N)/\|f\|^2,\tag{8.4}$$

где

$$\|f\|^2=\int_{\Omega_3}|\nabla f_1|^2 d\mathbf{r}+\int_{\Omega_3}|\nabla f_2|^2 d\mathbf{r}\Big)\tag{8.5}$$

в другом, эквивалентном прежнему, виде

$$\| U - U_N \|_{1,H}^2 \leqslant \frac{1}{\sigma_1^2} \| f \|^2 \theta_N^{(0)}. \tag{8.6}$$

Числовой параметр $\theta_N^{(0)}$ естественно назвать *невязкой процесса минимизации функционала* $F(\cdot)$ *на пространстве* H_N. Можно сказать, таким образом, что оценка (8.6) выражает непрерывную в определенном смысле зависимость качества интерполяции от величины невязки $\theta_N^{(0)}$.

От интегральной оценки качества интерполяции можно перейти к поточечной. Покажем, как это сделать. Пусть z_0 — точка на оси симметрии $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, лежащая внутри одной из компонент Ω_j, $j = 1, 2$. Будем для определенности считать, что z_0 лежит внутри Ω_{10}. Рассмотрим множество шаров с центрами в z_0, лежащих целиком в Ω_{10}. Через $B(z_0)$ обозначим максимальный элемент этого множества. Его радиус обозначим R_0. Пусть числовой параметр $R_1 = R_1(z_0)$ равен R_0, если шар $B(z_0)$ и окружность C_ε не имеют общих точек. Если же C_ε лежит на границе $B(z_0)$, то будем считать, что $R_1(z_0)$ строго меньше R_0. Далее, через $B_1(z_0)$ обозначим шар с центром в z_0 и радиусом $R_1 = R_1(z_0)$. В силу определения $B_1(z_0)$ вложен в Ω_{10}, причем величина

$$D = D(z_0) = \inf_{\mathbf{r} \in B_1(z_0)} \rho_0(\mathbf{r})$$

строго положительна. Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\int\limits_{B_1(z_0)} | \nabla (u_1 - u_{N_1}^{(1)}) |^2 \, d\mathbf{r} \leqslant \frac{1}{D(z_0)} \int\limits_{B_1(z_0)} \rho_0(\mathbf{r}) | \nabla (u_1 - u_{N_1}^{(1)}) |^2 \, d\mathbf{r} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{D(z_0)} \| U - U_N \|_{1,H} \leqslant \frac{\| f \|^2}{D(z_0)\, \sigma_1^2} \theta_N^{(0)}. \tag{8.7}$$

Взяв в формуле (3.3) R равным $R_1(z_0)$, построим две числовые последовательности $\mathbf{u}_1(z_0)$ и $\mathbf{u}_{N_1}(z_0)$. Пользуясь оценкой (3.4), доказанной в теореме 3.1, а также оценкой (8.7), получим

$$\| \mathbf{u}_1(z_0) - \mathbf{u}_{N_1}(z_0) \|_2^2 \leqslant K \int\limits_{B_1(z_0)} | \nabla (u_1 - u_{N_1}^{(1)}) |^2 \, d\mathbf{r} \leqslant K \frac{\| f \|^2}{D(z_0)\, \sigma_1^2} \theta_N^{(0)}. \tag{8.8}$$

Таким образом, качество интерполяции в точке z_0 на оси симметрии Ω также непрерывно зависит от величины невязки $\theta_N^{(0)}$. Ясно при этом, что оценка, аналогичная (8.8), имеет место и в случае, когда z_0 лежит внутри Ω_{20}.

Вычислив с необходимой точностью вектор $\mathbf{u}_1(z_0)$, мы легко сможем аппроксимировать функцию $u_1(\mathbf{r})$ не только в точках оси z, но и во всем шаре $B_1(z_0)$. Для этого достаточно ввести локальные сферические координаты с центром в z_0, а затем воспользоваться равенствами (3.7) и (3.11), полученными раньше при доказательстве теоремы 3.1. Таким образом, задачу Дирихле можно приближенно решить в некоторой окрестности точки z_0, а значит, и в окрестности всей оси z.

Перейдем к оценке качества приближения элемента U интерполяционной парой U_N через параметр $\theta_N^{(1)}$, определенный в § 4 равенством (4.21). Для этого установим, что $\theta_N^{(1)}$ связан с $\theta_N^{(0)}$ формулой

$$\theta_N^{(0)} = | \theta_N^{(1)} |^2 \frac{d}{\| f \|^2}, \tag{8.9}$$

где норма $\|f\|$ определена равенством (8.5), а

$$d = \int\limits_{\Omega_3} | \nabla (f_1 - f_2) |^2 \, d\mathbf{r}. \tag{8.10}$$

Докажем равенство (8.9). Пусть, как и прежде в этом параграфе, $\mathbf{c}_N = \left(\mathbf{c}_{N_1}^{(1)},\ \mathbf{c}_{N_2}^{(2)}\right)$ — произвольный вектор из $R^{N_1+N_2}$, в соответствие которому по формуле (8.1) поставлена интерполяционная пара $U_N = \left(u_{N_1}^{(1)}(\mathbf{r}),\ u_{N_2}^{(2)}(\mathbf{r})\right)$. Тогда в соответствии с равенствами (2.10) и (4.15) имеем

$$F(U_N) = (A_N\mathbf{c}_N,\ \mathbf{c}_N) - 2(\mathbf{b}_N,\ \mathbf{c}_N) + d,$$

$$F_1(U_N) = \left(B_N^* B_N \mathbf{c}_N,\ \mathbf{c}_N\right) - 2\left(B_N^*\mathbf{b}, \mathbf{c}_N\right) + \|\mathbf{b}\|_2^2. \qquad (8.11)$$

Числовой параметр d из первого равенства определен соотношением (8.10). Из (8.11) следует, в частности, что

$$A_N = B_N^* B_N, \quad \mathbf{b}_N = B_N^*\mathbf{b}, \quad d = \|\mathbf{b}\|_2^2. \qquad (8.12)$$

Применив последовательно равенства (4.14) и (4.21), представим $F_1(U_N)$ через $\theta_N^{(1)}$:

$$F_1(U_N) = \|B_N\mathbf{c}_N - \mathbf{b}\|_2^2 = |\theta_N^{(1)}|^2 \|\mathbf{b}\|_2^2. \qquad (8.13)$$

Далее, согласно определению (8.4)

$$F(U_N) = \theta_N^{(0)} \|f\|^2. \qquad (8.14)$$

Но значение функционала F_1 на U_N по определению совпадает с соответствующей правой частью равенства (4.6), т. е. $F_1(U_N) = F(U_N)$. Поэтому совпадают и правые части равенств (8.13) и (8.14), т. е.

$$\theta_N^{(0)} = |\theta_N^{(1)}|^2 \frac{\|\mathbf{b}\|_2^2}{\|f\|^2}. \qquad (8.15)$$

Отсюда и из (8.12) получаем требуемое соотношение (8.9).

Из (8.9), в частности, следует, что

$$\theta_N^{(0)} \leqslant |\theta_N^{(1)}|^2. \qquad (8.16)$$

Подставляя это неравенство в (8.6) и (8.8), приходим к искомой оценке качества интерполяции через параметр $\theta_N^{(1)}$.

Оценим, наконец, качество приближения элемента U интерполяционной парой U_N в зависимости от параметра $\theta_N^{(2)}$, определенного в конце § 4 равенством (4.25). Установим сначала, как связаны между собой величины $\theta_N^{(2)}$ и $\theta_N^{(1)}$. Чтобы записать соответствующую формулу, нам нужны некоторые предварительные рассуждения.

Пусть X обозначает пространство $G_2^1(\Omega_3)$, а $X_N(f)$ — его подпространство, натянутое на множество функций

$$\{u_j^{(1)}(\mathbf{r}),\ j = \overline{1, N_1}\} \cup \{u_k^{(2)}(\mathbf{r}),\ k = \overline{1, N_2}\} \cup \{f(\mathbf{r})\}.$$

Ясно, что $X_N(f)$ конечномерно. Поэтому оператор $T_3^+(z)$, определенный в § 4, ограничен на $X_N(f)$. Иными словами, найдется такое число $\sigma_2 = \sigma_2(N, f)$, что для любой функции $v_3(\mathbf{r})$ из $X_N(f)$ справедлива оценка

$$\|T_3^+(z)\, v_{3,*}(z)\|_2^2 \leqslant \sigma_2(N, f)\, \|v_{3,*}(z)\|_2^2. \qquad (8.17)$$

Здесь $v_{3,*}(z)$ обозначает, как и раньше, след функции v_3 в точке z, соответствующий значению нормировочного параметра R, равному $R_3(z)$. Более подробно о последовательности $v_{3,*}(z)$ написано в § 4.

Отношение $\theta_N^{(1)}/\theta_N^{(2)}$, как оказывается, не превосходит некоторой числовой грани, зависящей от σ_2. Более точно,

$$\frac{\theta_N^{(1)}}{\theta_N^{(2)}} \leqslant \sigma_2^{1/2}(N, f)\, \frac{\|f_*(z)\|_2}{d^{1/2}}, \qquad (8.18)$$

Здесь d определяется равенством (8.10), а $f_*(z)$ — след функции $f(\mathbf{r})$ в точке z, построенный по тому же правилу, что и $v_{3,*}(z)$.

Докажем (8.18). Функция $v_3 = u_{N_1}^{(1)} - u_{N_2}^{(2)} + f$, где $u_{N_1}^{(1)}$ и $u_{N_2}^{(2)}$ образуют интерполяционную пару U_N, принадлежит, очевидно, пространству $X_N(f)$. Применив к ней неравенство (8.17) и пользуясь определениями функционалов $F_1(\cdot)$ и $F_2(\cdot)$ из § 4, получим

$$F_1(U_N) \leqslant \sigma_2(N, f) F_2(U_N). \tag{8.19}$$

Далее согласно определению параметров $\theta_N^{(1)}$ и $\theta_N^{(2)}$ имеем

$$\theta_N^{(1)} = \frac{[F_1(U_N)]^{1/2}}{\|\mathbf{b}\|_2}, \quad \theta_N^{(2)} = \frac{[F_2(U_N)]^{1/2}}{\|f_*(z)\|_2}. \tag{8.20}$$

Здесь вектор $\mathbf{b}$ равен $T_3(z) f_*(z)$ и согласно (8.12) норма $\|\mathbf{b}\|_2$ равна $d^{1/2}$. Отсюда в силу (8.19), (8.20) имеем требуемое неравенство (8.18).

Подставляя оценку (8.18) в (8.9), получим

$$\theta_N^{(0)} \leqslant \sigma_2(N, f) \frac{\|f_*(z)\|_2^2}{\|f\|^2} |\theta_N^{(2)}|^2. \tag{8.21}$$

Из (8.6), (8.8) и (8.21) легко следует искомая оценка точности интерполяции через $\theta_N^{(2)}$.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о сходимости интерполяционных сумм (8.1) к точным функциям $u_1(\mathbf{r})$ и $u_2(\mathbf{r})$. Пусть вектор $\mathbf{c}_N$ интерполяционных коэффициентов получается как решение системы (2.13) или, что то же самое, системы (4.16). Исследуем, как при этом предположении ведут себя последовательности $\{\theta_N^{(0)}\}$ и $\{\theta_N^{(1)}\}$.

Как известно, последовательность приближений по Ритцу в случае положительного оператора сходится к точному решению по энергетической норме [23, с. 193]. Применив это утверждение к функционалу $F(\cdot)$, получим, что $F(U_N)$ сходится при $N \to \infty$ к значению $F(U)$, равному нулю. При этом из (8.4) и (8.9) следует, что к нулю стремится как последовательность $\theta_N^{(0)}$, так и последовательность $\theta_N^{(1)}$.

Из этого замечания и оценки (8.6) заключаем, что последовательность интерполяционных пар U_N сходится к U по норме $\|\cdot\|_{1,H}$, которая, как уже отмечалось, слабее нормы $\|\cdot\|_H$, порождаемой в H скалярным произведением. Кроме того, из (8.8) следует и поточечная сходимость.

Рассмотрим теперь последовательность $\theta_N^{(2)}$. Возьмем в качестве вектора интерполяционных коэффициентов $\mathbf{c}_N$ решение системы

$$A_N^* A_N \mathbf{c}_N = A_N^* \cdot \mathbf{b}, \tag{8.22}$$

построенной по тому же правилу, что и система (4.16), но при дополнительном условии, что оператор $T_3(z)$, использованный при выводе (4.16), является тождественным. Тогда интерполяционная пара U_N представляет собой приближение по Ритцу положительного оператора, соответствующего функционалу $F_2(\cdot)$. Тем самым U_N сходится к U по энергетической норме, т. е. $F_2(U_N)$ стремится к значению $F_2(U)$, равному нулю. Из (8.20) заключаем, что и $\theta_N^{(2)}$ в пределе есть нуль.

Пусть U_N — интерполяционная пара, соответствующая решению $\mathbf{c}_N$ системы (8.12). Тогда оценки (8.6), (8.8) и (8.21) дают возможность вывести достаточное условие сходимости U_N к U по норме $\|\cdot\|_{1,H}$ либо поточечно. Именно эта сходимость имеет место, если

$$\sigma_2(N, f) |\theta_N^{(2)}|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{8.23}$$

Условие (8.23) заведомо выполнено, когда оператор $T_3(z)$, о котором мы уже вспоминали при выводе системы (8.22), ограничен. В этом случае последовательность $\sigma_2(N, f)$ имеет конечный верхний предел, а $\theta_N^{(2)}$, как уже доказано, сходится к нулю. Поэтому (8.23) действительно имеет место.

В заключение обсудим коротко, как влияет на точность интерполяции величина параметра ε — радиуса окружности C_ε, по которой пересекаются поверхности множеств Ω_1 и Ω_2. Заметим, что при $\varepsilon \to 0$ величина σ_1 в неравенстве (8.2) также может неограниченно уменьшаться. Но тогда постоянный сомножитель, стоящий в правой части (8.6) перед $\theta_N^{(0)}$, неограниченно возрастает. Таким образом, если требуется некоторый фиксированный уровень точности интерполирования, то при уменьшении ε необходимо увеличивать размерность системы линейных уравнений, решением которой является вектор интерполяционных коэффициентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа.— М.: Наука, 1986.— 744 с.
2. **Белых В. Н.** Численные алгоритмы без насыщения в нестационарных задачах гидродинамики идеальной жидкости со свободными границами // Вычислительные проблемы в задачах математической физики.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.— С. 3—66.— (Тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 11).
3. **Волков Е. А.** Развитие метода квадратур для уравнения Лапласа и конформных отображений // Тр. Мат. ин-та В. А. Стеклова АН СССР.— 1987.— Т. 180.— С. 83—85.
4. **Ильин В. П.** Численные методы решения задач электрофизики.— М.: Наука, 1985.— 335 с.
5. **Лебедев В. И., Агошков В. И.** Операторы Пуанкаре — Стеклова и их приложения в анализе.— М.: Отдел вычислительной математики АН СССР, 1983.— 184 с.
6. **Рябенький В. С.** Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред.— М.: Наука, 1987.— 320 с.
7. **Иванов В. Я.** Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Часть I. Алгоритмы расчета физических полей.— Новосибирск: Изд. ИМ СО АН СССР, 1986.— 194 с.
8. **Волков Е. А.** Экспоненциально сходящийся метод решения уравнения Лапласа на многоугольниках // Мат. сб.— 1979.— Т. 109, вып. 3.— С. 323—354.
9. **Власов А. Г., Шапиро Ю. А.** Методы расчета эмиссионных электронно-оптических систем.— Л.: Машиностроение, 1974.— 184 с.
10. **Шаманский В. Е.** Приближенный метод решения задач Дирихле для уравнения Лапласа // ДАН СССР.— 1955.— Т. 100, № 6.— С. 1049—1052.
11. **Курзин В. Б.** Об одном методе склеивания для решения линейных краевых задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1969.— Т. 9, № 5.— С. 1184—1188.
12. **Смелов В. В.** Обоснование итерационного процесса по подобластям для задач теории переноса в нечетном P_{2N+1}-приближении.— Новосибирск, 1980.— 27 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычисл. центр; № 71).
13. **Смелов В. В., Кутов В. П.** Обобщение итерационного процесса по подобластям для задач теории переноса в произвольном P_N-приближении.— Новосибирск, 1982.— 11 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычисл. центр; № 386).
14. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1971.— 416 с.
15. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач.— М.: Наука, 1974.— 480 с.
16. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики.— М.: Наука, 1973.— 408 с.
17. **Функциональный** анализ/Под. ред. С. Г. Крейна.— М.: Наука, 1964.— 424 с.
18. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.— 288 с.
19. **Лебедев Н. Н.** Специальные функции и их приложения.— М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963.— 359 с.
20. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М.: Наука, 1964.— 539 с.
21. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул.— М.: Наука, 1974.— 808 с.
22. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962.— 256 с.
23. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.— 512 с.