О. П. КИРИЛЮК

УПРОЩЕНИЕ СТРУКТУРЫ ЛЕНТОЧНЫХ МАТРИЦ

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается применение специального класса ортогональных преобразований — цепочек двумерных вращений для упрощения структуры ленточных матриц.

Определение так называемых k-нижнегессенберговых матриц, которые являются обобщением понятия нижнетреугольных и нижнегессенберговых матриц, вводится в § 1. Там же дается родственное понятие k-верхнегессенберговых матриц. Матрица, являющаяся одновременно k-нижнегессенберговой и l-верхнегессенберговой,— ленточная, $(k+l-1)$ — диагональная.

Теоремы 2.1—2.3 о сохранении и упрощении структуры k-нижнегессенберговых матриц доказаны в § 2. Аналогичные теоремы верны и для k-верхнегессенберговых матриц.

Применению теорем 2.1—2.3 из § 2 для так называемой процедуры исчерпывания двухдиагональных и трехдиагональных матриц посвящен § 3. Рекуррентное применение процедуры исчерпывания позволяет строить ортогональный базис из собственных векторов симметричной трехдиагональной матрицы или сингулярных векторов двухдиагональных матриц.

Использование цепочек двумерных вращений для исчерпывания симметричных трехдиагональных и двухдиагональных матриц рассмотрено в работах Рутисхаузера Н. [1], Голуба Г. и Кахана У. [2]. Анализ погрешностей соответствующих процедур проведен Митченко А. Д. [3]. В данной работе приводится новое обоснование этих процедур, причем доказательства обоих видов исчерпывания однотипны. Теоремы 3.1—3.5 могут служить основой анализа погрешностей исчерпывания.

Применение цепочек двумерных вращений для уменьшения числа диагоналей ленточной матрицы описывалось Рутисхаузером в [1]. Теорема 2.2 позволяет получить другое обоснование предложенных в [1] процедур. Однако здесь эти вопросы не рассматриваются.

Автор выражает искреннюю благодарность Годунову С. К. и Костину В. И. за помощь при выполнении данной работы.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, НЕСКОЛЬКО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЛЕММ

Пусть квадратная $(N\times N)$-матрица A с вещественными элементами a_{ij} имеет следующую структуру:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & & \\ a_{21} & & \ldots & a_{2,k+1} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{N-k+1,1} & & \ldots & & a_{N-k+1,N} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{N1} & & \ldots & & a_{NN} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

т. е. элементы матрицы A удовлетворяют условию

$$a_{ij}=0 \text{ при } i-j+k\geqslant 0. \tag{1.2}$$

Определение 1. Матрицу A, имеющую структуру (1.1), будем называть k-нижнегессенберговой.

Определение 2. Матрицу A, сопряженная к которой A^* является k-нижнегессенберговой, будем называть k-верхнегессенберговой.

В частности, согласно определениям 1- и 2-нижнегессенберговая (в обычном смысле) матрица является 2-нижнегессенберговой, а верхнетреугольная — 1-верхнегессенберговой.

Хотя определения 1, 2 имеют смысл при $-N \leqslant k \leqslant N$, в дальнейшем без дополнительных оговорок будем предполагать, что $1 \leqslant k < N$.

Пусть матрицы C_i $(2 \leqslant i \leqslant N)$ имеют вид

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & c_i & -s_i & & \\ & 0 & s_i & c_i & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \text{i-я строка,} \tag{1.3}$$

где $c_i^2 + s_i^2 = 1$.

Определение 3. Матрицу

$$C = C_N \ldots C_2 \tag{1.4}$$

будем называть цепочкой двумерных вращений, определяемой параметрами c_i, s_i $(2 \leqslant i \leqslant N)$.

Замечание 1. Непосредственным перемножением матриц получаем, что C — 2-нижнегессенберговая:

$$C = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & & & 0 \\ s_2c_3 & c_2c_3 & -s_3 & & \\ s_2s_3c_4 & c_2s_3c_4 & c_3c_4 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \\ s_2s_3\ldots s_{N-1}c_N & c_2s_3\ldots s_{N-1}c_N & \ldots & c_{N-1}c_N & -s_N \\ s_2s_3\ldots s_{N-1}s_N & c_2s_3\ldots s_{N-1}s_N & \ldots & c_{N-1}s_N & c_N \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Определение 4. Будем говорить, что цепочка C поляризует вектор $u=(u_1, u_2, \ldots, u_N)^T$, если параметры c_i, s_i, определяющие цепочку двумерных вращений C, подобраны так, что имеет место равенство

$$Cu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm\|u\| \end{pmatrix} = \pm\|u\| e^{N]}. \tag{1.6}$$

Введем векторы $u^{(i)}$ согласно следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} & u^{(1)} = u, \\ & u^{(i)} = C_i u^{(i-1)} = C_i C_{i-1} \ldots C_2 u \quad (2 \leqslant i \leqslant N). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Лемма 1.1. *Если цепочка C поляризует вектор u, то векторы $u^{(i)}$, введенные согласно* (1.7), *имеют вид*

$$u^{(i)} = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} i-1 \\ \tilde{u}_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

где

$$|\tilde{u}_i| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_i^2}. \tag{1.9}$$

Доказательство. Применение C_j к вектору изменяет только его $(j-1)$-ю и j-ю компоненты, оставляя остальные без изменения (см. (1.3)). Поэтому первые $i-1$ компоненты векторов $\pm\|u\|e^N = u^{(N)}, \ldots$ $\ldots, u^{(i+1)}$ и последние $N-i$ компоненты $u = u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(i-1)}$ равны соответствующим компонентам вектора $u^{(i)}$, т. е. $u^{(i)}$ имеет вид (1.8). Кроме того, матрицы C_i ортогональны. Следовательно, $\|u\| = \|u^{(i)}\|$, откуда и получаем (1.9). Лемма доказана.

Замечание 2. Если цепочка C, определяемая параметрами c_i, s_i $(2 \leqslant i \leqslant N)$, поляризует вектор u, то для его компонент u_i верны представления

$$\begin{aligned}
u_1 &= \rho s_2 s_3 \ldots s_N, \\
u_2 &= \rho c_2 s_3 \ldots s_N, \\
&\vdots \\
u_i &= \rho c_i s_{i+1} \ldots s_N, \\
&\vdots \\
u_{N-1} &= \rho c_{N-1} s_N, \\
u_N &= \rho c_N,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где $|\rho| = \|u\|$. (Формулы (1.10) есть покомпонентная запись равенства $u = \pm\|u\|C^* e^N$, учитывающая (1.5).)

Лемма 1.2. *Если цепочка C поляризует вектор u, удовлетворяющий условию*

$$u_1^2 + \ldots + u_k^2 \neq 0, \tag{1.11}$$

то параметры s_i цепочки C, начиная с $(k+1)$-го, ненулевые:

$$s_{k+1} \neq 0, \ldots, s_N \neq 0. \tag{1.12}$$

Если же вместо (1.11) вектор u удовлетворяет условию

$$u_k \neq 0 \quad (k > 1), \tag{1.13}$$

то кроме (1.12) верно условие

$$c_k \neq 0. \tag{1.14}$$

Доказательство леммы 1.2 очевидно из представления (1.10) для вектора u.

Лемма 1.3. *Пусть матрица T имеет вид*

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & b_2 & & & \\ a_2 & d_2 & b_3 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & a_{N-1} & d_{N-1} & b_N \\ & & & a_N & d_N \end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

Причем выполнены условия

$$a_i \neq 0, \; b_i \neq 0 \quad (2 \leqslant i \leqslant N) \tag{1.16}$$

и w — собственный вектор матрицы T, отвечающий вещественному собственному значению λ. Тогда

$$w_1 \neq 0, \; w_N \neq 0. \tag{1.17}$$

Доказательство. По условию w — собственный вектор матрицы T. Поэтому

$$Tw - \lambda w = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned}
&(d_1 - \lambda) w_1 + b_2 w_2 = 0, \\
&a_2 w_1 + (d_2 - \lambda) w_2 + b_3 w_3 = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&a_{N-1} w_{N-2} + (d_{N-1} - \lambda) w_{N-1} + b_N w_N = 0, \\
&a_N w_{N-1} + (d_N - \lambda) w_N = 0.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Докажем (1.17) от противного. Предположим, что $w_1 = 0$. Тогда, учитывая (1.16) и первое из равенств (1.18), получим $w_2 = 0$. Воспользовавшись далее вторым из равенств (1.18), выводим $w_3 = 0$ и т. д. В итоге имеем $w_1 = w_2 = \ldots = w_N = 0$, что противоречит определению собственного вектора. Следовательно, $w_1 \neq 0$. Аналогично доказывается второе из неравенств (1.17). Лемма доказана.

Напомним известное (см., например, [4]) определение сингулярных чисел и сингулярных векторов.

Определение 5. Пусть D — произвольная $(N \times N)$-матрица, а ненулевые векторы u и v и число $\sigma \geqslant 0$ связаны равенствами

$$\begin{aligned} Du &= \sigma v, \\ D^* v &= \sigma u. \end{aligned} \qquad (1.19)$$

Число σ будем называть сингулярным числом матрицы D, а векторы u и v соответственно — правым и левым сингулярными векторами D, соответствующими σ.

Замечание 3. Из очевидной цепочки равенств:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{(u, D^* v)/\sigma} = \sqrt{(Du, v)/\sigma} = \sqrt{(v, v)} = \|v\|$$

следует, что нормы правого и левого сингулярных векторов, соответствующих ненулевому сингулярному числу, совпадают.

В дальнейшем через D будем обозначать матрицу следующего вида:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & b_2 & & & \\ & d_2 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{N-1} & b_N \\ & & & & d_N \end{bmatrix}. \qquad (1.20)$$

Для матрицы D вида (1.20) верны леммы.

Лемма 1.4. *Если элементы матрицы D удовлетворяют условиям*

$$d_i \neq 0 \ (1 \leqslant i \leqslant N), \ b_j \neq 0 \ (2 \leqslant j \leqslant N), \qquad (1.21)$$

то первые и последние компоненты правого u и левого v сингулярных векторов матрицы D, соответствующие любому ее сингулярному числу, ненулевые:

$$u_1 \neq 0, \ v_1 \neq 0, \ u_N \neq 0, \ v_N \neq 0. \qquad (1.22)$$

Лемма 1.5. *Если среди элементов d_i матрицы D есть хотя бы один нулевой, а все элементы b_j отличны от нуля, то существует единственный с точностью до множителя ненулевой вектор u, удовлетворяющий*

$$Du = 0. \qquad (1.23)$$

(Очевидно, u — правый сингулярный вектор D, соответствующий его нулевому сингулярному числу.) При этом первая компонента u отлична от нуля:

$$u_1 \neq 0. \qquad (1.24)$$

Доказательства лемм 1.4 и 1.5 полностью аналогичны доказательству леммы 1.3, и мы их опускаем.

Определение 6. Преобразование матрицы A по формуле $\bar{C}AC^*$, где $\bar{C}$ и C — цепочки двумерных вращений, поляризующие соответственно левый и правый сингулярные векторы A, будем называть сингулярным исчерпыванием матрицы A.

Определение 7. Преобразование матрицы A по формуле CAC^*, где C — цепочка, поляризующая собственный вектор матрицы A, соответствующий какому-либо ее вещественному собственному значению, будем называть спектральным исчерпыванием матрицы A.

Замечание 4. Сингулярным исчерпыванием, построенным по сингулярным векторам u и v, соответствующим сингулярному числу σ, матрица приводится к виду

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \dots & \times & 0 \\ \times & \times & \dots & \times & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \dots & \times & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \pm\sigma \end{bmatrix}, \qquad (1.25)$$

а спектральным исчерпыванием, построенным по собственному вектору w, соответствующему собственному значению λ, к виду

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \dots & \times & 0 \\ \times & \times & \dots & \times & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \dots & \times & 0 \\ \times & \times & \dots & \times & \lambda \end{bmatrix}. \qquad (1.26)$$

(Здесь крестами обозначены элементы, которые, вообще говоря, не являются нулевыми.)

Доказательство сформулированного утверждения состоит в покомпонентном сравнении правой и левой частей равенств

$$\bar{C}AC^*e^N = \pm\sigma e^N,$$

$$(\bar{C}AC^*)^*e^N = \pm\sigma e^N$$

или

$$CAC^*e^N = \lambda e^N,$$

непосредственно следующих из определения собственного и сингулярных векторов и учета равенства норм правого и левого сингулярных векторов в случае $\sigma \neq 0$ (см. замечание 3).

Замечание 5. Представления (1.25) и (1.26) матриц $\bar{C}AC^*$ и CAC^* соответственно останутся в силе, если $\bar{C}$ и C являются не цепочками двумерных вращений, а лишь произвольными ортогональными матрицами, удовлетворяющими условиям $\bar{C}v = \pm\|v\|e^N$, $Cu = \pm\|u\|e^N$ или условию $Cw = \pm\|w\|e^N$, где u, v и w — введенные выше сингулярные и собственный векторы матрицы A.

§ 2. УПРОЩЕНИЕ СТРУКТУРЫ k-НИЖНЕГЕССЕНБЕРГОВЫХ И k-ВЕРХНЕГЕССЕНБЕРГОВЫХ МАТРИЦ

В этом параграфе будет доказано, что упрощение структуры ленточных матриц может быть сведено к поляризации некоторых специальным образом подобранных векторов. Прежде всего докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть дана k-нижнегессенберговая матрица A и векторы u и v связаны равенством*

$$Au = v, \qquad (2.1)$$

причем

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{k+1}^2 \neq 0. \qquad (2.2)$$

Подберем цепочку C, поляризующую вектор u, и $\bar{C}$, поляризующую v. Тогда матрица $\bar{A} = \bar{C}AC^*$ будет k-нижнегессенберговой и, кроме того, первые $(N-1)$ элементов последнего столбца $\bar{A}$ будут нулевыми.

Доказательство. Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
&A^{(1)} = AC_2^* \dots C_k^*, \\
&A^{(i)} = \overline{C}_i A^{(i-1)} C_{i-1+k}^*, \quad 2 \leqslant i \leqslant N-k+1, \\
&A^{(i)} = \overline{C}_i A^{(i-1)}, \qquad\qquad N-k+1 < i \leqslant N.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Докажем по индукции, что все $A^{(i)}$ — k-нижнегессенберговы. Прежде всего отметим, что матрицы AC_2^*, $AC_2^*C_3^*$, $\dots$, $AC_2^*, \dots, C_k^* = A^{(1)}$ — k-нижнегессенберговые. В самом деле, C_2^* при действии справа на матрицу A меняет в ней только первый и второй столбцы. Поэтому при $k \geqslant 2$ AC_2^* — k-нижнегессенбергова. Аналогичные рассуждения показывают, что последние $(N-k)$ столбцов матрицы $A^{(1)} = AC_2^* \dots C_k^*$ совпадают с соответствующими столбцами матрицы A. Следовательно, $A^{(1)}$ — k-нижнегессенберговая матрица.

Далее рассуждаем по индукции. Пусть для некоторого $1 \leqslant i-1 \leqslant N-k$ матрица $A^{(i-1)}$ — k-нижнегессенберговая. Тогда из структуры матриц $\overline{C}_i$, $A^{(i-1)}$ и C_{i-1+k}^* очевидно, что матрица $A^{(i)} = \overline{C}_i A^{(i-1)} C_{i-1+k}^*$ имеет вид

$$
\begin{array}{l}
\quad\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{k} \qquad\qquad (i-1+k)\text{-й столбец} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
\times & \times & \dots & \times & & & & \vert & & & & \\
\times & \times & \dots & \times & \times & & & \vert & & 0 & & \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & & & \vert & & & & \\
\times & \times & \dots & & & \times & & & & & & \\
\times & \times & \dots & & & \times & \times & r_{i-1} & - & - & - & \\
\times & \times & \dots & & & \times & \times & \times & & & & \\
\times & \times & \dots & & & \times & \times & \times & \times & & & \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
\times & \times & \dots & & & \times & \times & \times & \times & \dots & \times & \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\times & \times & \dots & & & \times & \times & \times & \times & \dots & \times &
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ (i-1)\text{-я строка} \\ \\ \\ \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} k
\end{array}
\end{array} \tag{2.4}
$$

(Здесь и далее крестиками обозначаются ненулевые элементы, значения которых для нас не существенны.)

По аналогии с (1.7) обозначим через $v^{(i)}$ векторы

$$
v^{(1)} = v, \quad v^{(i)} = \overline{C}_i v^{(i-1)} = \overline{C}_i \overline{C}_{i-1} \dots \overline{C}_2 v \quad (2 \leqslant i \leqslant N). \tag{2.5}
$$

Тогда равенство (2.1) можно переписать так:

$$
\begin{gathered}
\overline{C}_i \dots \overline{C}_2 A C_2^* \dots C_{i-1+k}^* C_{i-1+k} \dots C_2 u = \overline{C}_i \dots \overline{C}_2 v, \\
A^{(i)} u^{(i-1+k)} = v^{(i)}.
\end{gathered} \tag{2.6}
$$

Согласно лемме 1.1 векторы $v^{(i)}$ имеют следующую структуру:

$$
u^{(i-1+k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{u}_{i-1+k} \\ u_{i+k} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad v^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{v}_i \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix},
$$

причем $|\widetilde{u}_{i-1+k}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{i-1+k}^2}$. Учитывая структуру (2.4) матрицы $A^{(i)}$, выписывая $(i-1)$-ю компоненту равенства (2.6), получим

$$r_{i-1}\widetilde{u}_{i-1+k} = 0.$$

Но по условию (см. (2.2)) $\widetilde{u}_{i-1+k} \neq 0$ (так как $i-1 \geqslant 1$). Следовательно, $r_{i-1} = 0$ и $A^{(i)}$, как и $A^{(i-1)}$, будет k-нижнегессенберговой. По индукции получим, что $A^{(N-k+1)}$ также k-нижнегессенбергова.

Согласно рекуррентным соотношениям (2.3) первые $(N-k)$ строк матриц $A^{(N-k+2)}, \ldots, A^{(N)}$ совпадают с соответствующими строками $A^{(N-k+1)}$. Поэтому все $A^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ — k-нижнегессенберговы.

Докажем теперь, что у матриц $A^{(i)}$ первые $(i-1)$ компоненты последнего столбца нулевые. Для $i \leqslant N-k+1$ последнее утверждение вытекает из k-нижнегессенберговости $A^{(i)}$. Для $i > N-k+1$ сформулированное утверждение докажем по индукции.

Пусть в матрице $A^{(i-1)}$ первые $i-2$ компоненты последнего столбца нулевые. Тогда согласно определению (см. (2.3))

$$A^{(i)} = \overline{C}_i A^{(i-1)}, \quad N-k+1 < i \leqslant N,$$

и, следовательно, первые $i-2$ компоненты последнего столбца матрицы $A^{(i)}$ совпадают с соответствующими компонентами последнего столбца $A^{(i-1)}$ и поэтому равны нулю. Осталось доказать, что $(i-1)$-я компонента N-го столбца $A^{(i)}$, которую обозначим через r_{i-1}, также равна нулю. Для этого перепишем равенство (2.1) в виде

$$A^{(i)}u^{(N)} = v^{(i)}. \tag{2.7}$$

Используя опять лемму 1.1 и выписывая $(i-1)$-ю компоненту равенства (2.7), получим

$$r_{i-1}\|u\| = 0,$$

откуда в силу отличия от нуля $\|u\|$ (см. (2.2)) имеем $r_{i-1} = 0$.

Таким образом, по индукции получим, что, во-первых, матрица $\overline{A} = \overline{C}AC^* = A^{(N)}$ — k-нижнегессенберговая и, во-вторых, первые $(N-1)$ элементов последнего столбца $\overline{A}$ — нулевые. Теорема доказана.

Векторное равенство (2.1) в покомпонентной записи имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1k}u_k = v_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2,k+1}u_{k+1} = v_2 \\ \vdots \\ a_{N-k,1}u_1 + a_{N-k,2}u_2 + \ldots + a_{N-k,N-1}u_{N-1} = v_{N-k} \\ a_{N-k+1,1}u_1 + a_{N-k+1,2}u_2 + \ldots + a_{N-k+1,N}u_N = v_{N-k+1} \\ \vdots \\ a_{N-1}u_1 + a_{N2}u_2 + \ldots + a_{NN}u_N = v_N \end{cases} \tag{2.8}$$

Замечание 6. При доказательстве того, что матрица $\overline{A} = \overline{C}AC^*$ k-нижнегессенберговая, мы пользовались лишь первыми $(N-k+1)$ соотношениями из (2.8). Используя дополнительно $(N-k+2)$-е уравнение, доказали равенство нулю $(N-k+1)$-го элемента последнего столбца $\overline{A}$. Далее из $(N-k+3)$-го уравнения получили равенство нулю $(N-k+2)$-го элемента последнего столбца $\overline{A}$ и т. д. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть дана k-нижнегессенберговая матрица A и заданы некоторые векторы u и v, причем*

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{k+1}^2 \neq 0.$$

Подберем цепочку C, поляризующую вектор u, и $\overline{C}$, поляризующую v.

Предположим, кроме того, что выполнено n $(N-k+1\leqslant n\leqslant N)$ первых соотношений (2.8). Тогда матрица $\bar{A}$ будет k-нижнегессенберговой и первые $(n-1)$ компоненты ее последнего столбца — нулевые.

Теорема 2.2 остается верной и в случае $v=0$. Более того, если при этом выбрать $\bar{C}$ равным I — тождественному преобразованию, то теорему 2.2 можно в данном случае даже усилить. Именно верна следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть дана k-нижнегессенберговая матрица A $(k>1)$ и вектор u, удовлетворяющий условию*

$$u_1^2+u_2^2+\ldots+u_k^2\neq 0. \tag{2.9}$$

Подберем цепочку C, поляризующую вектор u. Пусть первые $(N-k+1)$ компоненты вектора Au равны нулю. Тогда матрица $\bar{A}=AC^*$ будет $(k-1)$-нижнегессенберговой. Если же дополнительно n-я $(N-k+1<n\leqslant N)$ компонента вектора Au нулевая, то нулевой будет и n-я компонента последнего столбца $\bar{A}$.

Доказательство теоремы 2.3 очень похоже на доказательство теоремы 2.1. Обозначим по аналогии с (2.3) через $A(i)$ следующие матрицы:

$$\begin{aligned}&A^{(1)}=AC_2^*\ldots C_k^*,\\ &A^{(i)}=A^{(i-1)}C_{i-1+k}^*,\quad 2\leqslant i\leqslant N-k+1.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Согласно теореме 2.2 все $A^{(i)}$ — k-нижнегессенберговые. Обозначим далее через q_1 элемент $A^{(1)}$, стоящий в первой строке в k-м столбце.

Заметим, что $Au=AC_2^*\ldots C_{i-1+k}^*C_{i-1+k}\ldots C_2u=A^{(i)}u^{(i-1+k)}$ и, следовательно, равенство нулю некоторой компоненты вектора Au эквивалентно равенству нулю соответствующей компоненты $A^{(i)}u^{(i-1+k)}$ для любого $1\leqslant i\leqslant N-k+1$. В частности, равенство нулю первой компоненты Au гарантирует равенство нулю первой компоненты $A^{(1)}$. С другой стороны, согласно k-нижнегессенберговости $A^{(1)}$ и структуре векторов $u^{(i)}$ (см. лемму 1.1) первая компонента $A^{(1)}u^{(1)}$ равна $q_1\tilde{u}_k$. Следовательно, $q_1\tilde{u}_k=0$. Но, учитывая (2.9) и лемму 1.1,

$$|\tilde{u}_k|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\ldots+u_k^2}\neq 0.$$

Поэтому $q_1=0$.

Докажем по индукции, что матрицы $A^{(i)}$ имеют вид

$$
\begin{array}{cl}
\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{k-1}\qquad\qquad (i-1+k)\text{-й столбец} & \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
\times & \times & \cdots & \times & 0 & & & & & & & \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & 0 & & & & & 0 & \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & & & & & & \\
\times & \times & \cdots & \times & 0 & & & & & & & \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & \times & - & - & - & - & & \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \times & & & & & \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \times & \times & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \times & \times & \cdots & \times & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \times & \times & \cdots & \times & &
\end{array}\right] &
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ i\text{-я строка} \\ \\ \\ \\ \\ \Big\}\, k \\ \\
\end{array}
\end{array}
\tag{2.11}$$

Как было показано выше, структура $A^{(1)}$ задается (2.11). Пусть для некоторого i структура матрицы $A^{(i-1)}$ аналогична (2.11) и задается

$$
\begin{array}{cl}
\overbrace{\hphantom{\times\ \times\ \cdots\ \times}}^{k-1}\qquad (i-1+k)\text{-й столбец} & \\
\left[\begin{array}{cccccccccc}
\times & \times & \cdots & \times & 0 & & & & & \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & 0 & & \mathbf{0} & & \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & & & & \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & 0 & & & & \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & \times & & & & \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \times & & & \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \times & \times & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & & \ddots & \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \times & \times & \cdots & \times \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \times & \times & \cdots & \times
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ i\text{-я строка} \\ \\ \\ \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} k
\end{array}
\end{array}
\qquad (2.12)
$$

Докажем, что при этом матрица $A^{(i)}$ имеет вид (2.11). Прежде всего отметим, что, согласно (2.10), $(i-2+k)$-й и $(i-1+k)$-й столбцы $A^{(i)}$ суть линейные комбинации соответствующих столбцов $A^{(i-1)}$. Поэтому структура матрицы $A^{(i)}$, как и структура $A^{(i-1)}$, задается (2.12). Обозначим через q_i элемент $A^{(i)}$, стоящий в $(i-1+k)$-м столбце и i-й строке. Докажем равенство нулю q_i, тем самым обоснуем сформулированное выше утверждение о том, что матрица $A^{(i)}$ имеет вид (2.11). Для этого воспользуемся равенством нулю i-й компоненты вектора $Au = A^{(i)}u^{(i-1+k)}$, а также структурой матриц $A^{(i)}$ и вектора $u^{(i-1+k)}$. Получим равенство

$$q_i\tilde{u}_{i-1+k} = 0.$$

Но, учитывая лемму 1.1 и условие теоремы (2.9),

$$|\tilde{u}_{i-1+k}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{i-1+k}^2} \geqslant \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_k^2} > 0.$$

Следовательно, $q_i = 0$ и $A^{(i)}$ действительно имеет вид (2.11).

Рассуждая далее по индукции, получим, что $\bar{A} = AC^* = A^{(N)}$ — $(k-1)$-нижнегессенберговая матрица. При этом воспользуемся равенством нулю первых $(N-k+1)$ компонент вектора Au. Если же дополнительно учесть равенство нулю n-й компоненты вектора $Au = \bar{A}u^{(N)}$, то, очевидно, получим равенство нулю n-го элемента последнего столбца $\bar{A}$. Теорема доказана.

Замечание 7. Теоремы 2.1—2.3, доказанные выше, могут быть использованы для упрощения структуры не только k-нижнегессенберговых, но и k-верхнегессенберговых матриц. Для этого достаточно применить теоремы 2.1—2.3 для сопряженных матриц, которые, очевидно, являются уже k-нижнегессенберговыми.

Замечание 8. Одновременное применение теорем 2.1—2.3 для матриц A и A^* позволяет упрощать структуру ленточных матриц A.

§ 3. СИНГУЛЯРНОЕ ИСЧЕРПЫВАНИЕ ДВУХДИАГОНАЛЬНЫХ И СПЕКТРАЛЬНОЕ ИСЧЕРПЫВАНИЕ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

В предыдущем параграфе доказаны теоремы об упрощении структуры k-нижнегессенберговых матриц. Теперь рассмотрим применение этих теорем для спектрального и сингулярного исчерпывания.

Пусть матрица D имеет вид

$$D=\begin{bmatrix} d_1 & b_2 & & & \\ & d_2 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{N-1} & b_N \\ & & & & d_N \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

и пусть требуется провести исчерпывание некоторого сингулярного числа σ этой матрицы.

Рассмотрим сначала случай, когда элементы d_i и b_j матрицы D удовлетворяют условиям

$$d_i\neq 0 \ \ (1\leqslant i\leqslant N), \quad b_j\neq 0 \ \ (2\leqslant j\leqslant N). \tag{3.2}$$

Докажем следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть цепочки C и $\bar{C}$ поляризуют векторы u и v, удовлетворяющие равенству*

$$Du=v, \tag{3.3}$$

где элементы двухдиагональной матрицы D удовлетворяют условиям (3.2), *причем*

$$u_1^2+u_2^2\neq 0, \quad v_N\neq 0. \tag{3.4}$$

Тогда матрица $\bar{D}=\bar{C}DC^*$ имеет вид

$$\bar{D}=K_2+\Delta_D, \tag{3.5}$$

где

$$K_2=\begin{bmatrix} 0 & n_2 & & & & \\ & 0 & n_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & n_{N-1} & \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & k_N \end{bmatrix}, \quad \Delta_D=\begin{bmatrix} \times & & & & \\ \times & \times & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \times & \times & \dots & \times & \\ \times & \times & \dots & \times & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

а элементы n_i и k_N задаются формулами

$$n_i=\frac{b_{i+1}\bar{s}_i}{s_{i+1}} \ \ (i=2,\ \dots,N-1), \quad k_N=\frac{d_N c_N}{\bar{c}_N}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что структура (3.5), (3.6) матрицы $\bar{D}$ непосредственно следует из теоремы 2.1. Докажем формулы (3.7) для элементов n_i. Для чего перепишем определение матрицы $\bar{D}=\bar{C}DC^*$ в виде

$$\bar{C}D=\bar{D}C$$

и распишем правую и левую части этого равенства, пользуясь (3.5), (3.6) и (3.1). Получим

$$\bar{C}D=\begin{bmatrix} \times & \times & -\bar{s}_2b_3 & & & \\ \times & \times & \times & -\bar{s}_3b_4 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \times & \dots & \times & -\bar{s}_{N-1}b_N \\ \times & \times & \times & \dots & \times & \times \\ \times & \times & \times & \dots & \times & \times \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}C=(K_2+\Delta_D)C=\begin{bmatrix} \times & \times & -n_2s_3 & & & \\ \times & \times & \times & -n_3s_4 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots \\ \times & \times & \times & \dots & \times & -n_{N-1}s_N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \dots & \times & \times \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} \times & \times & & & & \\ \times & \times & \times & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \times & \times & \times & \dots & \times & \times \\ \times & \times & \times & \dots & \times & \times \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \times & \times & -n_2s_3 & & & 0 \\ \times & \times & \times & -n_3s_4 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots \\ \times & \times & \times & \dots & \times & -n_{N-1}s_N \\ \times & \times & \times & \dots & \times & \times \\ \times & \times & \times & \dots & \times & \times \end{bmatrix}.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$n_is_{i+1}=\bar{s}_ib_{i+1},\quad 2\leqslant i\leqslant N-1,$$

из которых, учитывая условие $u_1^2+u_2^2\neq 0$ из (3.4) и лемму 1.2, получим формулы (3.7) для элементов n_i.

Докажем теперь формулу для элемента k_N из (3.6), расписав правую и левую части равенства

$$DC^*=\bar{C}^*\bar{D}.$$

Получим

$$DC^*=\begin{bmatrix} \times & \times & \dots & \times & \times & \\ \times & \times & \dots & \times & \times & \\ & \times & \dots & \times & \times & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & 0 & & \ddots & \vdots & \\ & & & \times & d_N & c_N \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}^*\bar{D}=\bar{C}^*(K_2+\Delta_D)=\begin{bmatrix} 0 & \times & \dots & \times & \times & \\ & \times & \dots & \times & \times & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & 0 & & & \times & \times \\ & & & & k_N & \bar{c}_N \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} \times & \times & \dots & \times & 0 \\ \times & \times & \dots & \times & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \times & \times & \dots & \times & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \times & \times & \dots & \times & \times & \\ \times & \times & \dots & \times & \times & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \times & \times & \dots & \times & \times & \\ \times & \times & \dots & \times & k_N & \bar{c}_N \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$k_N\bar{c}_N=d_Nc_N.$$

Используя в заключение условие $v_N\neq 0$ из (3.4) и лемму 1.2, получим обоснование последней из формул (3.7). Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть цепочки C и $\bar{C}$ поляризуют векторы u и v, удовлетворяющие равенству*

$$D^*v=u, \tag{3.8}$$

где элементы двухдиагональной матрицы D вида (3.1) *удовлетворяют условиям* (3.2), *причем*

$$v_1 \neq 0. \tag{3.9}$$

Тогда матрица $\bar{D} = \bar{C}DC^*$ *имеет вид*

$$\bar{D} = K_1 - \nabla_D, \tag{3.10}$$

где

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_1 & & & & 0 \\ & k_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & k_{N-1} & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla_D = \begin{bmatrix} 0 & \times & \times & \dots & \times & \times \\ & 0 & \times & \dots & \times & \times \\ & & 0 & & \cdot & \cdot \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 0\times & \times \\ 0 & & & & 0 & \times \\ & & & & & \times \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

а элементы k_i задаются формулами

$$k_i = \frac{d_{i+1}s_{i+1}}{\bar{s}_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \tag{3.12}$$

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, доказательство структуры матрицы $\bar{D}$ (см. (3.10) и (3.11)) следует из теоремы 2.1.

Для доказательства формул (3.12) достаточно воспользоваться структурой матриц $\bar{D}$ и D:

$$DC^* = \begin{bmatrix} \times & \times & \dots & \times & \times \\ -d_2s_2 & \times & \dots & \times & \times \\ & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & -d_3s_3 & \cdot & \vdots & \vdots \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \cdot & \cdot\times & \times \\ & & & \cdot\times & \times \\ & & & -d_Ns_N & \times \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}^*\bar{D} = \bar{C}^*(K_1 + \nabla_D) = \begin{bmatrix} \times & \times & \dots & \times & \times \\ -k_1\bar{s}_2 & \times & \dots & \times & \times \\ & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & -k_2\bar{s}_3 & \cdot & \vdots & \vdots \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \cdot & \times & \times \\ & & & \cdot & \\ & & & -k_{N-1}\bar{s}_N & \times \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & & \times & \dots & \times \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \cdot & \vdots \\ & & & & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \dots & \times & \times \\ -k_1\bar{s}_2 & \times & \dots & \times & \times \\ & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & -k_2\bar{s}_3 & \cdot & \vdots & \vdots \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \cdot & \times & \times \\ & & & \cdot & \\ & & & -k_{N-1}\bar{s}_N & \times \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$k_i\bar{s}_{i+1} = d_{i+1}s_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1)$$

и согласно лемме 1.2 и условию $v_1 \neq 0$, $\bar{s}_2 \neq 0$, $\bar{s}_3 \neq 0$, ..., $\bar{s}_N \neq 0$. Таким образом, формулы (3.12) обоснованы. Теорема 3.2 доказана.

Непосредственным следствием теорем 3.1 и 3.2, а также леммы 1.4 является следующая теорема.

Теорема 3.3. *Пусть цепочки C и $\overline{C}$ поляризуют соответственно правый и левый сингулярные векторы, соответствующие сингулярному числу σ двухдиагональной матрицы D, элементы которой удовлетворяют условиям* (3.2). *Тогда матрица $\overline{D}=\overline{C}DC^*$ имеет вид*

$$\overline{D}=K_1+K_2=\begin{bmatrix} k_1 & n_2 & & & & \\ & k_2 & n_3 & & \text{\huge 0} & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & \text{\huge 0} & & k_{N-2} & n_{N-1} & \\ & & & & k_{N-1} & 0 \\ & & & & & k_N \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

с элементами k_i, n_i, задаваемыми (3.7), (3.12). *Причем*

$$|k_N|=\sigma. \tag{3.14}$$

Для доказательства теоремы 3.3 достаточно заметить, что цепочка двумерных вращений, поляризующая вектор x, поляризует и вектор σx при любом числе σ. Следовательно, из определения сингулярных векторов, леммы 1.4 и теорем 3.1, 3.2 следует справедливость (3.13), (3.7) и (3.12). Доказательство формулы (3.14) очевидно в силу замечания 4. Теорема 3.3 доказана.

Итак, доказано, что исчерпывание любого сингулярного числа двухдиагональной матрицы D, элементы которой удовлетворяют условиям (3.2), сохраняет двухдиагональную структуру D. Условия (3.2) гарантируют невырожденность матрицы D, поэтому все сингулярные числа D ненулевые. Разберем подробно исчерпывание нулевого сингулярного числа вырожденных матриц D. Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. *Пусть все элементы d_i, b_j двухдиагональной матрицы D вида* (3.1), *кроме элемента d_N, ненулевые, а $d_N=0$. Подберем цепочку C, поляризующую правый сингулярный вектор u, соответствующий нулевому сингулярному числу D. Тогда матрица $\overline{D}=DC^*$ имеет вид*

$$\overline{D}=\begin{bmatrix} k_1 & & & & & \\ n_2 & k_2 & & & & \\ & n_3 & k_3 & & \text{\huge 0} & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & \text{\huge 0} & & n_{N-1} & k_{N-1} & \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

где

$$k_i=-\frac{b_{i+1}}{s_{i+1}}(i=1,2,\ldots,N-1), \quad n_i=-d_is_i\,(i=2,\ldots,N-1). \tag{3.16}$$

Доказательство. Согласно лемме 1.5 первая компонента u_1 вектора u отлична от нуля. Следовательно, параметры s_2, s_3, ..., s_N цепочки двумерных вращений C, поляризующей u, отличны от нуля и корректность деления в формулах (3.16) обоснована. Далее по теореме 2.3 матрица $\overline{D}=DC^*$ будет нижнетреугольной с нулевым последним столбцом. Кроме того, так как последняя строка матрицы D была нулевой, то последняя строка матрицы $\overline{D}=DC^*$ должна быть также нулевой. И наконец, если вспомнить, что матрица C^* — 2-верхнегессенбергова (см. (1.5)), а D — 1-верхнегессенбергова, то получим, что $\overline{D}=DC^*$ — 2-нижнегессенбергова. Таким образом, структура матрицы $\overline{D}$ обоснована. Докажем теперь формулы (3.16) для элементов k_i, n_j матрицы $\overline{D}$. Для этого достаточно расписать правую и левую части равенства

$$\overline{D}C = D \text{ и } \overline{D} = DC^*,$$

используя структуру матриц $\overline{D}$, D и C, и приравнять соответствующие элементы. Получим равенства

$$-s_{i+1}k_i = b_{i+1} \quad (i = 1, \ldots, N-1), \quad n_i = -d_i s_i \quad (i = 2, \ldots, N-1),$$

из которых очевидным образом получаем (3.16). Лемма 3.1 доказана.

Следствием леммы 3.1 является лемма 3.2.

Лемма 3.2. *Пусть все элементы d_i, b_j матрицы D вида* (3.1) *ненулевые, а вектор u такой, что первые $N-1$ компоненты Du равны нулю. Подберем цепочку C, поляризующую вектор u. Тогда матрица $\overline{D} = DC^*$ будет иметь вид*

$$\overline{D} = \begin{bmatrix} k_1 & & & & & \\ n_2 & k_2 & & & 0 & \\ & n_3 & k_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & n_{N-1} & k_{N+1} & \\ & & & & n_N & k_N \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

где

$$k_i = -\frac{b_{i+1}}{s_{i+1}} \,(i = 1, \ldots, N-1); \quad k_N = d_N c_N; \quad n_i = -d_i s_i \,(i = 2, \ldots, N). \tag{3.18}$$

Доказательство. Построим матрицу D_0, отличающуюся от D только элементом d_N, который у D_0 равен нулю. Тогда для любого вектора u первые $(N-1)$ компонент векторов Du и D_0u совпадают. Следовательно, выбрав из условия

$$D_0 u = 0, \tag{3.19}$$

мы тем самым удовлетворим условию леммы.

Из условия (3.19) вектор u определяется однозначно с точностью до скалярного множителя (см. лемму 1.5). Тривиальные рассуждения показывают, что условие (3.19) эквивалентно определению вектора u из условия леммы. Поэтому выбор цепочки C из условия леммы равносилен выбору C из условия поляризации сингулярного вектора матрицы D_0, соответствующего ее нулевому сингулярному числу. Это позволяет применить лемму 3.1 к матрице D_0. Все строки матриц D_0C^* и DC^*, кроме последней строки, совпадают. Поэтому лемма 3.1 гарантирует справедливость формул (3.18) для элементов $k_1, \ldots, k_{N-1}$ и $n_2, n_3, \ldots, n_{N-1}$. Расписывая и сравнивая последние строки матриц $\overline{D}$ и DC^*, получим оставшиеся формулы (3.18).

Лемма 3.3. *Пусть все элементы b_j двухдиагональной матрицы D вида* (3.1) *отличны от нуля, а среди d_i имеется хотя бы один нулевой. Подберем цепочку C, поляризующую правый сингулярный вектор и соответствующий нулевому сингулярному числу D. Тогда матрица $\widetilde{D} = DC^*$ будет иметь вид*

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & & & & & \\ \tilde{n}_2 & \tilde{k}_2 & & & 0 & \\ & \tilde{n}_3 & k_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & \tilde{n}_{N-1} & \tilde{k}_{N-1} & \\ & & & & \tilde{n}_N & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

где

$$\tilde{k}_i = -\frac{b_{i+1}}{s_{i+1}} \; (i = 1, \ldots, N-1), \quad \tilde{n}_i = -d_i s_i \; (i = 2, \ldots, N). \quad (3.21)$$

Доказательство леммы 3.3 почти дословно повторяет доказательство леммы 3.1, и мы его опускаем.

Докажем теперь теорему об исчерпывании вырожденных матриц.

Теорема 3.4. *Пусть элементы двухдиагональной матрицы D вида* (3.1) *удовлетворяют условиям*

$$\exists i : d_i = 0, \quad b_j \neq 0 \; (j = 2, \ldots, N). \quad (3.22)$$

Тогда существует исчерпывание нулевого сингулярного числа матрицы D такое, что

$$\bar{D} = \bar{C} D C^* = \begin{bmatrix} k_1 & n_2 & & & & \\ & k_2 & n_3 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & k_{N-2} & n_{N-1} & \\ & & & & k_{N-1} & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

где

$$k_i = \begin{cases} \dfrac{d_{i+1} s_{i+1}}{\bar{s}_{i+1}}, & \text{если} \quad d_{i+1} \neq 0, \\ -\dfrac{b_{i+1} \bar{c}_i}{s_{i+1}}, & \text{если} \quad d_{i+1} = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$n_i = \frac{b_{i+1} \bar{s}_i}{s_{i+1}}, \quad i = 2, \ldots, N-1. \quad (3.24)$$

Доказательство. Подберем цепочку двумерных вращений C, поляризующую правый сингулярный вектор u матрицы D, соответствующий ее нулевому сингулярному числу. Согласно лемме 3.3, матрица $\tilde{D} = DC^*$ примет вид (3.20) с элементами $\tilde{k}_i$, $\tilde{n}_i$, задаваемыми (3.21). По лемме 1.5 первая компонента u_1 вектора u отлична от нуля. Следовательно, по лемме 1.2 все параметры s_i $(2 \leqslant i \leqslant N)$ цепочки C ненулевые. Учитывая условия (3.22) доказываемой теоремы и формулы (3.21), получим, что все диагональные элементы $\tilde{D}$ ненулевые, а среди поддиагональных $\tilde{n}_i$ $(2 \leqslant i \leqslant N)$ равны нулю лишь те, которые имеют те же номера, что и нулевые d_i. Таким образом, если среди элементов d_2, d_3, …, d_N матрицы D есть нулевые, то матрица $\tilde{D}^*$ разбивается на клетки $\tilde{D}^{(j)}$:

$$\tilde{D}^* = \begin{bmatrix} \tilde{D}^{(1)} & & & \\ & \tilde{D}^{(2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{D}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

При этом каждая из клеток $\tilde{D}^{(i)}$, кроме $\tilde{D}^{(k)}$, верхнедвухдиагональная матрица с диагональными и наддиагональными элементами, отличными от нуля, а в матрице $\tilde{D}^{(k)}$ последний элемент диагонали нулевой, а остальные диагональные и наддиагональные элементы — ненулевые. Если же единственным нулевым элементом среди d_i является d_1, то $\tilde{D}^*$

на клетки не разбивается, но можно условно считать представление (3.25) верным для $k=1$ $(\tilde{D}^{(1)}=\tilde{D}^*)$. Подберем в соответствии с леммами 3.1 и 3.2 по каждой матрице $\tilde{D}^{(i)}$ размерности N_i цепочку двумерных вращений $c^{(i)}$, определяемую набором параметров $\bar{c}_2^{(i)}$, $\bar{s}_2^{(i)}$, $\bar{c}_3^{(i)}$, $\bar{s}_3^{(i)}$, ..., $\bar{c}_{N_i}^{(i)}$, $\bar{s}_{N_i}^{(i)}$, которые переводят верхнедвухдиагональные матрицы $\tilde{D}^{(i)}$ в нижнедвухдиагональные матрицы $\bar{D}^{(i)}=\tilde{D}^{(i)}\bar{C}^{(i)*}$. Определим матрицу $\bar{C}$ вида

$$\bar{C}=\begin{bmatrix} \bar{C}^{(1)} & & & \\ & \bar{C}^{(2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{C}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $\bar{C}$ есть цепочка двумерных вращений, параметры которой c_i, s_i составлены из $\bar{c}_i^{(j)}$, $\bar{s}_i^{(j)}$, а также пар $\bar{c}_l=1$, $\bar{s}_l=0$:

$$\begin{aligned}
&\bar{c}_2=\bar{c}_2^{(1)}, \quad \bar{s}_2=\bar{s}_2^{(1)},\\
&\quad \dots\\
&\bar{c}_{N_1}=\bar{c}_{N_1}^{(1)}, \quad \bar{s}_{N_1}=\bar{s}_{N_1}^{(1)},\\
&\bar{c}_{N_1+1}=1, \quad \bar{s}_{N_1+1}=0,\\
&\bar{c}_{N_1+2}=\bar{c}_2^{(2)}, \quad \bar{s}_{N_1+2}=\bar{s}_2^{(2)},\\
&\quad \dots\\
&\bar{c}_N=\bar{c}_{N_k}^{(k)}, \quad \bar{s}_N=\bar{s}_{N_k}^{(k)}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Тогда матрица $\tilde{D}^*\bar{C}^*=CD^*\bar{C}^*$ примет вид

$$\tilde{D}^*\bar{C}^*=\begin{bmatrix} \tilde{D}^{(1)} & & & \\ & \tilde{D}_1^{(2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{D}^{(k)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{C}^{(1)*} & & & \\ & \bar{C}^{(2)*} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{C}^{(k)*} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \tilde{D}^{(1)}\bar{C}^{(1)*} & & & \\ & D^{(2)}\bar{C}^{(2)*} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{D}^{(k)}\bar{C}^{(k)*} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{D}^{(1)} & & & \\ & \bar{D}^{(2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{D}^{(k)} \end{bmatrix},$$

где элементы нижнедвухдиагональных матриц $\bar{D}^{(i)}$ определяются по элементам $\tilde{D}^{(i)}$ в соответствии с леммами 3.1 и 3.2. Таким образом, матрица $\bar{D}=\bar{C}DC^*$ является двухдиагональной матрицей вида (3.23), разбитой на блоки $\bar{D}^{(i)*}$, а формулы (3.24) для ее элементов являются следствием формул (3.21), (3.16). Теорема доказана.

Заметим, что формулы (3.24) очень схожи с формулами (3.7), (3.12) для элементов матрицы $\bar{D}=\bar{C}DC^*$ и отличаются лишь тем, что в формулах (3.24) учтена неопределенность (3.12), когда числитель и знаменатель некоторых из формул (3.12) равны нулю, и тем, что последний диагональный элемент $\bar{D}$ при исчерпывании нулевого сингулярного числа нулевой.

Рассмотрим теперь произвольную двухдиагональную матрицу D вида (3.1). Если среди элементов b_i побочной диагонали D есть нулевые, то матрица D разбивается на клетки

$$D = \begin{bmatrix} D^{(1)} & & & & \\ & D^{(2)} & & 0 & \\ & & \cdot & & \\ & 0 & & \cdot & \\ & & & & D^{(k)} \end{bmatrix},$$

каждая из которых на побочной диагонали не имеет нулевых элементов.

Если матрица D была невырожденной, то и все матрицы $D^{(i)}$ также невырождены. Очевидно, объединение сингулярных чисел матриц $D^{(i)}$ составляют сингулярные числа матрицы D. Пусть требуется исчерпать некоторое сингулярное число σ матрицы D. Число σ, очевидно, является сингулярным числом какой-либо подматрицы $D - D^{(j)}$. Подберем цепочки двумерных вращений $C^{(j)}$ и $\overline{C}^{(j)}$, исчерпывающие сингулярное число σ матрицы $D^{(j)}$. Обозначим через N_1 сумму размерностей матриц $D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots, D^{(j-1)}$ через N_2 — размерность матрицы $D^{(j)}$. Определим цепочки двумерных вращений C и $\overline{C}$ как цепочки, определяемые параметрами

$$\begin{aligned}
&c_2 = 1, \quad s_2 = 0, \quad \bar{c}_2 = 1, \quad \bar{s}_2 = 0;\\
&c_3 = 1, \quad s_3 = 0, \quad \bar{c}_3 = 1, \quad \bar{s}_3 = 0;\\
&\vdots\\
&c_{N_1} = 1, \quad s_{N_1} = 0, \quad \bar{c}_{N_1} = 1, \quad \bar{s}_{N_1} = 0;\\
&c_{N_1+1} = 1, \quad s_{N_1+1} = 0, \quad \bar{c}_{N_1+1} = 1, \quad \bar{s}_{N_1+1} = 0;\\
&c_{N_1+2} = c_2^{(j)}, \quad s_{N_1+2} = s_2^{(j)}, \quad \bar{c}_{N_1+2} = \bar{c}_2^{(j)}, \quad \bar{s}_{N_1+2} = \bar{s}_2^{(j)};\\
&c_{N_1+3} = c_3^{(j)}, \quad s_{N_1+3} = s_3^{(j)}, \quad \bar{c}_{N_1+3} = \bar{c}_3^{(j)}, \quad \bar{s}_{N_1+3} = \bar{s}_3^{(j)}; \qquad (3.27)\\
&\vdots\\
&c_{N_1+N_2} = c_{N_2}^{(j)}, \quad s_{N_1+N_2} = s_{N_2}^{(j)}, \quad \bar{c}_{N_1+N_2} = \bar{c}_{N_2}^{(j)}, \quad \bar{s}_{N_1+N_2} = \bar{s}_{N_2}^{(j)};\\
&c_{N_1+N_2+1} = 0, \quad s_{N_1+N_2+1} = 1, \quad \bar{c}_{N_1+N_2+1} = 0, \quad \bar{s}_{N_1+N_2+1} = 1;\\
&\vdots\\
&c_N = 0, \quad s_N = 1, \quad \bar{c}_N = 0, \quad \bar{s}_N = 1.
\end{aligned}$$

Матрицы C и $\overline{C}$ при действии на D в отличие от матриц

$$\begin{bmatrix} I_{N_1} & & 0 \\ & C^{(j)} & \\ 0 & & I_{N-N_1-N_2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_{N_1} & & 0 \\ & \overline{C}^{(j)} & \\ 0 & & I_{N-N_1-N_2} \end{bmatrix}$$

не только выделяют на диагонали преобразованной двухдиагональной матрицы сингулярное число σ, но и устанавливают его в последний столбец, т. е. производят исчерпывание сингулярного числа σ матрицы D, сохраняя ее двухдиагональную структуру.

Если матрица D вырожденная, то хотя бы один блок $D^{(j)}$ также вырожден. Подбирая исчерпывание нулевого сингулярного числа этого блока, сохраняющее двухдиагональную структуру матрицы $D^{(j)}$, построим матрицы $C^{(j)}$ и $\overline{C}^{(j)}$, достраивая которые до цепочек C и $\overline{C}$ согласно (3.27) получим исчерпывание нулевого сингулярного числа матрицы D, сохраняющее ее двухдиагональный вид.

Таким образом, используя описанные процедуры, можно построить исчерпывание нулевого сингулярного числа вырожденной двухдиагональной матрицы и любого сингулярного числа невырожденной двухдиагональной матрицы, сохраняющее ее ленточную структуру. Рассмотрим теперь применение теоремы 2.1 из предыдущего параграфа для спектрального исчерпывания трехдиагональных матриц.

Пусть матрица T имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & b_2 & & & & \\ a_2 & d_2 & b_3 & & \text{\Large 0} & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{\Large 0} & & & a_{N-1} & d_{N-1} & b_N \\ & & & & a_N & d_N \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.5. *Пусть цепочка C поляризует собственный вектор w, соответствующий собственному значению λ трехдиагональной матрицы T вида* (3.28) *с ненулевыми элементами a_i, b_i. Тогда матрица $\overline{T} = CTC^*$ будет иметь вид*

$$\overline{T} = S + \Delta_T, \tag{3.29}$$

где

$$S = \begin{bmatrix} \bar{d}_1 & \bar{b}_2 & & & & \\ \bar{b}_2 & \bar{d}_2 & \bar{b}_3 & & \text{\Large 0} & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \bar{b}_{N-2} & \bar{d}_{N-2} & \bar{b}_{N-1} & \\ \text{\Large 0} & & & \bar{b}_{N-1} & \bar{d}_{N-1} & 0 \\ & & & & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \Delta_T = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ \times & 0 & & & & \\ \times & \times & 0 & & \text{\Large 0} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \times & \times & & 0 & & \\ \times & \times & \dots & \times & 0 & \\ \times & \times & \dots & \times & \times & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

а элементы $\bar{d}_i$, $\bar{b}_j$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \bar{d}_i &= d_{i+1} - \frac{c_{i+1}c_i b_{i+1}}{s_{i+1}} + \frac{c_{i+2}c_{i+1}b_{i+2}}{s_{i+2}} \quad (j = 1, 2, \dots, N-2;\ c_1 = 1), \\ \bar{d}_{N-1} &= d_N - \frac{c_N c_{N-1} b_N}{s_N}, \\ \bar{b}_j &= \frac{s_j b_{j+1}}{s_{j+1}} \quad (j = 2, 3, \dots, N-1). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Доказательство. Как и в теоремах 3.1, 3.2, доказательство структуры (3.29), (3.30) матрицы $\overline{T}$ следует из теоремы 2.1. При этом используется дополнительно лемма 1.3.

Докажем формулы (3.31) для элементов матрицы S, расписывая правую и левую части равенства

$$CT = \overline{T}C,$$

но на этот раз выписывая явный вид большего числа элементов·

$$CT = \begin{bmatrix} \times & b_2c_2 - d_2c_2 & -b_3s_2 & & & \\ \times & \times & b_3c_2c_3 - d_3s_3 & -b_4s_3 & & \text{\Large 0} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & & & & -b_Ns_{N-1} \\ \times & \times & \cdot\ \cdot\ \cdot & \times & & b_Nc_{N-1}c_N - d_Ns_N \\ \times & \times & \cdot\ \cdot\ \cdot & \times & & \times \end{bmatrix},$$

$$\overline{T}C=(S+\Delta_T)C=$$

$$=\begin{bmatrix}
\times & -\bar{d}_1s_2+\bar{b}_2c_2c_3 & -\bar{b}_2s_3 & & & & \\
\times & \times & -\bar{d}_2s_3+\bar{b}_3c_3c_4 & -\bar{b}_3s_4 & & & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\
\times & \times & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & -\bar{d}_{N-2}s_{N-1}+\bar{b}_{N-1}c_{N-1}c_N & -\bar{b}_{N-1}s_N \\
\times & \times & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \times & -\bar{d}_{N-1}s_N \\
\times & \times & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \times & \times
\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}
\times & & & & & & \\
\times & \times & & & & & 0 \\
\times & \times & \times & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \\
\times & \times & \times & \ldots & \times & & \\
\times & \times & \times & \ldots & \times & \times & \\
\times & \times & \times & \ldots & \times & \times & 0
\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}
\times & -\bar{d}_1s_2+b_2c_2c_3 & -\bar{b}_2s_3 & & & & \\
\times & \times & -\bar{d}_2s_3+\bar{b}_3c_3c_4 & -\bar{b}_3s_4 & & & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\
\times & \times & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & -\bar{d}_{N-2}s_{N-1}+\bar{b}_{N-1}c_{N-1}c_N & -\bar{b}_{N-1}s_N \\
\times & \times & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \times & -\bar{d}_{N-1}s_N \\
\times & \times & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \times & \times
\end{bmatrix}.$$

Поэтому имеют место равенства

$$\bar{b}_is_{i+1}=b_{i+1}s_i,\quad 2\leqslant i\leqslant N-1;$$
$$-\bar{d}_is_{i+1}+\bar{b}_{i+1}c_{i+1}c_{i+2}=b_{i+1}c_ic_{i+1}-d_{i+1}s_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant N-2;$$
$$-\bar{d}_{N-1}s_N=b_Nc_{N-1}c_N-d_Ns_N,$$

которые, очевидно, равносильны (3.31). (Отличие s_i от нуля следует из лемм 1.3 и 1.2.) Теорема доказана.

Замечание 9. Если матрица T вида (3.28) симметрична, то есть $a_i=b_i$ $(2\leqslant i\leqslant N)$, матрица $\overline{T}=CTC^*$ также симметрична, и, следовательно, в представлении (3.29) $\Delta_T=0$.

Замечание 10. Если матрица T симметрична, но среди внедиагональных элементов есть нулевые, то матрица T разбивается на клетки с ненулевыми внедиагональными элементами. Построив цепочку двумерных вращений, исчерпывающую некоторый блок матрицы T, и дополняя параметры цепочки аналогично (3.27), получим исчерпывание произвольной симметричной трехдиагональной матрицы T.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Rutishauser H.** On Jacobi rotation patterns // Proceedings A. M. S. Symposia in Applied Mathematics.— 1963.— Vol. 15.— P. 219—239.
2. **Golub G., Kahan M.** Calculating the singular velues and pseudoinverse of a matrix // J. SIAM Numer. Anal. Ser. B.— 1965.— Vol. 2, N 2.— P. 205—224.
3. **Митченко А. Д.** Алгоритмы исчерпывания трехдиагональных симметрических и двухдиагональных матриц с гарантированной точностью // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6.— С. 110—161.
4. **Годунов С. К.** Решение систем линейных уравнений.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.— С. 7—55.