С. Ю. ВАСИЛОВСКИЙ

БАЗИС ТОЖДЕСТВ ЙОРДАНОВОЙ АЛГЕБРЫ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ НАД БЕСКОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Пусть B_n, $n = 2, 3, \ldots, \infty$,— йорданова алгебра невырожденной симметрической билинейной формы (x, y) на n-мерном векторном пространстве W_n над полем F. Полиномиальные тождества этих алгебр над конечными полями изучал И. М. Исаев [1]. Он построил базисы тождеств многообразий $\operatorname{var} B_n$. В Днестровской тетради [2] И. П. Шестаков сформулировал вопрос о нахождении базисов тождеств и шпехтовости многообразий $\operatorname{var} B_n$ над бесконечным полем. Все известные к настоящему времени результаты, имеющие отношение к данному вопросу, были получены в случае нулевой характеристики. А. В. Ильтяков доказал [3] унитарную шпехтовость многообразий $\operatorname{var} B_n$ при $n < \infty$. М. Расин [4] показал, что все йордановы тождества степени пять алгебры B_∞ являются следствием тождества

$$x^2 S(R_{x_1}, R_{x_2}, R_{x_3}) - 2x \circ (xS(R_{x_1}, R_{x_2}, R_{x_3})) = 0, \tag{0.1}$$

где $S(y_1, y_2, y_3)$ — стандартный многочлен, а R_{x_i} — оператор правого умножения на элемент x_i в свободной йордановой алгебре $\operatorname{Jord}[X]$. Кроме того, он доказал, что идеал йордановых тождеств $\mathrm{TJ}(B_\infty)$ этой алгебры порождается по крайней мере двумя однородными тождествами. П. Е. Кошлуков [5] анонсировал результат о том, что многообразие $\operatorname{var} B_\infty$ удовлетворяет условию минимальности для унитарных подмногообразий.

В данной работе в явном виде найдены конечные базисы тождеств серии алгебр B_n, $n = 2, 3, \ldots, \infty$, над бесконечным полем характеристики, не равной двум. При некоторых более сильных ограничениях на характеристику основного поля удается указать минимальные или почти минимальные базисы тождеств этих алгебр.

Теорема 0.1. *Тождества*

$$([x, y]^2, z, t) = 0,^{*)} \tag{0.2}$$

$$\sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x, x_{\sigma(3)}), x) = 0 \tag{0.3$^{**)}$}$$

образуют базис тождеств многообразия йордановых алгебр $\operatorname{var} B_\infty$ *над бесконечным полем характеристики, не равной* 2, 3, 5, 7.

Теорема 0.2. *Тождества* (0.2), (0.3),

$$\sum_{\sigma \in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}, \ldots, y_n, x_{\sigma(n+1)}) = 0, \tag{0.4}$$

$$\sum_{\sigma \in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}, \ldots, y_{n-1}, x_{\sigma(n)})(y_n, x_{\sigma(n+1)}, y_{n+1}) = 0 \tag{0.5}$$

образуют базис тождеств многообразия йордановых алгебр $\operatorname{var} B_n$, $n < \infty$, *над бесконечным полем характеристики, не равной* 2, 3, 5, 7.

---

*) Здесь под $[x, y]^2$ понимается йорданов многочлен, совпадающий с $[x, y]^2$ в свободной специальной йордановой алгебре $\mathrm{SJ}[X]$.

**) (0.3) — другая запись тождества (0.1).

В [4] доказана независимость тождеств (0.1) и (0.2), поэтому базис тождеств, указанный в теореме 0.1, минимален. Если характеристика основного поля равна нулю, то (0.5) следует из (0.2)—(0.4), а это означает, что (0.2)—(0.4) — минимальный базис тождеств йордановой алгебры B_n при $3 \leqslant n < \infty$.

Теорема 0.1 в совокупности с результатами других авторов позволяет доказать также следующие утверждения.

Следствие 0.3. *Над полем характеристики нуль многообразие* $\operatorname{var} B_\infty$ *унитарно шпехтово.*

Действительно, это многообразие конечно базируемо и ввиду [5] удовлетворяет условию минимальности для унитарных подмногообразий.

Следствие 0.4. *Всякая йорданова алгебра над полем характеристики нуль, удовлетворяющая тождествам* (0.2) *и* (0.3), *является специальной.*

Для доказательства достаточно заметить, что в силу теоремы С. Р. Сверчкова [6] многообразие $\operatorname{var} B_\infty$ специально.

В работе попутно найдены базисы тождеств лиевых тройных систем $B_n^{(-)}$, $n = 2, 3, \ldots, \infty$, над бесконечным полем характеристики, не равной двум.

Главная идея доказательства основных результатов данной статьи заключается в комбинировании методов работы [3] с идеями работ [7] и [8] по теории инвариантов классических групп над полями произвольной характеристики. Для существенного сокращения числа тождеств, входящих в найденные базисы тождеств, привлекается также теория представлений симметрической группы.

Автор глубоко признателен И. П. Шестакову за внимание к работе, А. В. Ильтякову за ценные замечания и советы, а также В. Г. Скосырскому, прочитавшему первую часть рукописи статьи.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В дальнейшем, если не оговорено противное, F — бесконечное поле характеристики, не равной двум; $F[X]$, $\mathrm{SJ}[X]$ — свободные неассоциативная и специальная йорданова алгебры над F со счетным множеством свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Если $f \in F[X]$, то f^+ — образ многочлена f при естественном гомоморфизме $F[X]$ в $\mathrm{SJ}[X]$, т. е. f^+ — ассоциативный многочлен, получающийся из f заменой операции умножения в $F[X]$ на операцию умножения $x \odot y = (1/2)(xy + yx)$ в $\mathrm{SJ}[X]$. Через $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ будем обозначать ортонормированный базис векторного пространства $W = W_\infty$ алгебры B_∞: $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, а через S_n — группу подстановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Если $\sigma, \tau \in S_n$, $i \in \{1, \ldots n\}$, то $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. Для $\sigma \in S_n$ положим

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ четная;} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Поле F бесконечно, поэтому можно считать все многочлены, с которыми приходится иметь дело, однородными, не оговаривая этого всякий раз. Через $\operatorname{lin}(f)$ обозначим полную линеаризацию многочлена $f = f(x_1, \ldots, x_n)$. Под *полилинейным многочленом* понимается многочлен, линейный по всем своим аргументам. Если $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — полилинейный многочлен и $\sigma \in S_n$, то $\sigma f = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. Пусть A — алгебра над F, $f(X_1, \ldots, x_n) \in F[X]$ и $a_1, \ldots, a_n \in A$. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n)|_{x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n} = f(a_1, \ldots, a_n) \in A.$$

В частности, если $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots)$, $g_1, \ldots, g_n \in F[X]$, то

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots)|_{x_1=g_1,\ldots,x_n=g_n} =$$
$$= f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots)|_{x_1=g_1,\ldots,x_n=g_n,y_1=y_1,\ldots}.$$

Положим

$$[x, y] = xy - yx,$$
$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz) \quad \text{(ассоциатор)},$$
$$(x_1, \ldots, x_{2n+1}) = ((x_1, \ldots, x_{2n-1}), x_{2n}, x_{2n+1}), \; n \geqslant 2.$$

Вводя на векторном пространстве произвольной йордановой алгебры J трилинейную операцию (x, y, z) (ассоциатор в J), получим *лиеву тройную систему* (ЛТС) $J^{(-)}$. Пусть

$$T(x, y, z, t) = (xy, z, t) - x(y, z, t) - y(x, z, t).$$

В SJ $[X]$ выполнено равенство

$$T(x, y, z, t) = (1/4)([x, z] \odot [t, y] + [x, t] \odot [z, y]).$$

Поэтому тождество (0.2) можно записать в виде

$$(T(x, x, y, y), z, t) = 0. \tag{1.1}$$

Заметим, что $T(x, y, z, t) = T(y, x, z, t) = T(z, t, x, y)$ по модулю тождеств йордановости

$$(x^2, y, x) = 0, \tag{1.2}$$
$$xy = yx. \tag{1.3}$$

В дальнейшем буквами α, β и γ с индексами или без них будем обозначать элементы из основного поля. Если $\varnothing \neq Y$ — подмножество F-векторного пространства U, то под $\mathrm{vect}_F\, Y$ подразумевается подпространство, порожденное множеством Y в U.

Напомним необходимые сведения из теории представлений симметрической группы S_n над полем K характеристики нуль [9, 10]. Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — полилинейный многочлен и $P_n(f) = \mathrm{vect}_K \{\sigma f \mid \sigma \in S_n\}$. На множестве $P_n(f)$ действует группа S_n по правилу

$$\sigma \left\{ \sum_i \alpha_i \sigma_i f \right\} = \sum_i \alpha_i (\sigma\sigma_i) f,$$

где $\sigma, \sigma_i \in S_n$. Таким образом, $P_n(f)$ — левый S_n-модуль.

Пусть $(k_1, \ldots, k_r)$ — разбиение n и D — диаграмма Юнга, соответствующая этому разбиению, т. е. $k_1 + \ldots + k_r = n$, $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_r \geqslant 1$ и D — таблица, состоящая из r строк длины $k_1, \ldots, k_r$ соответственно и произвольным образом заполненная числами от 1 до n. Пусть также R_D и C_D — подгруппы всех подстановок из S_n, оставляющих инвариантными соответственно строки и столбцы в D. Положим

$$e_D = \sum_{\sigma \in R_D, \rho \in C_D} \varepsilon_\rho \sigma \rho.$$

В групповой алгебре KS_n единица представима в виде

$$\mathrm{id} = \sum_D g_D e_D, \tag{1.4}$$

где $g_D \in KS_n$, а D пробегает две диаграммы Юнга, отвечающие всевозможным разбиениям числа n.

Пусть таблица, отвечающая разбиению $\lambda = (k_1, \ldots, k_r)$ числа n, имеет столбцы длиной $l_1, l_2, \ldots, l_s$ соответственно. Обозначим через $D(\lambda, \tau)$, $\tau \in S_n$, диаграмму Юнга, заполненную следующим образом:

$\tau(1)$	$\tau(l_1+1)$	$\vdots$	$\vdots$	$\tau(n)$
$\tau(2)$	$\vdots$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$			
$\vdots$	$\tau(l_1+l_2)$			
$\vdots$				
$\tau(l_1)$				

Положим

$$f_{D(\lambda,\tau)}\left(x_1, \ldots, x_{l_1}\right) = \sum_{\sigma_i \in S_{l_i}} \varepsilon_{\sigma_1}\varepsilon_{\sigma_2}\ldots\varepsilon_{\sigma_s} f\left(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_n}\right),$$

где $t_1, \ldots, t_n \in \{1, 2, \ldots, l_1\}$ и $x_{\sigma_1(1)}, \ldots, x_{\sigma_1(l_1)}, x_{\sigma_2(1)}, \ldots, x_{\sigma_s(l_s)}$ находятся соответственно на местах $\tau(1), \ldots, \tau(l_1), \tau(l_1+1), \ldots, \tau(n)$ в многочлене $f\left(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}\right)$. Тогда $e_{D(\lambda,\tau)}f$ совпадает с $\mathrm{lin}(f_{D(\lambda,\tau)})$ с точностью до ненулевой константы и перестановки переменных.

Нетрудно видеть, что все, сказанное выше, справедливо и для поля K характеристики $p > n$.

Замечание 1.1. Пусть K — бесконечное поле характеристики нуль или $p > n$, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — полилинейный многочлен и I — некоторый идеал тождеств. В силу (1.4) имеем

$$f = \sum_{\lambda=(k_1,\ldots,k_r)} \sum_{\tau \in S_n} g_{D(\lambda,\tau)} e_{D(\lambda,\tau)} f,$$

где $g_{D(\lambda,\tau)} \in KS_n$, а внешняя сумма берется по всевозможным разбиениям λ числа n. Для любого многочлена g степени n тождества $g = 0$ и $\mathrm{lin}(g) = 0$ эквивалентны. Поэтому вместо того чтобы доказывать, что $f \in I$, достаточно доказать, что либо $f_{D(\lambda,\tau)} \in I$, либо $e_{D(\lambda,\tau)}f \in I$ для любых разбиения λ числа n и подстановки $\tau \in S_n$.

Определение. Выражение $g(x_1, \ldots, x_t) = 0$, где $g(x_1, \ldots, x_t)$ — ассоциативный многочлен, назовем *слабым тождеством алгебры* $B_n = F \cdot 1 + W_n$, если для любых $a_1, \ldots, a_t \in W_n$ в ассоциативной обертывающей алгебры B_n имеет место равенство $g(a_1, \ldots, a_t) = 0$.

Под *слабым тождеством* (без указания алгебры) понимается слабое тождество алгебры B_∞. Справедливо следующее слабое тождество:

$$[x \odot y, z] = 0. \tag{1.5}$$

Пусть V_0 — наименьшее подмножество в $F[X]$ такое, что $(a, b, c) \in V_0$ для любых $a, b, c \in V_0' = V_0 \cup X$. Положим $V_1 = \{uv | u, v \in V_0\}$.

Предложение 1.2 [3]. *Множество* $V = V_0 \cup V_1$ *линейно независимо в* $F[X]$.

Для любых $a, b \in V_0'$ определим линейный оператор $L(a, b)$ на $\mathrm{FV} = \mathrm{vect}_F V$ по правилу:

(а) если $u = (u_1, u_2, u_3) \in V_0$, то $uL(a, b) = (1/2)\{(u_3, a, u_1, b, u_2) + (u_3, b, u_1, a, u_2) + (u_2, a, b, u_3, u_1) + (u_2, b, a, u_3, u_1) - (u_2, a, b, u_1, u_3) - (u_2, b, a, u_1, u_3)\}$;

(б) $(uv)L(a, b) = (uL(a, b))v$, где $u, v \in V_0$;

(в) на FV оператор $L(a, b)$ распространяется по линейности.

Корректность определения следует из предложения 1.2. Заметим, что оператор $L(a, b)$ симметричен по a, b.

Имеет место слабое тождество

$$\{(x, y, z)L(a, b)\}^+ = (x, y, z)^+ \odot (a \odot b). \tag{1.6}$$

Определение. Подпространство I_0 векторного пространства $\mathrm{FV}_0 = \mathrm{vect}_F V_0$ назовем TFV_0-*идеалом*, если (f_0, f_1, f_2), (f_1, f_0, f_2), (f_1, f_2, f_0), $f_0(g_1, \ldots, g_s) \in I_0$ для любых $f_0 = f_0(x_1, \ldots, x_s) \in I_0$, $f_1, f_2, g_1, \ldots, g_s \in \mathrm{FV}_0' = \mathrm{vect}_F V_0'$. Подпространство I пространства FV назовем TFV-*идеалом*, если (f_0, f_1, f_2), (f_1, f_0, f_2), (f_1, f_2, f_0), $f_0 g$, $g f_0$, $g_0(g_1, \ldots, g_s) \in I$ для любых $g_0(x_1, \ldots, x_s) \in I$, $f_0 \in I \cap \mathrm{FV}_0$, $f_1, f_2, g_1, \ldots, g_s \in \mathrm{FV}_0'$, $g \in \mathrm{FV}_0$.

Ясно, что если I — TFV-идеал, то $I \cap \mathrm{FV}_0$ — TFV_0-идеал, причем если I порождается как TFV-идеал множеством многочленов M, то $I \cap \mathrm{FV}_0$ порождается как TFV_0-идеал всеми теми многочленами из M, которые попадают в FV_0. Заметим также, что из устойчивости TFV-идеала I относительно действия алгебры Φ эндоморфизмов векторного пространства FV, порожденной всеми операторами $L(a, b)$, $a, b \in V_0'$, следует устойчивость относительно действия Φ и TFV$_0$-идеала $I \cap \mathrm{FV}_0$.

Лемма 1.3. *Пусть I — TFV-идеал, порожденный тождеством*

$$(x, y, x) = 0. \tag{1.7}$$

Тогда $IL(a, b) \subseteq I$ для любых $a, \ b \in V_0'$.

Доказательство. Любой многочлен из I будет линейной комбинацией многочленов вида

1) $g(f_0, f_1, \ldots, f_s)$, где $g \in \mathrm{FV}$, $f_0 \in I \cap \mathrm{FV}_0$, $f_1, \ldots, \ f_s \in \mathrm{FV}_0'$;
2) (g_1, g_2, g_1), где $g_1, \ g_2 \in \mathrm{FV}_0'$;
3) $f_0 f_1$, где $f_0 \in I \cap \mathrm{FV}_0$, $f_1 \in \mathrm{FV}_0$;
4) $f_1 f_0$, где $f_0 \in I \cap \mathrm{FV}_0$, $f_1 \in \mathrm{FV}_0$.

Очевидно, что $g(f_0, f_1, \ldots, f_s)L(a, b)$, $(f_1 f_0)L(a, b) \in I$. Согласно определению оператора $L(a, b)$ имеем

$$(g_1, g_2, g_1)L(a, b) = (1/2)\{((g_1, a, g_1), b, g_2) + ((g_1, b, g_1), a, g_2)\} \equiv \equiv 0 (\mathrm{mod}\, I).$$

В частности, мы уже доказали, что $(I \cap \mathrm{FV}_0)L(a, b) \subset I \cap \mathrm{FV}_0$. Отсюда $(f_0 f_1)L(a, b) \in I$. Лемма 1.3 доказана.

Заметим, что по модулю TFV-идеала, порожденного тождеством (1.7), выполнено

$$(x_1, x_2, x_3) = -(x_3, x_2, x_1) = (1/2)((x_1, x_2, x_3) - (x_3, x_2, x_1)),$$

$$(x_1, x_2, x_3) + (x_2, x_3, x_1) + (x_3, x_1, x_2) = (1/2) \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}).$$

Справедливы следующие тождества алгебры B_∞ [3]:

$$((x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2))L(a, b) = (x_1, y_1, z_1)((x_2, y_2, z_2)L(a, b)); \tag{1.8}$$

$$((x, y, z), r, s)L(a, b) = ((x, y, z)L(a, b), r, s); \tag{1.9}$$

$$(r, (x, y, z), s)L(a, b) = (r, (x, y, z)L(a, b), s); \tag{1.10}$$

$$(r, s, (x, y, z))L(a, b) = (r, s, (x, y, z)L(a, b)); \tag{1.11}$$

$$((x, y, z), r, s) = (z, r, s)L(x, y) - (x, r, s)L(y, z); \tag{1.12}$$

$$(r, (x, y, z), s) = (r, z, s)L(x, y) - (r, x, s)L(y, z); \tag{1.13}$$

$$(r, s, (x, y, z)) = (r, s, z)L(x, y) - (r, s, x)L(y, z). \tag{1.14}$$

Обозначим TFV-идеал, порожденный (1.8)—(1.14), через I_0.

Лемма 1.4. *Если TFV-идеал I порожден семейством многочленов $f_i = f_i(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots)$, $i \in \Lambda$, каждый из которых линеен и кососимметричен по каким-то двум переменным $x_{i,1}$ и $x_{i,2}$, то $IL(a, b) \subseteq I + I_0$ для любых $a, b \in V_0'$.*

Доказательство. Любой многочлен из I будет линейной комбинацией многочленов вида

1) $g(f_0, g_1, \ldots, g_s)$, где $f_0 \in I \cap \mathrm{FV}_0$, $g_1, \ldots, \ g_s \in \mathrm{FV}_0'$, $g(x_0, x_1, \ldots \ldots, x_s) \in \mathrm{FV}$;
2) $f_i(g_{i,1}, g_{i,2}, g_1, \ldots)$, где $i \in \Lambda$, $g_{i,1}, g_{i,2} \in V_0'$, $g_1, \ldots \in \ \mathrm{V}_0'$;
3) $f_0 f_1$, где $f_0 \in I \cap \mathrm{FV}_0$, $f_1 \in \mathrm{FV}_0$;
4) $f_1 f_0$, где $f_0 \in I \cap \mathrm{FV}_0$, $f_1 \in \mathrm{FV}_0$.

Очевидно, что $g(f_0, g_1, \ldots, g_s)L(a, b)$, $(f_1 f_0)L(a, b) \in I$. В [3] доказано, что для любого $h(x_1, \ldots) \in \mathrm{FV}$, линейного по x_1, выполнено

$$h(x_1, \ldots)L(a, b) \equiv [h((a, b, x_1), \ldots) + h(a, \ldots)L(x_1, b)] (\mathrm{mod}\, I_0).$$

Поэтому

$$f_i(g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots)L(a, b)=(1/2)(f_i(g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots)-f_i(g_{i,2}, g_{i,1}, \ldots))L(a, b)\equiv$$
$$\equiv(1/2)(f_i(a, g_{i,2}, \ldots)L(g_{i,1}, b)-f_i(a, g_{i,1}, \ldots)L(g_{i,2}, b))\equiv$$
$$\equiv(1/2)(f_i(a, b, \ldots)L(g_{i,1}, g_{i,2})-f_i(a, b, \ldots)L(g_{i,2}, g_{i,1}))=$$
$$=0 \ (\mathrm{mod}(I+I_0)).$$

В частности, мы уже доказали включение $(I\cap \mathrm{FV}_0)L(a, b)\subset(I+I_0)\cap\cap\mathrm{FV}_0$. Отсюда вытекает, что $(f_0f_1)L(a, b)\in I+I_0$. Лемма 1.4 доказана.

Далее выпишем список тождеств, которые вместе с (0.3), (1.1)—(1.3), (1.7)—(1.14), как будет показано в § 2, образуют базис тождеств алгебры B_∞:

$$((x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2), a, b)=0; \tag{1.15}$$

$$(a, b, c)T(x, x, y, y)=(a, b, c)(2L(x, x)L(y, y)-2L(x, y)L(x, y)); \tag{1.16}$$

$$(a, b, c)((x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2))=(a, b, c)(L(x_1, y_1)L(z_1, z_2)L(x_2, y_2)+$$
$$+L(x_1, x_2)L(y_1, z_1)L(y_2, z_2)-L(x_1, y_1)L(z_1, x_2)L(y_2, z_2)-$$
$$-L(x_1, x_2)L(y_1, z_1)L(x_2, y_2)); \tag{1.17}$$

$$T(x, x, y, y)T(z, z, t, t)=4(t, t, z)((x, (y, x, z), y)-(x, (x, y, y), z)); \tag{1.18}$$

$$T((x, y, z), a, b, c)=(x, y, z)((c, b, a)+(b, c, a)); \tag{1.19}$$

$$(a, b, c)L(x, y)L(z, t)=(a, b, c)L(z, t)L(x, y); \tag{1.20}$$

$$(x_1, x_2, x_3)((y_1, y_2, y_3), z, t)=(y_1, y_2, y_3)((x_1, x_2, x_3), t, z); \tag{1.21}$$

$$(x_1, x_2, x_3)(L(y_1, y_2)L(y_3, z)-L(y_1, z)L(y_2, y_3))=$$
$$=(y_1, y_2, y_3)(L(x_1, x_2)L(x_3, z)-L(x_1, z)L(x_2, x_3))+$$
$$+((y_1, y_2, y_3), z, x_3)L(x_1, x_2)-((y_1, y_2, y_3), z, x_1)L(x_3, x_2); \tag{1.22}$$

$$(x, y, z)L(y, t)+((x, y, z), y, t)=0; \tag{1.23}$$

$$(x, y, z)L(t, t)=((z, y, x), t, t)+(y, (z, t, x), t); \tag{1.24}$$

$$(x, y, z)+(y, z, x)+(z, x, y)=0; \tag{1.25}$$

$$(x_1, z, x_2)(y_1, y_2, y_3)=(x_1, y_1, x_2)(y_2, y_3, z)+$$
$$+(x_1, y_2, x_2)(y_1, z, y_3)+(x_1, y_3, x_2)(z, y_1, y_2); \tag{1.26}$$

$$\sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon_\sigma(x_{\sigma(1)}, x, x_{\sigma(2)})(x, x_{\sigma(3)}, y)=0; \tag{1.27}$$

$$\sum_{\sigma\in S_2}\varepsilon_\sigma(x_{\sigma(1)}, y_1, y_2)(x_{\sigma(2)}, y_3, y_4)=$$
$$=(1/2)\{(x_1, y_1, x_2)(y_2, y_4, y_3)+(x_2, y_3, x_1)(y_4, y_2, y_1)+$$
$$+(x_2, y_2, x_1)(y_1, y_4, y_3)+(x_2, y_3, x_1)(y_4, y_1, y_2)\}. \tag{1.28}$$

Обозначим через $p=p(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ многочлен

$$p=(1/2)((y_1, y_5, y_3)(y_2, y_4, y_6)+(y_1, y_6, y_3)(y_2, y_4, y_5)-$$
$$-(y_1, y_2, y_3)\{(y_4, y_5, y_6)+(y_4, y_6, y_5)\}).$$

Заметим, что многочлен p симметричен по y_5, y_6. Имеет место слабое тождество

$$p^+=((y_1, y_2, y_3)^+\odot y_4)\odot(y_5\odot y_6). \tag{1.29}$$

Пополним наш список еще двумя тождествами

$$(y_1, x, y_2)(y_3, y_4, x)=p(y_1, y_3, y_2, x, y_4, x); \tag{1.30}$$

$$p(y_1\ y_2, y_3, y_4, x, x)L(z, z)=p(y_1, y_2, y_3, y_4, z, z)L(x, x). \tag{1.31}$$

Нетрудно убедиться с помощью слабых тождеств (1.5), (1.6), (1.29) и $x\odot(y, z, t)^+ = y\odot(x, t, z)^+$, что тождества (1.15)—(1.28), (1.30), (1.31), а точнее, их образы при естественном гомоморфизме $F[X]$ в $\mathrm{SJ}[X]$ будут слабыми тождествами. Это доказывает, что все эти соотношения действительно являются тождествами алгебры B_∞.

Назовем многочлен $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F[X]$ *унитарным*, если $f\Delta_i^k = 0$ (определение оператора Δ_i^k см. в [11]) для любых $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$. Идеал тождеств $T(B_n)$ алгебры B_n унитарно замкнут (см. [11]) и, следовательно, порождается системой унитарных тождеств. Пусть $\mathfrak{B}_0$ — образ пространства унитарных многочленов при естественном гомоморфизме $F[X]$ в относительно свободную алгебру $\mathfrak{B}[X]$ многообразия, порожденного (0.3), (1.1)—(1.3), (1.7)—(1.28), (1.30), (1.31).

Лемма 1.5 [3].

$$\mathfrak{B}_0 = \mathrm{vect}_F\{T(x, y, z, t), u, uv \mid u, v \in V_0, x, y, z, t \in X\}.$$

Нетрудно видеть, что никаких нетривиальных йордановых тождеств алгебры B_n, $n = 2, 3, \ldots, \infty$, степени не выше четырех нет. Пусть далее I_0 — TFV-идеал, порожденный (0.3), (1.7), (1.9)—(1.14), (1.20)—(1.28), (1.30), (1.31). По модулю (0.3), (1.1)—(1.3), (1.7)—(1.28), (1.30), (1.31) изучение тождеств алгебры B_n сводится к изучению тождеств этой алгебры, лежащих в $\overline{\mathrm{FV}} = {}^{\mathrm{FV}}/_{I_0}$. Заметим, что по модулю TFV-идеала, порожденного (1.7), каждое из тождеств (1.9)—(1.14), (1.20)—(1.28), (1.30), (1.31) линейно и кососимметрично по каким-то двум переменным. В силу лемм 1.3 и 1.4 $I_0L(a, b) \subseteq I_0$ для любых $a, b \in$ $a, b \in V_0'$. Следовательно, на $\overline{\mathrm{FV}}$ корректно определен линейный оператор $L(a, b)$: ${}^{f}/_{I_0} \to {}^{fL(a,b)}/_{I_0}$ и $\overline{\mathrm{FV}}$ становится Φ-модулем. Ввиду тождеств (1.8)—(1.14) справедлива

Лемма 1.6. $\overline{\mathrm{FV}} = \mathrm{vect}_F\{(x, y, z)L(a_1, b_1)\ldots L(a_k, b_k), (x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2)L(a_1, b_1)\ldots L(a_k, b_k) \mid x, y, z, x_i, y_i, z_i, a_i, b_i \in X, i = 1, 2, \ldots, k = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Пусть $\delta = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_k)$ — упорядоченный набор целых неотрицательных чисел. Таблицу вида

$$T = \left[\begin{array}{c|c} p_{1,1} \cdots p_{1,m_1} & q_{1,1} \cdots q_{1,m_1} \\ p_{2,1} \cdots p_{2,m_2} & q_{2,1} \cdots q_{2,m_2} \\ \vdots & \vdots \\ p_{t,1} \cdots p_{t,m_t} & q_{t,1} \cdots q_{t,m_t} \end{array}\right], \qquad (1.32)$$

где $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_t$, а числа $p_{i,j}$, $q_{i,j}$ выбираются из множества $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$, причем среди них ровно δ_0 раз встречается число 0, ровно δ_1 раз — число 1 и т. д., будем называть *двойной таблицей состава* δ. Положим $\mu[T] = (m_1, m_2, \ldots, m_t)$, $h[T] = t$. Через $T^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, t$, будем обозначать i-ю строку таблицы T: $T^{(i)} = [p_{i,1} \ldots p_{i,m_i} \mid q_{i,1} \ldots q_{i,m_i}]$.

Таблицу (1.32) назовем *двойной стандартной таблицей*, если стандартной является таблица

$$T' = \begin{bmatrix} p_{1,1} \cdots p_{1,m_1} \\ q_{1,1} \cdots q_{1,m_1} \\ p_{2,1} \cdots p_{2,m_2} \\ q_{2,1} \cdots q_{2,m_2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{bmatrix},$$

т. е. в таблице T' числа возрастают слева направо в каждой строке и сверху вниз в каждом столбце, причем в каждой строке это возрастание строгое (а в столбцах может быть и нестрогим). С двойной таблицей

(1.32) свяжем ассоциативный многочлен, который будем обозначать через $\widetilde{T}$, по правилу

$$\widetilde{T} = \widetilde{T}^{(1)}\widetilde{T}^{(2)} \ldots \widetilde{T}^{(h[T])},$$

где

$$[p_1 \ldots p_k \widetilde{|} q_1 \ldots q_k] = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma \left(x_{p_1} \odot x_{q_{\sigma(1)}}\right) \left(x_{p_2} \odot x_{q_{\sigma(2)}}\right) \ldots \left(x_{p_k} \odot x_{q_{\sigma(k)}}\right),$$

$k = 1, 2, \ldots$. Заметим, что если $v_0, v_1, v_2, \ldots \in W_n$, то

$$\widetilde{T}\,|_{x_i = v_i} = \prod_{k=1}^{h[T]} \sum_{\sigma_k \in S_{m_k}} \varepsilon_{\sigma_k} \prod_{i=1}^{m_k} \left(v_{p_{k,i}}, v_{q_{k,\sigma_k(i)}}\right) = \prod_{k=1}^{h[T]} \det \left\| \left(v_{p_{k,i}}, v_{q_{k,j}}\right) \right\|.$$

Предложение 1.7 [8]. *Если* $\sum_i \alpha_i \widetilde{T}_i = 0$ *(где T_i — двойные стандартные таблицы и $\mu\left[T_i^{(1)}\right] \leqslant n$) — слабое тождество алгебры B_n, $n < \infty$, то $\alpha_i = 0$ для всех i.*

Обозначим через S_n^k, $1 \leqslant k < n$, множество всех подстановок $\sigma \in S_n$, таких, что $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(k)$, $\sigma(k+1) < \ldots < \sigma(n)$.

Лемма 1.8 [8]. *Имеет место слабое тождество*

$$\sum_{\sigma \in S_{m+1}^k} \varepsilon_\sigma \left[q_1 \ldots q_{k-1} p_{\sigma(k+1)} \ldots p_{\sigma(m+1)} \widetilde{|} p_{\sigma(1)} \ldots p_{\sigma(k)} q_{k+1} \ldots q_m\right] = 0,$$

$$1 \leqslant k \leqslant m, \; m = 1, 2, \ldots.$$

Лемма 1.9. *Имеет место слабое тождество*

$$\sum_{\sigma \in S_{m+1}^k} \varepsilon_\sigma \widetilde{\left[\begin{array}{l|l} r_1 \quad \ldots r_m & q_1 \ldots q_{k-1} p_{\sigma(k+1)} \ldots p_{\sigma(m+1)} \\ p_{\sigma(1)} \ldots p_{\sigma(k)} q_{k+1} \ldots q_n & s_1 \ldots s_n \end{array}\right]} = \sum_i \alpha_i \widetilde{T}_i,$$

где T_i — двойные таблицы такие, что $T_i^{(1)} = [\ldots | p_1 p_2 \ldots p_{m+1}]$, $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant m$, $m = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Пусть $v_0, v_1, \ldots \in W$. В силу (1.5) выражение

$$\sum_{\sigma \in S_{m+1}^k} \varepsilon_\sigma \widetilde{\left[\begin{array}{l|l} r_1 \quad \ldots r_m & q_1 \ldots q_{k-1} p_{\sigma(k+1)} \ldots p_{\sigma(m+1)} \\ p_{\sigma(1)} \ldots p_{\sigma(k)} q_{k+1} \ldots q_n & s_1 \ldots s_n \end{array}\right]}\Bigg|_{x_i = v_i}$$

представимо в виде линейной комбинации выражений типа

$$\sum_{\sigma \in S_{m+1}^k, \tau \in S_k, \eta \in S_{m-k+1}} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \varepsilon_\eta \left(v_{p_{\sigma(\tau(1))}}, v_{i_1}\right) \ldots$$
$$\ldots \left(v_{p_{\sigma(\tau(k))}}, v_{i_k}\right) \left(v_{p_{\sigma(k+\eta(1))}}, v_{i_{k+1}}\right) \ldots$$
$$\ldots \left(v_{p_{\sigma(k+\eta(m-k+1))}}, v_{i_{m+1}}\right) \ldots (v_l, v_j) \ldots . \tag{1.33}$$

Отображение φ: $S_{m+1}^k \times S_k \times S_{m-k+1} \to S_{m+1}$ по правилу

$$\varphi(\sigma, \tau, \eta) = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & k & k+1 & \ldots & m+1 \\ \sigma(\tau(1)) & \ldots & \sigma(\tau(k)) & \sigma(k+\eta(1)) & \ldots & \sigma(k+\eta(m-k+1)) \end{bmatrix}$$

— биекция, причем $\varepsilon_{\varphi(\sigma,\tau,\eta)} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \varepsilon_\eta$. Поэтому выражение (1.33) можно переписать в виде

$$\sum_{\varphi \in S_{m+1}} \varepsilon_\varphi \left(v_{p_{\varphi(1)}}, v_{i_1}\right) \ldots \left(v_{p_{\varphi(k)}}, v_{i_k}\right) \left(v_{p_{\varphi(k+1)}}, v_{i_{k+1}}\right) \ldots \left(v_{p_{\varphi(m+1)}}, v_{i_{m+1}}\right) \ldots$$
$$\ldots (v_l, v_j) \ldots = [i_1 \ldots i_{m+1} \widetilde{|} p_1 \ldots p_{m+1}] \ldots (x_l \odot x_j) \ldots |_{x_i = v_i}.$$

Осталось заметить, что $(x_l \odot x_j)|_{x_i = v_i} = [\widetilde{l|j}]|_{x_i = v_i}$. Лемма доказана.

В дальнейшем двойную таблицу (1.32) состава $(1, \delta_1, \delta_2, \ldots)$, в которой $p_{1,1}=0$ (а на остальных местах стоят положительные числа), будем называть *двойной О-таблицей.* А под *двойными таблицами* будем понимать двойные таблицы состава $(0, \delta_1, \ldots)$, т. е. совсем не содержащие нулей.

Каждой двойной таблице-строке $[p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, поставим в соответствие линейный оператор на FV из алгебры Φ по правилу

$$l[p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k] = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma L\left(x_{p_1}, x_{q_{\sigma(1)}}\right) \ldots L\left(x_{p_k}, x_{q_{\sigma(k)}}\right).$$

Заметим, что $L(x_p, x_q) = l[p|q]$. Если $[0p_2 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k]$, $k \geqslant 2$,— двойная O-таблица-строка, то положим

$$F[0p_2 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k] = (1/2) \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma \left(x_{q_{\sigma(1)}}, x_{p_2}, x_{q_{\sigma(2)}}\right) L\left(x_{p_3}, x_{q_{\sigma(3)}}\right) \ldots$$
$$\ldots L\left(x_{p_k}, x_{q_{\sigma(k)}}\right).$$

В частности, $(1/2)((x_1, x_2, x_3) - (x_3, x_2, x_1)) = F[02|13]$. Если теперь T — произвольная двойная O-таблица, у которой $\mu[T^{(1)}] \geqslant 2$, то пусть

$$F[T] = F[T^{(1)}]\, l[T^{(2)}] \ldots l[T^{(h[T])}].$$

Далее определим многочлен $F[T]$ для некоторого множества двойных таблиц T. При $k \geqslant 3$ положим

$$F[p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k] =$$
$$= (1/4) \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma \left(\left(x_{p_1}, x_{q_{\sigma(1)}}, x_{p_2}\right)\left(x_{q_{\sigma(3)}}, x_{p_3}, x_{q_{\sigma(2)}}\right)\right) L\left(x_{p_4}, x_{q_{\sigma(4)}}\right) \ldots$$
$$\ldots L\left(x_{p_k}, x_{q_{\sigma(k)}}\right),$$

и если $\mu[T^{(1)}] \geqslant 3$, то $F[T] = F[T^{(1)}]\, l[T^{(2)}] \ldots l[T^{(h[T])}]$. При $\mu[T^{(1)}] = 2$ и $h[T] \leqslant 2$ полагаем

$$F[T] = F\begin{bmatrix} T^{(1)} \\ T^{(2)} \end{bmatrix} l\left[T^{(3)}\right] \ldots l\left[T^{(h[T])}\right],$$

где

$$F\left[\begin{array}{cc|cc} p_1 & p_2 & q_1 & q_2 \\ p_3 & & q_3 & \end{array}\right] = F[p_1p_2p_3 | q_1q_2q_3] + \left(x_{q_1}, x_{p_3}, x_{q_2}\right)\left(x_{p_1}, x_{q_3}, x_{p_2}\right),$$

$$F\left[\begin{array}{cc|cc} p_1 & p_2 & q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 & s_1 & s_2 \end{array}\right] = (1/2) \sum_{\sigma, \tau \in S_2} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau F\left[\begin{array}{cc|cc} p_1 & p_2 & q_1 & q_2 \\ r_{\sigma(1)} & & s_{\tau(1)} & \end{array}\right] l\left[r_{\sigma(2)} | s_{\tau(2)}\right].$$

Нетрудно видеть, что любой элемент из $\overline{\mathrm{FV}}$ представим в виде линейной комбинации многочленов $F[T]$, где T — двойная (O-) таблица.

С помощью (1.5) и (1.6) легко устанавливается

Лемма 1.10. *Выполнены следующие слабые тождества:*

$\{(x, y, z)\, l[p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k]\}^+ = (x, y, z)^+ \odot [p_1 \ldots \widetilde{p_k | q_1} \ldots q_k]$, *где* $k = 1, 2, \ldots$;

$F[T]^+ = \tilde{T}$, *где* T *— двойная таблица;*

$x_0 \odot F[T]^+ = \tilde{T}$, *где* T *— двойная О-таблица.*

Лемма 1.11. *В* $\overline{\mathrm{FV}}$ *выполнено*

(а) $(x_1, x_2, x_3)\,l[\ldots p \ldots p \ldots | \ldots] = (x_1, x_2, x_3)\,l[\ldots | \ldots q \ldots q \ldots] = 0$,

(б) $F[\ldots p \ldots p \ldots | \ldots] = 0$,

(в) $F[\ldots | \ldots q \ldots q \ldots] = 0$,

(г) $F\left[\begin{array}{c|c} p\,p & q_1 q_2 \\ r_1 & s_1 \end{array}\right] = F\left[\begin{array}{c|c} p_1 p_2 & q\,q \\ r_1 & s_1 \end{array}\right] = 0$,

(д) $F\left[\begin{array}{c|c} p_1 p_2 & q_1 q_2 \\ r\;\;r & s_1 s_2 \end{array}\right] = F\left[\begin{array}{c|c} p_1 p_2 & q_1 q_2 \\ r_1 r_2 & s\;\;s \end{array}\right] = 0$.

Доказательство. Докажем (б). Согласно (1.20) многочлены

$$F[0p_3 \ldots p_k | q_2 \ldots q_k],\ k \geqslant 3;$$
$$F[p_1p_2 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k],\ p_1 \neq 0,\ k = 2, 3, \ldots,$$

кососимметричны по $x_{p_4}, x_{p_5}, \ldots, x_{p_k}$, а второй из них — еще и по x_{p_1}, x_{p_2}. Поэтому достаточно рассмотреть случаи

1) $F[0pp | \ldots]$; 3) $F[pp_1p_2p | \ldots]$;

2) $F[pp_1p | \ldots]$; 4) $F[p_1p_2pp | \ldots]$, $p_1 \neq 0$.

В силу (0.3), (1.13), (1.25)

$$\sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, x, x_{\sigma(2)})\, L(x_{\sigma(3)}, x) = 2 \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x)\, L(x_{\sigma(3)}, x) =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(3)}, x, x_{\sigma(2)}), x) = 0.$$

Из (1.27) следует, что $F[pp_1p | \ldots] = 0$. Ввиду (1.7), (1.14), (1.21), (1.27)

$$\sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon_\sigma (x, x_{\sigma(1)}, z)(x_{\sigma(2)}, y, x_{\sigma(3)})\, L(x, x_{\sigma(4)}) = \sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon_\sigma (x, x_{\sigma(1)}, (x, x_{\sigma(4)},$$
$$z))(x_{\sigma(2)}, y, x_{\sigma(3)}) = \sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, x, (x_{\sigma(2)}, y, x_{\sigma(3)}))(x, x_{\sigma(4)}, z) =$$
$$= 2 \sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, x, x_{\sigma(3)})(x, x_{\sigma(4)}, z)\, L(x_{\sigma(2)}, y) = 0.$$

Поскольку справедливость утверждения (б) в случаях 2 и 3 уже доказана, то $F[p_1p_2pp | \ldots] = -F[pp_2pp_1 | \ldots] = 0$. Итак, (б) установлено. Истинность остальных утверждений леммы вытекает из определения и (1.20). Лемма доказана.

Таким образом, многочлен $F[T]$ в $\overline{\mathrm{FV}}$ меняет знак при перестановке любых двух (ненулевых) чисел в любой полустроке (O-) таблицы T.

Леммы 1.8—1.10 позволяют выписать несколько полезных тождеств алгебры B_∞:

$$\sum_{\sigma \in S^k_{m+1}} \varepsilon_\sigma F\left[\begin{array}{c|c} \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_1 \ldots q_{k-1} p_{\sigma(k+1)} \ldots p_{\sigma(m+1)} & p_{\sigma(1)} \ldots p_{\sigma(k)} q_{k+1} \ldots q_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right] = 0,$$

$$1 \leqslant k \leqslant m, \quad m = 1, 2, \ldots; \tag{1.34}$$

$$\sum_{\sigma \in S^k_{m+1}} \varepsilon_\sigma F\left[\begin{array}{l|l} r_1 r_2 & s_1 s_2 \\ r_{2,1} \ldots r_{2,m} & q_1 \ldots q_{k-1}\, p_{\sigma(k+1)} \ldots p_{\sigma(m+1)} \\ p_{\sigma(1)} \ldots p_{\sigma(k)}\, q_{k+1} \ldots q_n & s_{3,1} \ldots s_{3,n} \end{array}\right] =$$
$$= \sum_i \alpha_i F[T_i], \tag{1.35}$$

где

$$T_i = \left[\begin{array}{c|c} p_1 \ldots p_{m+1} & \ldots \\ r_1\ r_2 & s_1\, s_2 \\ \vdots\ \vdots\ \ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \end{array}\right], \quad 1 \leqslant k \leqslant n \leqslant m, \quad m = 1,\ 2;$$

$$\sum_{\sigma \in S^k_{m+1}} \varepsilon_\sigma (x_1, x_2, x_3)\, l\,[r_1 \ldots r_m \,|\, q_1 \ldots q_{k-1} p_{\sigma(k+1)} \ldots$$
$$\ldots p_{\sigma(m+1)}]\, l\,[p_{\sigma(1)} \ldots p_{\sigma(k)} q_{k+1} \ldots q_n \,|\, s_1 \ldots s_n] =$$
$$= \sum_i \alpha_i (x_1, x_2, x_3)\, l\,[T_{i,1}]\, l\,[T_{i,2}] \ldots l\left[T_{i,h_i}\right], \tag{1.36}$$

где $T_{i,j}$ — двойные таблицы-строки и $T_{i,1} = [\ldots | p_1 \ldots p_{m+1}]$, $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant \leqslant m$, $m = 1, 2, \ldots$.

Лемма 1.12. *В алгебре B_∞ выполнено тождество* $(x_1, x_3, x_2)\, l\,[p_1 \ldots \ldots p_k | q_1 \ldots q_k] = \sum_i \alpha_i F\,[T_i]$, *где T_i — О-таблицы такие, что* $T_i^{(1)} = [0 \ldots \ldots | q_1 \ldots q_k \ldots]$, $k = 2, 3, \ldots$.

Доказательство. В силу (1.12), (1.14), (1.20), (1.22)

$$(x_1, x_3, x_2)\, l\,[p_1 \ldots p_k \,|\, q_1 \ldots q_k] =$$
$$= (1/2) \sum_{\sigma \in S_k, \tau \in S_2} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \left\{\left(x_{q_{\sigma(1)}}, x_{p_1}, x_{q_{\sigma(2)}}\right) L\,(x_{\tau(1)}, x_3)\, L\left(x_{\tau(2)}, x_{p_2}\right) -\right.$$
$$\left. - \left(\left(x_{q_{\sigma(1)}}, x_{p_1}, x_{q_{\sigma(2)}}\right), x_{p_2}, x_{\tau(1)}\right) L\,(x_{\tau(2)}, x_3)\right\} L\left(x_{q_{\sigma(3)}}, x_{p_3}\right) \ldots$$
$$\ldots L\left(x_{q_{\sigma(k)}}, x_{p_k}\right) = (1/2)\, F \left[\begin{array}{l|l} 0 p_1\, p_3 \ldots p_k & q_1\, q_1 \ldots q_k \\ 1\, 2 & 3\ p_2 \end{array}\right] +$$
$$+ \sum_{\tau \in S_2} \varepsilon_\tau \left\{ \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma \left(x_{q_{\sigma(1)}}, x_{p_2}, x_{\tau(1)}\right) L\left(x_{q_{\sigma(2)}}, x_{p_1}\right) L\left(x_{q_{\sigma(3)}}, x_{p_3}\right) \ldots\right.$$
$$\left.\ldots L\left(x_{q_{\sigma(k)}}, x_{p_k}\right)\right\} L\,(x_{\tau(2)})\, x_3).$$

Осталось заметить, что ввиду (1.7)

$$2 \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma \left(x_{q_{\sigma(1)}}, x_{p_1}, x_1\right) L\left(x_{q_{\sigma(2)}}, x_{p_2}\right) \ldots$$
$$\ldots L\left(x_{q_{\sigma(k)}}, x_{p_k}\right) = F\,[0 p_1 p_2 \ldots p_k \,|\, q_1 1 q_2 \ldots q_k] +$$
$$+ \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma \left(x_{q_{\sigma(1)}}, x_{p_1}, x_{q_{\sigma(i)}}\right) L\left(x_{q_{\sigma(2)}}, x_{p_2}\right) \ldots$$
$$\ldots L\left(x_1, x_{p_i}\right) \ldots L\left(x_{q_{\sigma(k)}}, x_{p_k}\right) = \alpha F\,[0 p_1 \ldots p_k \,|\, q_1 \ldots q_k 1] +$$
$$+ \sum_{i=2}^{k} \beta_i F \left[\begin{array}{l|l} 0 p_2 \ldots p_{i-1}\, p_{i+1} \ldots p_k & q_1 \ldots q_k \\ p_i & 1 \end{array}\right].$$

Лемма доказана.

Следствие 1.13. *В B_∞ выполнено тождество*

$$\sum_{\sigma \in S^k_{m+1}} \varepsilon_\sigma F \left[\begin{array}{l|l} 0\, r_2 \ldots r_m & q_1 \ldots q_{k-1}\, p_{\sigma(k+1)} \ldots p_{\sigma(m+1)} \\ p_{\sigma(1)} \ldots p_{\sigma(k)}\, q_{k+1} \ldots q_n & s_1 \ldots s_n \end{array}\right] =$$
$$= \sum_i \alpha_i F\,[T_i],$$

где T_i — двойные (О-) таблицы такие, что

$$T_i^{(1)} = [0 \ldots | p_1 \ldots p_{m+1} \ldots], \quad 1 \leqslant k \leqslant n \leqslant m, \quad m = 2, 3, \ldots.$$

Доказательство. Действительно, многочлен, входящий в левую часть тождества, в $\overline{\mathrm{FV}}$ будет линейной комбинацией многочленов типа

$$1)\quad \sum_{\sigma\in S^k_{m+1},\tau\in S_k,\eta\in S_{m-k+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\varepsilon_\eta\left(x_{p_{\sigma(k+\eta(1))}}, x_{i_2}, x_{p_{\sigma(k+\eta(2))}}\right)\ldots$$

$$\ldots L\left(x_{p_{\sigma(k+\eta(l))}}, x_{i_l}\right)\ldots L\left(x_{p_{\sigma(\tau(t))}}, x_{i_{m-k+t+1}}\right)\ldots;$$

$$2)\quad \sum_{\sigma\in S^k_{m+1},\tau\in S_k,\eta\in S_{m-k+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\varepsilon_\eta\left(x_{p_{\sigma(k+\eta(1))}}, x_{i_1}, x_{i_2}\right)\ldots$$

$$\ldots L\left(x_{p_{\sigma(k+\eta(l))}}, x_{i_{l+1}}\right)\ldots L\left(x_{p_{\sigma(\tau(t))}}, x_{i_{m-k+t+2}}\right)\ldots;$$

$$3)\quad \sum_{\sigma\in S^k_{m+1},\tau\in S_k,\eta\in S_{m-k+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\varepsilon_\eta\left(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\right)\ldots$$

$$\ldots L\left(x_{p_{\sigma(k+\eta(l))}}, x_{i_{l+3}}\right)\ldots L\left(x_{p_{\sigma(\tau(t))}}, x_{i_{m-k+t+4}}\right)\ldots.$$

Используя биекцию φ: $S^k_{m+1}\times S_k\times S_{m-k+1}\to S_{m+1}$ и повторяя нужные фрагменты доказательства леммы 1.12, каждый из указанных выше многочленов можно привести к требуемому виду. Следствие доказано.

Из следствия 1.13, а также лемм 1.9 и 1.10 вытекает, что в B_∞ имеет место тождество

$$\sum_{\sigma\in S^k_{m+1}} \varepsilon_\sigma F\left[\begin{matrix} r_1\ldots r_m \\ p_{\sigma(1)}\ldots p_{\sigma(k)}\,q_{k+1}\ldots q_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix} q_1\ldots q_{k-1}\,p_{\sigma(k+1)}\ldots p_{\sigma(m+1)} \\ s_1\ldots s_n\end{matrix}\right] = \sum_i \alpha_i F[T_i], \tag{1.37}$$

где T_i — двойные (O-)таблицы такие, что $T_i^{(1)}=[\ldots|p_1\ldots p_{m+1}\ldots]$, $1\leqslant k\leqslant n\leqslant m$, $m=2, 3, \ldots$.

Наконец, из леммы 1.12 получаем еще одно тождество алгебры B_∞:

$$F[T]\,l[p_1\ldots p_k|q_1\ldots q_k]=\sum_i \alpha_i F[T_i], \tag{1.38}$$

где T, T_i — двойные (O-) таблицы, причем, $\mu[T^{(1)}]<k$ и $T_i^{(1)}=[\ldots|q_1\ldots\ldots q_k\ldots]$.

Заметим, что каждое из тождеств (1.34)—(1.38) линейно и кососимметрично по каким-то двум переменным (в $\overline{\mathrm{FV}}$).

§ 2. КОНЕЧНЫЙ БАЗИС ТОЖДЕСТВ АЛГЕБРЫ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

В данном параграфе будет доказана

Теорема 2.1. *Тождества* (0.3)—(0.5), (1.1)—(1.3), (1.7)—(1.28), (1.30), (1.31) *образуют базис тождеств многообразия* $\operatorname{var} B_n$, $n=2, 3, \ldots$.

Очевидным следствием теоремы 2.1 будет

Теорема 2.2. *Тождества* (0.3), (1.1)—(1.3), (1.7)—(1.28), (1.30), (1.31) *образуют базис тождеств многообразия* $\operatorname{var} B_\infty$.

Для доказательства теоремы 2.1 достаточно показать, что любое нетривиальное тождество алгебры B_n из $\overline{\mathrm{FV}}$ следует из тождеств (0.4) и (0.5). Обозначим TFV-идеал, порожденный $\overline{}$ (1.34)—(1.38), через I_1.

Предложение 2.3. *Любой многочлен в* $\overline{\mathrm{FV}}$ *по модулю* I_1 *представим в виде линейной комбинации многочленов* $F[T]$, *где* T — *двойная стандартная* (O-)*таблица.*

Доказательство. Любой многочлен из $\overline{\mathrm{FV}}$ можно представить в виде $\sum_i \alpha_i F[T_i]$, где T_i — двойные (O-)таблицы, причем в каждой строке $[p_1\ldots p_k|q_1\ldots q_k]$ любой из таблиц T_i будет

$$p_1\leqslant p_2\leqslant\ldots\leqslant p_k,\ q_1\leqslant q_2\leqslant\ldots\leqslant q_k \tag{2.1}$$

(более того, все эти неравенства можно считать строгими). Обозначим через M_δ множество двойных (O-)таблиц T состава δ, удовлетворяющих свойству (2.1), для которых определен многочлен $F[T]$. С каждой двойной (O-)таблицей (1.32) из M_δ свяжем последовательность

$$\pi[T]=p_{1,1}\ldots p_{1,m_1}q_{1,1}\ldots q_{1,m_1}p_{2,1}\ldots q_{t,m_t}.$$

Введем на множестве M_δ линейный порядок по следующему правилу. При $T_1, T_2\in M_\delta$ будем говорить, что T_1 *строго больше* T_2 ($T_1>T_2$), если либо $\mu[T_1]$ лексикографически больше $\mu[T_2]$ ($\mu[T_1]>\mu[T_2]$), либо $\mu[T_1]=\mu[T_2]$, но $\pi[T_1]$ легксикографически меньше $\pi[T_2]$ ($\pi[T]<\pi[T_2]$). Покажем, что если $T\in M_\delta$ не стандартная, то по модулю I_1 имеет место равенство $F[T]=\sum_i\alpha_iF[T_i]$, где $T_i\in M_\delta$, $T_i>T$ для каждого i. Поскольку множество M_δ конечное, отсюда будет следовать утверждение нашего предложения.

Итак, пусть двойная (O-)таблица (1.32) из M_δ не стандартная. Если в какой-то строке T хотя бы одно из неравенств (2.1) нестрогое, то $F[T]=0$ и требуемое утверждение выполнено. Остается рассмотреть случай, когда найдутся такие l и k, что либо $p_{l,k}>q_{l,k}$, либо $q_{l,k}>p_{(l+1),k}$. Предположим сначала, что

$$p_{l,k}>q_{l,k}. \tag{2.2}$$

Для удобства переобозначим числа в l-й строке:

$$T^{(l)}=[s_1\ldots s_{k-1}r_{k+1}\ldots r_{m_l+1}|r_1\ldots r_ks_{k+1}\ldots s_{m_l}],$$

где $s_1<\ldots<s_{k-1}<r_{k+1}<\ldots<r_{m_l+1}$, $r_1<\ldots<r_k<s_{k+1}<\ldots<s_{m_l}$. Условие (2.2) перепишется в виде $r_k<r_{k+1}$ или

$$r_1<r_2<\ldots<r_k<r_{k+1}<\ldots<r_{m_l+1}. \tag{2.3}$$

Согласно (1.34) имеем

$$F[T]=\sum_{\sigma\in S^k_{m_l+1}\setminus\{\mathrm{id}\}}\alpha_\sigma F[T_\sigma],$$

где $\alpha_\sigma\in\{\pm1\}$, все строки (O-)таблицы $T_\sigma\in M_\delta, \sigma\in S^k_{m_l+1}\setminus\{\mathrm{id}\}$, кроме l-й, совпадают с соответствующими строками (O-)таблицы T, а $T^{(l)}_\sigma=\left[p'_1\ldots p'_{m_l}\,|\,q'_1\ldots q'_{m_l}\right]$, где последовательности $p'_1\ldots p'_{m_l}$ и $q'_1\ldots q'_{m_l}$ отличаются от последовательностей $s_1\ldots s_{k-1}r_{\sigma(k+1)}\ldots r_{\sigma(m_l+1)}$ и $r_{\sigma(1)}\ldots r_{\sigma(k)}s_{k+1}\ldots s_{m_l}$ соответственно только порядком членов. В силу (2.3) последовательность $p'_1\ldots p'_{m_l}$ лексикографически строго меньше последовательности $s_1\ldots s_{k-1}r_{k+1}\ldots r_{m_l+1}$. Поэтому $\pi[T_\sigma]<\pi[T]$, а значит и $T_\sigma>T$.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$q_{l,k}>p_{(l+1),k}. \tag{2.4}$$

Для удобства переобозначим числа в l-й и $(l+1)$-й строках:

$$\begin{bmatrix}T^{(l)}\\ T^{(l+1)}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{l|l}r_1\ldots r_{m_l} & q_1\ldots q_{k-1}\,p_{k+1}\ldots p_{m_l+1}\\ p_1\ldots p_k\,q_{k+1}\ldots q_{m_{(l+1)}} & s_1\ldots s_{m_{(l+1)}}\end{array}\right],$$

где $r_1<\ldots<r_{m_l}$, $q_1<\ldots<q_{k-1}<p_{k+1}<\ldots<p_{m_l+1}$, $p_1<\ldots<p_k<q_{k+1}<\ldots<q_{m_{(l+1)}}$, $s_1<\ldots<s_{m_{(l+1)}}$. Условие (2.4) перепишется в виде $p_k<p_{k+1}$ или

$$p_1<p_2<\ldots<p_k<p_{k+1}<\ldots<p_{m_l+1}. \tag{2.5}$$

Согласно (1.35)—(1.38) имеем

$$F(T)=\sum_{\sigma\in S^k_{m_l+1}\setminus\{\mathrm{id}\}}\alpha_\sigma F[T_\sigma]+\sum_i\beta_iF[T_i],$$

где $\alpha_\sigma \in \{\pm 1\}$, T_σ, $T_i \in M_6$, $\mu[T_i] > \mu[T]$, все строки двойной (O-)таблицы T_σ, $\sigma \in S^k_{m_l+1} \setminus \{\mathrm{id}\}$, кроме l-й и $(l+1)$-й, совпадают с соответствующими строками (O-)таблицы T, а

$$\begin{bmatrix} T_\sigma^{(l)} \\ T_\sigma^{(l+1)} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{l|l} r_1 \dots r_{m_l} & q'_{l,1} \dots q'_{l,m_l} \\ p'_{(l+1),1} \dots p'_{(l+1),m_{(l+1)}} & s_1 \dots s_{m_{(l+1)}} \end{array}\right],$$

где последовательности $q'_{l,1} \dots q'_{l,m_l}$ и $p'_{(l+1),1} \dots p'_{(l+1),m_{(l+1)}}$ отличаются от последовательностей $q_1 \dots q_{k-1} p_{\sigma(k+1)} \dots p_{\sigma(m_l+1)}$ и $p_{\sigma(1)} \dots p_{\sigma(k)} q_{k+1} \dots$ $\dots q_{m_{(l+1)}}$ соответственно только порядком членов. В силу (2.5) последовательность $q'_{l,1} \dots q'_{l,m_l}$ лексикографически меньше последовательности $q_1 \dots q_{k-1} p_{k+1} \dots p_{m_l+1}$. Поэтому $\pi[T_\sigma] < \pi[T]$, а значит, и $T_\sigma > T$. Предложение доказано.

Обозначим через $\mathscr{L}^{(n)}_{1,2}$ подпространство в $\overline{\mathrm{FV}}$ всех полилинейных многочленов степени n, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$ и кососимметричных по переменным x_1, x_2. Множество X будем считать линейно упорядоченным.

Предложение 2.4. *Если $f \in \mathscr{L}^{(n)}_{1,2}$, $n \geqslant 5$,— тождество алгебры B_∞, то $f = 0$.*

Прежде чем приступить к доказательству этого предложения, докажем несколько лемм.

Лемма 2.5. *Если $f \in \mathscr{L}^{(2k+1)}_{1,2}$, $k \geqslant 2$, то f является линейной комбинацией многочленов вида*

1) $(x_1, a, x_2, b, c) L(a_1, b_1) \dots L(a_{k-2}, b_{k-2})$, *где* $a > b$,

2) $(x_1, a, x_2) L(a_1, b_1) \dots L(a_{k-1}, b_{k-1})$.

Доказательство. Согласно лемме 1.6 f будет линейной комбинацией многочленов типа $u(x_1, x_2, \dots) - u(x_2, x_1, \dots)$, где $u(x_1, x_2, \dots) = (x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}) L(x_{j_4}, x_{j_5}) \dots L(x_{j_{2k}}, x_{j_{2k+1}})$. В силу (1.12), (1.22), (1.24), (1.25) многочлены $(x_1, a, x_2) L(b, c)$,

$$\sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, a, b) L(x_{\sigma(2)}, c) \quad \text{и} \quad \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon_\sigma (a, b, c) L(x_{\sigma(1)}, d_1) L(x_{\sigma(2)}, d_2)$$

представим в виде *)

$$\sum_i \alpha_i (x_1, x_i, x_2, y_i, z_i) \widehat{L(t_i, s_i)}.$$

Поэтому

$$f = \sum_j \beta_j (x_1, x_j, x_2, y_j, z_j) L\left(a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right) \dots L\left(a_{k-2}^{(j)}, b_{k-2}^{(j)}\right) =$$

$$= \sum_{\{j | x_j > y_j\}} \{\beta_j (x_1, x_j, x_2, y_j, z_j) + \beta'_j (x_1, y_j, x_2, x_j, z_j)\} L\left(a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right) \dots$$

$$\dots L\left(a_{k-2}^{(j)}, b_{k-2}^{(j)}\right) = \sum_{\{j | x_j > y_j\}} \left(\beta_j - \beta'_j\right) (x_1, x_j, x_2, y_j, z_j) L\left(a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right) \dots$$

$$\dots L\left(a_{k-2}^{(j)}, b_{k-2}^{(j)}\right) + \sum_{\{j | x_j > y_j\}} \beta'_j \{(x_1, x_j, x_2, y_j, z_j) +$$

$$+ (x_1, y_j, x_2, x_j, z_j)\} L\left(a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right) \dots L\left(a_{k-2}^{(j)}, b_{k-2}^{(j)}\right).$$

Из (1.23) следует, что

$$(x_1, x_j, x_2, y_j, z_j) + (x_1, y_j, x_2, x_j, z_j) = -(x_1, x_j, x_2) L(y_j, z_j) - -(x_1, y_j, x_2) L(x_j, z_j).$$

Лемма доказана.

---

*) Обозначение $\widehat{L(t_i, s_i)}$ означает, что операторы $L(t_i\ s_i)$ могут отсутствовать.

Лемма 2.6. *Если* $f \in \mathscr{L}_{1,2}^{(2k)}$, $k \geqslant 3$, *то* f *является линейной комбинацией многочленов вида*

1) $(x_1, a, x_2)(x_3, b, c)L(a_1, b_1)\ldots L(a_{k-3}, b_{k-3})$, *где* $a > c$,

2) $p(x_1, x_3, x_2, a, b, c)L(a_1, b_1)\ldots L(a_{k-3}, b_{k-3})$, *где* $b = \max\{x_4, \ldots$ $\ldots, x_{2k}\}\setminus\{a\}$.

Доказательство. Согласно лемме 1.6 f будет линейной комбинацией многочленов типа $v(x_1, x_2, \ldots) = u(x_1, x_2, \ldots) - u(x_2, x_1, \ldots)$, где

$$u(x_1, x_2, \ldots) = (x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3})(x_{j_4}, x_{j_5}, x_{j_6})L(x_{j_7}, x_{j_8})\ldots L(x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}).$$

Если хотя бы в одном из ассоциаторов многочлена u, скажем в $(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3})$, переменные x_1 и x_2 не встречаются, то $v(x_1, x_2 \ldots) = (x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3})v_1(x_1, x_2, \ldots)$, где многочлен $v_1(x_1, x_2, \ldots)$ кососимметричен по x_1, x_2. При $k \geqslant 4$ согласно лемме 2.5

$$v_1 = \sum_i \alpha_i(x_1, x_i, x_2, y_i, z_i)L(a_1^{(i)}, b_1^{(i)})\ldots L(a_{k-4}^{(i)}, b_{k-4}^{(i)}).$$

Ввиду (1.12), (1.21)

$$(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3})((x_1, x_i, x_2), y_i, z_i) = (x_1, x_i, x_2)(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, z_i, y_i) =$$
$$= (x_1, x_i, x_2)\{(x_{j_3}, z_i, y_i)L(x_{j_1}, x_{j_2}) - (x_{j_1}, z_i, y_i)L(x_{j_2}, x_{j_3})\}.$$

Поэтому

$$v(x_1, x_2, \ldots) = \sum_j \beta_j(x_1, x_j, x_2)(y_j, z_j, t_j)L(a_1^{(j)}, b_1^{(j)})\ldots L(a_{k-3}^{(j)}, b_{k-3}^{(j)}). \tag{2.6}$$

Это же соотношение имеет место и при $k = 3$. Если же переменные x_1 x_2 в u лежат в разных ассоциаторах, то (2.6) справедливо в силу (1.28). Ввиду (1.13), (1.21), (1.25) выполнено

$$(x_1, y_1, x_2)(y_2, y_3, y_4)L(x_3, y_5) = ((x_1, x_3, x_2)L(y_1, y_5) +$$
$$+ (x_1, (x_3, y_5, y_1), x_2))(y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_3, x_2)(y_2, y_3, y_4)L(y_1, y_5) -$$
$$- (x_1, (y_2, y_3, y_4), x_2)(x_3, y_5, y_1) = (x_1, x_3, x_2)(y_2, y_3, y_4)L(y_1, y_5) +$$
$$+ (x_3, y_5, y_1)((x_1, y_2, x_2)L(y_3, y_4) - (x_1, y_4, x_2)L(y_2, y_3)).$$

Поэтому можно полагать, что в (2.6) $x_3 \in \{x_j, y_j, z_j, t_j\}$, причем в силу (1.26) $x_3 \neq x_j$ для каждого j. В итоге имеем

$$f = \sum_l \gamma_l(x_1, x_l, x_2)(x_3, y_l, z_l)L(a_1^{(l)}, b_1^{(l)})\ldots L(a_{k-3}^{(l)}, b_{k-3}^{(l)}) =$$
$$= \sum_{\{l \mid x_l > z_l\}} \{\gamma_l(x_1, x_l, x_2)(x_3, y_l, z_l) +$$
$$+ \gamma_l'(x_1, z_l, x_2)(x_3, y_l, x_l)\}L(a_1^{(l)}, b_1^{(l)})\ldots L(a_{k-3}^{(l)}, b_{k-3}^{(l)}) =$$
$$= \sum_{\{l \mid x_l > z_l\}} (\gamma_l - \gamma_l')(x_1, x_l, x_2)(x_3, y_l, z_l)L(a_1^{(l)}, b_1^{(l)})\cdots$$
$$\ldots L(a_{k-3}^{(l)}, b_{k-3}^{(l)}) + \sum_{\{l \mid x_l > z_l\}} \gamma_l'\{(x_1, x_l, x_2)(x_3, y_l, z_l) +$$
$$+ (x_1, z_l, x_2)(x_3, y_l, x_l)\}L(a_1^{(l)}, b_1^{(l)})\ldots L(a_{k-3}^{(l)}, b_{k-3}^{(l)}).$$

Из (1.30) следует, что $(x_1, x_l, x_2)(x_3, y_l, z_l) + (x_1, z_l, x_2)(x_3, y_l, x_l) = p(x_1, x_3, x_2, x_l, y_l, z_l) + p(x_1, x_3, x_2, z_l, y_l, x_l)$. В силу (1.31) всегда можно считать, что в многочлене

$$p(x_1, x_3, x_2, a, b, c)L(a_1, b_1)\ldots L(a_{k-3}, b_{k-3})$$

переменная b — наибольшая среди $\{x_4, \ldots, x_{2k}\}\setminus\{a\}$. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Если выражение*

$$\sum_i \alpha_i \varphi_i + \sum_j \beta_j \psi_j = 0,$$

является слабым тождеством, то $\alpha_i = \beta_j = 0$ *для всех* i, j (*здесь* $\varphi_i = \{(\ldots(((x_1, x_i, x_2)(x_3, y_i, z_i))(a_1^{(i)} b_1^{(i)}))\ldots)(a_{k-3}^{(i)} b_{k-3}^{(i)})\}^+$, $x_i > z_i$, $a_l^{(i)} > b_l^{(i)}$, $a_1^{(i)} > a_2^{(i)} > \ldots > a_{k-3}^{(i)}$, *и* $\psi_j = \{(\ldots(p(x_1, x_3, x_2, x_j, y_j, z_j) \times (a_1^{(j)} b_1^{(j)}))\ldots)(a_{k-3}^{(j)} b_{k-3}^{(j)})\}^+$, $y_j = \max\{x_4, \ldots x_{2k}\} \setminus \{x_j\}$, $a_l^{(j)} > b_l^{(j)}$, $a_1^{(j)} > a_2^{(j)} > \ldots > a_{k-3}^{(j)}$, $k \geqslant 3$, — *полилинейные ассоциативные многочлены, зависящие от переменных* $x_1, \ldots, x_{2k}$).

Доказательство. Пусть $g = \sum_i \alpha_i \varphi_i + \sum_j \beta_j \psi_j$. Предположим, что $\alpha_{i_0} \neq 0$ для некоторого i_0. Сделаем подстановку

$$x_1 = x_{i_0} = e_1, \quad x_2 = z_{i_0} = e_2, \quad x_3 = y_{i_0} = e_3, \quad a_e^{(i_0)} = \\ = b_l^{(i_0)} = e_{l+3}, \quad l = 1, 2, \ldots k-3. \tag{2.7}$$

Имеем $\varphi_i|_{(2.7)} = \delta_{ii_0}$, $\psi_j|_{(2.7)} = 0$ для всех i, j. Поэтому $g|_{(2.7)} = \alpha_{i_0} \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что $\alpha_i = 0$ для каждого i. Допустим, что $\beta_{j_0} \neq 0$ для некоторого j_0. Сделаем подстановку

$$x_1 = x_3 = e_1, \quad x_2 = x_{j_0} = e_2, \quad y_{j_0} = z_{j_0} = e_3, \quad a_l^{(j_0)} = \\ = b_l^{(j_0)} = e_{l+3}, \quad l = 1, 2, \ldots, k-3. \tag{2.8}$$

Видим, что $\psi_j|_{(2.8)} = \delta_{jj_0}$. Следовательно, $g|_{(2.8)} = \beta_{j_0} \neq 0$. Снова противоречие. Значит, $\beta_j = 0$ для всех j. Лемма доказана.

Доказательство предложения 2.4.

Если n нечетно, то согласно лемме 2.5

$$f = \sum_i \alpha_i (x_1, x_i, x_2, y_i, z_i) L(a_1^{(i)}, b_1^{(i)}) \ldots L(a_{(n-5)/2}^{(i)}, b_{(n-5)/2}^{(i)}) + \\ + \sum_j \beta_j (x_1, x_j, x_2) L(a_1^{(j)}, b_1^{(j)}) \ldots L(a_{(n-3)/2}^{(j)}, b_{(n-3)/2}^{(j)}),$$

где $x_i > y_i$, $a_k^{(i)} > b_k^{(i)}$, $a_1^{(i)} > a_2^{(i)} > \ldots > a_{(n-5)/2}^{(i)}$, $a_1^{(j)} = \max\{x_3, \ldots, x_n\} \setminus \{x_j\}$, $a_k^{(j)} > b_k^{(j)}$, $a_2^{(j)} > a_3^{(j)} > \ldots > a_{(n-3)/2}^{(j)}$ для всех i, j. Пусть x_0 — новая переменная. Рассмотрим ассоциативный многочлен

$$g(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_i \alpha_i \{(\ldots(((x_1, x_i, x_2)(x_0, z_i, y_i))(a_1^{(i)} b_1^{(i)}))\ldots \\ \ldots)(a_{(n-5)/2}^{(i)} b_{(n-5)/2}^{(i)})\}^+ - \sum_j \beta_j \{(\ldots(p(x_1, x_0, x_2, x_j, a_1^{(j)}, \\ b_1^{(j)})(a_2^{(j)} b_2^{(j)}))\ldots)(a_{(n-3)/2}^{(j)} b_{(n-3)/2}^{(j)})\}^+.$$

В силу (1.5), (1.6), (1.29) для любых $v_0, v_1, \ldots, v_n \in W$ имеет место равенство $f \odot x_0|_{x_i = v_i} = g|_{x_i = v_i}$. Значит, $g = 0$ — слабое тождество. Из леммы 2.7 следует, что $\alpha_i = \beta_j = 0$ для всех i и j, т. е. $f = 0$.

Аналогично, когда n четно, из слабых тождеств (1.5), (1.6), (1.29), лемм 2.6 и 2.7 вытекает, что $f = 0$. Предложение доказано.

Таким образом, тождества (1.34)—(1.38) лежат в I_0.

Следствие 2.8. *Любой многочлен в* $\overline{\mathrm{FV}}$ *представим в виде линейной комбинации многочленов* $F[T]$, *где* T — *двойная стандартная* (*O*-)*таблица.*

В силу (1.9), (1.12) имеем

$$\sum_{\sigma\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\left(x_{\sigma(1)}, x_{i_1}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{i_n}, x_{\sigma(n+1)}\right) =$$

$$= 2\sum_{\sigma\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\left(x_{\sigma(2)}, x_{i_2}, x_{\sigma(3)}, \ldots, x_{i_n}, x_{\sigma(n+1)}\right) L\left(x_{\sigma(1)}, x_{i_1}\right) =$$

$$= 2^2\sum_{\sigma\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\left(x_{\sigma(3)}, x_{i_3}, x_{\sigma(4)}, \ldots, x_{i_n}, x_{\sigma(n+1)}\right) L\left(x_{\sigma(2)}, x_{i_2}\right) L\left(x_{\sigma(1)}, x_{i_1}\right) =$$

$$= \ldots = 2^{n-1}\sum_{\sigma\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\left(x_{\sigma(n)}, x_{i_n}, x_{\sigma(n+1)}\right) L\left(x_{\sigma(n-1)}, x_{i_{n-1}}\right) \ldots$$

$$\ldots L\left(x_{\sigma(1)}, x_{i_1}\right) = 2^n F\,[0 i_n \ldots i_1 \,|\, n(n+1)(n-1)\ldots 1].$$

Аналогично

$$\sum_{\sigma\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\left(x_{\sigma(1)}, x_{i_1}, x_{\sigma(2)}, \ldots x_{i_{n-1}}, x_{\sigma(n)}\right)\left(x_{i_n}, x_{\sigma(n+1)}, x_{i_{n+1}}\right) =$$

$$= 2^{n-2}\sum_{\sigma\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\left(x_{\sigma(n-1)}, x_{i_{n-1}}, x_{\sigma(n)}\right)\left(x_{i_n}, x_{\sigma(n+1)}, x_{i_{n+1}}\right) L\left(x_{\sigma(n-2)}, x_{i_{n-2}}\right)\ldots$$

$$\ldots L\left(x_{\sigma(1)}, x_{i_1}\right) = 2^n F\,[i_n i_{n+1} i_{n-1} i_{n-2} \ldots i_1 \,|\, (n+1)\, n\, (n-1)(n-2)\ldots 1].$$

Таким образом, тождества (0.4), (0.5) эквивалентны тождествам

$$F\,[0 p_2 \ldots p_{n+1} | q_1 \ldots q_{n+1}] = 0, \tag{2.9}$$

$$F\,[p_1 p_2 \ldots p_{n+1} \mid q_1 \ldots q_{n+1}] = 0,\ \ p_1 \neq 0, \tag{2.10}$$

соответственно. По модулю TFV-идеала, порожденного (2.9) и (2.10), любой многочлен в $\overline{\mathrm{FV}}$ представим в виде линейной комбинации многочленов $F[T]$, где T — двойная стандартная (O-)таблица, такая, что $\mu[T^{(1)}] \leqslant n$. Для завершения доказательства теоремы 2.1 остается сослаться на предложение 1.7 и лемму 1.10.

§ 3. МИНИМИЗАЦИЯ БАЗИСА ТОЖДЕСТВ АЛГЕБРЫ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

В этом параграфе будет показано, что если $\operatorname{char} F \neq 2, 3, 5, 7$, то любое тождество из списка, приведенного в теореме 2.2, лежит в I, где I — идеал тождеств, порожденный (0.3), (1.1)—(1.3). Тождества (1.7) и (1.25), очевидно, попадают в I. Далее рассмотрим тождества степени пять из нашего списка. Все они принадлежат пространству FV_0.

Лемма 3.1. *Любое тождество алгебры* B_∞ *из* $P_5 = P_5((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))$ *лежит в* TFV_0*-идеале* I_2*, порожденном тождествами* (0.3), (1.7), (1.25) *и*

$$(x, (a, b, c), y) = ((x, a, y), b, c) + (a, (x, b, y), c) + (a, b, (x, c, y)). \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $f \in (P_5 + I_2)/I_2$ — тождество алгебры B_∞, $\lambda = (k_1, \ldots, k_r)$ — разбиение 5, $\tau \in S_5$. Если $r \geqslant 4$, то в силу (1.7), (1.25) $e_{D(\lambda,\tau)} f$ будет линейной комбинацией многочленов вида $g = \sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x, x_{\sigma(3)}), x_{\sigma(4)})$. Ввиду (0.3), (1.7), (1.25) имеем

$$\sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x, x_{\sigma(3)}), x_{\sigma(4)}) =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma \left\{(x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x, x_{\sigma(3)}), x)\, \Delta_x^1 (x_{\sigma(4)}) - \right.$$

$$\left. - (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(3)}), x)\right\} = 0 \tag{3.2}$$

(определение оператора частичной линеаризации $\Delta_x^k(y)$ см. в [11]). Следовательно, $e_{D(\lambda,\tau)} f = 0$. Пусть $r \leqslant 3$. Нетрудно видеть, что $f_{D(\lambda,\tau)}$ будет линейной комбинацией многочленов (слева указано соответствующее разбиение):

$(4,1)$ $z_1 = ((x_1, x_1, x_2), x_1, x_1)$,

$(3,2)$ $z_2 = ((x_1, x_2, x_2), x_1, x_1)$,

$z_3 = ((x_1, x_1, x_2), x_1, x_2)$,

$z_4 = ((x_1, x_1, x_2), x_2, x_1)$,

$(3,1,1)$ $z_5 = \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x_1, x_{\sigma(3)}), x_1)$,

$z_6 = \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x_1, x_1), x_{\sigma(3)})$,

$z_7 = \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma ((x_{\sigma(1)}, x_1, x_{\sigma(2)}), x_1, x_{\sigma(3)})$,

$(2,2,1)$ $z_8 = \sum_{\sigma\in S_3, \tau\in S_2} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau ((x_{\sigma(1)}, x_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}), x_{\tau(2)}, x_{\sigma(3)})$,

$z_9 = \sum_{\sigma\in S_3, \tau\in S_2} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau ((x_{\sigma(1)}, x_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}), x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)})$,

$z_{10} = \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_1, x_{\sigma(2)}, x_2), x_{\sigma(3)})$

(очевидно, что $f_{D((5),\tau)} = 0$).

Рассмотрим указанные случаи.

$(4,1)$ $f_{D(\lambda,\tau)} = \alpha z_1$. Однако $z_1|_{x_1=e_1, x_2=e_2} = -e_2$, значит, $\alpha = 0$.

$(3,2)$ Заметим, что $z_2 - z_3 = 0$ — тождество алгебры B_∞. Пусть $f_{D(\lambda,\tau)} = \alpha(z_2 - z_3) + \beta z_3 + \gamma z_4$. Так как $z_3|_{x_1=e_1, x_2=e_2} = 0$, $z_4|_{x_1=e_1, x_2=e_2} = e_1$, $z_3|_{x_1=e_1, x_2=e_1+e_2} = -e_2$, то $\beta = \gamma = 0$. Ввиду (1.7), (3.1) $z_2 - z_3 = (x_1, x_2, x_2, x_1, x_1) - (x_1, x_1, x_2, x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_2, x_1, x_1) + (x_2, x_1, (x_1, x_1, x_2)) = (x_1, (x_2, x_1, x_1), x_2) - (x_2, (x_1, x_1, x_2), x_1) = 0$. Следовательно, $f_{D(\lambda,\tau)} = 0$.

$(3,1,1)$ Ясно, что $z_5 = 0$. В силу (0.3), (1.7), (1.25)

$$z_6 = \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x_1, x_1), x_{\sigma(3)}) =$$

$$= (1/4) \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma \sum_{\tau\in S_3} \varepsilon_\tau (y_{\tau(1)}, (y_{\tau(2)}, x, y_{\tau(3)}), x)\Delta_x^1(x_1)\Delta_x^1(x_{\sigma(3)})|_{y_1=x_{\sigma(1)}, y_2=x_{\sigma(2)}, y_3=x_1} -$$

$$- \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma \{(x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_1), x_1) - (1/2)(x_1, (x_{\sigma(2)}, x_1, x_{\sigma(1)}), x_{\sigma(3)}) +$$

$+ (1/2)(x_1, (x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(1)}), x_1)\} = 0$. Из (0.3), (1.7), (1.25), (3.1) вытекает, что $z_7 = \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, x_1, x_{\sigma(2)}, x_1, x_{\sigma(3)}) = 2\sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_1, x_1, x_{\sigma(3)}) =$

$$= \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma \{(x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x_1\, x_{\sigma(3)}), x_1) - (x_{\sigma(2)}, (x_{\sigma(1)}, x_1, x_1), x_{\sigma(3)})\} = z_6 = 0.$$

Значит, $f_{D(\lambda,\tau)} = 0$.

$(2.2.1)$ Заметим, что $z_8 - 2z_9 = 0$ — тождество алгебры B_∞. Кроме того, в силу (1.7), (1.25), (3.1) $z_{10} = (1/2) \sum_{\sigma\in S_3, \tau\in S_2} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau (x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(3)}) = (1/2) \sum_{\sigma\in S_3, \tau\in S_2} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \cdot 2(x_{\sigma(1)}, x_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(2)}, x_{\tau(2)}) = -z_9$. Пусть $f_{D(\lambda,\tau)} = \alpha(z_8 - 2z_9) + \beta z_9$. Так как $z_9|_{x_1=e_1, x_2=e_2, x_3=e_3} = 2e_3$, то $\beta = 0$. Ввиду (1.7), (1.25), (3.1), (3.2) имеем $z_8 - 2z_9 = \sum_{\sigma\in S_3, \tau\in S_2} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \{(x_{\sigma(1)}, x_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\tau(2)}, x_{\sigma(3)}) - 2(x_{\sigma(1)}, x_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)})\} = \sum_{\sigma\in S_3, \tau\in S_2} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \{(x_{\tau(2)}, (x_{\sigma(1)},$

$x_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}), x_{\sigma(3)}) - (x_{\sigma(1)}, x_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)})\} = \sum_{\sigma\in S_3, \tau\in S_2} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(-2(x_{\tau(2)}, (x_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(1)}), x_{\sigma(3)})$ — следует, что $h = 0$. Значит $e_{D(\lambda,\tau)}f = 0$. Согласно замечанию 1.1 лемма доказана.

Лемма 3.3. *Любое тождество алгебры* B_∞ *из* $P_6 = P_6((x_1, x_2, x_3)(x_4, x_5, x_6))$ *лежит в* I.

Доказательство. Пусть $f \in P_6$ — тождество в B_∞, $\lambda = (k_1, \ldots, k_r)$ — разбиение 6, $\tau \in S_6$. Если $r \geqslant 4$, то $e_{D(\lambda,\tau)}f$ является линейной комбинацией многочленов вида

$$g = \sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma (y_{\sigma(1)}, x_1, y_{\sigma(2)})(y_{\sigma(3)}, x_3, y_{\sigma(4)}).$$

В силу (3.5) $g = 0$, а значит, и $e_{D(\lambda,\tau)}f = 0$. Пусть $r \leqslant 3$. Нетрудно видеть, что $f_{D(\lambda,\tau)}$ будет линейной комбинацией многочленов вида

$(4, 2)$ $z_1 = (x_1, x_1, x_2)(x_1, x_1, x_2)$;

$(3, 3)$ $z_2 = (x_1, x_2, x_2)(x_1, x_1, x_2)$;

$(3, 2, 1)$ $z_3 = (x_1, x_1, x_2)(x_1, x_3, x_2)$,

$z_4 = (x_1, x_1, x_2)(x_1, x_2, x_3)$,

$z_5 = (x_1, x_1, x_3)(x_1, x_2, x_2)$,

$(2, 2, 2)$ $z_6 = \sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau (x_{\sigma(1)}, x_{\tau(3)}, x_{\sigma(2)})(x_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}) - (1/2)(x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)})\} = \sum_{\sigma\in S_3, \tau\in S_2} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\{2(x_{\tau(2)}, (x_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(1)}), x_{\sigma(2)}) - (1/2)(x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)}) - (1/2)(x_{\tau(1)}, (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(2)}), x_{\tau(2)})\} = (1/2)\sum_{\sigma\in S_3, \tau\in S_2} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau h(x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(1)}, x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)})$,

где

$$h(x, y_1, y_2, y_3, y_4) = \sum_{\eta\in S_4} \varepsilon_\eta (y_{\eta(1)}, (y_{\eta(2)}, x, y_{\eta(3)}), y_{\eta(4)}).$$

Следовательно, $f_{D(\lambda,\tau)} = 0$. В силу замечания 1.1 лемма 3.1 доказана.

Таким образом, все тождества алгебры B_∞ степени не выше пяти лежат в I. С помощью (1.5), (1.6) легко видеть, что в I попадают тождества

$$((x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y))L(a, b) = 0,$$

$$\sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma f(x, x, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = 0, \tag{3.3}$$

$$\sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma f(x, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = 0, \tag{3.4}$$

где $f(y_1, \ldots, y_5) \in \mathrm{FV}_0$ — произвольный полилинейный многочлен. В дальнейшем, если не оговорено противное, все многочлены будем рассматривать в ${}^{F[X]}/_I$. В силу (3.4)

$$\sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(3)}, y_2, x_{\sigma(4)}) = \sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma\{(1/2)[(x_{\sigma(1)}, y_1(x_{\sigma(3)}, y_2, x_{\sigma(4)}), x_{\sigma(2)}) - y_1(x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(3)}, y_2, x_{\sigma(4)}), x_{\sigma(2)})] + (1/2)[(x_{\sigma(3)}, y_2(x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}), x_{\sigma(4)}) - y_2(x_{\sigma(3)}, (x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}), x_{\sigma(4)})]\} = (1/2)\sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma\{(x_{\sigma(1)}, y_1(x_{\sigma(3)}, y_2, x_{\sigma(4)}), x_{\sigma(2)}) + (x_{\sigma(1)}, y_2(x_{\sigma(3)}, y_1, x_{\sigma(4)}), x_{\sigma(2)}) = (1/2)\sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(3)}, y_1y_2, x_{\sigma(4)}), x_{\sigma(2)}) = 0. \tag{3.5}$$

Имеет место равенство [3]

$$T(a^2, x, y, z)=2aT(a, x, y, z)+2(y, (z, a, x), a)+2(z, (y, a, x), a). \quad (3.6)$$

Из (0.3) следует, что $(x, (y, a, z), a)+(y, (z, a, x), a)+(z, (x, a, y), a)=0$. Поэтому $(x, (y, a, z), a)=(1/3)\{((x, (y, a, z), a)+(y, (x, a, z), a))+((x, (y, a, z), a)+(z, (y, a, x), a))\}$. Отсюда в силу (3.6) имеем

$$(x, (y, a, z), a)=(1/6)\{(T(a^2, z, x, y)-T(a^2, y, x, z))+2a(T(a, y, x, z)-T(a, z, x, y))\}. \quad (3.7)$$

Отметим, что в Jord $[X]$ выполнено

$$T(x, x, x, y)=(x^2, x, y)-2x(x, x, y)=(x^2, x, y)-(x, x^2, y)=0, \quad (3.8)$$

$$T(x, x, y, z)=T(x, x, x, z)\Delta_x^1(y)-2T(x, y, x, z)=-2T(x, y, x, z), \quad (3.9)$$

$$(xy, z, t)=(x, z, yt)+(y, z, xt). \quad (3.10)$$

Лемма 3.2. *Тождество* (1.19) *лежит в* I.

Доказательство. Пусть

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=T((x_1, x_2, x_3), x_4, x_5, x_6)-$$
$$-(x_1, x_2, x_3)((x_5, x_6, x_4)+(x_6, x_5, x_4))=((x_1, x_2, x_3)x_4, x_5, x_6)-$$
$$-x_4((x_1, x_2, x_3), x_5, x_6)-(x_1, x_2, x_3)(x_5, x_6, x_4).$$

Нетрудно видеть, что

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2)=f(x_1, x_2, x_3, x_4, y_2, y_1), \quad (3.11)$$

$$f(y_1, x_1, y_2, x_2, x_3, x_4)=-f(y_2, x_1, y_1, x_2, x_3, x_4), \quad (3.12)$$

$$\sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, y_1, y_2, y_3)=0. \quad (3.13)$$

Из (3.8), (3.9) вытекает, что

$$f(x_1, x_2, x_3, x, x, x)=0, \quad (3.14)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, y, x, x)=-2f(x_1, x_2, x_3, x, y, x). \quad (3.15)$$

Пусть $\lambda=(k_1, \ldots, k_r)$ — разбиение 6, $\tau\in S_6$. Если $r\geqslant 4$, то из (3.11)—(3.13) следует, что $e_{D(\lambda,\tau)}f$ будет линейной комбинацией многочленов вида

$$g=\sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, y_2, x_{\sigma(4)}).$$

Применяя (3.3)—(3.5), имеем

$$g=\sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma\{((x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}, y_2, x_{\sigma(4)})-x_{\sigma(3)}((x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}), y_2, x_{\sigma(4)})\}=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma\{(x_{\sigma(1)}, y_1x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(2)}, y_2, x_{\sigma(4)})+x_{\sigma(3)}((x_{\sigma(1)}, y_2, x_{\sigma(2)}), y_1, x_{\sigma(4)})\}=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma\{(x_{\sigma(1)}, y_1x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(2)}, y_2, x_{\sigma(4)})+(x_{\sigma(1)}, y_2x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}y_1, x_{\sigma(4)})-$$
$$-y_1(x_{\sigma(1)}, y_2, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)})\}=\sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon_\sigma(x_{\sigma(1)}, t, x_{\sigma(2)}, t, x_{\sigma(4)})\Delta_t^1(y_2)\,|_{t=x_{\sigma(3)}y_1}=0.$$

Следовательно, $e_{D(\lambda,\tau)}f=0$. Далее рассмотрим разбиения λ, в которых $k_1\geqslant 3$. В силу (3.11)—(3.15) $f_{D(\lambda,\tau)}$ является линейной комбинацией многочленов вида

$$z_1=f(y_1, y_2, x, x, x, y_3), \quad z_2=f(x, x, y_1, y_2, y_3, x),$$
$$z_3=f(x, x, y_1, x, y_2, y_3).$$

Из (1.1) вытекает, что

$$z_1 = f(y_1, y_2, x, x, x, y_3) = ((y_1, y_2, x)\, x, x, y_3) - x((y_1, y_2, x)\, x, y_3) =$$
$$= ((1/2)(y_1, y_2, x^2) - (1/2)\, T(y_1, y_2, x, x), x, y_3) -$$
$$- (1/2)((y_1, y_2, x), x^2, y_3) = (1/2)\{((y_1, y_2, t), x, y_3) - ((y_1, y_2, x), t, y_3)\}\big|_{t=x^2}.$$

Ввиду тождества алгебры B_∞ степени пять,

$(y_1, y_2, t, x, y_3) - (y_1, y_2, x, t, y_3) = (t, y_3, x)\, L(y_1, y_2) + (y_1, (x, y_2, t), y_3)$,

и (1.24) имеем $z_1 = 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что если среди переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}$ есть четыре одинаковых, то $f(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}) = 0$. С помощью (3.11)—(3.13) и (3.15) получаем

$$z_2 = f(x, x, y_1, y_2, y_3, x) = (1/2)\, f(x, x, y_1, y_2, x, x)\, \Delta_x^1(y_3) -$$
$$- (1/2)(f(y_3, x, y_1, y_2, x, x) + f(x, y_3, y_1, y_2, x, x)) = (1/2)(2f(y_1, y_3, x, y_2, x, x) -$$
$$- f(y_3, y_1, x, y_2, x, x)) = f(y_3, y_1, x, x, x, y_2) - 2f(y_1, y_3, x, x, x, y_2) =$$
$$= z_1\big|_{y_1=y_3, y_2=y_1, y_3=y_2} - 2z_1\big|_{y_2=y_3, y_3=y_2} = 0.$$

Аналогично, применяя (3.11)—(3.13), имеем

$$z_2 = f(x, x, y_1, x, y_2, y_3) = f(x, x, y_1, x, y_2, x)\, \Delta_x^1(y_3) -$$
$$- (f(y_3, x, y_1, x, y_2, x) + f(x, y_3, y_1, x, y_2, x) + f(x, x, y_1, y_3, y_2, x)) =$$
$$= 2f(y_1, y_3, x, x, x, y_2) - f(y_3, y_1, x, x, x, y_2) - f(x, x, y_1, y_3, y_2, x) =$$
$$- 2z_1\big|_{y_2=y_3, y_3=y_2} - z_1\big|_{y_1=y_3, y_2=y_1, y_3=y_2} - z_2\big|_{y_2=y_3, y_3=y_2} = 0.$$

Итак, $f_{D(\lambda,\tau)} = 0$. Осталось рассмотреть разбиение $\lambda = (2, 2, 2)$. В силу (3.11)—(3.13) $e_{D(\lambda,\tau)} f$ будет линейной комбинацией многочленов вида

$$h = \sum_{\sigma,\tau \in S_3} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau f(x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, y_{\tau(2)}, x_{\sigma(3)}, y_{\tau(3)}).$$

Из (1.11), (3.10) получаем

$$h = \sum_{\sigma,\tau \in S_3} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \{((x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)})\, y_{\tau(2)}, x_{\sigma(3)}, y_{\tau(3)}) -$$
$$- y_{\tau(2)}(x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, y_{\tau(3)}) - (x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(3)}, y_{\tau(3)}, y_{\tau(2)})\} =$$
$$= \sum_{\sigma,\tau \in S_3} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \{(-T(y_{\tau(2)}, x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}) + (x_{\sigma(1)} y_{\tau(2)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}) -$$
$$- x_{\sigma(1)}(y_{\tau(2)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}), x_{\sigma(3)}, y_{\tau(3)}) - (1/2)(x_{\sigma(1)}, y_{\tau(2)}, x_{\sigma(2)})(y_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, y_{\tau(3)}) -$$
$$- y_{\tau(2)}(x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, y_{\tau(3)})\} =$$
$$= \sum_{\sigma,\tau \in S_3} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \{(x_{\sigma(1)} y_{\tau(2)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, y_{\tau(3)}) -$$
$$- [(y_{\tau(2)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(1)} y_{\tau(3)}) + (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(3)}, y_{\tau(3)}(y_{\tau(2)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}))] -$$
$$- (1/2)(x_{\sigma(1)}, y_{\tau(2)}(y_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, y_{\tau(3)}), x_{\sigma(2)}) +$$
$$+ y_{\tau(2)}[(1/2)(x_{\sigma(1)}, (y_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, y_{\tau(3)}), x_{\sigma(2)}) - (x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, y_{\tau(3)})]\}.$$

Ввиду тождеств

$$\sum_{\sigma \in S_3, \tau \in S_2} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau ((1/2)(x_{\sigma(1)}, (y_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, y_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)}) -$$
$$- (x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, y_{\tau(2)})) = 0,$$

$$\sum_{\tau \in S_3} \varepsilon_\tau y_{\tau(2)}(y_{\tau(1)}, x, y_{\tau(3)}) = 2 \sum_{\tau \in S_3} \varepsilon_\tau y_{\tau(3)}(y_{\tau(2)}, y_{\tau(1)}, x) =$$
$$= \sum_{\tau \in S_3} \varepsilon_\tau (y_{\tau(1)}, y_{\tau(2)} x, y_{\tau(3)}),$$

выполненных в B_∞, имеем

$$h=\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\{-(t,y_{\tau(2)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(1)},y_{\tau(1)})+$$
$$+(1/2)(y_{\tau(2)},x_{\sigma(2)},y_{\tau(1)},x_{\sigma(1)},t)-(1/2)(x_{\sigma(2)},x_{\sigma(1)},(y_{\tau(2)},t,y_{\tau(1)}))-$$
$$-(1/2)(x_{\sigma(1)},(y_{\tau(2)},t,y_{\tau(1)}),x_{\sigma(2)})\}|_{t=x_{\sigma(3)}y_{\tau(3)}}.$$

Из тождества алгебры B_∞ степени пять,

$$\sum_{\sigma,\tau\in S_2}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\{-(t,y_{\tau(2)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(1)},y_{\tau(1)})+(1/2)(y_{\tau(2)},x_{\sigma(2)},y_{\tau(1)},x_{\sigma(1)},t)-$$
$$-(1/2)(x_{\sigma(2)},x_{\sigma(1)},(y_{\tau(2)},t,y_{\tau(1)}))-(1/2)(x_{\sigma(1)},(y_{\tau(2)},t,y_{\tau(1)}),x_{\sigma(2)})\}=0$$

(очевидно, что $f_{D((6),\tau)}=f_{D((5,1),\tau)}=0$, $f_{D((4,1,1),\tau)}=\alpha\sum_{\sigma\in S_2}\varepsilon_\sigma(x_{\sigma(1)},x_3,x_3)\times$ $\times(x_{\sigma(2)},x_3,x_3)|_{x_3=x_1,x_1=x_3}=0$).

Рассмотрим указанные случаи.

(4, 2) $f_{D(\lambda,\tau)}=\alpha z_1$. Однако $z_1|_{x_1=e_1,x_2=e_2}=1$, значит, $\alpha=0$.

(3, 3) $f_{D(\lambda,\tau)}=\alpha z_2$. Поскольку $z_2|_{x_1=e_1,x_2=e_1+e_2}=1$, $\alpha=0$.

(3, 2, 1) Заметим, что $z_5-z_4=0$ — тождество в B_∞. Пусть $f_{D(\lambda,\tau)}=\alpha z_3+\beta z_4+\gamma(z_5-z_4)$. Так как $z_3|_{x_1=e_1,x_2=e_1+e_2,x_3=e_2}=0$, $z_4|_{x_1=e_1,x_2=e_1+e_2,x_3=e_2}=1$ и $z_3|_{x_1=e_1,x_2=e_2,x_3=e_1}=1$, то $\alpha=\beta=0$ и $f_{D(\lambda,\tau)}=$ $=\gamma(z_5-z_4)$. Из (1.12), (1.14), (1.19), (1.23), (1.24), (3.9), (3.10) следует, что

$$z_5-z_4=(x_1,x_1,x_3)(x_1,x_2,x_2)-(x_1,x_1,x_2)(x_1,x_2,x_3)=$$
$$=(1/2)\{T((x_1,x_2,x_2),x_3,x_1,x_1)-T((x_1,x_2,x_3),x_2,x_1,x_1)\}=$$
$$=T((x_1,x_2,x_3),x_1,x_2,x_1)-T((x_1,x_2,x_2),x_1,x_3,x_1)=$$
$$=((x_1,x_2,x_3)x_1,x_2,x_1)-x_1((x_1,x_2,x_3),x_2,x_1)-((x_1,x_2,x_2)x_1,x_3,x_1)+$$
$$+x_1((x_1,x_2,x_2),x_3,x_1)=(1/2)((x_1,x_2,x_3),x_2,x_1^2)-(1/2)((x_1,x_2,x_2),x_3,x_1^2)+$$
$$+x_1((x_2,x_3,x_1)L(x_1,x_2)-(x_3,x_2,x_1)L(x_1,x_2))=$$
$$=(1/2)((x_3,x_2,t)L(x_1,x_2)-(x_2,x_3,t)L(x_1,x_2))|_{t=x^2}+x_1((x_2,x_1,x_3)L(x_1,x_2))=(1/2)(x_3,t,x_2)L(x_1,x_2)|_{t=x^2}-x_1((x_2,x_1,x_3),x_1,x_2)=(1/2)((x_2,x_1,x_3),t,x_2)|_{t=x^2}-(1/2)(x_2,x_1,x_3,x_1^2,x_2)=0.$$

Значит, $f_{D(\lambda,\tau)}=0$.

(2, 2, 2) $f_{D(\lambda,\tau)}=\alpha z_6$. Однако $z_6|_{x_1=e_1,x_2=e_2,x_3=e_3}=-24$. Следовательно $\alpha=0$. Согласно замечанию 1.1 лемма доказана.

Таким образом, все тождества степени шесть из (1.7)—(1.28), (1.30), (1.31) попадают в идеал I. Займемся тождествами степени семь. Заметим, что ввиду (1.1), (3.7)

$$(x,a,(x,(y,x,z),b))=(x,a,(1/6)((T(x^2,y,b,z)-$$
$$-T(x^2,z,b,y))+2x(T(x,z,b,y)-T(x,y,b,z))))=0. \tag{3.16}$$

Обозначим TFV$_0$-идеал, порожденный (0.3), (1.7), (1.25), (3.1), (3.16), через I_3.

Лемма 3.3. *Тождество*

$$(a,b,c)L(x,(y,x,z))=0 \tag{3.17}$$

лежит в I_3.

Доказательство. Рассмотрим в $^{FV_0}/_{I_3}$ многочлен

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)=(x_1,x_2,x_3)(L(x_4(x_5,x_6,x_7))+$$
$$+L(x_6,(x_5,x_4,x_7))).$$

Нетрудно видеть, что

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, x_4, y_2, x_5)=f(x_1, x_2, x_3, y_2, x_4, y_1, x_5), \tag{3.18}$$

$$f(y_{\sigma(1)}, x_1, y_{\sigma(2)}, x_2, z_{\tau(1)}, x_3, z_{\tau(2)})=\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(y_1, x_1, y_2, x_2, z_1, x_3, z_2), \quad \sigma, \tau\in S_2, \tag{3.19}$$

$$\sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, y_1, y_2, y_3, y_4)=0. \tag{3.20}$$

Из (1.14), (3.16) следует, что

$$(x, a, b)L(x, (y, x, z))=(x, a, (x, (y, x, z), b))=0. \tag{3.21}$$

Поэтому

$$f(x, y_1, y_2, x, y_3, x, y_4)=f(y_1, x, y_2, x, y_3, x, y_4)= \\ =f(y_1, y_2, x, x, y_3, x, y_4)=0. \tag{3.22}$$

Линеаризация (3.22) дает цепочку равенств

$$f(x_1, y_1, y_2, x_2, y_3, x_3, y_4)+f(x, y_1, y_2, x_1, y_3, x, y_4)\,\Delta_x^1(x_2)\,\Delta_x^1(x_3)= \\ =f(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3, y_4)+f(y_1, x, y_2, x_1, y_3, x, y_4)\,\Delta_x^1(x_2)\,\Delta_x^1(x_3)= \\ =f(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3, x_3, y_4)+f(y_1, y_2, x, x_1, y_3, x, y_4)\,\Delta_x^1(x_2)\,\Delta_x^1(x_3)=0. \tag{3.23}$$

Из (3.18), (3.23) получаем

$$f(x, x, y_1, t, y_2, t, y_3)=-2f(x, t, y_1, t, y_2, x, y_3)=-f(x, t, y_1, t, y_2, x, y_3)+ \\ +f(s, t, y_1, x, y_2, s, y_3)\,\Delta_s^1(x)\,\Delta_s^1(t)=f(t, t, y_1, x, y_2, x, y_3). \tag{3.24}$$

Пусть $\lambda=(k_1, \ldots, k_r)$ — разбиение 7, $\tau\in S_7$. Если $r\geqslant 4$, то в силу (3.18) — (3.20) $e_{D(\lambda,\tau)}f$ будет линейной комбинацией многочленов вида

$$z_1=\sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)}, y_1, y_2, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, y_3 x_{\sigma(4)}),$$

$$z_2=\sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}, y_2, x_{\sigma(3)}, y_3, x_{\sigma(4)}),$$

$$z_3=\sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, y_2, y_3).$$

Ввиду (1.12), (3.4)

$$z_1=\sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon_\sigma(x_{\sigma(1)}, y_1, y_2)\,L(x_{\sigma(2)}, (x_{\sigma(3)}, y_3, x_{\sigma(4)}))= \\ =\sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon_\sigma(1/2)((x_{\sigma(2)}, (x_{\sigma(3)}, y_3, x_{\sigma(4)}), x_{\sigma(1)}), y_1, y_2)=0.$$

Из (3.23) вытекает, что

$$z_2=\sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}, y_2, x_{\sigma(3)}, y_3, x_{\sigma(4)})= \\ =-\sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)}, y_1, t, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, t, x_{\sigma(4)})\,\Delta_t^1(y_2)\,\Delta_t^1(y_3)= \\ =-z_1|_{y_1=y_3=t}\Delta_t^1(y_2)\,\Delta_t^1(y_3)=0.$$

В силу (1.14), (3.4) и равенств (в ${}^{FV}/{}_{I_3}$)

$$\sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon_\sigma(x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, a, b), x_{\sigma(3)})=\sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon_\sigma(x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, a, x_{\sigma(3)}), b)= \\ =(1/2)\sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon_\sigma(x_{\sigma(1)}, (a, x_{\sigma(2)}, b), x_{\sigma(3)})=2\sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon_\sigma(x_{\sigma(3)}, (x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(1)}, b), a) \tag{3.25}$$

имеем

$$z_3=\sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon_\sigma(x_{\sigma(1)},y_1,x_{\sigma(2)})(L(x_{\sigma(3)},(x_{\sigma(4)},y_2,y_3))+L(y_2,(x_{\sigma(4)},x_{\sigma(3)},y_3)))=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon_\sigma\{(1/2)(x_{\sigma(1)},y_1,(x_{\sigma(3)},(x_{\sigma(4)},y_2,y_3),x_{\sigma(2)}))+$$

$$+(x_{\sigma(1)},y_1,(y_2,(x_{\sigma(4)},x_{\sigma(3)},y_3),x_{\sigma(2)}))+(x_{\sigma(1)},y_1,y_2)L(x_{\sigma(2)},(x_{\sigma(4)},x_{\sigma(3)},y_3))\}=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon_\sigma\{(x_{\sigma(1)},y_1,(1/2)(x_{\sigma(3)},(x_{\sigma(4)},y_2,y_3),x_{\sigma(2)})+(y_2,(x_{\sigma(4)},x_{\sigma(3)},y_3),x_{\sigma(2)}))+$$

$$+(1/2)((x_{\sigma(2)},(x_{\sigma(4)},x_{\sigma(3)},y_3),x_{\sigma(1)}),y_1,y_2)\}=0.$$

Значит, $e_{D(\lambda,\tau)}f=0$. Если $k_1\geqslant 4$, то согласно (3.18)—(3.20), (3.22) $f_{D(\lambda,\tau)}$ будет линейной комбинацией многочленов вида $z_4=f(x,x,y_1,x,x,y_2,y_3)$. Ввиду (3.22), (3.24) получаем

$$z_4=(1/2)(f(x,y_2,y_1,x,x,x,y_3)+f(y_2,x,y_1,x,x,x,y_3))=0.$$

Фактически доказано, что если среди переменных $x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5},x_{i_6},x_{i_7}$ есть четыре одинаковых, то

$$f(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5},x_{i_6},x_{i_7})=0. \tag{3.26}$$

Осталось рассмотреть случаи $\lambda=(3,3,1)$ и $\lambda=(3,2,2)$. В силу (3.18)—(3.20) $f_{D(\lambda,\tau)}$ является линейной комбинацией многочленов вида

(3,3,1) $z_5=f(x_1,x_1,x_2,x_2,x_3,x_2,x_1)$,

$z_6=f(x_2,x_2,x_1,x_1,x_3,x_2,x_1)$,

$z_7=f(x_2,x_2,x_1,x_3,x_1,x_1,x_2)$,

$z_8=f(x_3,x_1,x_1,x_2,x_2,x_2,x_1)$,

$z_9=f(x_3,x_1,x_2,x_1,x_2,x_2,x_1)$;

(3,2,2) $z_{10}=\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(x_{\sigma(1)},x_{\tau(1)},x_{\sigma(2)},x_{\tau(2)},x_1,x_{\sigma(3)},x_{\tau(3)})$,

$z_{11}=\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(x_1,x_{\tau(1)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\tau(2)},x_{\tau(3)})$,

$z_{12}=\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(x_{\sigma(1)},x_1,x_{\sigma(2)},x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},x_{\sigma(3)},x_{\tau(3)})$,

$z_{13}=\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(x_{\tau(1)},x_{\sigma(1)},x_{\tau(2)},x_{\tau(3)},x_{\sigma(2)},x_1,x_{\sigma(3)})$,

$z_{14}=\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(x_{\tau(1)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\tau(2)},x_{\tau(3)},x_1,x_{\sigma(3)})$.

Покажем, что каждый из многочленов $z_5,\ldots,z_{14}$ равен нулю (по модулю I_3).

(3,3,1) Ввиду (3.22) $z_5=0$. Из (3.22), (3.24) следует, что $z_6=f(x_2,x_2,x_1,x_1,x_3,x_2,x_1)=(1/2)(f(x_1,x_2,x_1,x_2,x_3,x_2,x_1)+f(x_2,x_1,x_1,x_2,x_3,x_2,x_1))=0$. Согласно (1.12), (1.14), (3.22)

$$z_7=(x_2,x_2,x_1)(L(x_3,(x_1,x_1,x_2))+L(x_1,(x_1,x_3,x_2)))=$$

$$=(1/2)(x_2,x_2,x_1)(L(x_3,(x_1,x_1,x_2))+L(x_1,(x_1,x_3,x_2)))+$$

$$+(1/2)(x_1,x_2,x_3)L(x_1,(x_1,x_1,x_2))+(1/2)(x_2,x_2,(x_3,(x_1,x_1,x_2),x_1))+$$

$$+(1/2)(x_2,x_2,x_1)(L(x_1,(x_3,x_1,x_2))-L(x_1,(x_3,x_2,x_1)))=$$

$$=(1/2)(x_2,x_2,x_3)L(x_3,(x_1,x_3,x_2))\,\Delta^2_{x_3}(x_1)+$$

$$+(1/2)(x_2,x_2,(x_3,(x_1,x_1,x_2),x_1))-(1/2)((x_1,(x_3,x_2,x_1),x_2),x_2,x_1)=$$

$$=(1/2)((x_2,x_2,(x_3,(x_1,x_1,x_2),x_1))+(x_1,x_2,(x_1,(x_3,x_2,x_1),x_2))).$$

В силу тождества алгебры B_∞ степени пять,

$$(x_3,\ (x_1,\ x_1,\ x_2),\ x_1)=(x_1,\ (x_3,\ x_1,\ x_1),\ x_2),$$

и (3.16) получаем $z_7=(1/2)((x_2,\ x_2,\ (x_1,\ (x_3,\ x_1,\ x_1),\ x_2))+(x_1,\ x_2,\ (x_1,\ (x_3,\ x_2,\ x_1),\ x_2)))=(1/2)(t,\ x_2,\ (t,\ (x_3,\ t,\ x_1),\ x_2))\Delta_t^2(x_1)\Delta_t^1(x_2)=0.$

Ввиду (3.18), (3.19), (3.26) выполнено $z_8=f(x_2,\ x_1,\ x_1,\ x_2,\ x_2,\ x_2,\ x_1)\Delta^1_{x_2}(x_3)-(2f(x_2,\ x_1,\ x_1,\ x_3,\ x_2,\ x_2,\ x_1)+f(x_2,\ x_1,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_2,\ x_1))=2z_7|_{x_1=x_2,x_2=x_1}+z_5=0$. Наконец, из (3.23) следует, что $z_9=f(x_3,\ x_1,\ x_2,\ x_1,\ x_2,\ x_2,\ x_1)=-(1/2)f(x_3,\ x_1,\ x_1,\ x_2,\ x_2,\ x_2,\ x_1)=-(1/2)z_8=0.$

(3, 2, 2) Согласно (1.13), (1.14), (3.25) $z_{10}=\sum\limits_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\sigma(1)},\ x_{\tau(1)},\ x_{\sigma(2)})(L(x_{\tau(2)},(x_1,x_{\sigma(3)},x_{\tau(3)}))+L(x_{\sigma(3)},(x_1,x_{\tau(2)},x_{\tau(3)})))=(1/2)\sum\limits_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\{(x_{\sigma(1)},(x_{\tau(2)},(x_1,x_{\sigma(3)},x_{\tau(3)}),x_{\tau(1)}),x_{\sigma(2)})+(x_{\sigma(1)},x_{\tau(1)},(x_{\sigma(3)},(x_1,x_{\tau(2)},x_{\tau(3)}),x_{\sigma(2)}))\}=$

$$=(1/2)\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\{-(x_{\sigma(1)},(x_{\sigma(3)},(x_{\tau(2)},x_1,x_{\tau(3)}),x_{\tau(1)}),x_{\sigma(2)})+$$

$$+(1/2)(x_{\sigma(1)},\ x_{\tau(1)},\ (x_{\sigma(3)},\ (x_{\tau(2)},\ x_1,\ x_{\tau(3)}),\ x_{\sigma(2)}))\}=$$

$$=(1/2)\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\{-(x_{\sigma(1)},x_{\tau(1)},x_{\sigma(2)})L(x_{\sigma(3)},(x_{\tau(2)},x_1,x_{\tau(3)}))+$$

$$+2(1/2)(x_{\sigma(1)},\ x_{\tau(1)},\ x_{\sigma(2)})L(x_{\sigma(3)},\ (x_{\tau(2)},\ x_1,\ x_{\tau(3)}))\}=0.$$

Покажем, что имеет место равенство

$$\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\sigma(1)},x_1,(x_{\tau(1)},(x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\tau(3)}),x_{\tau(2)}))=0. \tag{3.27}$$

Обозначим многочлен, стоящий в левой части (3.27), через g. Ввиду (3.1)

$$g=\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\tau(1)},(x_{\sigma(1)},x_1,(x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\tau(3)})),x_{\tau(2)})-$$

$$-\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau((x_{\tau(1)},x_{\sigma(1)},x_{\tau(2)}),x_1,(x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\tau(3)}))-$$

$$-\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\sigma(1)},(x_{\tau(1)},x_1,x_{\tau(2)}),(x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\tau(3)})). \tag{3.28}$$

Переставляя символы подстановок σ и τ, а затем применяя (1.13), (1.14), (3.3), (3.25), имеем

$$\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\tau(1)},(x_{\sigma(1)},\ x_1,(x_{\sigma(2)},\ x_{\sigma(3)},x_{\tau(3)})),\ x_{\tau(2)})=$$

$$=\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\sigma(1)},(x_{\tau(1)},x_1,(x_{\tau(2)},x_{\tau(3)},x_{\sigma(3)})),x_{\sigma(2)})=$$

$$=-\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\sigma(1)},(x_{\tau(1)},x_{\sigma(3)},(x_{\tau(2)},x_{\tau(3)},x_1)),x_{\sigma(2)})=$$

$$=-2\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\sigma(1)},(x_{\sigma(3)},x_{\tau(1)},x_{\sigma(2)}),(x_{\tau(2)},x_{\tau(3)},x_1))=$$

$$=2\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\sigma(1)},(x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\tau(1)},(x_{\tau(2)},x_1,x_{\tau(3)}))=$$

$$=2\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\sigma(1)},(x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\tau(3)}),(x_{\tau(1)},x_1,x_{\tau(2)})). \tag{3.29}$$

Меняя в некоторых слагаемых символы σ и τ местами, получаем

$$\sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau ((x_{\tau(1)}, x_{\sigma(1)}, x_{\tau(2)}), x_1, (x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(3)})) =$$
$$= (1/2) \sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau ((x_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}), x_1, (x_{\sigma(1)}, x_{\tau(3)}, x_{\sigma(2)})) =$$
$$= (1/2) \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma^2 ((x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(2)}), x_1, (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(2)})) +$$
$$+ (1/4) \sum_{\sigma\neq\tau} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \{((x_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}), x_1, (x_{\sigma(1)}, x_{\tau(3)}, x_{\sigma(2)})) +$$
$$+ ((x_{\sigma(1)}, x_{\tau(3)}, x_{\sigma(2)}), x_1 (x_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}))\} = 0. \tag{3.30}$$

Из (1.13), (1.14), (3.28)—(3.30) следует, что

$$g = \sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \{2 (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(3)}), (x_{\tau(1)}, x_1, x_{\tau(2)})) -$$
$$- (x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, x_1, x_{\tau(2)}), (x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(3)}))\} =$$
$$= \sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \{- 2 (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, t) L (x_{\sigma(3)}, x_{\tau(3)}) +$$
$$+ (x_{\sigma(1)}, t, x_{\sigma(2)}) L (x_{\sigma(3)}, x_{\tau(3)})\} |_{t=(x_{\tau(1)}, x_1, x_{\tau(2)})} = 0,$$

т. е. (3.27) установлено. Заметим, что ввиду (3.18), (3.19)

$$\sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f (x_1, x_{\tau(1)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}) =$$
$$= \sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f (x_1, x_{\sigma(1)}, x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) =$$
$$= - \sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f (x_1, x_{\sigma(1)}, x_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}).$$

Отсюда, а также из (3.18), (3.19) вытекает, что

$$z_{11} = (1/2) \sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f (x_{\tau(1)}, x_1, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}).$$

Поскольку согласно (1.12), (1.14), (3.27)

$$\sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f (x_{\tau(1)}, x_1, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}) =$$
$$= \sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau (x_{\tau(1)}, x_1, x_{\sigma(1)}) (L (x_{\sigma(2)}, (x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)})) +$$
$$+ L (x_{\tau(2)}, (x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(2)}, x_{\tau(3)}))) =$$
$$= \sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \cdot (1/2) \{x_{\tau(1)}, x_1, (x_{\sigma(2)}, (x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}), x_{\sigma(1)})) +$$
$$+ ((x_{\tau(2)}, (x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(2)}, x_{\tau(3)}), x_{\tau(1)}), x_1, x_{\sigma(1)})\} = 0,$$

то $z_{11} = 0$. В силу (1.12), (1.14), (3.25), (3.27) имеем

$$z_{12} = \sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau (x_{\sigma(1)}, x_1, x_{\sigma(2)}) L (x_{\tau(1)}, (x_{\tau(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(3)})) =$$
$$= \sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \{((x_{\tau(1)}, (x_{\tau(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(3)}), x_{\sigma(1)}), x_1, x_{\sigma(2)}) +$$
$$+ (x_{\tau(1)}, x_1, x_{\sigma(2)}) L (x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(3)}))\} =$$
$$= \sum_{\sigma,\tau\in S_3} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \cdot (1/2) (x_{\tau(1)}, x_1, (x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(3)}), x_{\sigma(2)})) = 0.$$

Ввиду (3.18) — (3.20), (3.24) получаем

$$z_{13}=\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(x_{\tau(1)},x_{\sigma(1)},x_{\tau(2)},x_{\tau(3)},x_{\sigma(2)},x_1,x_{\sigma(3)})=$$

$$=(2/3)\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(s,s,x_{\tau(2)},x_{\tau(3)},x_{\sigma(2)},x_1,x_{\sigma(3)})\Delta_s^1(x_{\tau(1)})\Delta_s^1(x_{\sigma(1)})=$$

$$=(2/3)\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau (f(x_{\tau(3)},x_1,x_{\tau(2)},x_{\tau(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(3)})+$$

$$+f(x_1,x_{\tau(3)},x_{\tau(2)},x_{\tau(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(3)}))=$$

$$=-\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(x_{\tau(1)},x_1,x_{\tau(2)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\tau(3)},x_{\sigma(3)})=-z_{12}=0.$$

Аналогично

$$z_{14}=\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(x_{\tau(1)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\tau(2)},x_{\tau(3)},x_1,x_{\sigma(3)})=$$

$$=(1/3)\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(s,s,x_{\sigma(2)},x_{\tau(2)},x_{\tau(3)},x_1,x_{\sigma(3)})\Delta_s^1(x_{\tau(1)})\Delta_s^1(x_{\sigma(1)})=$$

$$=(1/3)\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\{f(x_{\tau(2)},x_1,x_{\sigma(2)},x_{\tau(1)},x_{\tau(3)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(3)})+$$

$$+f(x_1,x_{\tau(2)},x_{\sigma(2)},x_{\tau(1)},x_{\tau(3)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(3)})\}=$$

$$=(1/3)\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\{2f(x_1,x_{\tau(2)},x_{\sigma(2)},x_{\tau(1)},x_{\tau(3)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(3)})-$$

$$-f(x_1,x_{\sigma(2)},x_{\tau(2)},x_{\tau(1)},x_{\tau(3)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(3)})\}=$$

$$=(1/3)\sum_{\sigma,\tau\in S_3}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\{-2f(x_1,x_{\tau(1)},x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\tau(2)},x_{\tau(3)})-$$

$$-f(x_1,x_{\sigma(1)},x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},x_{\tau(3)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)})\}=-z_{11}=0.$$

Согласно замечанию 1.1 $f\in I_3$. Лемма доказана.

Следствие 3.4. *Тождество* (1.9) *лежит в* I_3.

Доказательство. В силу (1.12), (1.24), (3.17) имеем

$$((a,b,c)L(x,x),r,s)=(((c,b,a),x,x)+(b(c,x,a),x),r,s)=$$
$$=(x,r,s)L(x,(c,b,a))-((c,b,a),r,s)L(x,x)+$$
$$+(x,r,s)L(b,(c,x,a))-(b,r,s)L(x,(c,x,a))=(a,b,c,r,s)L(x,x).$$

Следствие доказано.

В I_3 вместе с (1.9), очевидно, попадают тождества (1.10) и (1.11). Отсюда и из лемм 1.3 и 1.4 вытекает

Следствие 3.5. $I_3L(a,b)\subseteq I_3$ *для любых* $a,b\in V_0'$.

Далее, ввиду (1.10), (1.13), (1.14), (3.17) получаем

$$(a,a,b)L(t,x)L(t,y)=(a,x,b)L(t,a)L(t,y)+(a,(x,t,a),b)L(t,y)=$$
$$=(a,x,(a,t,b))L(t,y)+(a,((y,t,x),t,a),b)+(a,(y,t,a),b)L(t,x)=$$
$$=(a,(y,t,x),(a,t,b))+(a,y,(a,t,b))L(t,x)+(a,((y,t,x),t,a),b)+$$
$$+(a,(y,t,a),b)L(t,x)=(a,(y,t,x),b)L(a,t)+(a,y,b)L(a,t)L(t,x)+$$
$$+(a,a,b)L(t,(y,t,x))-(a,(y,t,x),b)L(a,t)+(a,a,b)L(t,y)L(t,x)-$$
$$-(a,y,b)L(a,t)L(t,x)=(a,a,b)L(t,y)L(t,x).$$

Поэтому

$$(a,a,b)\,[L(x,x),L(y,y)]=(a,a,b)[L(t,x),L(t,y)]\Delta_t^1(x)\Delta_t^1(y)=0.$$

В силу (1.7), (1.25)

$$(x_1,x_2,x_3)=(1/3)\{((x_1,x_2,x_3)+(x_2,x_1,x_3))+((x_1,x_2,x_3)+(x_1,x_3,x_2))\}. \tag{3.31}$$

Отсюда следует, что (1.20) попадает в I_3.

Лемма 3.6. *Тождество* (1.22) *лежит в* I_3.

Доказательство. Рассмотрим в $^{FV_0}/_{I_3}$ многочлен

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)=((x_1, x_2, x_3), x_4, (x_5, x_6, x_7))+$$
$$+(x_1, x_2, x_3)(L(x_5, x_6)L(x_4, x_7)-L(x_4, x_5)L(x_6, x_7))-$$
$$-(x_5, x_6, x_7)(L(x_1, x_2)L(x_3, x_4)-L(x_1, x_4)L(x_2, x_3)).$$

Нетрудно видеть, что

$$f(x_1, x_2, x_3, z, y_1, y_2, y_3)=-f(y_1, y_2, y_3, z, x_1, x_2, x_3), \quad (3.32)$$
$$f(y_1, x_1, y_2, x_2, x_3, x_4, x_5)=-f(y_2, x_1, y_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad (3.33)$$
$$\sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, y_1, y_2, y_3, y_4)=0, \quad (3.34)$$

Применяя (1.14), (1.20), (1.23), имеем $((x_1, x, x_2), x, (x_3, x_4, x_5))=((x_1, x, x_2), x, x_5)L(x_3, x_4)-((x_1, x, x_2), x, x_3)L(x_4, x_5)=(x_1, x, x_2)(L(x, x_3)L(x_4, x_5)-L(x_3, x_4)L(x, x_5))$, т. е.

$$f(x_1, x, x_2, x, x_3, x_4, x_5)=0. \quad (3.35)$$

Отсюда в силу (3.32) получаем

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x, x_4, x, x_5)&=-f(x_4, x, x_5, x, x_1, x_2, x_3)=0,\\ f(x_1, x, x_2, x_3, x_4, x, x_5)&=-f(x_1, x, x_2, x, x_4, x_3, x_5)=0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Таким образом, многочлен f кососимметричен по x_2, x_4 и x_6. Из (3.33)—(3.36) вытекает, что

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4)=(1/6)\sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon_\sigma f(x_1, y_{\sigma(1)}, x_2, y_{\sigma(2)}, x_3, y_{\sigma(3)}, x_4)=$$
$$=(1/6)\sum_{\sigma\in S_3,\tau\in S_2}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(y_{\sigma(1)}, x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, y_{\sigma(2)}, x_3, y_{\sigma(3)}, x_4)=$$
$$=-(1/6)\sum_{\sigma\in S_3,\tau\in S_2}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(1)}, x_3, y_{\sigma(2)}, x_4)=$$
$$=-(1/12)\sum_{\sigma\in S_3,\tau\in S_2}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(y_{\sigma(1)}, x_{\tau(2)}, y_{\sigma(2)}, x_{\tau(1)}, x_3, y_{\sigma(3)}, x_4)=$$
$$=(1/12)\sum_{\sigma\in S_3,\tau\in S_2}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f(y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(2)}, x_{\tau(1)}, x_3, x_{\tau(2)}, x_4)=0.$$

Лемма доказана.

Далее все многочлены снова рассматриваются в $^{F[X]}/_I$. Покажем, что (1.16) лежит в I. В силу (1.1), (1.9), (1.12), (1.13), (1.20), (3.6)

$$(a, b, c)T(x, x, y, y)=(aT(x, x, y, y), b, c)=(-xT(a, x, y, y)+$$
$$+T(ax, x, y, y)-2(y, (y, a, x), x(-2(y, (y, x, x), a), b, c)=$$
$$=((-(1/2T(a, x^2, y, y)+2(y, (y, x, a), x))-2(y, (y, a, x), x)-$$
$$-2(y, (y, x, x), a), b, c)=2((y, a, x)L(y, x)-(y, y, x)L(a, x)-$$
$$-(y, x, x)L(y, a)+(y, y, x)L(x, a)-(y, x, a)L(y, x)+$$
$$+(y, y, a)L(x, x), b, c)=2\{((a, y, x), b, c)L(y, x)-$$
$$-((y, x, x), b, c)L(y, a)+((y, y, a), b, c)L(x, x)\}=$$
$$=2\{(x, b, c)L(a, y)L(y, x)-(a, b, c)L(y, x)L(y, x)+$$
$$+(y, b, c)L(x, x)L(y, a)-(x, b, c)L(y, x)L(y, a)+$$
$$+(a, b, c)L(y, y)L(x, x)-(y, b, c)L(y, a)L(x, x)\}=$$
$$=(a, b, c)(2L(y, y)L(x, x)-2L(y, x)L(y, x)).$$

Получили, что все тождества степени семь из (1.7)—(1.28), (1.30), (1.31) принадлежат идеалу I. Рассмотрим тождества степени восемь. Согласно (1.19), (3.31) имеет место равенство

$$(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)=(1/3)(T((x_1, x_2, x_3), y_3, y_2, y_1)- \\ -T((x_1, x_2, x_3), y_1, y_2, y_3)). \qquad (3.37)$$

Из (1.1), (3.37) следует (1.15). С помощью (3.37) также имеем

$$(x_1, x_2, x_3)((y_1, y_2, y_3), z, t)=(1/3)(T((x_1, x_2, x_3), t, z, (y_1, y_2, y_3))- \\ -T((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), z, t))=(1/3(T((y_1, y_2, y_3), z, t, (x_1, x_2, x_3))- \\ -T((y_1, y_2, y_3), (x_1, x_2, x_3), t, z))=(y_1, y_2, y_3)((x_1, x_2, x_3), t, z),$$

т. е. (1.21) лежит в I. Докажем, что

$$(a, a, b)((c, c, d)L(x, x))=((a, a, b)L(x, x))(c, c, d). \qquad (3.38)$$

Применяя (1.1), (1.19), (1.24), (3.6), получаем

$$(a, a, b)((c, c, d)L(x, x))=(a, a, b)(((d, c, c), x, x)+(c, (d, x, c), x))= \\ =(a, a, b)\ (x, x, (c, c, d))+(1/2)T((c, (d, x, c), x), b, a, a)= \\ =(a, a, b)(x, x, (c, c, d))+(1/8)T(-T(x^2, d, c, c)+2xT(x, d, c, c), \\ (b, a, a)=(a, a, b)(x, x, (c, c, d))+(1/4)T(x, b, a, a)T(x, d, c, c).$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$(c, c, d)((a, a, b)L(x, x))=(1/4)T(x, b, a, a)T(x, d, c, c)+ \\ +(c, c, d)(x, x, (a, a, b)).$$

Из (1.21) следует (3.38). В силу (3.31) тождество (1.8) попадает в I. Применяя (1.8), (1.13)—(1.15), (1.22), имеем

$$p(y_1, y_2, y_3, y_4, t, x)L(t, y)-p(y_1, y_2, y_3, y_4, t, y)L(t, x)= \\ =(1/2\{(y_1, t, y_3)(y_2, y_4, (y, t, x))+(y_1, (y, t, x), y_3)(y_2, y_4, t)- \\ -(y_1, y_2, y_3)((y_4, (y, t, x), t)+(y_4, t, (y, t, x)))\}= \\ =(1/2)(y, t, x)\{(y_4, y_2, (y_1, t, y_3))-(y_1, (y_2, y_4, t), y_3)+ \\ +(y_4, (y_1, y_2, y_3), t)-(t, y_4, (y_1, y_2, y_3))\}.$$

Из тождества алгебры B_∞ степени пять,

$$(y_4, y_2, (y_1, t, y_3))-(y_1, (y_2, y_4, t), y_3)+(y_4, (y_1, y_2, y_3), t)- \\ -(t, y_4, (y_1, y_2, y_3))=2(t, y_2, (y_1, y_4, y_3))-2(y_1, y_4, y_3)L(t, y_2),$$

и тождества, являющегося следствием (1.8), (1.21), (1.23),

$$(y, t, x)((t, y_2, (y_1, y_4, y_3))-(y_1, y_4, y_3)L(t, y_2))= \\ =((y_2, t, (y, t, x))-(y, t, x)L(t, y_2))(y_1, y_4, y_3)=0,$$

вытекает, что

$$p(y_1, y_2, y_3, y_4, t, x)L(t, y)=p(y_1, y_2, y_3, y_4, t, y)L(t, x).$$

Отсюда получаем

$$p(y_1, y_2, y_3, y_4, x, x)L(z, z)-p(y_1, y_2, y_3, y_4, z, z)L(x, x)= \\ =(p(y_1, y_2, y_3, y_4, t, x)L(t, z)-$$

$$-p(y_1, y_2, y_3, y_4, t, z)L(t, x))\Delta_t^1(x)\Delta_t^1(z)-(p(y_1, y_2, y_3, y_4, z, x)L(x, z)- \\ -p(y_1, y_2, y_3, y_4, x, z)L(z, x))=0.$$

Наконец, в силу (1.1), (1.19), (3.6) имеем

$$T(x,x,y,y)T(z,z,t,t)=T(zT(x,x,y,y),z,t,t)=$$
$$=T(-yT(z,y,x,x)+T(zy,y,x,x)-2(x,(x,y,y),z)-$$
$$-2(x,(x,z,y),y),z,t,t)=T(-(1/2)T(z,y^2,x,x)+$$
$$+2(x,(x,y,z),y)-2(x,(x,y,y),z)-2(x,(x,z,y),y),z,t,t)=$$
$$=4(t,t,z)((x,(y,x,z),y)-(x,(x,y,y),z)).$$

Таким образом, любое тождество алгебры B_∞ степени не выше восьми лежит в I. Осталось показать, что (1.17) попадает туда же. Это следует из (1.16), (1.20), (3.37) и тождества алгебры B_∞ степени семь,

$$(a,b,c)L((x,y,z),t)=(a,b,c)(L(x,y)L(z,t)-L(x,t)L(z,y)).$$

Теорема 0.1, а вместе с ней и теорема 0.2, полностью доказаны.

Вопрос о минимальном базисе тождеств алгебры B_n при $n=3,4,\ldots$ сводится к вопросу о том, не будет ли тождество (0.5) следовать из (0.2)—(0.4) в Jord$[X]$. При некоторых условиях на характеристику основного поля это так.

Лемма 3.7. *Если* $\operatorname{char} F=0$ *или* $\operatorname{char} F>\max\{2n+2,7\}$, *то тождество* (0.5) *следует из* (0.2)—(0.4) *в свободной йордановой алгебре,* $n=2,3,\ldots$.

Доказательство. Как было отмечено ранее, тождество (0.5) по модулю тождеств (0.2) и (0.3), образующих базис тождеств йордановой алгебры B_∞, эквивалентно тождеству

$$\sum_{\sigma\in S_{n+1}}\varepsilon_\sigma(x_{\sigma(1)},y_1,x_{\sigma(2)})(y_2,x_{\sigma(3)},y_3)L(x_{\sigma(4)},y_4)\ldots L(x_{\sigma(n+1)},y_{n+1})=0. \tag{3.39}$$

Нетрудно видеть, что для любых $u_1,\ldots,u_{n+1},v_1,\ldots,v_{n+1}\in W$ выполнено

$$\sum_{\sigma\in S_{n+1}}\varepsilon_\sigma(x_{\sigma(1)},y_1,x_{\sigma(2)})(y_2,x_{\sigma(3)},y_3)\ldots L(x_{\sigma(k)},y_k)\ldots|_{x_i=u_i,y_j=v_j}=$$
$$=-4\sum_{\sigma\in S_{n+1}}\varepsilon_\sigma(u_{\sigma(1)},v_1)\ldots(u_{\sigma(n+1)},v_{n+1})=$$
$$=-(4/(n+1)!)\sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(u_{\sigma(1)},v_{\tau(1)})\ldots(u_{\sigma(n+1)},v_{\tau(n+1)})=$$
$$=(1/(n+1)!)\sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\sigma(1)},y_{\tau(1)},x_{\sigma(2)})(y_{\tau(2)},x_{\sigma(3)},y_{\tau(3)})\ldots$$
$$\ldots L(x_{\sigma(k)},y_{\tau(k)})\ldots|_{x_i=u_i,y_j=v_j},$$

Положим

$$h(x_1,\ldots,x_{n+1},y_1,\ldots,y_{n+1})=$$
$$\sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\sigma(1)},y_{\tau(1)},x_{\sigma(2)})(y_{\tau(2)},x_{\sigma(3)},y_{\tau(3)})L(x_{\sigma(4)},y_{\tau(4)})\ldots$$
$$\ldots L(x_{\sigma(n+1)},y_{\tau(n+1)}).$$

Тождества (3.39) и $h=0$ эквивалентны по модулю (0.2), (0.3). Пусть $\lambda=(k_1,\ldots,k_r)$ — произвольное разбиение числа $2n+2$, $\eta\in S_{2n+2}$. Если $r>n+1$, то $e_{D(\lambda,\eta)}h=0$ согласно (3.5). Ясно также, что $h_{D(\lambda,\eta)}=0$ при $k_1>2$. Следовательно, $h_{D(\lambda,\eta)}\neq 0$ только для $\lambda=(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n+1})$ и подходящей подстановки η:

$$h_{D(\lambda,\eta)}=\alpha\sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau(x_{\sigma(1)},x_{\tau(3)},x_{\sigma(2)})(x_{\tau(1)},x_{\sigma(3)},x_{\tau(2)})L(x_{\sigma(4)},x_{\tau(4)})\ldots$$
$$\ldots L(x_{\sigma(n+1)},x_{\tau(n+1)}).$$

В силу (1.9), (1.12), (1.13) имеем

$$\sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau (x_{\sigma(1)}, x_{\tau(3)}, x_{\sigma(2)})(x_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}) \ldots$$

$$\ldots L(x_{\sigma(k)}, x_{\tau(k)}) \ldots = \beta \sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau (x_{\sigma(n+1)}, x_{\tau(n+1)}, x_{\sigma(n-1)}, \ldots$$

$$\ldots, x_{\sigma(4)}, x_{\tau(4)}, x_{\sigma(1)}, x_{\tau(3)}, x_{\sigma(2)})(x_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}) =$$

$$= \beta \sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \{(x_{\sigma(n+1)}, x_{\tau(n+1)}, \ldots$$

$$\ldots, x_{\tau(4)}, x_{\sigma(1)}, x_{\tau(3)}(x_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)}) - x_{\tau(3)}(x_{\sigma(n+1)}, x_{\tau(n+1)}, \ldots$$

$$\ldots, x_{\tau(4)}, x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)})\} =$$

$$= \gamma_1 \sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau (x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, t, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)}) \ldots$$

$$\ldots L(x_{\sigma(k)}, x_{\tau(k)}) \ldots |_{t=x_{\sigma(3)}x_{\tau(3)}} -$$

$$- \gamma_2 \sum_{\tau\in S_{n+1}} \varepsilon_\tau x_{\tau(3)} \Big(\sum_{\sigma\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(1)}, x_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}) L(x_{\sigma(3)}, x_{\tau(2)}) \ldots$$

$$\ldots L(x_{\sigma(k)}, x_{\tau(k)}) \ldots \Big).$$

Второе слагаемое в последнем выражении, очевидно, является следствием (0.2) — (0.4). Пусть

$$g(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau (x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, t, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)}) L(x_{\sigma(4)}, x_{\tau(4)}) \ldots$$

$$\ldots L(x_{\sigma(n+1)}, x_{\tau(n+1)}) |_{t=x_{\sigma(3)}x_{\tau(3)}}.$$

Если мы покажем, что тождество $g = 0$ следует из (0.2) — (0.4), то утверждение леммы будет доказано. Рассмотрим многочлен

$$H(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \{((x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, t, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)}) -$$

$$- 2(t, (x_{\tau(1)}, x_{\sigma(1)}, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)})) L(x_{\sigma(4)}, x_{\tau(4)}) \ldots -$$

$$- (n-2)(x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, x_{\sigma(4)}, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)}) L(x_{\tau(4)}, t) L(x_{\tau(5)}, x_{\sigma(5)}) \ldots \}|_{t=x_{\sigma(3)}x_{\tau(3)}}.$$

Используя тождества (0.2) — (0.4), его можно приравнять к нулю:

$$H(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \Big\{((x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, t, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)}) -$$

$$- (t, (x_{\tau(1)}, x_{\sigma(1)}, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)}) - (x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\tau(2)}, t)) L(x_{\sigma(4)}, x_{\tau(4)}) \ldots$$

$$\ldots L(x_{\sigma(n+1)}, x_{\tau(n+1)}) - \sum_{k=4}^{n+1} (x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, x_{\sigma(k)}, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)}) L(x_{\sigma(4)}, x_{\tau(4)}) \ldots$$

$$\ldots (t, x_{\tau(k)}) \ldots L(x_{\sigma(n+1)}, x_{\tau(n+1)})\Big\} \Big|_{t=x_{\sigma(3)}x_{\tau(3)}} = 0.$$

Далее, для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in F$, $v_1, \ldots, v_{n+1} \in W$ имеем

$$H(x_1, \ldots, x_{n+1}) |_{x_i=\alpha_i+v_i} =$$

$$= \sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \alpha_{\tau(3)} \{4v_{\sigma(2)}(v_{\tau(1)}, v_{\sigma(3)})(v_{\tau(2)}, v_{\sigma(1)})(v_{\tau(4)}, v_{\sigma(4)}) \ldots -$$

$$- 2\cdot 4v_{\sigma(2)}(v_{\tau(1)}, v_{\sigma(1)})(v_{\sigma(3)}, v_{\tau(2)})(v_{\tau(4)}, v_{\sigma(4)}) \ldots -$$

$$- (n-2)\cdot 4v_{\sigma(2)}(v_{\tau(1)}, v_{\sigma(4)})(v_{\sigma(1)}, v_{\tau(2)})(v_{\sigma(3)}, v_{\tau(4)})(v_{\tau(5)}, v_{\sigma(5)}) \ldots\} +$$

$$+ \sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau \alpha_{\sigma(3)} \{4v_{\sigma(2)}(v_{\tau(1)}, v_{\tau(3)})(v_{\tau(2)}, v_{\sigma(1)})(v_{\tau(4)}, v_{\sigma(4)}) \ldots -$$

$$- 2\cdot 2v_{\tau(3)}(v_{\tau(1)}, v_{\sigma(2)})(v_{\sigma(1)}, v_{\tau(2)})(v_{\sigma(4)}, v_{\tau(4)}) \ldots -$$

$$- (n-2)\cdot 4v_{\sigma(2)}(v_{\tau(1)}, v_{\sigma(4)})(v_{\sigma(1)}, v_{\tau(2)})(v_{\tau(3)}, v_{\tau(4)})(v_{\tau(5)}, v_{\sigma(5)}) \ldots\}.$$

Меняя во втором слагаемом символы σ и τ местами и приводя подобные, получаем

$$H(x_1, \ldots, x_{n+1})|_{x_i=\alpha_i+v_i} =$$

$$= \sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau (n+2)\,\alpha_{\tau(3)}\cdot 4v_{\sigma(2)}(v_{\tau(1)}, v_{\sigma(1)})(v_{\tau(2)}, v_{\sigma(3)})(v_{\tau(4)}, v_{\sigma(4)}) \ldots =$$

$$= (n+2)\Big\{\sum_{\sigma,\tau\in S_{n+1}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau (x_{\sigma(1)}, (x_{\tau(1)}, t, x_{\tau(2)}), x_{\sigma(2)}\, L(x_{\sigma(4)}, x_{\tau(4)}) \ldots$$

$$\ldots L(x_{\sigma(n+1)}, x_{\tau(n+1)})|_{t=x_{\sigma(3)}x_{\tau(3)}}\Big\}_{x_i=\alpha_i+v_i} = (n+2)\,g\,|_{x_i=\alpha_i+v_i}.$$

Итак, по модулю (0.2) и (0.3) тождество $(n+2)g=0$ следует из (0.4). Лемма доказана.

§ 4. БАЗИС ТОЖДЕСТВ ЛИЕВОЙ ТРОЙНОЙ СИСТЕМЫ $\Gamma_n^{(-)}$

Хорошо известно (см., например, [3]), что над полем нулевой характеристики многообразие ЛТС $\mathrm{var}\, B_n^{(-)}$, $n<\infty$, шпехтово. Следуя общей схеме рассуждений работы [3], получим из доказательства теорем 2.1 и 2.2 базис тождеств ЛТС $B_n^{(-)}$, $n=2, 3, \ldots, \infty$, над бесконечным полем характеристики, не равной двум.

Пусть $TL[X]$ — наименьшее векторное подпространство в $F[X]$, содержащее X и замкнутое относительно трилинейной операции (x, y, z). ЛТС, порожденная множеством X в $\mathrm{Jord}\,[X]^{(-)}$, является свободной, и поэтому равна $\mathrm{TL}[X]$ по модулю тождеств (1.7), (1.25) и (3.1). Ясно, что $\mathrm{TL}[X] = \mathrm{FV}_0 + \mathrm{FX}$, где $\mathrm{FX} = \mathrm{vect}_F X$. Любой TFV_0-идеал, содержащий (1.7), (1.25) и (3.1), как нетрудно понять, будет идеалом тождеств некоторого многообразия ЛТС (с теми же самыми порождающими). В частности, TFV_0-идеал $I_0\cap\mathrm{FV}_0$ можно рассматривать как идеал тождеств ЛТС, порожденный (0.3), (1.9)—(1.14), (1.20)—(1.24). $I_0\cap\mathrm{FV}_0$ — Ф-модуль. С помощью тождеств (1.34), (1.36)—(1.38), лежащих в силу предложения 2.4 в $I_0\cap\mathrm{FV}_0$, любой многочлен из $\overline{\mathrm{FV}}_0 = \mathrm{FV}_0/I_0\cap\mathrm{FV}_0$ представим в виде линейной комбинации многочленов $F[T]$, где T — двойная стандартная O-таблица. По леммам 1.3, 1.4, 1.10 и предложению 1.7 все тождества ЛТС $B_n^{(-)}$, $n<\infty$, в $\overline{\mathrm{FV}_0}$ следуют из (0.4). Таким образом, установлена

Теорема 4.1. *Тождества* (0.3), (0.4), (1.9)—(1.14), (1.20)—(1.24) *образуют базис тождеств* ЛТС $B_n^{(-)}$, $n=2, 3, \ldots,$ *над бесконечным полем характеристики, не равной двум.*

Отсюда вытекает

Теорема 4.2. *Тождества* (0.3), (1.9)—(1.14), (1.20)—(1.24) *образуют базис тождеств* ЛТС $B_\infty^{(-)}$ *над бесконечным полем характеристики, не равной двум.*

Можно получить и аналоги теорем 0.1 и 0.2 для ЛТС $B_n^{(-)}$. Пусть $\mathrm{char}\, F\neq 2, 3, 5, 7$. В силу лемм 3.1, 3.4, 3.7 и следствия 3.5 тождества (1.9)—(1.14), (1.21)—(1.24) попадают в TFV_0-идеал I_3, порожденный (0.3), (0.7), (1.25), (3.1), (3.16). Там же лежит и (1.20). Таким образом доказаны:

Теорема 4.3. *Тождества* (0.3) *и* (3.16) *образуют базис тождеств* ЛТС $B_\infty^{(-)}$, *над бесконечным полем характеристики, не равной* 2, 3, 5, 7.

Теорема 4.4. *Тождества* (0.3), (0.4) *и* (3.16) *образуют базис тождеств* ЛТС $B_n^{(-)}$, $n<\infty$, *над бесконечным полем характеристики, не равной* 2, 3, 5, 7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Исаев И. М.** Тождества алгебры билинейной формы над конечным полем // Некоторые проблемы и задачи анализа и алгебры.— Новосибирск, 1985.— С. 61—75.
2. **Днестровская тетрадь:** Нерешенные проблемы теории колец и модулей.— Новосибирск, 1982.
3. **Ильтяков А. В.** Шпехтовость идеалов тождеств некоторых простых неассоциативных алгебр // Алгебра и логика.— 1985.— Т. 24, № 3.— С. 327—351.
4. **Racine M.** Minimal identities for Jordan algebras of degree 2 // Communs algebra.— 1985.— V. 13.— P. 2493—2506.
5. **Koshlukov P. E.** Polynomial identities for a family of simple Jordan algebras // Докл. Болг. АН.— 1986.— Т. 39, № 9.— С. 15—17.
6. **Сверчков С. Р.** Специальные многообразия йордановых алгебр.— Новосибирск, 1983.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 34).
7. **Doubilet P., Rota G., Stein J.** On the foundations of combinatorial theory: IX combinatorial methods in invariant theory // Stud. appl. math.— 1974.— V. 53.— P. 185—216.
8. **De Concini C., Procesi C.** A characteristic free approach to invariant theory // Adv. math.— 1976.— V. 21.— P. 330—354.
9. **Бахтурин Ю. А.** Тождества в алгебрах Ли.— М.: Наука, 1985.
10. **Дренски В. С.** Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Мат. сб.— 1981.— Т. 115, № 1.— С. 98—115.
11. **Кольца, близкие к ассоциативным**/К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов.— М.: Наука, 1978.— (Современная алгебра).

Е. И. ЗЕЛЬМАНОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ЙОРДАНОВЫХ НИЛЬ-АЛГЕБР

Ограниченная проблема А. Г. Куроша для класса алгебр звучит следующим образом:

верно ли, что всякая ниль-алгебра из класса К, индексы нильпотентности всех элементов которой ограничены в совокупности, локально-нильпотентна?

В связи с положительными решениями этой проблемы в различных классах алгебр (см. [1—3]) возник вопрос, а не будут ли обсуждаемые ниль-алгебры не локально, а глобально нильпотентными?

Я. С. Бубнов и В. К. Иванов [4], а также М. Нагата [5] и Г. Хигман [6] доказали, что ассоциативная алгебра над полем характеристики p (или 0), удовлетворяющая тождеству $x^n = 0$, $n < p$, нильпотентна. Ограничение на характеристику здесь, разумеется, существенно.

В классах альтернативных и йордановых алгебр следует говорить не о нильпотентности, а о разрешимости, поскольку в этих классах известны примеры разрешимых, но не нильпотентных алгебр [7]. С этой оговоркой К. А. Жевлаков [8] распространил сформулированный выше результат на класс альтернативных алгебр.

Проблема А. Г. Куроша в классе йордановых алгебр связана с именем А. И. Ширшова. Им были получены первые результаты о локальной нильпотентности йордановых алгебр [2], продолженных затем автором [9], и им же была сформулирована следующая проблема глобальной разрешимости.

Проблема (А. И. Ширшов [10]). *Будет ли йорданова алгебра с тождеством $x^n = 0$ над полем характеристики $p > n$ (или 0) разрешимой?*

Настоящая статья посвящена положительному решению этой проблемы для алгебр над полем нулевой характеристики.

Теорема. *Йорданова ниль-алгебра ограниченного индекса над полем нулевой характеристики разрешима.*

Ранее эта теорема была анонсирована автором в [11]. Для специальных йордановых алгебр положительный ответ на вопрос А. И. Ширшова дан в [12].