СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Исаев И. М.** Тождества алгебры билинейной формы над конечным полем // Некоторые проблемы и задачи анализа и алгебры.— Новосибирск, 1985.— С. 61—75.
2. **Днестровская тетрадь:** Нерешенные проблемы теории колец и модулей.— Новосибирск, 1982.
3. **Ильтяков А. В.** Шпехтовость идеалов тождеств некоторых простых неассоциативных алгебр // Алгебра и логика.— 1985.— Т. 24, № 3.— С. 327—351.
4. **Racine M.** Minimal identities for Jordan algebras of degree 2 // Communs algebra.— 1985.— V. 13.— P. 2493—2506.
5. **Koshlukov P. E.** Polynomial identities for a family of simple Jordan algebras // Докл. Болг. АН.— 1986.— Т. 39, № 9.— С. 15—17.
6. **Сверчков С. Р.** Специальные многообразия йордановых алгебр.— Новосибирск, 1983.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 34).
7. **Doubilet P., Rota G., Stein J.** On the foundations of combinatorial theory: IX combinatorial methods in invariant theory // Stud. appl. math.— 1974.— V. 53.— P. 185—216.
8. **De Concini C., Procesi C.** A characteristic free approach to invariant theory // Adv. math.— 1976.— V. 21.— P. 330—354.
9. **Бахтурин Ю. А.** Тождества в алгебрах Ли.— М.: Наука, 1985.
10. **Дренски В. С.** Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Мат. сб.— 1981.— Т. 115, № 1.— С. 98—115.
11. **Кольца, близкие к ассоциативным**/К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов.— М.: Наука, 1978.— (Современная алгебра).

Е. И. ЗЕЛЬМАНОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ЙОРДАНОВЫХ НИЛЬ-АЛГЕБР

Ограниченная проблема А. Г. Куроша для класса алгебр звучит следующим образом:

верно ли, что всякая ниль-алгебра из класса K, индексы нильпотентности всех элементов которой ограничены в совокупности, локально-нильпотентна?

В связи с положительными решениями этой проблемы в различных классах алгебр (см. [1—3]) возник вопрос, а не будут ли обсуждаемые ниль-алгебры не локально, а глобально нильпотентными?

Я. С. Бубнов и В. К. Иванов [4], а также М. Нагата [5] и Г. Хигман [6] доказали, что ассоциативная алгебра над полем характеристики p (или 0), удовлетворяющая тождеству $x^n = 0$, $n < p$, нильпотентна. Ограничение на характеристику здесь, разумеется, существенно.

В классах альтернативных и йордановых алгебр следует говорить не о нильпотентности, а о разрешимости, поскольку в этих классах известны примеры разрешимых, но не нильпотентных алгебр [7]. С этой оговоркой К. А. Жевлаков [8] распространил сформулированный выше результат на класс альтернативных алгебр.

Проблема А. Г. Куроша в классе йордановых алгебр связана с именем А. И. Ширшова. Им были получены первые результаты о локальной нильпотентности йордановых алгебр [2], продолженных затем автором [9], и им же была сформулирована следующая проблема глобальной разрешимости.

Проблема (А. И. Ширшов [10]). *Будет ли йорданова алгебра с тождеством $x^n = 0$ над полем характеристики $p > n$ (или 0) разрешимой?*

Настоящая статья посвящена положительному решению этой проблемы для алгебр над полем нулевой характеристики.

Теорема. *Йорданова ниль-алгебра ограниченного индекса над полем нулевой характеристики разрешима.*

Ранее эта теорема была анонсирована автором в [11]. Для специальных йордановых алгебр положительный ответ на вопрос А. И. Ширшова дан в [12].

Доказательство следует схеме, примененной в [13, 14]. Сначала доказывается локальное утверждение, несколько более сильное, чем локальная нильпотентность (§ 1, 2):

йорданова ниль-алгебра ограниченного индекса содержит ненулевой идеал I такой, что $I^3=0$. Иными словами, йорданова ниль-алгебра ограниченного индекса обобщенно разрешима.

Затем этот результат переносится на йордановы супералгебры (§ 3). Наконец, в § 4 доказано, что обобщенной разрешимости йордановых супералгебр достаточно для доказательства разрешимости обычных йордановых ниль-алгебр ограниченного индекса.

Условимся об обозначениях. Пусть J — йорданова алгебра над полем Φ. Для элементов $a, b \in J$ обозначим через a' оператор умножения $J \ni x \to xa$; $D(a, b) = a'b' - b'a'$, $U(a, b) = a'b' + b'a' - (ab)'$, $U(a) = U(a, a)$, $V(a, b) = D(a, b) + (ab)'$.

Если A — подпространство алгебры J, то через A' обозначим пространство операторов $A' = \{a' | a \in A\}$, а через $R(A)$ — подалгебру алгебры $\mathrm{End}_\Phi(J)$, порожденную пространством A'; $\widehat{R}(A) = R(A) + \Phi \cdot \mathrm{Id}$, где Id — тождественный оператор. Если А порождена элементами $a_1, \ldots, a_m$, то пишем $R(A) = R(a_1, \ldots, a_m)$. Обозначим также $R_A^k = \Phi \cdot \mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{k} A'^{i}$.

Положим $J^{\langle 0\rangle} = J$, $J^{\langle m+1\rangle} = (J^{\langle m\rangle})^3$. Идеалы $J^{\langle m\rangle}$ называются *разрешимыми степенями алгебры* J.

Если V, W — операторы из $R(J)$, то через $V \circ W$ обозначим их йорданово произведение $V \circ W = (1/2)(VW + WV)$.

В произвольной йордановой алгебре выполняются следующие тождества (см. [7, 15]):

$$((xy)z)' + x'z'y' + y'z'x' = (xy)'z' + (xz)'y' + (yz)'x' = \\ = z'(xy)' + y'(xz)' + x'(yz)', \tag{1}$$

$$x'y'z' = 1/2(-((zx)y)' + (zD(y, x))' + (xD(z, y))' + (xy)'z' + (yz)'x' + \\ + (xz)'y') + 1/2(z'D(x, y) + y'D(x, z) + x'D(y, z)), \tag{2}$$

$$(xD(y, z))' = x'D(y, z) - D(y, z)x', \tag{3}$$

$$D(xy, z) = D(x, yz) + D(y, xz), \tag{4}$$

$$U(x, y) \circ z' = U(x, yz) + U(xz, y), \tag{5}$$

$$R(x)U(y^2, z^2) = 2(R(z)R(x \cdot y^2)R(z) - R(z)R((xy^2) \cdot z) + \\ + R(y)R(x)R(y)R(z^2) - R(y)R(xy)R(z^2)) - R(y^2)R(z^2)R(x) + \\ + R(y^2)R(xz^2) + R(z^2)R(xy^2) \quad \text{(тождество Ю. А. Медведева [16])}, \tag{6}$$

$$U(x)U(y) = 4V(x, y)^2 - 2V(yU(x), y). \tag{7}$$

Везде ниже рассматриваются алгебры над полем Φ нулевой характеристики.

§ 1. ИДЕАЛ ОГРАНИЧЕННОЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ДЛИНЫ

Предположим, что йорданова алгебра J удовлетворяет тождеству $x^n = 0$, и будем считать известным, что всякая йорданова алгебра, удовлетворяющая тождеству $x^{n-1} = 0$, разрешима. В этом параграфе мы покажем, что некоторая разрешимая степень $J^{\langle t\rangle}$ имеет ограниченную мультипликативную длину, т. е. $R(J^{\langle t\rangle}) \subseteq R_J^m$ для некоторого $m \geqslant 1$.

Под *R-словом от множества элементов* X мы понимаем оператор $V = v_1' \ldots v_k'$, где v_i — слова от X; число k называется *длиной R-слова* и обозначается $l(V)$. Для двух R-слов V и W длины k пишем $V \equiv W$, если они равны по модулю R_J^{k-1}.

Лемма 1. *Пусть FJ — свободная йорданова алгебра от множества свободных порождающих $X=\{x_i, y_j, z, a, b;\ i, j\geqslant 1\}$. Тогда для любого натурального числа m имеем*

$$\prod_{i=1}^{4^m}(x_ia)'(y_ib)'\equiv\sum W,$$

и каждое слагаемое W есть либо R-слово типа

$$W_1(z_1W_2(a, b))\circ z_2W_3(a, b))'W_4,$$

где W_1, W_4 — R-слова от X; $z_1, z_2\in\{x_i, y_j|1\leqslant i, j\leqslant 4^m\}$; $W_2(a, b)$, $W_3(a, b)$ — R-слова от $\{a, b\}$, $l(W_1)+l(W_4)=2\cdot 4^m-1$ либо R-слово типа $V_1(zV_2(a, b))'V_3$, где V_1, V_3 — R-слова от X; V_2 — R-слова от $\{a, b\}$ степени не меньше m, $l(V_1)+l(V_3)=2\cdot 4^m-1$.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по m. При $m=1$ само R-слово $\prod_{i=1}^{4}(x_ia)'(y_ib)'$ есть R-слово типа (2).

Предположим, что для m утверждение леммы доказано, и докажем его для $m+1$. Достаточно доказать, что R-слово $\prod_{i=1}^{3\cdot 4^m+1}(x_ia)'(y_ib)'$ обладает искомым представлением. По индукционному предположению имеем

$$\prod_{i=1}^{3\cdot 4^m+1}(x_ia)'(y_ib)'\equiv(x_1a)'(y_1b)'\sum_i Q_i^{(1)}\sum_j Q_j^{(2)}\sum_k Q_k^{(3)}\equiv$$
$$\equiv(x_1a)'(y_1b)'\sum_{i,j,k}Q_i^{(1)}Q_j^{(2)}Q_k^{(3)},$$

где $Q_i^{(1)}$, $Q_j^{(2)}$, $Q_k^{(3)}$ суть R-слова одного из типов (1), (2). Если хотя бы одно из R-слов $Q_i^{(1)}$, $Q_j^{(2)}$, $Q_k^{(3)}$ имеет тип (1), то их произведение $Q_i^{(1)}Q_j^{(2)}Q_k^{(3)}$ также есть R-слово типа (1).

Предположим теперь, что R-слова $Q_i^{(1)}$, $Q_j^{(2)}$, $Q_k^{(3)}$ имеют тип (2), и покажем, что R-слово $(x_1a)'(y_1b)'Q_i^{(1)}Q_j^{(2)}Q_k^{(3)}$ представимо в виде искомой комбинации R-слов. Имеем

$$(x_1a)'(y_1b)'Q_i^{(1)}Q_j^{(2)}Q_k^{(3)}=(x_1a)'(y_1b)'a_1'\ldots$$
$$\ldots a_{t-1}'(z_1V_1(a, b))'a_{t+1}'\ldots a_{r-1}'(z_2V_2(a, b))'a_{r+1}'\ldots$$
$$\ldots a_{q-1}'(z_3V_3(a, b))'a_{q+1}'\ldots a_{6\cdot 4^m}',\quad 1\leqslant t<r<q\leqslant 6\cdot 4^m.$$

В силу тождества (1) операторы умножения, стоящие в этом произведении на местах одинаковой четности, антиперестановочны по модулю линейной комбинации R-слов меньшей длины.

Возможны два случая:

Случай 1. Не все три числа t, r, q имеют одинаковую четность. Тогда, пользуясь предыдущим замечанием, можно переставить операторы $(z_iV_i(a, b))'$ в R-слове $Q_i^{(1)}Q_j^{(2)}Q_k^{(3)}$ по модулю $R_{FJ}^{6\cdot 4^m-1}$ так, чтобы эти операторы оказались рядом:

$$\ldots(z_1V_1(a, b))'(z_2V_2(a, b))'(z_3V_3(a, b))'\ldots$$

В силу тождества (2)

$$\prod_{i=1}^{3}(z_iV_i(a, b))'\equiv\sum(z_iV_i(a, b))'D(z_jV_j(a, b), z_kV_k(a, b)).$$

Предположим для определенности, что $V_j(a, b)=\overline{V}_ja'$, где оператор $\overline{V}_j$ может быть и тождественным. Тогда в силу тождества (4)

$$D(z_jV_j, z_kV_k)=D(z_j\overline{V}_j, z_kV_ka')+D(a, z_kV_k\circ z_j\overline{V}_j).$$

Степень оператора $V_k a'$ по $\{a, b\}$ равна $m+1$, поэтому R-слова, содержащие $(z_k V_k a')'$, являются словами типа (2), в то время как R-слова, содержащие $(z_k V_k \circ z_j \overline{V}_j)'$,— словами типа (1).

Случай 2. Все три числа t, r, q имеют одинаковую четность, например, нечетны. Тогда, переставляя операторы умножения, стоящие на местах одинаковой четности по модулю линейных комбинаций R-слов меньшей длины, можно образовать R-подслово

$$(z_1 V_1)'(y_1 b)'(z_2 V_2)'(*)'(z_3 V_3)'.$$

Имеем $(z_1 V_1)'(y_1 b') = (y_1 b)'(z_1 V_1)' + D(z_1 V_1, y_1 b)$. R-слово $(y_1 b)'(z_1 V_1)'(z_2 V_2)'(*)'(z_3 V_3)'$ соответствует случаю 1. Далее,

$$D(z_1 V_1, y_1 b) = D(z_1 V_1 \circ y_1, b) + D(z_1 V_1 b', y_1).$$

R-слова, содержащие $(z_1 V_1 \circ y_1)'$, являются словами типа (1), а R-слова, содержащие $(z_1 V_1 b')'$,— словами типа (2). Лемма доказана.

Как уже отмечалось, в работе [9] доказано, что йорданова алгебра J, удовлетворяющая тождеству $x^n = 0$, локально нильпотентна. Отсюда и из теоремы К. А. Жевлакова [17] следует существование такого числа m, что для любых элементов a, $b \in J$ выполняется $(R\langle a, b\rangle)^m = 0$.

Обозначим через d число слагаемых типа (1) в разложении R-слова $\prod_{i=1}^{4^m} (x_i a)'(y_i b)'$ в лемме 1 и положим $q = 4^m(2d+1)$. Если выражение $f(x_1, \ldots, x_t, \ldots)$ полилинейно зависит от $x_1, \ldots, x_t$, $X = \{x_1, \ldots, x_t\}$, то обозначим через $K_X f$ выражение

$$K_X f = \sum_{\sigma \in S_t} (-1)^{|\sigma|} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(t)}, \ldots),$$

где S_t — симметрическая группа порядка t; $|\sigma|$ — четность подстановки σ, а через $H_X f$ — выражение

$$H_X f = \sum_{\sigma \in S_t} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(t)}, \ldots).$$

Лемма 2. *Предположим, что йорданова алгебра J удовлетворяет тождеству $x^n = 0$. Тогда для любых элементов $x_1, \ldots, x_q$, $y_1, \ldots, y_q$, a, $b \in J$ справедливо включение*

$$K_X K_Y \left(\prod_{i=1}^{q} (x_i a)'(y_i b)' \right) \in R_J^{2q-1},$$

где $X = \{x_1, \ldots, x_q\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_q\}$.

Доказательство. Имеем

$$\prod_{i=1}^{q} (x_i a)'(y_i b)' = \prod_{j=1}^{2d+1} Q_j,$$

где $Q_j = \prod_i (x_i a)'(y_i b)'$, $4^m(j-1)+1 \leqslant i \leqslant 4^m \cdot j$.

По лемме 1 оператор Q_j можно разложить в сумму R-слов типов (1), (2). В силу выбора чисел m и d все R-слова типа (2) в этом разложении равны нулю, т. е. $Q_j \equiv \sum_{k=1}^{d} W_{j,k}$, где $W_{j,k}$ — R-слово типа (1), получающееся из R-слова $W_{1,k}$ сдвигом всех индексов при $x_\alpha y_\beta$ на $4^m(j-1)$. Теперь

$$\prod_{j=1}^{2d+1} Q_j \equiv \sum_{1 \leqslant k_j \leqslant d} W_{1,k_1} \ldots W_{2d+1,k_{2d+1}},$$

и по крайней мере три R-слова W_{j,k_j} в каждом слагаемом получаются друг из друга лишь сдвигами индексов при образующих. Пусть

$$W_{1,k_1}\dots W_{2d+1,k_{2d+1}}=\sum\dots(x_{i_1}W_1(a,b)\circ x_{j_1}W_2(a,b))'\dots$$
$$\dots(x_{i_2}W_1(a,b)\circ x_{j_2}W_2(a,b))'\dots(x_{i_3}W_1(a,b)\circ x_{j_3}W_2(a,b))'\dots$$

(случаи $z_1\in X$, $z_2\in Y$ и z_1, $z_2\in Y$ разбираются аналогично). Тогда оператор $K_X(W_{1,k_1}\dots W_{2d+1,k_{2d+1}})$ распадается в линейную комбинацию операторов, каждый из которых имеет вид

$$\sum_{\sigma\in S_3}a_1'\dots a_{i-1}'b_{\sigma(1)}'a_{i+1}'\dots a_{j-1}'b_{\sigma(2)}'a_{j+1}'\dots a_{t-1}'b_{\sigma(3)}'a_{t+1}'\dots a_{2q}',$$

где a_i, $b_j\in J$. Но в силу тождества (1) R-слово

$$a_1'\dots a_{i-1}'b'a_{i+1}'\dots a_{j-1}'b'a_{j+1}'\dots a_{t-1}'b'a_{t+1}'\dots a_{2q}'$$

лежит в R_J^{2q-1}. Лемма доказана.

Лемма 3 [13]. *Пусть m, n — натуральные числа, $N=N(m,n)=m\cdot n^{2m}$, $f\colon V^{\otimes N}\to W$ — линейное преобразование из тензорной степени линейного пространства V в линейное пространство W; $v_i\in V$, $1\leqslant i\leqslant N$ и $f(v_1\otimes\dots\otimes v_N)\neq 0$. Тогда найдутся числа $1\leqslant i_1<\dots<i_n\leqslant n^{2m}$ и перестановка $j_1j_2\dots j_N$ чисел 1, 2, …, N такие, что*

$$f(Q_{M_1}\dots Q_{M_m}(v_{j_1}\otimes\dots\otimes v_{j_N}))\neq 0,$$

где $M_r=\{v_{j_{m(i_1-1)+r}},\dots,v_{j_{m(i_n-1)+r}}\}$, $r=1,\dots,m$, и для каждого $1\leqslant t\leqslant n$ либо $Q_{M_t}=H_{M_t}$, либо $Q_{M_t}=K_{M_t}$.

Лемма 4. *Предположим, что йорданова алгебра J удовлетворяет тождеству $x^n=0$. Тогда для любых ее элементов x_i, y_i, z_i, $t_i\in J$, $1\leqslant i\leqslant N=N(4,q)$, имеем*

$$\prod_{i=1}^{N}(x_iz_i)'(y_it_i)'\in R_J^{2N-1}.$$

Доказательство. Предположим, что x_i, y_i, z_i, $t_i\in J$, $1\leqslant i\leqslant N$, и

$$\prod_{i=1}^{N}(x_iz_i)'(y_it_i)'\notin R_J^{2N-1}.$$

Полилинейное отображение

$$f\colon J^{\otimes 4N}\ni\otimes v_i\to\prod_{i=1}^{N}(v_{4i-3}v_{4i-2})'(v_{4i-1}v_{4i})'+R_J^{2N-1}/R_J^{2N-1}\in R_J^{2N}/R_J^{2N-1}$$

удовлетворяет условиям леммы 3. По лемме 3 найдутся элементы $a_i\in J$, $1\leqslant i\leqslant 4N$, и числа $1\leqslant i_1<\dots<i_q\leqslant N$ такие, что

$$f\left(Q_{M_1}Q_{M_2}Q_{M_3}Q_{M_4}\left(\bigotimes_{i=1}^{4N}a_i\right)\right)\neq 0,$$

где $M_r=\{a_{4(i_1-1)+r},\dots,a_{4(i_q-1)+r}\}$, $r=1,2,3,4$, и $Q\in\{H,K\}$. В силу тождества (1) для любых элементов x, y, z, t имеем $x'y'z't'=z't'x'y'$. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $i_k=k$, $1\leqslant k\leqslant q$, т. е.

$$Q_{M_1}Q_{M_2}Q_{M_3}Q_{M_4}\left(\bigotimes_{i=1}^{q}(a_{4i-3}a_{4i-2})'(a_{4i-1}a_{4i})'\right)\notin R_J^{4q-1},$$

где $M_r=\{4(i-1)+r,\ i=1,\dots,q\}$, $r=1,2,3,4$.

В силу тождества (1) выражение $\prod_{i=1}^{q} x_i' y_i'$ кососимметрично по $x_1, \ldots$ $\ldots, x_q$ и по $y_1, \ldots, y_q$ по модулю R_J^{2q-1}. Поэтому один из операторов Q_{M_1}, Q_{M_2} (соответственно Q_{M_3}, Q_{M_4}) является симметризацией, а другой — кососимметризацией. Но это противоречит лемме 2. Лемма доказана.

Лемма 5. *Для произвольного идеала $P \lhd J$ и элементов $a \in P$, $x \in J$ справедливо включение $x'(a^{n-1})' \in P' + P'P'$.*

Доказательство. В силу тождества (4) имеем $D(x, P^2) \subseteq$ $\subseteq D(xP, P) \subseteq P'P'$. Следовательно, $x'(a^{n-1})' \equiv x' \circ (a^{n-1})' \bmod P'P'$. Далее, частично линеаризуя тождество $x^n = 0$ (см. [7, гл. 6]), получим, что

$$(a^{n-1})' = -\sum_{i=1}^{n-1} U(a^i, a^{n-1-i}).$$

Теперь $x' \circ (a^{n-1})' = -\sum_{i=1}^{n-1} U(a^i, a^{n-1-i}) \circ x' \in U(P, P)$ ввиду тождества (5). Лемма доказана.

По идеалу $P \lhd J$ с помощью индукции построим убывающую цепочку идеалов алгебры J. Положим $P\langle 0\rangle = P$, $P\langle i+1\rangle$ — наибольший идеал алгебры J, содержащийся в Ф-пространстве, натянутом на элементы a^{n-1}, $a \in P\langle i\rangle$. В силу нашего индукционного предположения (о том, что йорданова алгебра, удовлетворяющая тождеству $x^{n-1} = 0$, разрешима) каждый идеал $P\langle i\rangle$ содержит некоторую разрешимую степень идеала P.

Очевидной индукцией по r из леммы 5 следует, что для любых элементов $x_1, \ldots, x_r \in J$, $a \in P\langle r\rangle$ справедливо включение $x_1' \ldots x_r' a' \in R_P^{r+1}$. Из этого включения и леммы 4, в свою очередь, следует включение

$$R_J^{2N-1}(J^2\langle 2N-1\rangle)' \subseteq R_{J^2}^{2N} \subseteq R_J^{2N-1}.$$

Значит, $R(J^2\langle 2N-1\rangle) \subseteq R_{J^2}^{2N-1}$, т. е. $J^2\langle 2N-1\rangle$ — идеал ограниченной мультипликативной длины. Как было отмечено выше, некоторая разрешимая степень $J^{(t)}$ алгебры J лежит в $J^2\langle 2N-1\rangle$. Следовательно,

$$R(J^{(t)}) \subseteq R_J^s, \tag{8}$$

где $s = 2N - 1$.

§ 2. АЛГЕБРА J СОДЕРЖИТ НЕНУЛЕВОЙ РАЗРЕШИМЫЙ ИДЕАЛ

Для подмножества $B \subseteq J$ обозначим через $\text{Ид}_J(B)$ идеал алгебры J, порожденный множеством B.

Лемма 6. *Предположим, что алгебра J с тождеством $x^n = 0$ полупервична* (т. е. не содержит ненулевых разрешимых идеалов); *P-идеал в J; I — идеал в P; $M \subseteq J$ и $I \circ M = 0$. Тогда $\text{Ид}_J(I) \circ M = 0$.*

Доказательство. Легко видеть, что $\text{Ид}_J(I) = I + \sum_{k=1}^{\infty} I(J')^k$. Предположим, что $IR_J^t \circ M \neq 0$. Тогда в силу тождества (6) имеем

$$IR_J^t M' U(P\langle t\rangle^2) \subseteq IR_J^t P\langle t\rangle' M' \widehat{R}(J) \subseteq IR_P^{t+1} M' \widehat{R}(J) \subseteq (I \circ M)\widehat{R}(J) = 0.$$

Из тождества (5) следует, что $\operatorname{Ker} U(P\langle t\rangle^3) = \{x \in J \mid xU(P\langle t\rangle^3) = 0\}$ — идеал в J. Теперь $IR_J^t \circ M \subseteq P \cap \operatorname{Ker} U(P\langle t\rangle^3)$ — ненулевой разрешимый идеал в J; противоречие. Лемма доказана.

Следствие. *Если йорданова алгебра J с тождеством $x^n = 0$ полупервична, то всякий ее ненулевой идеал также полупервичен.*

Напомним, что элемент $a \in J$ называется *абсолютным делителем нуля*, если $U(a) = 0$. Йорданова алгебра, содержащая ненулевой абсолютный делитель нуля, называется *вырожденной*.

Рассмотрим идеал $P = J^{(t)}$ алгебры J. Согласно теореме 4 работы [9] йорданова алгебра, удовлетворяющая тождеству $x^n = 0$, вырождена. Далее, по теореме 1 из той же работы [9] вырожденная алгебра P содержит такую последовательность элементов a_k, $k \geqslant 1$, что для любых элементов $x_1, \ldots, x_k \in P$ справедливо равенство

$$a'x_1' \ldots x_k'a' = a'x_1' \ldots x_{k-1}'(ax_k)' = 0.$$

Обозначим через K идеал алгебры P, порожденный $2N - 1$-м членом этой последовательности. Тогда в силу результатов § 1 имеем $K^2 = 0$. Это противоречит следствию леммы 6. Поэтому алгебра J содержит ненулевой идеал I такой, что $I^3 = 0$.

§ 3. РАЗРЕШИМЫЕ ЙОРДАНОВЫ СУПЕРАЛГЕБРЫ

Обозначим через Z_2^k прямую сумму k изоморфных копий двухэлементной группы Z_2, $k = 1, 2, \ldots, \infty$. *Цветной супералгеброй* мы называем любую Z_2^k-градуированную алгебру $A = \oplus A_\alpha$, $\alpha \in Z_2^k$.

Пример. Алгебра Грассмана обладает естественной Z_2-градуировкой. Обозначим через $G^{\otimes m}$ ее m-ю тензорную степень. Легко видеть, что $G^{\otimes m}$ обладает Z_2^m-градуировкой. Далее, $G \subset G^{\otimes 2} \subset \ldots \subset G^{\otimes m} \subset \ldots$. Теперь $G^\infty = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G^{\otimes m}$ — естественный пример цветной Z_2^∞-градуированной супералгебры; $G^\infty = \bigcup G_\alpha^\infty$, $\alpha \in Z_2^\infty$.

Для произвольной цветной супералгебры $A = \oplus A_\alpha$, $\alpha \in Z_2^k$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, рассмотрим тензорное произведение $A \otimes G^{\otimes k}$ и его подалгебру

$$G(A) = \oplus A_\alpha \otimes G_\alpha^{\otimes k}, \quad \alpha \in Z_2^k.$$

Назовем $G(A)$ *грассмановой оболочкой супералгебры* A.

Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие линейных алгебр над полем Φ. Скажем, что цветная супералгебра A является *$\mathfrak{M}$-супералгеброй*, если $G(A) \in \mathfrak{M}$.

При $k = 1$ говорят об обычных (не цветных) супералгебрах. В дальнейшем под супералгеброй мы будем иметь в виду обычную Z_2-градуированную супералгебру, а под цветной супералгеброй Z_2^∞ — градуированную супералгебру. Если $\mathfrak{M}$ — многообразие лиевых или йордановых алгебр, то приведенное выше определение согласуется с известными определениями лиевой или йордановой супералгебры (см. [18, 19]).

Основная цель этого параграфа — доказательство следующего предложения.

Предложение 1. *Пусть $J = J_0 + J_1$ — ненулевая йорданова супералгебра, грассманова оболочка которой $G(J)$ удовлетворяет тождеству $x^n = 0$. Если алгебра J_0 разрешима, то J содержит ненулевой разрешимый идеал.*

Пусть F — свободная йорданова супералгебра; a — ее свободный порождающий элемент веса 0; x_i, $1 \leqslant i \leqslant m$,— свободные порождающие элементы веса 1; e_i, $1 \leqslant i \leqslant m$,— грассмановы переменные. Рассмотрим в грассмановой оболочке $G(F)$ элемент $\left(a + \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \otimes e_i\right)^m$ и его компоненты, однородные по грассмановым переменным. Множество значений этих компонент на J образует градуированное подпространство, которое мы обозначим $I_m(J)$.

Если A — йорданова алгебра, то Φ-пространство, натянутое на элементы a^m, $a \in A$, является идеалом в A (см. [7]). Отсюда переходом к грассмановой оболочке получается, что $I_m(J)$ — идеал супералгебры J.

Пусть P — идеал в J. Положим $P\langle 0\rangle = P$, $P\langle i+1\rangle$ — наибольший идеал супералгебры J, содержащийся в $I_{n-1}(P\langle i\rangle)$. Тогда $R_J^k(P\langle k\rangle)' \subseteq \subseteq R_P^{k+1}$, и всякий идеал $P\langle k\rangle$ содержит некоторую разрешимую степень идеала P. Следующая лемма является супер-аналогом леммы 6.

Лемма 7. *Предположим, что $J = J_0 + J_1$ — полупервичная йорданова супералгебра такая, что $G(J)$ удовлетворяет тождеству $x^n = 0$; P — идеал в J; I — идеал в P; $M \subseteq J$ и $I \circ M = 0$. Тогда* $\text{Ид}_J(I) \circ M = 0$.

Ее доказательство дословно повторяет доказательство леммы 6 и потому опущено.

Следствие. *В условиях леммы 7 всякий ненулевой идеал супералгебры J полупервичен.*

Предположим временно, что $G(J)$ удовлетворяет тождеству $x^4 = 0$.

Лемма 8. *$G(J)$ удовлетворяет тождествам*

$$x'y'z' + z'y'x' + ((xz)y)' = 0, \tag{9}$$

$$(xy)'z' + (xz)'y' + (yz)'x' = x'(yz)' + y'(xz)' + z'(xy)' = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Частично линеаризуя тождество $x^4 = 0$, получим $x^4\Delta_1^1(y) = 4yx'(x^2)' = 0$, т. е. $x'(x^2)' = 0$. Отсюда и из тождества (1) следует утверждение леммы.

Тождества леммы 8 можно интерпретировать как систему градуированных тождеств, выполняющихся на супералгебре J.

Лемма 9. *Существует функция натуральных аргументов $f(m, k)$ такая, что для любых элементов $a_1, \ldots, a_{2f(m,k)} \in J_0$ выполняются включения*

$$R_J^k a_1' a_2' \ldots a_{2f(m,k)-1}' a_{2f(m,k)}' \subseteq \sum_{i_1,\ldots,i_m} R_J^2 R_{i_1} \ldots R_{i_m} \widehat{R}(J), \tag{11}$$

где $R_i = \Phi a_{2i-1}' a_{2i}' + \Phi a_{2i}' a_{2i-1}'$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_m \leqslant f(m, k)$.

Доказательство. Покажем, что при $k = 3$ годится $f(m, 3) = 4m - 2$, т. е. $x'y'z' \prod\limits_{i=1}^{4m-2} a_{2i-1}' a_{2i}'$ лежит в правой части (11). В силу тождества (9) имеем

$$z'R_i \subseteq R_i z' + (zR_i)', \quad R_i z' \subseteq z'R_i + (zR_i)', \quad (zR_i)' \subseteq z'R_i + R_i z'. \tag{12}$$

Следовательно,

$$z'R_1 \ldots R_{3m-2} \subseteq \sum R_{i_1} \ldots R_{i_p}(zR_{j_1} \ldots R_{j_q})', \quad p + q = 3m - 2.$$

Если $p \geqslant m$, то $x'y'R_{i_1} \ldots R_{i_p}(zR_{j_1} \ldots R_{j_q})'$ имеет искомый вид. Пусть $p \leqslant m - 1$, $q \geqslant 2m - 1$. В силу второго из включений (12)

$$R_{i_1} \ldots R_{i_p}(zR_{j_1} \ldots R_{j_q})' \subseteq \sum (zR_{\alpha_1} \ldots R_{\alpha_r})' R_{\beta_1} \ldots R_{\beta_u}, \quad r \geqslant q \geqslant 2m - 1.$$

Теперь в силу тождества (9)

$$x'y'(zR_{\alpha_1} \ldots R_{\alpha_r})' \subseteq (zR_{\alpha_1} \ldots R_{\alpha_r} x'y')' + (zR_{\alpha_1} \ldots R_{\alpha_r})' y'x'.$$

Но $(zR_{\alpha_1} \ldots R_{\alpha_r} x'y')' R_{\beta_1} \ldots R_{\beta_u} R_{3m-1} \ldots R_{4m-2}$ лежит в правой части (11). Далее, в силу третьего из включений (12)

$$(zR_{\alpha_1} \ldots R_{\alpha_r})' \subseteq \sum R_{\gamma_1} \ldots R_{\gamma_i} z' R_{\xi_1} \ldots R_{\xi_j}, \quad i + j = r \geqslant 2m - 1.$$

Если $\gamma_i \geqslant m$, то $R_{\gamma_1} \ldots R_{\gamma_i} z' R_{\xi_1} \ldots R_{\xi_j}$ лежит в правой части (11). Если $\gamma_i < m$, то $\xi_j \geqslant m$. Тогда

$$R_{\gamma_1} \ldots R_{\gamma_i} z' \subseteq J' + \sum J' R_{\nu_1} \ldots R_{\nu_\omega}$$

и $R_{\gamma_1} \ldots R_{\gamma_i} z' R_{\xi_1} \ldots R_{\xi_j}$ лежит в правой части (11).

Теперь предположим, что $k > 3$. Пусть $f(m, k) = f(4m-2, k-1)$. Тогда

$$R_J^k R_1 \ldots R_{f(m,k)} \subseteq R_J \left(R_J^{k-1} R_1 \ldots R_{f(m,k)}\right) \subseteq$$
$$\subseteq \sum R_J \left(R_J^2 R_{i_1} \ldots R_{i_{4m-2}} \widehat{R}(J)\right) \subseteq \sum R_J^2 R_{j_1} \ldots R_{j_m} \widehat{R}(J).$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Предположим, что йорданова супералгебра J полупервична; $a_1, \ldots, a_{2k}$ — элементы из J_0; $I = \text{Ид}_{J_0}(a_1, \ldots, a_{2k})$. Предположим, что w — элемент из $J_0 \cup J_1$ такой, что $w\widehat{R}(J_0)(I'I' + (I^2)') = 0$ и u — ненулевой элемент из $wJ_1' \prod_{i=1}^{2k} a_i'$. Если $0 \leqslant m_1 < m_2 \leqslant k$, $m_2 - m_1 \geqslant 2f(5, s+1) - 1$, то найдется номер j, $2m_1 < j \leqslant 2m_2$, такой, что $ua_j' \neq 0$.*

Доказательство. Предположим, что $ua_j' = 0$ при $2m_1 < j \leqslant 2m_2$, и покажем, что $uR_J^2 a_{i_1} \ldots a_{i_5} = 0$ при $2m_1 < i_1, \ldots, i_5 \leqslant 2m_2$.

1. Заметим, что $wJ_1'(I^3)' = 0$. В самом деле, последовательно применяя тождества (10) и (9), получим, что для любых элементов a, b, $c \in I$, $x_1 \in J_1$ выполняется

$$x_1'((ab)c)' = -c'(x_1(ab))' - (ab)'(x_1c)' = c'\left(a'x_1'b' + b'x_1'a'\right) -$$
$$-(ab)'(x_1c)' \equiv 0 \bmod (I'I' + (I^2)')\widehat{R}(J).$$

2. $u(I^3)' = 0$. В самом деле, в силу тождества (9)

$$wJ_1' \prod_{i=1}^{2k} a_i'(I^3)' \subseteq wJ_1'(I^3)'\widehat{R}(J) = 0.$$

3. Покажем, что $uJ_0'J_0'a_{i_1}'a_{i_2}'a_{i_3}' = 0$. Пусть $x, y \in J_0$. Тогда

$$ux'y'a_{i_1}'a_{i_2}'a_{i_3}' = -u\left(xa_{i_1}'y'\right)'a_{i_2}'a_{i_3}' = u\left(xa_{i_1}'y'a_{i_3}'a_{i_4}'\right)' \in u(I^3)' = 0.$$

4. Из п. 3 следует, что $uJ_0'a_{i_1}'a_{i_2}'a_{i_3}'a_{i_4}' = 0$.

5. $uJ_1'J_1'a_{i_1}' \ldots a_{i_5}' = 0$. Пусть $x_1, y_1 \in J_1$. Тогда

$$ux_1'y_1'a_{i_1}' \ldots a_{i_5}' = -u\left(x_1a_{i_1}'y_1'\right)'a_{i_2}'a_{i_3}'a_{i_4}'a_{i_5}' = 0$$

в силу п. 4.

6. $uJ_1'a_{i_1}' \ldots a_{i_4}' = 0$. В самом деле,

$$uJ_1'a_{i_1}' \ldots a_{i_4}' \in wJ_1' \prod_{i=1}^{2k} a_i'J_1'a_{i_1}' \ldots a_{i_4}' =$$
$$= w\left(J_1a_2'a_1'a_4'a_3' \ldots a_{2k}'a_{2k-1}'\right)'J_1'a_{i_1}' \ldots a_{i_4}' \subseteq wJ_1'J_1'a_{i_1}' \ldots$$
$$\ldots a_{i_4}' \subseteq w\left(J_1a_{i_1}'J_1'\right)'a_{i_2}'a_{i_3}'a_{i_4}' + wa_{i_1}'J_1'J_1'a_{i_2}'a_{i_3}'a_{i_4}' \subseteq w\left(J_0a_{i_3}'a_{i_2}'\right)'a_{i_4}' +$$
$$+ wa_{i_1}'\left(J_1a_{i_2}'J_1'\right)'a_{i_3}'a_{i_4}' = wa_{i_1}'\left(J_0a_{i_4}'a_{i_3}'\right)' = 0,$$

7. $uJ_1'J_0'a_{i_1}' \ldots a_{i_5}' = 0$. В самом деле,

$$wJ_1' \prod_{i=1}^{2k} a_i'J_1'J_0'a_{i_1}' \ldots a_{i_5}' \subseteq wJ_1'J_1'J_0'a_{i_1}' \ldots a_{i_5}' \subseteq$$
$$\subseteq w\left(J_1J_0'J_1'\right)'a_{i_1}' \ldots a_{i_5}' + wJ_0'J_1'J_1'a_{i_1}' \ldots a_{i_5}' = 0$$

в силу п. 5.

8. $uJ'_0J'_1a'_{i_1}\ldots a'_{i_5}=0$ Действительно,

$$uJ'_0J'_1a'_{i_1}\ldots a'_{i_5}\subseteq u\left(J_0a'_{i_1}J'_1\right)'a'_{i_2}\ldots a'_{i_5}=0$$

в силу п. 6.

Итак, мы доказали, что

$$uR_J^2a'_{i_1}\ldots a'_{i_s}=0. \tag{13}$$

Как и выше, обозначим через R_i пространство, натянутое на операторы $a'_{2m_1+2i-1}a'_{2m_1+2i}$ и $a'_{2m_1+2i}a'_{2m_1+2i-1}$, $1\leqslant i\leqslant 2f(5,\ s+1)-1$. Из равенства (13) и леммы 8 следует, что

$$uR_J^s\prod_{k=1}^{f(5,s)}R_{i_k}=0.$$

Далее,

$$u\widehat{R}\left(J^{(t)}\right)\left(J\prod_{i=1}^{2f(5,s+1)-1}R_i\right)\subseteq\sum uR_J^sR_{i_1}\ldots R_{i_p}J'R_{j_1}\ldots$$
$$\ldots R_{j_q},\quad p+q=2f(5,s+1)-1.$$

Если $p\geqslant f(5,\ s+1)>f(5,\ s)$, то $uR_J^sR_{i_1}\ldots R_{i_p}=0$. Если $p<f(5,\ s+1)$, то $q\geqslant f(5,\ s+1)$. Теперь

$$uR_J^sR_{i_1}\ldots R_{i_p}\subseteq uR_J^s,$$
$$uR_J^sR_{i_1}\ldots R_{i_p}J'R_{j_1}\ldots R_{j_q}\subseteq uR_J^{s+1}R_{j_1}\ldots R_{j_q}\subseteq$$
$$\subseteq\sum uR_J^2R_{\nu_1}\ldots R_{\nu_5}\widehat{R}(J)=0.$$

По лемме 7

$$\left(J\prod_{i=1}^{2f(5,s+1)-1}R_i\right)\circ\text{Ид}_J(u)=0.$$

В работе [20] было введено следующее определение аннулятора подмножества M йордановой алгебры A:

$$\operatorname{Ann}_A M=\{x\in A\mid x\circ M=AD(x,\ M)=0\}.$$

Там же было доказано, что если I — идеал алгебры A, то

1) $\operatorname{Ann}_A(I)$ — тоже идеал алгебры A,

2) если $x\in A$, $x\circ I=0$, то $x\in\operatorname{Ann}_A(I^3)$.

Отсюда и из сказанного выше следует, что

$$J\prod_{i=1}^{2f(5,s+1)-1}R_i\subseteq\operatorname{Ann}_J(\text{Ид}_J(u)^3).$$

Далее, $u\in\text{Ид}_J\left(J\prod_{i=1}^{2f(5,s+1)-1}R_i\right)$, значит,

$$u\in\operatorname{Ann}_J(\text{Ид}_J(u)^3).$$

Окончательно, $((\text{Ид}_J(u))^3)^2=0$. Это противоречит полупервичности супералгебры J. Лемма доказана.

Лемма 11. *Предположим, что йорданова супералгебра J полупервична; r — натуральное число; $k=2f(r+1,\ s+1)-1$; $a_1,\ \ldots,\ a_{2k}$ — элементы из J_0; $I=\text{Ид}_{J_0}(a_1,\ \ldots,\ a_{2k})$, $R_i=\Phi a'_{2i-1}a'_{2i}+\Phi a'_{2i}a'_{2i-1}$, $1\leqslant i\leqslant k$. Предположим далее, что для любого элемента $w\in J_0\cup J_1$ такого, что $w\widehat{R}(J_0)(I'I'+(I^2)')=0$, любого подмножества $\{i_1,\ \ldots,\ i_r\}\subseteq\{1,\ \ldots,\ k\}$ справедливо равенство $wJ'_1R_{i_1}\ldots R_{i_r}=0$. Тогда $\prod_{i=1}^{2k}a'_i=0$.*

Доказательство. Покажем, что $wR_J^2R_{i_1}\dots R_{i_{r+1}}=0$. Для любых номеров $1\leqslant i_1,\dots,i_{r+1}\leqslant k$. Прежде всего отметим, что

$$wJ_0'R_i=wJ_0'J_0'R_i=0.$$

Далее, в силу тождества (9) и ограничений на элемент w имеем

$$wJ_1'J_1'a_{i_1}'\dots a_{i_4}'\subseteq w(J_1a_{i_1}'J_i')'a_{i_2}'a_{i_3}'a_{i_4}'+wa_{i_1}'(J_1a_{i_2}'J_1'a_{i_4}'a_{i_3}')'+$$
$$+wa_{i_1}'a_{i_4}'a_{i_3}'(J_1a_{i_2}'J_1')'+wa_{i_1}'a_{i_2}'J_1'J_1'a_{i_3}'a_{i_4}'=0.$$

Следовательно, $wJ_1'J_1'a_{i_1}'\dots a_{i_4}'=0$. По условию

$$wJ_1'R_{i_1}\dots R_{i_r}=wJ_0'J_1'R_{i_1}\dots R_{i_r}=0.$$

Осталось показать, что $wJ_1'J_0'R_{i_1}\dots R_{i_{r+1}}=0$.
Но

$$J_0'\prod_{j=1}^{r+1}R_{i_j}\subseteq\prod_{j=1}^{r+1}R_{i_j}J_0'+\sum_{j=1}^{r+1}R_{i_1}\dots\widehat{R}_{i_j}\dots$$
$$\dots R_{i_{r+1}}(J_0R_{i_j})'+\sum R_{i_1}\dots R_{i_p}(J_0R_iR_j)'\widehat{R}(J),$$

где знак $\wedge$ над сомножителем означает, что этот сомножитель опущен.

Первые два слагаемых суммы в правой части аннулируют wJ_1' по условию. Что касается слагаемых из третьей суммы, то $J_0R_iR_j\subseteq I^3$, и мы можем сослаться на п. 1 доказательства леммы 10.

По теореме 4 [21] идеал I мультипликативно нильпотентен. Кроме того, из тождества (1) следует, что для любого номера $p\geqslant 1$

$$(\widehat{R}(J_0)(I'I'+(I^2)')\widehat{R}(J_0))^p\subseteq\widehat{R}(J_0)(I')^p\widehat{R}(J_0).$$

Следовательно, идеал алгебры $\widehat{R}(J_0)$, порожденный множеством $I'I'+(I^2)'$, нильпотентен.

Предположим, что $\prod_{i=1}^{k}R_i\neq 0$, $u\in J\prod_{i=1}^{k}R_i$. Тогда найдется такой ненулевой элемент $w\in u\widehat{R}(J_0)$, что $w\widehat{R}(J_0)(I'I'+(I^2)')=0$. Теперь

$$w\widehat{R}(J^{(t)})u'\subseteq\sum wR_J^sR_{i_1}\dots R_{i_p}J'R_{j_1}\dots R_{j_q},$$
$$p+q=k=2f(r+1,\ s+1)-1.$$

Если $p\geqslant f(r+1,\ s)$, то

$$wR_J^sR_{i_1}\dots R_{i_p}\subseteq\sum wR_J^2R_{\nu_1}\dots R_{\nu_{r+1}}\widehat{R}(J)=0.$$

Если же $p<f(r+1,\ s+1)$, то $q\geqslant f(r+1,\ s+1)$ и

$$wR_J^sR_{i_1}\dots R_{i_p}J'R_{j_1}\dots R_{j_q}\subseteq wR_J^{s+1}R_{j_1}\dots R_{j_q}\subseteq$$
$$\subseteq\sum wR_J^2R_{\mu_1}\dots R_{\mu_{r+1}}\widehat{R}(J)=0.$$

Мы доказали, что $w\widehat{R}(J^{(t)})u'=0$. По лемме 7 $\text{Ид}_J(w)u'=0$, откуда следует $u\in\text{Ann}_J(\text{Ид}_J(w)^3)$. Теперь $w\in\text{Ид}_J(u)\subseteq\text{Ann}_J(\text{Ид}_J(w)^3)$. Значит, $(\text{Ид}_J(w)^3)^2=0$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть* $r=2f(5,\ s+1)-1$; $k=2f(r+1,\ s+1)-1$. *Тогда в условиях леммы* 11 *для любых элементов* $a_1,\dots,a_k\in J_0$ *справедливо равенство* $\prod_{i=1}^{k}a_i'a_i'=0$.

Доказательство. Пусть $I=\text{Ид}_{J_0}(a_1,\dots,a_k)$. По лемме 11 достаточно доказать, что для любого элемента $w\in J_0\cup J_1$ такого, что $w\widehat{R}(J_0)(I'I'+(I^2)')=0$, и любых номеров $1\leqslant i_1,\dots,i_r\leqslant k$ выполняется

$$wJ_1'a_{i_1}'a_{i_1}' \dots a_{i_r}'a_{i_r}' = 0.$$

Если это не так, то по лемме 10 найдется номер $j \in \{i_1, \dots, i_r\}$ такой, что $wJ_1'a_{i_1}'a_{i_1}' \dots a_{i_r}'a_{i_r}'a_j' \neq 0$. В силу тождества (9) операторы $a_i'a_i'$ и a' антикоммутируют по модулю $(I^3)'$. Следовательно (см. п. 1 доказательства леммы 10),

$$wJ_1'a_{i_1}'a_{i_1}' \dots a_{i_r}'a_{i_r}'a_j' = wJ_1'(a_j')^3 \dots = wJ_1'(a_j^3)' \dots = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 13. *В условиях и обозначениях леммы* 12 *пусть* $r_1 = kr$; $k_1 = 2f(r_1+1, s+1) - 1$. *Тогда* $(J_0')^{2k_1} = 0$.

Доказательство. По лемме 11 достаточно доказать, что если $a_1, \dots, a_{2r_1} \in J_0$, $I = \text{Ид}_{J_0}(a_1 \dots, a_{2r_1})$, $w \in J_0 \cup J_1$ и $w\widehat{R}(J_0)(I'I' + (I^2)') = 0$, то $wJ_1'a_1' \dots a_{2r_1}' = 0$. Если это не так, то по лемме 10 найдется номер $1 \leqslant j_1 \leqslant 2r$ такой, что $wJ_1'a_1' \dots a_{2r_1}'a_{j_1}' \neq 0$. Имеем $a_{i-1}'a_i'a_{j_1}' \equiv -a_{j_1}'a_i'a_{i-1}'$ $\mathrm{mod}\,(I^3)'$ и $wJ_1'(J_0')^{2l}(I^3)' = 0$. Следовательно, не уменьшая общности, можно считать, что $wJ_1'a_{j_1}'a_1' \dots a_{2r_1}' \neq 0$, $j_1 \in \{1, 2\}$. Если $j_1 = 2$, то $wJ_1'a_2'a_1'a_2' = wJ_1'(a_2^2 \cdot a_1)' \subseteq wI_1'(I^3)' = 0$. Значит, $j_1 = 1$.

Рассмотрим вместо набора элементов $a_1, \dots, a_{2r_1}$ новый набор элементов $a_{j_1}, a_1, \dots, a_{2r_1-1}$ и проведем переобозначение $a_1 := a_{j_1}$, $a_i := a_{i-1}$, $2 \leqslant i \leqslant 2r_1$. Новый набор элементов отличается от старого тем, что $a_1 = a_2$. Кроме того, по-прежнему $wJ_1'a_1' \dots a_{2r_1}' \neq 0$.

Опять по лемме 10 найдется номер $2r+1 \leqslant j_2 \leqslant 4r$ такой, что $wJ_1'a_1' \dots a_{2r_1}'a_{j_2}' \neq 0$. Тогда $wJ_1'a_1' \dots a_{2r}'a_{j_2}'a_{2r+1}' \dots a_{2r_1-1}' \neq 0$, и, еще раз переобозначив элементы $a_{j_2}, \dots, a_{2r_1-1}$, можно считать, что $a_{2r+1} = a_{2r+2}$. Проделав эту операцию k раз, мы получим набор элементов $a_1, \dots, a_{2r_1}$ такой, что $wJ_1'a_1' \dots a_{2r_1}' \neq 0$, и для любого $0 \leqslant i \leqslant k-1$ имеем $a_{2ri+1} = a_{2ri+2}$.

Переставляя подслова $a_{2ri+1}'a_{2ri+2}'$ влево в R-слове $a_1' \dots a_{2r_1}'$ с помощью тождества (9), получим, что

$$a_1' \dots a_{2r_1}' = \sum b_1' \dots b_{2k}' \dots,$$

и для любого $1 \leqslant i \leqslant k$ либо $b_{2i-1}' = b_{2i}'$, либо $b_{2i-1} \in I^3$, либо $b_{2i} \in I^3$. Если хотя бы для одного номера $1 \leqslant i \leqslant k$ элемент b_{2i-1} лежит в I^3, то $wJ_1'(J_0')^{2(i-1)}b_{2i-1}' = 0$. Если же $b_{2i} \in I^3$, то

$$wJ_1'(J_0')^{2(i-1)}b_{2i-1}'b_{2i}' = wJ_1'(J_0')^{2(i-1)}(b_{2i-1}'b_{2i}' + b_{2i}'b_{2i-1}') =$$
$$= wJ_1'(J_0')^{2(i-1)}\left[(b_{2i-1} + b_{2i})'^2 - (b_{2i-1}')^2 - (b_{2i}')^2\right].$$

Мы доказали существование таких элементов $c_1, \dots, c_k \in J_0$, что $wI_1'c_1'c_1' \dots c_k'c_k' \neq 0$. Это противоречит лемме 12. Лемма доказана.

Лемма 14. *Предположим, что грассманова оболочка ненулевой йордановой супералгебры* $J = J_0 + J_1$ *удовлетворяет тождеству* $x^4 = 0$ *и йорданова алгебра* J_0 *разрешима. Тогда* J *содержит ненулевой разрешимый идеал.*

Доказательство. Если супералгебра J полупервична, то по лемме 13 $(J_0')^{2k_1} = 0$. Покажем, что в этом случае $J^{\langle 2k_1 \rangle} \subseteq J_0$. В самом деле,

$$J^2 = (J_0^2 + J_1^2) + J_1 \circ J_0, \quad (J^2)_1 = J_1 \circ J_0.$$

Отсюда следует, что для любого $i \geqslant 1$

$$(J^{(i)})_1 \subseteq J_1 (J'_0)^i, \quad (J^{\langle 2k_1 \rangle})_1 = 0.$$

Значит, супералгебра J разрешима. Лемма доказана.

Напомним, что если A — йорданова алгебра, то через $I_n(A)$ обозначается пространство, натянутое на множество $\{a^n,\ a \in A\}$.

Лемма 15. *Пусть $J = J_0 + J_1$ — Z_2-градуированная йорданова алгебра (не супералгебра!). Тогда $I_4(I_4(J)) \subseteq J_0^2 + J_1$.*

Доказательство. Для произвольного элемента $x = x_0 + x_1$, $x_i \in J_i$, имеем $x^4 = a_0 + a_1$, где $a_0 = x_0^4 + x_1^4 + 2x_1^2 \circ x_0^2 + 2(x_0 U(x_1)) \circ x_0 + x_1^2 U(x_0) + x_0^2 U(x_1) \in J_0^2 + x_0^2 U(x_1)$. Значит, $I_4(J) \subseteq J_0^2 + J_0^2 U(J_1) + J_1$. Еще раз повторив это рассуждение, получим

$$I_4(I_4(J)) \subseteq J_0^2 + J_0^2 U(J_1) U(J_1) + J_1.$$

Но в силу тождества (7)

$$U(J_1) U(J_1) \subseteq V(J_1, J_1) + V(J_1, J_1) V(J_1, J_1), \quad V(J_1, J_1) \subseteq \subseteq D(J_1, J_1) + J'_0.$$

Следовательно, $J_0^2 V(J_1, J_1) \subseteq J_0^2$. Лемма доказана.

Доказательство предложения 1. Предположим, что $J = J_0 + J_1$ — йорданова супералгебра, алгебра J_0 разрешима и $G(J)$ удовлетворяет тождеству $x^n = 0$. Докажем предложение индукцией по степени разрешимости алгебры J_0.

Выше мы уже отмечали, что для любого $m \geqslant 1$ $I_m(J)$ есть идеал супералгебры J. Переходом к $G(J)$ доказывается (см. лемму 15), что $I_4(I_4(J)) \subseteq J_0^2 + J_1$.

По индуктивному предположению супералгебра $I_4(I_4(J))$ содержит ненулевой разрешимый идеал. Между тем, если супералгебра J полупервична, то по следствию леммы 7 либо супералгебра $I_4(I_4(J))$ полупервична, либо $I_4(I_4(J)) = 0$. Во втором случае из лемм 7, 14 следует, что $I_4(J) = 0$, что опять противоречит лемме 14. Предложение доказано.

Распространим предложение I на цветные супералгебры. Для этого покажем, как от произвольной цветной Z_2^∞-градуированной супералгебры перейти к обычной Z_2-градуированной супералгебре с помощью так называемого функтора обесцвечивания (см. [14]).

Пусть V — счетномерное векторное пространство с базисом v_i, $i \geqslant 0$. Определим на V симметрическую билинейную форму $\langle\ ,\ \rangle$, полагая $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Рассмотрим соответствующую этой форме *алгебру Клиффорда* $C(V)$, т. е. алгебру, заданную образующими и определяющими соотношениями $v_i \circ v_j = \delta_{ij}$ (см. [15]). Каноническим базисом алгебры $C(V)$ служит множество элементов $v_{i_1} \ldots v_{i_r}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r$. На $C(V)$ определяется естественная Z_2^∞-градуировка $C(V_0)_\alpha = \Phi v_{\alpha_1} \ldots v_{\alpha_r}$, если последовательность $\alpha \in Z_2^\infty$, содержит 1 в точности на местах $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r$.

Обозначим через (α, α) скалярный квадрат $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$ элемента α.

Определение. Пусть $A = \oplus A_\alpha$, $\alpha \in Z_2^\infty$, — цветная супералгебра. Назовем *клиффордовой оболочкой супералгебры* A следующую подалгебру тензорного произведения $A \otimes C(V)$:

$$C(A) = C(A)_0 + C(A)_1 = \oplus \{A_\alpha \otimes C(V)_\alpha \mid (\alpha, \alpha) \equiv 0 \bmod 2\} + \oplus \{A_\alpha \otimes C(V)_\alpha \mid (\alpha, \alpha) \equiv 1 \bmod 2\}.$$

Нетрудно проверить (см. [14]), что если $\mathfrak{M}$ — многообразие линейных алгебр и $A = \oplus A_\alpha$, $\alpha \in Z_2^\infty$, — цветная $\mathfrak{M}$-супералгебра, то $C(A) = C(A)_0 + C(A)_1$ — обычная (не цветная) $\mathfrak{M}$-супералгебра. Ясно также, что супералгебра $C(A)$ Z_2^∞-градуирована.

Рассмотрим четное семейство автоморфизмов φ_i, $i \geqslant 0$, алгебры $C(V)$: $\varphi_i(v_j) = (-1)^{\delta_{ij}} v_j, j \geqslant 0$. Автоморфизм φ_i продолжается до автоморфизма тензорного произведения $A \otimes C(V)$. Далее, подалгебра $C(A)$ инвариантна относительно φ_i. Следовательно, φ_i индуцирует автоморфизм клиффордовой оболочки $C(A)$. Обозначим через H подгруппу группы $\mathrm{Aut}\, C(A)$, порожденную множеством $\{\varphi_i, i \geqslant 0\}$. Подпространство $C(A)$ инвариантно относительно H тогда и только тогда, когда оно Z_2^∞- градуировано.

Лемма 16 [14]. *Супералгебра $C(A)$ полупервична тогда и только тогда, когда цветная супералгебра A полупервична.*

Доказательство. Если $I = \oplus I_\alpha$, $\alpha \in Z_2^\infty$, — ненулевой разрешимый идеал в A, то $C(I) = \oplus \{I_\alpha \otimes C(V)_\alpha\}$ — ненулевой разрешимый идеал в $C(A)$.

Пусть теперь $I = I_0 + I_1$ — ненулевой разрешимый идеал в $C(A)$, $0 \neq x \in I_\sigma$, $\sigma = 0, 1$; $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ — сумма ненулевых Z_2^∞-однородных элементов. Легко видеть, что каждая однородная компонента x_i представима в виде линейной комбинации элементов из орбиты x^H. Пусть

$$x_1 \in \sum_{k=1}^{m} \Phi x^{h_k}, \quad h_k \in H.$$

Тогда $I^{h_1} + \ldots + I^{h_m}$ — разрешимый идеал в $C(A)$. Следовательно, элемент x_1 также порождает в $C(A)$ разрешимый идеал. Теперь, если $x_1 = a \otimes b$, где $a \in A_\alpha$, b — элемент из канонического базиса $C(V)$, то элемент a порождает в A разрешимый идеал. Лемма доказана.

Предложение 2. *Пусть $A = \oplus A_\alpha$, $\alpha \in Z_2^\infty$, — цветная йорданова супералгебра такая, что $G(A)$ удовлетворяет тождеству $x^n = 0$, и подалгебра $\oplus \{A_\alpha \mid (\alpha, \alpha) \equiv 0 \bmod 2\}$ разрешима. Тогда супералгебра A содержит ненулевой разрешимый идеал.*

Доказательство. Рассмотрим клиффордову оболочку $C(A) = C(A)_0 + C(A)_1$. По условию йорданова алгебра $C(A)_0$ разрешима. Кроме того, в силу сказанного выше, грассманова оболочка $G(C(A))$ удовлетворяет тождеству $x^n = 0$. Значит, по предложению 1 супералгебра $C(A)$ не полупервична. По лемме 16 не полупервична и цветная супералгебра A. Предложение доказано.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Пусть $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — многообразие йордановых Φ-алгебр, определяемое тождеством $x^n = 0$; $\tilde{F}$ — свободная алгебра этого многообразия от счетного набора свободных порождающих x_i, $i \geqslant 1$. Построим с помощью трансфинитной индукции возрастающую последовательность идеалов алгебры $\tilde{F}$: $N_0(\tilde{F}) = 0$, $N_1(\tilde{F})$ — сумма всех разрешимых идеалов алгебры $\tilde{F}$; если α — предельное трансфинитное число, то $N_\alpha(\tilde{F}) = \cup\{N_\beta(\tilde{F}) \mid \beta < \alpha\}$; если существует $\alpha - 1$, то $N_\alpha(\tilde{F}) \supseteq N_{\alpha-1}(\tilde{F})$, $N_\alpha(\tilde{F})/N_{\alpha-1}(\tilde{F}) = N_1(\tilde{F}/N_{\alpha-1}(\tilde{F}))$. Очевидно, что любой идеал $N_\alpha(\tilde{F})$ устойчив относительно автоморфизмов алгебры $\tilde{F}$. По теореме 4.2.9 [22] $N_\alpha(\tilde{F})$ — вербальный идеал *).

В § 2 мы доказали, что любая ненулевая алгебра из многообразия $\widetilde{\mathfrak{M}}$ содержит ненулевой разрешимый идеал. Отсюда следует, что для некоторого трансфинитного числа γ

$$N_\gamma(\tilde{F}) = \tilde{F}.$$

---

*) В [22] теорема 4.2.9 сформулирована для идеалов свободных алгебр Ли, но предложенное там доказательство годится для произвольного полиоднородного многообразия алгебр.

Обозначим через γ_0 наименьшее трансфинитное число с тем свойством, что фактор-алгебра $\widetilde{F}/N_{\gamma_0}(\widetilde{F})$ разрешима. Число γ_0 не предельно. В самом деле, положим

$$W_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)\,x_3,\ W_{n+1}(x_1, \ldots, x_{3^{n+1}}) =$$
$$= (W_n(x_1, \ldots, x_{3^n})\, W_n(x_{3^n+1}, \ldots, x_{2\cdot 3^n}))\, W_n(x_{2\cdot 3^n+1}, \ldots, x_{3^{n+1}}).$$

Для некоторого числа $m \geqslant 1$ имеем $W_m \in N_{\gamma_0}(\widetilde{F})$. Если γ_0 — предельное число, то $N_{\gamma_0}(\widetilde{F}) = \bigcup \{N_\beta(\widetilde{F}) \mid \beta < \gamma_0\}$. В этом случае $W_m \in N_\beta(\widetilde{F})$, $\beta < \gamma_0$. Поскольку $N_\beta(\widetilde{F})$ — вербальный идеал алгебры $\widetilde{F}$, то для произвольных элементов $a_1, \ldots, a_{3^m} \in \widetilde{F}$

$$W_m(a_1, \ldots, a_{3^m}) \in N_\beta(\widetilde{F}).$$

Следовательно, фактор-алгебра $\widetilde{F}$ $\widetilde{F})$ разрешима. Это противоречит минимальности трансфинитного числа γ_0.

Предположим, что $\gamma_0 > 0$. Рассмотрим фактор-алгебру $F = \widetilde{F}/N_{\gamma_0-1}(\widetilde{F})$ и порожденное ею многообразие $\mathfrak{M}$. Поскольку идеал $N_{\gamma_0-1}(\widetilde{F})$ вербален, то алгебра F является свободной алгеброй многообразия $\mathfrak{M}$ с множеством свободных порождающих $\{\bar{x}_i = x_i + N_{\gamma_0-1}(\widetilde{F})/N_{\gamma_0-1}(\widetilde{F}),\ i \geqslant 1\}$. Ввиду нашего предположения алгебра F неразрешима.

Пусть $w = W_m(x_1, \ldots, x_{3^m}) \in N_{\gamma_0}(\widetilde{F})$, $\bar{w} = w + N_{\gamma_0-1}(\widetilde{F})/N_{\gamma_0-1}(\widetilde{F}) \in F$. Поскольку $N_{\gamma_0}(\widetilde{F})/N_{\gamma_0-1}(\widetilde{F}) = N_1(\widetilde{F})/N_{\gamma_0-1}(\widetilde{F})$, то для некоторого числа $d \geqslant 1$ имеем $\text{Ид}_F(\bar{w})^{\langle d\rangle} = 0$. Это значит, что для любых алгебры $A \in \mathfrak{M}$ и элементов $a_1, \ldots, a_{3^m} \in A$

$$\text{Ид}_A(W_m(a_1, \ldots, a_{3^m}))^{\langle d\rangle} = 0.$$

Лемма 17. *Всякая ненулевая цветная $\mathfrak{M}$-супералгебра содержит ненулевой разрешимый идеал.*

Доказательство. Пусть $A = \oplus A_\alpha, \alpha \in Z_2^\infty$, — цветная $\mathfrak{M}$-супералгебра, $G(A) \in \mathfrak{M}$. Тогда для любых элементов $a_i \in A_{\alpha_i}$, $1 \leqslant i \leqslant 3^m$, таких, что $(\alpha_i, \alpha_i) \equiv 0 \bmod 2$,

$$\text{Ид}_A(W_m(a_1, \ldots, a_{3^m}))^{\langle d\rangle} = 0.$$

Если супералгебра A полупервична, то $W_m(a_1, \ldots, a_{3^m}) = 0$. Значит, подалгебра $\oplus\{A_\alpha \mid (\alpha, \alpha) \equiv 0 \bmod 2\}$ разрешима. Теперь доказываемое утверждение следует из леммы 16.

Лемма 18. *Предположим, что задано счетное семейство непустых конечных множеств M_i, $i \geqslant 1$, и сюръективных отображений $M_i \leftarrow M_{i+1}$, $i \geqslant 1$. Тогда найдется бесконечная последовательность элементов $a_i \in M_i$, $i \geqslant 1$, таких, что $a_1 \leftarrow a_2 \leftarrow a_3 \leftarrow \ldots$.*

Доказательство. Для элементов $a_i \in M_i$, $a_j \in M_j$, $i < j$, полагаем $a_i < a_j$, если найдется система элементов $a_k \in M_k$, $i < k < j$, такая, что $a_i \leftarrow a_{i+1} \leftarrow \ldots \leftarrow a_{j-1} \leftarrow a_j$. Пусть $\mathfrak{A}(a_i) = \{a \in \bigcup M_j,\ j > i \mid a_i < a\}$. Назовем элемент a_i *выделенным*, если множество $\mathfrak{A}(a_i)$ бесконечно. Поскольку бесконечное множество $\bigcup\{M_i,\ i \geqslant 2\}$ есть объединение конечного семейства множеств $\mathfrak{A}(a)$, $a \in M_1$, то в множестве M_1 найдется выделенный элемент a_1. Предположим, что мы уже нашли выделенные элементы $a_1 \leftarrow a_2 \leftarrow \ldots \leftarrow a_n$, $a_i \in M_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Имеем $\mathfrak{A}(a_n) = \bigcup \{\mathfrak{A}(b) \mid b \in M_{n+1},\ a_n \leftarrow b\}$. Следовательно, среди прообразов элемента a_n в множестве M_{n+1} найдется выделенный элемент a_{n+1}. Лемма доказана.

Рассмотрим свободную цветную $\mathfrak{M}$-супералгебру $F_{\text{цв}}$ от множества свободных порождающих $x_{i,\alpha}$, $i \geqslant 1$, $\alpha \in Z_2^\infty$, где порождающему $x_{i,\alpha}$ приписан вес α. Ввиду сделанного нами предположения супералгебра $F_{\text{цв}}$ неразрешима. Но по лемме 17 супералгебра $F_{\text{цв}}$ обобщенно разрешима, т. е. представима в виде объединения возрастающей цепочки идеалов $F_{\text{цв}} = \cup \{I_\beta | \beta < \gamma\}$, где $I_\beta = \cup \{I_\xi | \xi < \beta\}$, если β — предельный ординал и $(I_\beta/I_{\beta-1})^3 = 0$, если существует $\beta - 1$.

Пусть $E = \{e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots), \ i \geqslant 1\}$ — канонический базис Z_2-пространства Z_2^∞; M — подмножество натурального ряда. Назовем *правильной раскраской свободных порождающих элементов* $\bar{x}_i$, $i \in M$, *алгебры* F произвольное отображение h: $M \to \{0\} \cup E$ такое, что $h(i) \in \{0, e_i\}$.

Обозначим через $H(M)$ множество всех правильных раскрасок свободных порождающих элементов $\bar{x}_i$, $i \in M$. Очевидно, что $|H(M)| = 2^{|M|}$. Если $M = \{1, \ldots, n\}$ или $M = \{k | i < k \leqslant j\}$, то пишем $H(n)$ или $H(i, j)$ соответственно. Пусть V — элемент алгебры F, зависящий от $\bar{x}_i$, $i \in M$ и $h \in H(M)$. Обозначим через $V(h)$ элемент $V(x_{i,h(i)})$ свободной супералгебры $F_{\text{цв}}$.

Построим бесконечную последовательность элементов алгебры F: $V_1 = W_t(x_1, \ldots, x_{3^t}) \in F^{(t)}$; если слово V_m, зависящее от $x_1, \ldots, x_{k(m)}$, $k(m) = 3^t + (m-1) \cdot 3s$, построено, то

$$V_{m+1} = \left(\left(V_m x'_{k+1} \ldots x'_{k+s}\right)\left(V_m x'_{k+s+1} \ldots x'_{k+2s}\right)\right)\left(V_m x'_{k+2s+1} \ldots x'_{k+3s}\right).$$

Возможны два случая.

Случай 1. Для любого $m \geqslant 1$ найдется правильная раскраска $h_m \in H(k(m))$ такая, что элемент $V_m(h_m) \in F_{\text{цв}}$ порождает разрешимый идеал.

Случай 2. Существует число m такое, что для любой правильной раскраски $h \in H(k(m))$ элемент $V_m(h)$ порождает в $F_{\text{цв}}$ разрешимый идеал.

Разберем случай 1. Пусть $H'(k(m)) = \{h \in H(k(m)) \mid V_m(h)$ порождает в $F_{\text{цв}}$ неразрешимый идеал$\}$. Обозначим через π сужение правильной раскраски $h \in H(k(m))$ на отрезок натурального ряда $[1, k(m-1)]$. Тогда $V_m(h) \in \text{Ид}_{F_{\text{цв}}}(V_{m-1}(\pi(h))^3$. Следовательно, π: $H'(k(m)) \to H'(k(m-1))$. По лемме 18 найдется бесконечная последовательность $h_1 \overset{\pi}{\leftarrow} h_2 \overset{\pi}{\leftarrow} h_3 \overset{\pi}{\leftarrow} \ldots$ правильных раскрасок, $h_i \in H'(k(i))$. Пусть γ — наименьший ординал такой, что I_γ имеет непустое пересечение с множеством ненулевых элементов $\{V_m(h_m) | m \geqslant 1\}$, $V_{m_0}(h_{m_0}) \in I_\gamma$. Ясно, что ординал γ не пределен. Тогда

$$V_{m_0+1}(h_{m_0+1}) \in \text{Ид}_{F_{\text{цв}}}(V_{m_0}(h_{m_0}))^3 \subseteq I_\gamma^3 \subseteq I_{\gamma-1}.$$

Это противоречит минимальности ординала γ.

Рассмотрим теперь случай 2. Очевидно, что для любого $i \geqslant 1$ имеем $V_i \in F^{(t)}$, $i \geqslant 1$. Предположим, что m — наименьшее число с тем свойством, что при любой правильной раскраске $h \in H(k(m))$ элемент $V_m(h) \in F_{\text{цt}}^{(t)}$ порождает в $F_{\text{цв}}^{(t)}$ разрешимый идеал.

Пусть $m > 1$. Рассмотрим элементы $V_m^{(i)} = V_m(x_{(i-1)k+1}, \ldots, x_{ik})$, $i = 1, 2, 3, 4$, и элемент $\widetilde{V}_m = \left(V_m^{(1)} \cdot V_m^{(2)}\right) \cdot \left(V_m^{(3)} \cdot V_m^{(4)}\right)$. При любой правильной раскраске $h \in H((i-1)k+1, ik)$ элемент $V_m^{(i)}(h)$ порождает в $F_{\text{цв}}^{(t)}$ разрешимый идеал. Следовательно, разрешимы идеалы

$$I^{(i)} = \oplus \left\{\text{Ид}_{F_{\text{цв}}}^{(t)}\left(V_m^{(i)}(h)\right) \middle| h \in H((i-1)k+1, ik)\right\}, \ 1 \leqslant i \leqslant 4,$$

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)} + I^{(4)}.$$

Для любой правильной раскраски $h \in H(4k(m))$ имеем $\tilde{V}_m(h) \in I^2 \cdot I^2$. По теореме 2 [21] оператор $\tilde{V}_m(h))'$ порождает нильпотентный идеал в $\widehat{R}(F^{(t)}_{\text{цв}})$; пусть степень нильпотентности этого идеала равна $d(h)$, $d = \max\{d(h) \mid h \in H(4k(m))\}$. Полагая $h \in H(k(m-1))$, покажем, что

$$((((V_{m-1}(h)\,\widehat{R}(F^{(t)}_{\text{цв}}))^3)^2)^2)'^{N(12s,d)} = 0. \tag{14}$$

Для этого достаточно доказать, что для любых элементов $a_{ij} \in F$, $1 \leqslant i \leqslant 12s$, $1 \leqslant j \leqslant N(12s, d)$,

$$\prod_{j=1}^{N(12s,d)} \tilde{V}_m(x_{1,h(1)}, \ldots, x_{k(m-1),h(k(m-1))},\ a_{1,j}, \ldots, a_{12s,j}) = 0. \tag{15}$$

Предположим, что это не так. Тогда по лемме 3 после надлежащей перенумерации элементов a_{ij} можно считать, что

$$Q_1 \ldots Q_{12s} \prod_{j=1}^{N(12s,d)} \tilde{V}_m(x_{1,h(1)}, \ldots, x_{k(m-1),h(k(m-1))},\ a_{1,j}, \ldots, a_{12s,j}) \neq 0,$$

где Q_i — (косо)симметризация по элементам $a_{i,j_1}, \ldots, a_{i,j_d}$, $1 \leqslant i \leqslant 12s$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_d \leqslant N(12s, d)$.

Если Q_i — симметризация, то заменим все элементы $a_{i,j_1}, \ldots, a_{i,j_d}$ в (15) на свободный порождающий элемент $x_{k(m-1)+i,0} \in F_{\text{цв}}$ веса 0.

Если Q_i — кососимметризация, то заменим элементы $a_{i,j_1}, \ldots, a_{i,j_d}$ в (15) на свободный порождающий элемент $x_{k(m-1)+i,e_{k(m-1)+i}} \in F_{\text{цв}}$ веса $e_{k(m-1)+i}$.

Полученное в результате этих замен выражение будет по-прежнему отлично от нуля (ср. А. Р. Кемер [23]). Это противоречит определению числа d. Равенство (14) доказано.

Из (14) следует, что $V_{m-1}(h)$ порождает разрешимый идеал в $F^{(t)}_{\text{цв}}$, что противоречит минимальности m. **Значит, $m = 1$.**

Обозначим $\tilde{W} = W_{t+1}(x_1, \ldots, x_{3^{t+1}}) \cdot W_{t+1}(x_{3^{t+1}+1}, \ldots, x_{2\cdot 3^{t+1}})$. Ввиду результатов [21] для любой правильной раскраски $h \in H(2 \cdot 3^{t+1})$ оператор $\tilde{W}(h)'$ порождает в $\widehat{R}(F^{(t)}_{\text{цв}})$ нильпотентный идеал степени $d(h)$. Пусть $d = \max\{d(h) \mid h \in H(2 \cdot 3^{t+1})\}$. Теперь из леммы 3 опять следует, что для любых элементов $a_{ij} \in F^{(t)}$, $1 \leqslant i \leqslant 2 \cdot 3^{t+1}$, $1 \leqslant j \leqslant N = N(2 \cdot 3^{t+1}, d)$, имеем

$$\prod_{j=1}^{N} \tilde{W}(a_{1,j}, \ldots, a_{2\cdot 3^{t+1},j})' = 0.$$

Таким образом $(((F^{(t)})^3)^2)^N = 0$. Алгебра F разрешима. Это противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Levitzki J.** On a problem of A. Kurosh // Amer. Math. Soc.— 1946.— V. 51.— P. 1033—1035.
2. **Ширшов А. И.** О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах // Мат. сб.— 1957.— Т. 83.— С. 381—394.
3. **Кострикин А. И.** О проблеме Бернсайда // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1959.— Т. 23, № 1.— С. 3—34.
4. **Дубнов Я. С., Иванов В. К.** О понижении степени аффинорных полиномов // Докл. АН СССР.— 1943.— Т. 41, № 3.— С. 99—102.
5. **Nagata M.** On the nilpotency of nil algebras // J. Math. Soc. Jap.— 1952.— V. 4.— P. 296—301.
6. **Higman G.** On a conjecture of Nagata // Proc. Camb. Phil. Soc.— 1956.— V. 52.— P. 1—4.
7. **Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.** Кольца, близкие к ассоциативным.— М.: Наука, 1978.
8. **Жевлаков К. А.** Разрешимость альтернативных ниль-колец // Сиб. мат. журн.— 1962.— Т. 3, № 3.— С. 368—377.

9. **Зельманов Е. И.** Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 23, № 6.— С. 100—116.
10. **Днестровская тетрадь.** Нерешенные проблемы колец.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976.
11. **Зельманов Е. И.** Йордановы ниль-алгебры ограниченного индекса // Многообразия алгебраических систем.— Новосибирск, 1986.— С. 11.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислительный центр; № 647).
12. **Зельманов Е. И., Скосырский В. Г.** Специальные йордановы ниль-алгебры ограниченного индекса // Алгебра и логика.— 1983.— Т. 22, № 6.— С. 626—635.
13. **Зельманов Е. И.** Об энгелевых алгебрах Ли // Докл. АН СССР.— 1987.— Т. 292. № 2.— С. 265—268.
14. **Зельманов Е. И., Шестаков И. П.** Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // 19 Всесоюз. алгебр. конф., Львов, 1987 г.: Тез. докл.— Львов, 1987.— С. 99—100.
15. **Jacobson N.** Structure and representations of Jordan algebra's.— Providence, R. I., 1968.
16. **Медведев Ю. А.** Ниль-радикалы конечно-порожденных йордановых PI-алгебр.— Новосибирск, 1985.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 25).
17. **Жевлаков К. А.** Разрешимость и нильпотентность йордановых колец // Алгебра и логика.— 1966.— Т. 5, № 3.— С. 37—58.
18. **Kač V. G.** Lie Superalebras // Adv. math.— 1977.— V. 26.— N 1.— P. 8—97.
19. **Kač V. G.** Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Communs algebra.— 1977.— V. 13.— P. 1375—1400.
20. **Зельманов Е. И.** Йордановы алгебры с условиями конечности // Алгебра и логика.— 1978.— Т. 17, № 6.— С. 693—703.
21. **Medvedev Yu. A., Zel'manov E. I.** Solvable Jordan algebras // Communs algebra.— 1985.— V. 13, N 6.— P. 1389—1414.
22. **Бахтурин Ю. А.** Тождества в алгебрах Ли.— М.: Наука, 1985.
23. **Кемер А. Р.** Многообразия и Z_2-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1984.— Т. 48, № 5.— С. 1042—1059.

И. Л. КАНТОР

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ $\mathfrak{L}$-ФУНКТОРА

В статье вводятся два понятия, связанные с $\mathfrak{L}$-функтором. Одно из них — обобщенно-йорданова пара J, возникающая естественным образом при рассмотрении градуированных алгебр Ли общего вида $G = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} U_i$ аналогично тому, как возникают йордановы пары в случае алгебр Ли с «короткой» градуировкой $G = U_{-1} + U_0 + U_1$. Другое понятие — конструкция, позволяющая по данной консервативной алгебре A с левой единицей построить серию консервативных алгебр A_λ, зависящих от непрерывного параметра λ. Сопоставление $A \to A_\lambda$ разбивает консервативные алгебры на классы эквивалентности и является возможным подходом к классификации консервативных алгебр. Статья посвящена изучению алгебр Ли $\mathfrak{L}(J)$ и $\mathfrak{L}(A_\lambda)$.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Универсальная градуированная алгебра Ли $\widetilde{U}^{(n)}$. По определению (см. [1, 2]), *алгебра Ли* $\widetilde{U}^{(n)}$ — это градуированная алгебра Ли $\widetilde{U}^{(n)} = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} U_i$, в которой две подалгебры $\widetilde{U}_- = \sum\limits_{i=-1}^{-\infty} \widetilde{U}_i$ и $\widetilde{U}_+ = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \widetilde{U}_i$ существенно отличаются друг от друга. Именно, $\widetilde{U}_-$ есть свободная алгебра Ли с n образующими $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и естественной градуировкой. Последнее означает, что подпространство $\widetilde{U}_{-k}$ в алгебре Ли $\widetilde{U}_- = \sum\limits_{i=-1}^{-\infty} \widetilde{U}_i$ составлено k-кратными коммутаторами $e_{i_1} \circ e_{i_2} \circ \ldots \circ e_{i_k} \equiv [[\ldots[e_{i_1}, e_{i_2}], \ldots], e_{i_k}]$. В частности, $\widetilde{U}_{-1} \equiv E^n$ — n-мерное линейное