5. **Кантор И. Л.** Классификация неприводимых транзитивно-дифференциальных групп // Докл. АН СССР.— 1964.— Т. 176.— С. 1271—1274.
6. **Кантор И. Л.** Транзитивно-дифференциальные группы Ли и инвариантные связности на однородных пространствах // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— 1966.— Т. 13.— С. 310—398.
7. **Koecher M.** Imbedding of Jordan algebras in Lie algebras. I // Amer. j. math.— 1967.— V. 89.— P. 787—815.
8. **Кантор И. Л.** Некоторые обобщения йордановых алгебр // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— 1972.— Т. 16.— С. 408—498.
9. **Loos O.** Jordan Paris.— M. Y.— Berlin: Springer-Verlag, 1977.
10. **Loos O., McCrimon K.** Speciality of Jordan triple systems // Communs algebra.— 1977.— V. 5, N 10.— P. 1057—1082.
11. **Meyberg K.** Lectures on algebras and triple systems // Lecture notes, University of Virginia, Charlottsville, 1972.
12. **McCrimon K., Meyberg K.** Coordinatisation of Jordan triple systems // Communs algebra.— 1981.— V. 9, N 14.— P. 1495—1543.
13. **Зельманов Е. И.** О первичных йордановых тройных системах // I.— Сиб. мат. журн.— 1983.— Т. 24, № 4.— С. 23—37; II.— Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 26, № 5.— С. 50—61.

Е. Н. КУЗЬМИН

СТРУКТУРА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР МАЛЬЦЕВА

Работа [1], в которой намечены основы структурной теории конечномерных алгебр Мальцева, во многом аналогичной структурной теории конечномерных алгебр Ли [2], имела большой резонанс и послужила стимулом для дальнейших исследований в этой области (см. также [3]). Однако детальное доказательство многих результатов в [1] было ради краткости опущено. Со временем отсутствие в печати детально проведенных доказательств стало причинять неудобства и даже вызывать нарекания со стороны отдельных авторов (см., например [4]). Настоящая работа следует в основном плану статьи [1] и призвана заполнить возникший пробел в литературе.

§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР МАЛЬЦЕВА. ПОДАЛГЕБРЫ КАРТАНА

1. Алгебры Мальцева, введенные впервые в [5] под названием муфанг-лиевых алгебр, определяются тождествами

$$x^2=0, \tag{1}$$

$$J(x, y, xz)=J(x, y, z)x, \tag{2}$$

где $J(x, y, z)$ — так называемый якобиан элементов x, y, z:

$$J(x, y, z)=(xy)z+(yz)x+(zx)y.$$

В любой антикоммутативной алгебре якобиан $J(x, y, z)$ является кососимметрической функцией своих аргументов.

Раскрывая якобианы в тождестве Мальцева (2), можно представить это тождество в виде

$$xyzx+yzxx+zxxy=(xy)(xz), \tag{3}$$

где для удобства записи опускаются скобки в левонормированных произведениях: $xyzx=[(xy)z]x$ и т. д.

Выведем, следуя [6], некоторые основные тождества, имеющие место в алгебрах Мальцева. Если A — алгебра Мальцева, $x\in A$ и R_x: $a\mapsto ax$ — оператор правого умножения на x в A, то ассоциативная алгебра A^*, порожденная операторами R_x, называется *алгеброй умножений алгебры* A. Тождество (3) означает, что в алгебре A^* имеют место соотношения вида

$$R_yR_x^2 = R_x^2R_y + R_{yx}R_x + R_xR_{yx}, \tag{4}$$

$$R_xR_zR_x = R_zR_x^2 - R_xR_{zx} - R_{zxx}. \tag{5}$$

Линеаризация по x тождества (2) дает

$$J(x, y, uz) + J(u, y, xz) = J(x, y, z)u + J(u, y, z)x. \tag{6}$$

Отсюда следует, что в A^* выполняется соотношение

$$R_{xyz} + R_{yzx} = R_yR_zR_x - R_zR_xR_y - R_{yz}R_x - R_{zx}R_y + R_yR_{zx} + R_zR_{xy}. \tag{7}$$

Переставляя переменные x, y, z в (7) циклически и складывая три последовательных тождества, получим после сокращения на 2

$$R_{J(x,y,z)} = [R_y, R_{zx}] + [R_z, R_{xy}] + [R_x, R_{yz}], \tag{8}$$

где квадратные скобки означают коммутатор операторов ($[X, Y] = XY - YX$). Вычитая (7) из (8), получим

$$R_{zxy} = R_zR_xR_y - R_yR_zR_x + R_xR_{yz} - R_{xy}R_z$$

или, эквивалентно,

$$R_{xyz} = R_xR_yR_z - R_zR_xR_y + R_yR_{zx} - R_{yz}R_x. \tag{9}$$

Соотношение (9) означает, что в алгебре A выполняется тождество

$$xyzt + yztx + ztxy + txyz = (xz)(yt), \tag{10}$$

которое при $t = x$ переходит в тождество (3).

Если характеристика основного поля F отлична от 2, то тождество (10) (тождество Сейгла) эквивалентно тождеству (3). В то же время оно обладает рядом преимуществ: линейно по каждому из входящих в него переменных и переходит в себя при циклической перестановке этих переменных, т. е. все переменные входят в него равноправно. Поэтому целесообразно принять его (вместе с тождеством антикоммутативности $x^2 = 0$) за определение класса алгебр Мальцева и в случае $\mathrm{char}\, F = 2$. Легко видеть, что тождеству (10) удовлетворяет, в частности, любая алгебра Ли. С другой стороны, нетрудно показать, что любая алгебра Мальцева A бинарно лиева: если u, v, w — произвольные неассоциативные слова от переменных x, $y \in A$, то, используя индукцию по сумме длин u, v, w и тождества (1), (2), (6), проверяют, что $J(u, v, w) = 0$. Таким образом, класс алгебр Мальцева занимает промежуточное положение между алгебрами Ли и бинарно лиевыми алгебрами.

Положим $\Delta(x, y) = [R_x, R_y] - R_{xy}$, так что $z\Delta(x, y) = J(z, x, y)$. Тогда из (8) следует

$$\Delta(y, zx) + \Delta(z, xy) + \Delta(x, yz) = [R_y, R_{zx}] + $$
$$+ [R_z, R_{xy}] + [R_x, R_{yz}] + R_{J(x,y,z)} = 2R_{J(x,y,z)}$$

или

$$2wJ(x, y, z) = J(w, y, zx) + J(w, z, xy) + J(w, x, yz). \tag{11}$$

Положим $D(x, y) = R_{xy} + [R_x, R_y]$. Коммутируя x, y в (9), получим

$$2R_{xyz} = [[R_x, R_y], R_z] + [R_y, R_{zx}] + [R_x, R_{yz}]. \tag{12}$$

Вычитая (12) из (8), получим

$$R_{yzx+zxy-xyz} = R_{zD(x,y)} = [R_z, R_{xy}] + [R_z, [R_x, R_y]] = [R_z, D(x, y)]$$

или

$$(tz)D(x, y) = [tD(x, y)]z + t[zD(x, y)]. \tag{13}$$

Это значит по определению, что $D(x, y)$ является дифференцированием алгебры A.

Положим $R(x, y) = 2R_{xy} + [R_x, R_y]$. Из (12) следует

$$[R(x, y), R_z] = 2[R_{xy}, R_z] + 2R_{xyz} - [R_y, R_{zx}] - [R_x, R_{yz}]. \qquad (14)$$

Складывая (14) почленно с удвоенным тождеством (8), получим

$$[R(x, y), R_z] + 2R_{yzx} + 2R_{zxy} = [R_y, R_{zx}] + [R_x, R_{yz}]$$

или

$$[R(x, y), R_z] = R(xz, y) + R(x, yz). \qquad (15)$$

Отметим еще тождество

$$R_x R_y R_x = R_x^2 R_y + R_{yx} R_x - R_{yxx}, \qquad (16)$$

являющееся следствием (4), (5). С помощью индукции по n из (16) следует более общее тождество

$$R_x^n R_y R_x = R_x^{n+1} R_y + R_x^n R_{yx} - R_x R_{yx^n} - R_{yx^{n+1}} + R_{yx^n} R_x. \qquad (17)$$

Для доказательства индуктивного перехода достаточно умножить обе части (17) слева на R_x и преобразовать последний член полученного равенства $\left(R_x R_{yx^n} R_x\right)$ с помощью тождества (16).

2. Пусть A — алгебра Мальцева над полем F. Согласно общим принципам работы [7] под представлением алгебры A в линейном пространстве V над F следует понимать линейное отображение $\rho\colon A \to \mathrm{End}(V)$, которое превращает прямую сумму линейных пространств $V \dotplus A$ в алгебру Мальцева, если умножение в $V \dotplus A$ определено формулой

$$(v_1 + x)(v_2 + y) = v_1\rho(y) - v_2\rho(x) + xy \quad (v_1, v_2 \in V,\ x, y \in A).$$

Так определенная алгебра называется *полупрямым* (или *расщепляемым*) *расширением A посредством V*; при этом V оказывается абелевым идеалом, а A — подалгеброй алгебры $V \dotplus A$. Соотношения, которым должны удовлетворять операторы $\rho(x)$, аналогичны соотношению (9):

$$\rho(xyz) = \rho(x)\rho(y)\rho(z) - \rho(z)\rho(x)\rho(y) + \rho(y)\rho(zx) - \rho(yz)\rho(x).$$

Линейное пространство V, на котором действуют операторы представления ρ, называют также *мальцевским A-модулем*.

Частным случаем представления является отображение $x \mapsto R_x$ (регулярное представление). Для произвольных представлений также вместо $\rho(x)$ будем использовать более удобную запись R_x. Это не приведет к противоречиям, так как каждый раз оговаривается, о каком представлении идет речь. Легко понять, что соотношения (12), (15)—(17) справедливы не только для регулярного, но и для произвольных представлений алгебры Мальцева A. Если линейное отображение $\rho\colon A \to \mathrm{End}(V)$ удовлетворяет условию

$$R_{xy} = [R_x, R_y] \qquad (18)$$

для любых $x, y \in A$, то из тождества (18) вытекает (9). Следовательно, ρ будет представлением алгебры A (и гомоморфизмом A в алгебру Ли линейных преобразований пространства V). Представления такого рода играют, как известно, основную роль в теории алгебр Ли, однако для теории алгебр Мальцева их значение не очень велико из-за слишком частного характера.

Ядро $\mathrm{Ker}\,\rho$ представления ρ алгебры Мальцева A не обязано, вообще говоря, быть идеалом алгебры A. Вместе с тем существует, очевидно, наибольший идеал A, лежащий в $\mathrm{Ker}\,\rho$ (сумма всех идеалов, лежащих в $\mathrm{Ker}\,\rho$). Этот идеал будем называть *почти ядром представления* ρ и обозначать его через $\widetilde{\mathrm{Ker}}\,\rho$. Если $\widetilde{\mathrm{Ker}}\,\rho = 0$, то представление называется *почти точным*. Для каждого представления ρ алгебры A с почти ядром $\widetilde{\mathrm{Ker}}\,\rho = I$ существует индуцированное почти точное представление фактор-алгебры ${}^{A}/_{I}$ в том же пространстве представления. Иногда бывает полезно вместо $\mathrm{End}(V)$ рассматривать произвольную ассоциативную алгебру E с единицей, имея в виду, что правое регулярное представление алгебры E является изоморфным представлением E в качестве алгебры эндоморфизмов линейного пространства E. В дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением конечномерных алгебр Мальцева; их представления также будем предполагать конечномерными. Через A_ρ^* будем обозначать обертывающую ассоциативную алгебру представления ρ, т. е. ассоциативную алгебру, порожденную операторами R_x, $x \in A$.

3. Важную роль в структурной теории конечномерных алгебр Ли играет известная теорема Энгеля, аналог которой оказывается справедливым и в классе бинарно лиевых алгебр [8]. Приводимые ниже теоремы 1, 2 в случае регулярного представления содержатся в [9].

Теорема 1. *Пусть ρ — представление алгебры Мальцева A нильпотентными операторами. Тогда алгебра A_ρ^* нильпотентна и если ρ — почти точное представление, то алгебра A также нильпотентна.*

Доказательство. Докажем сначала нильпотентность алгебры A_ρ^*. В соответствие каждой подалгебре $B \leqslant A$ поставим подалгебру $B^* \leqslant A_\rho^*$, порожденную операторами R_x, $x \in B$, и пусть B — максимальная подалгебра в A, для которой алгебра B^* нильпотентна. Пусть $B \neq \neq A$ — приведем это предположение к противоречию. Пусть $x \notin B$, тогда для некоторого натурального n будем иметь $x_n = x b_1 b_2 \ldots b_n \in B$, каковы бы ни были элементы $b_i \in B$. В самом деле, пользуясь соотношением (9), R_{x_n} можно представить в виде линейной комбинации «R-слов» из A_ρ^*, в запись которых входит «много» операторов R_b $(b \in B)$, если n достаточно велико. Так как по предположению B^* нильпотентна, то для некоторого n будем иметь $R_{x_n} = 0$, $B_{x_n b} = 0 (b \in B)$. Если теперь $x_n \notin B$, то алгебра B_1, порожденная множеством $\{x_n, B\}$, строго содержит B и $B_1^* = B^*$, следовательно, B_1^* нильпотентна, в противоречии с максимальностью B. Итак, из последовательности $\{x_k | k \geqslant 0\}$ можно выбрать такой элемент u, что $u \notin B$, $uB \subseteq B$. Обозначим $C = (u) + B$ и покажем, что C^* нильпотентна, в противоречии с максимальностью B. Для этого рассмотрим «длинные» R-слова от образующих R_u, $R_{b_i} (b_i \in B)$. В силу нильпотентности оператора R_u такие слова либо тривиально равны нулю (в A_ρ^*), либо содержат в своей записи «много» операторов R_b $(b \in B)$. Пусть для определенности $R_u^m = 0$, $(B^*)^n = 0$, тогда нетривиальные слова R-длины $N \geqslant mt$ содержат по крайней мере t операторов R_{b_i}. К этим словам применяем преобразования двух сортов.

(а) Преобразуем подслова вида $R_{b_i} R_u^2$, $R_u R_{b_i} R_u$ с помощью соотношений (4), (16), в которых $x = u$, $y = b_i$. При этом операторы R_u либо переходят влево, либо исчезают, а общее число t операторов R_b в каждом слагаемом сохраняется.

(б) Если преобразования первого рода исчерпаны, то рассмотрим крайний справа оператор R_u; предположим, что ему предшествуют операторы R_{b_1}, R_{b_2}. Полагая в (9) $x = b_1$, $y = b_2$, $z = u$, преобразуем подслово $R_{b_1} R_{b_2} R_u$. Оператор R_u снова либо переходит влево, либо исчезает, а уменьшение числа операторов R_b на единицу происходит только в члене $R_{b_1 b_2 u}$ при одновременном исчезновении крайнего справа оператора R_u.

Пусть теперь $N \geqslant 2mn$ и, следовательно, $t \geqslant 2n$. Чередуя преобразования 1-го и 2-го рода (причем, если возможны и те и другие, то выполняются преобразования 1-го рода), получим линейную комбинацию слов, в правом конце каждого из которых стоят не менее n операторов R_b. Но такие слова равны нулю, так как алгебра B^* нильпотентна индекса n. Нильпотентность C^* доказана. Следовательно, алгебра A_ρ^* нильпотентна. Пусть $(A_\rho^*)^n = 0$. Так же как при выборе элемента u, убеждаемся, что при $N \geqslant 2n$ $A^N \subseteq \operatorname{Ker} \rho$. Но A^N — идеал алгебры A, поэтому, если представление ρ почти точно, то $A^N = 0$, т. е. алгебра A нильпотентна.

Полезным усилением теоремы 1 является следующая

Теорема 2. *Пусть B — идеал алгебры Мальцева A ($B \lhd A$), ρ — почти точное представление A и для всех $x \in B$ операторы R_x нильпотентны. Тогда идеал B нильпотентен, а алгебра B^*, порожденная операторами R_x ($x \in B$), лежит в радикале алгебры A_ρ^*.*

Доказательство. По теореме 1 алгебра B^* нильпотентна индекса, скажем n. К каждому R-слову из A_ρ^*, содержащему по крайней мере $2n$ операторов R_{b_i} ($b_i \in B$), можно применить преобразования, аналогичные преобразованиям (а), (б) теоремы 1. Преобразуя с помощью (9) подслова вида $R_b R_{a_1} R_{a_2}$ и $R_{a_1} R_b R_{a_2}$ ($b \in B$), перемещаем операторы R_b вправо с сохранением их общего числа в каждом слагаемом. Если преобразования этого сорта исчерпаны, то рассмотрим крайний справа оператор R_a, где $a \notin B$. Пусть ему предшествуют операторы R_{b_1}, R_{b_2}. Тогда с помощью (9) преобразуем подслово $R_{b_1} R_{b_2} R_a$; при этом операторы типа R_b снова передвинутся вправо с сохранением их общего числа, за исключением члена с множителем $R_{b_1 b_2 a}$, в котором число операторов R_b уменьшается на 1 с одновременным исчезновением множителя R_a. В итоге все слагаемые обращаются в нуль и B^* порождает в A_ρ^* нильпотентный идеал индекса нильпотентности не выше $2n$, т. е. $B^* \subseteq \operatorname{Rad} A_\rho^*$. Далее, подалгебра B^{4n} порождает в A идеал B_0, все элементы которого представляются нулевыми операторами. Но так как $\operatorname{Ker} \rho$ не содержит ненулевых идеалов, то $B^{4n} = 0$. Теорема доказана.

Из приведенного доказательства следует, между прочим, что сумма нильпотентных идеалов в произвольной (не обязательно конечномерной) алгебре Мальцева является нильпотентным идеалом, а любая конечномерная алгебра Мальцева содержит наибольший нильпотентный идеал $N(A)$, который называется *ниль-радикалом* алгебры A [9].

4. В общем случае операторы представления нильпотентной алгебры Мальцева не обязаны, конечно, быть нильпотентными. Теория таких представлений основывается на ряде лемм, которые вполне аналогичны известным утверждениям о представлениях алгебр Ли [2, гл. II]. Имеется известный параллелизм и в доказательствах.

Лемма 1. *Пусть ρ — представление алгебры Мальцева A в пространстве V, $x, y \in A$ и $yx^m = 0$ для некоторого $m > 0$. Тогда фиттинговы компоненты V_0, V_1 пространства V относительно R_x инвариантны относительно R_y.*

Доказательство. Прежде всего следует заметить, что V_0 и V_1 совпадают соответственно с ядром и образом оператора R_x^n для любого достаточно большого n, скажем $n \geqslant \dim V$. Далее удобно воспользоваться индукцией по m. При $m = 1$ лемма сразу следует из соотношения (4). Если $m > 1$, то снова используем соотношение (4), замечая, что операторы R_x, R_{yx} оставляют по предположению индукции подпространства V_0, V_1 инвариантными.

Разложению характеристического многочлена $f(\lambda)$ оператора R_x на неприводимые множители $\pi(\lambda)$ отвечает разложение V в прямую сумму примарных компонент V_π, которые аннулируются некоторой степенью оператора $\pi(R_x)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и пространство V разложено на примарные компоненты V_π относительно оператора R_x. Тогда подпространства V_π инвариантны относительно R_y.*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно рассмотреть подпространства V_π, на которых R_x действует как невырожденное преобразование. Снова используем индукцию по m. Если $m = 1$, то для любого многочлена $P(\lambda)$ будем иметь в силу (16)

$$V_\pi R_y P(R_x) = V_\pi R_x R_y P(R_x) = V_\pi R_x P(R_x) R_y = V_\pi P(R_x) R_y,$$

откуда следует утверждение леммы. Если $m>1$, то по-прежнему пользуемся тождеством (16), замечая, что операторы R_x, R_{yx} и R_{yxx} оставляют подпространство V_π инвариантным.

Предложение 1. *Пусть A — нильпотентная алгебра Мальцева; ρ — представление A в пространстве V; V_0^x, V_1^x — фиттинговы компоненты V относительно оператора R_x, $x\in A$. Тогда $V=V_0+V_1$, где $V_0=\bigcap_{x\in A} V_0^x$, $V_1=\sum_{x\in A} V_1^x=\bigcap_{k=1}^{\infty} V(A_\rho^*)^k$.*

Доказательство стандартно; нужно только заметить, что если $V=V_0^x$ для всех $x\in A$, т. е. ρ — представление алгебры A нильпотентными преобразованиями V, то алгебра A_ρ^* нильпотентна, $(A_\rho^*)^k=0$ для некоторого $k>0$ (теорема 1 устанавливает этот факт даже без предположения о нильпотентности A). Если же $V_1^x\neq 0$ для некоторого $x\in A$, то V разлагается в прямую сумму A-подмодулей $V_0^x\dotplus V_1^x$, причем $V_1^x\subseteq V_1$ $\dim V_0^x<\dim V$ и остается применить к V_0^x предположение индукции по размерности.

Предложение 2. *В условиях предложения 1 V разлагается в прямую сумму A-подмодулей V_i, причем минимальный многочлен преобразования, индуцированного любым оператором R_x на V_i, является степенью неприводимого многочлена.*

Доказательство очевидным образом следует из леммы 2 и снова использует индукцию по размерности V. Здесь существенно отметить только, что каждое из подпространств V_i может быть построено как пересечение примарных компонент для некоторого конечного числа операторов R_x $(x\in A)$ и тогда указанное в предложении 2 разложение V определяется однозначно.

Представление ρ называется *расщепляемым*, если характеристические корни каждого из операторов R_x принадлежат основному полю F. Из предложения 2 следует

Теорема 3. *Пусть ρ — расщепляемое представление нильпотентной алгебры Мальцева A. Тогда пространство представления V разлагается в прямую сумму подпространств V_α, которые характеризуются следующими свойствами:*

1) *V_α инвариантно относительно A_ρ^** (является A-подмодулем модуля V);

2) *каждый и операторов R_x имеет в V_α единственный характеристический корень $\alpha(x)$;*

3) *если $\alpha\neq\beta$, то существует такой элемент $x\in A$,* что $\alpha(x)\neq\beta(x)$.

Так же как в предложении 2, здесь существенно отметить, что каждое из подпространств V_α совпадает с пересечением корневых подпространств V относительно операторов R_x для некоторого конечного числа элементов $x\in A$. Функции $\alpha\colon A\to F$ называются *весами алгебры A относительно данного представления* ρ, а соответствующие подпространства V_α — *весовыми подпространствами.*

В случае, когда H — нильпотентная подалгебра алгебры Мальцева A и рассматривается расщепляемое представление H в A, индуцированное регулярным представлением A, подпространства A_α называются *корневыми*, а функции $\alpha\colon H\to F$ — *корнями H* в A. Ниже мы увидим, что в случае характеристики 0 расщепляемые представления нильпотентных алгебр Мальцева допускают более полную характеризацию. В частности, веса оказываются линейными функциями.

5. Пусть H — нильпотентная подалгебра алгебры Мальцева A и регулярное представление H в A расщепляемо. Рассмотрим некоторые соотношения между корневыми подпространствами A_α. Техника получения этих соотношений восходит к работе [10], где они выведены для случая $\dim H=1$. Использование результатов предыдущего пункта позволяет

дать более простой вывод этих соотношений и получить их в более общей ситуации. Операторы умножения на скаляры будем отождествлять с элементами поля F, характеристика которого, вообще говоря, произвольна.

Пусть h — произвольный элемент из H, $h \neq 0$, и пусть $A = A_0^h + A_\alpha^h + \ldots$ — соответствующее разложение A на корневые подпространства относительно оператора R_h. Тогда лемма 2 означает, что $A_0^h A_\alpha^h \subseteq A_\alpha^h$. В частности, A_0^h является подалгеброй в A. Полагая в (2) $x = h$, $y = x_\alpha \in A_\alpha^h$, $z = x_\beta \in A_\beta^h$, получим $J(h, x_\alpha, hx_\beta) = J(h, x_\alpha, x_\beta)h$ или $J(h, x_\alpha, x_\beta(\beta - R_h)) = J(h, x_\alpha, x_\beta)(\beta + R_h)$. По индукции $J(h, x_\alpha, x_\beta(\beta - R_h)^n) = J(h, x_\alpha, x_\beta)(\beta + R_h)^n$, откуда $J(h, x_\alpha, x_\beta) \in A_{-\beta}^h$. Аналогично $J(h, x_\alpha, x_\beta) \in A_{-\alpha}^h$, следовательно,

$$J(h, x_\alpha, x_\beta) = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{19}$$

Полагая в (6) $u = x_0 \in A_0^h$, получим

$$J(x_0, x_\alpha, hx_\beta) + J(h, x_\alpha, x_0x_\beta) = J(x_0, x_\alpha, x_\beta)h + J(h, x_\alpha, x_\beta)x_0,$$

$$J(x_0, x_\alpha, hx_\beta) = J(x_0, x_\alpha, x_\beta)h,$$

откуда, подобно соотношению (19), находим

$$J\left(A_0^h, A_\alpha^h, A_\beta^h\right) = 0, \quad \alpha \neq \beta. \tag{20}$$

Если теперь α, β — неравные корни H в A и A_α, A_β — соответствующие корневые подпространства, то найдется такой элемент $h \in H$, что $\alpha(h) \neq \beta(h)$. Тогда $A_\alpha \subseteq A_{\alpha(h)}^h$, $A_\beta \subseteq A_{\beta(h)}^h$, $A_0 \subseteq A_0^h$ и из (20) следует

$$J(A_0, A_\alpha, A_\beta) = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{21}$$

В частности, $J(H, A_\alpha, A_\beta) = 0$ $(\alpha \neq \beta)$ или

$$(x_\alpha x_\beta)h = (x_\alpha h)x_\beta + x_\alpha(x_\beta h) \tag{22}$$

для любых $x_\alpha \in A_\alpha$, $x_\beta \in A_\beta$, $h \in H$. Соотношение (22) показывает, что каждый из операторов R_h $(h \in H)$ является «дифференцированием» линейного пространства $A_\alpha A_\beta$, откуда обычным образом следует соотношение

$$A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta} \quad (\alpha \neq \beta). \tag{23}$$

Здесь $\alpha + \beta$ может и не быть корнем; если некоторая функция γ: $H \to F$ не является корнем H в A, то условимся считать $A_\gamma = 0$.

Те же рассуждения при $\alpha = \beta$ дают

$$J\left(h, A_\alpha^h, A_\alpha^h\right) \subseteq A_{-\alpha}^h, \quad J\left(A_0^h, A_\alpha^h, A_\alpha^h\right) \subseteq A_{-\alpha}^h$$

и, в частности, $J(A_0, A_\alpha, A_\alpha) \subseteq A_{-\alpha(h)}^h$. Любой вектор из $J(A_0, A_\alpha, A_\beta)$ оказывается корневым для оператора R_h $(h \in H)$ с собственным значением $-\alpha(h)$. Следовательно,

$$J(A_0, A_\alpha, A_\alpha) \subseteq A_{-\alpha}. \tag{24}$$

В частности, для любого $h \in H$ имеет место соотношение вида

$$(x_\alpha y_\alpha)h = (x_\alpha h)y_\alpha + x_\alpha(y_\alpha h) + z_{-\alpha}. \tag{25}$$

Разложим $x_\alpha y_\alpha$ на компоненты в корневых подпространствах пространства A:

$$x_\alpha y_\alpha = u_{2\alpha} + u_\beta + \ldots, \tag{26}$$

тогда для любого $\beta \neq 2\alpha$ найдется такой элемент $h \in H$, что $\beta(h) \neq 2\alpha(h)$. Применяя к обеим частям (26) оператор $(R_h - 2\alpha(h))^n$, где n достаточно велико, получим, с одной стороны, элемент из $A_{-\alpha}$ (в силу (25)), а с другой — элемент $u_\beta(R_h - 2\alpha(h))^n + \ldots$, причем компонента $u_\beta' = u_\beta(R_h - 2\alpha(h))^n \in A_\beta$ будет отлична от 0, если $u_\beta \neq 0$, так как ограничение

$R_h - 2\alpha(h)$ на A_β имеет единственный характеристический корень $\beta(h) - 2\alpha(h) \neq 0$ и действует в A_β как невырожденное преобразование. Следовательно, единственной ненулевой компонентой u_β в (26), помимо $u_{2\alpha}$, может быть только $u_{-\alpha}$:

$$x_\alpha y_\alpha \in A_{2\alpha} + A_{-\alpha}. \tag{27}$$

В частности, $A_0^2 \subseteq A_0$, что, конечно, ясно и без этого: A_0 является пересечением подпространств A_0^h, каждое из которых является подалгеброй в A; пересечение подалгебр также подалгебра.

Пусть α, β, γ — попарно различные веса H в A; покажем, что $J(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) = 0$. Если один из весов α, β, γ равен нулю, это уже известно (соотношение (21)), поэтому достаточно рассмотреть случай $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Предположим сначала, что $\alpha + \beta \neq \gamma$, $\alpha + \gamma \neq \beta$. Тогда из тождества (6) и (21), (23) следует $J(x_\alpha, x_\beta, hx_\gamma) = J(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)h$, откуда $J(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma) \in A_{-\gamma}$. Меняя ролями β и γ, получим $J(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma) \in A_{-\beta}$, откуда $J(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma) = 0$. Пусть, далее, $\alpha + \beta = \gamma$ и $\operatorname{char} F \neq 2$. Тогда $\gamma + \alpha \neq \beta$, $\gamma + \beta \neq \alpha$, и мы попадем в условия предыдущего случая, если поменять ролями α и γ. Пусть, наконец, $\alpha + \beta = \gamma$ и $\operatorname{char} F = 2$. Тогда также $\alpha + \gamma = \beta$, $\beta + \gamma = \alpha$ — условия на α, β, γ симметричны. Из тождества (6) и (21), (23), (24) следует, что

$$J(x_\alpha, x_\beta, hx_\gamma) = J(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)h + z_\beta, \tag{28}$$

где $z_\beta = J(h, x_\beta, x_\alpha x_\gamma) \in A_\beta$. Так же как при выводе (27), соотношение (28) влечет $J(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma) \in A_\beta + A_\gamma$. По симметрии

$$J(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma) \in A_\alpha + A_\beta, \; J(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma) \in A_\alpha + A_\gamma,$$

откуда снова $J(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma) = 0$. Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь якобианы вида $J(x_\alpha, y_\alpha, x_\beta)$, где $\alpha, \beta \neq 0$. Пусть сначала $\beta \neq \alpha, -\alpha, 2\alpha$. Систематически используя тождество (6), а также соотношения (21), (23), (27), находим $J(x_\alpha, x_\beta, hy_\alpha) = J(x_\alpha, x_\beta, y_\alpha)h$, откуда $J(x_\alpha, y_\alpha, x_\beta) \in A_{-\alpha}$. С другой стороны, $J(x_\alpha, y_\alpha, hx_\beta) = J(x_\alpha, y_\alpha, x_\beta)h$, откуда $J(x_\alpha, y_\alpha, x_\beta) \in A_{-\beta}$. Поэтому $J(x_\alpha, y_\alpha, x_\beta) = 0$. Пусть $\beta = 2\alpha$ и $2\alpha \neq 0$, α, $-\alpha$ (откуда следует, в частности, что $\operatorname{char} F \neq 2, 3$). Соотношение $J(x_\alpha, y_\alpha, hx_{2\alpha}) = J(x_\alpha, y_\alpha, x_{2\alpha})h$ показывает, что $u = J(x_\alpha, y_\alpha, x_{2\alpha}) \in A_{-2\alpha}$. С другой стороны,

$$J(x_{2\alpha}, x_\alpha, hy_\alpha) = J(x_{2\alpha}, x_\alpha, y_\alpha)h + z_\alpha,$$

где $z_\alpha = J(h, x_\alpha, y_\alpha)x_{2\alpha} \in A_\alpha$. Следовательно, $u \in A_\alpha + A_{-\alpha}$. Учитывая, что $-2\alpha \neq \alpha, -\alpha$, заключаем, что $u = 0$.

Предположим, что $\operatorname{char} F \neq 2$. Из равенства

$$J(x_\alpha, y_\alpha, hx_{-\alpha}) = J(x_\alpha, y_\alpha, x_{-\alpha})h$$

для любых x_α, $y_\alpha \in A_\alpha$, $x_{-\alpha} \in A_{-\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$, $h \in H$ вытекает, что $J(x_\alpha, y_\alpha, x_{-\alpha}) \in A_\alpha$. Далее, $J(x_\alpha, y_\alpha, hz_\alpha) = J(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)h + u_0$, где $u_0 = J(h, y_\alpha, z_\alpha)x_\alpha \in A_{-\alpha}A_\alpha \subseteq A_0$. Поэтому $J(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \in A_{-\alpha} + A_0$. С другой стороны, раскрывая якобиан $J(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ и учитывая формулы умножения (23), (27) для корневых подпространств, замечаем, что $J(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \in A_{3\alpha} + A_0$. Так как $3\alpha \neq -\alpha$, то $J(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \in A_0$.

Подводя итоги, сформулируем результаты этого пункта в виде следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть H — нильпотентная подалгебра алгебры Мальцева A над полем F, регулярное представление H в A расщепляемо и $A = A_0 + A_\alpha + \ldots$ — соответствующее разложение A на корневые подпространства. Тогда*

$$A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta} (\alpha \neq \beta), \quad A_\alpha^2 \subseteq A_{2\alpha} + A_{-\alpha}, \tag{29}$$

$$J(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) = 0, \; \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \tag{30}$$

$$J(A_\alpha, A_\alpha, A_\beta) = 0, \; \beta \neq 0, \alpha, -\alpha, \tag{31}$$

$$J(A_\alpha, A_\alpha, A_0) \subseteq A_{-\alpha}. \tag{32}$$

Если $\operatorname{char} F \neq 2$, то

$$J(A_\alpha, A_\alpha, A_{-\alpha}) \subseteq A_\alpha, \tag{33}$$

$$J(A_\alpha, A_\alpha, A_\alpha) \subseteq A_0. \tag{34}$$

6. Введем важное понятие картановской подалгебры алгебры Мальцева.

Определение 1. Подалгебра H алгебры Мальцева A называется *подалгеброй Картана*, если H нильпотентна и совпадает с фиттинговой компонентой A_0 алгебры A относительно H.

Данное определение вполне согласуется с обычным определением подалгебр Картана в алгебрах Ли. Любая картановская подалгебра алгебры A является, очевидно, максимальной нильпотентной подалгеброй в A. Если Ω — расширение основного поля F, $A_\Omega = A_F \otimes \Omega$ — соответствующее тензорное расширение алгебры A и H — картановская подалгебра в A, то $H_\Omega = H_F \otimes \Omega$ — подалгебра Картана алгебры A_Ω (для доказательства достаточно заметить, что $H = A_0$ совпадает с пересечением корневых подпространств A_0^h для конечного числа элементов $h \in H$).

Нормализатором $\mathfrak{N}(H)$ подалгебры $H \subseteq A$ называется множество таких элементов $x \in A$, что $xH \subseteq H$.

Предложение 3. *Подалгебра H алгебры Мальцева A является подалгеброй Картана тогда и только тогда, когда H нильпотентна и совпадает со своим нормализатором.*

Доказательство. Для любой нильпотентной подалгебры H алгебры A имеем $H \subseteq \mathfrak{N}(H) \subseteq A_0$; если H — подалгебра Картана, то эти включения превращаются в равенства. Пусть, обратно, $H \subset A_0$. Так как регулярное представление H в A_0 нильпотентно (теорема 1), то в фактор-пространстве A_0/H действует индуцированное нильпотентное представление алгебры H. Следовательно, в A_0/H существует элемент $\xi \neq 0$, аннулируемый всеми операторами R_h $(h \in H)$. Прообраз x элемента ξ в A_0 будет тогда элементом из $\mathfrak{N}(H)$, причем $x \notin H$.

Как и в случае алгебр Ли, существует простой способ построения подалгебры Картана в алгебре Мальцева A, если основное поле F достаточно велико, скажем $|F| \geqslant \dim A$.

Определение 2. Элемент $x \in A$ называется *регулярным*, если размерность фиттинговой нуль-компоненты алгебры A относительно оператора R_x минимальна.

Предложение 4. *Если A — конечномерная алгебра Мальцева над полем F, $\dim A \leqslant |F|$, и x — регулярный элемент алгебры A, то фиттингова нуль-компонента A_0^x алгебры A относительно R_x является подалгеброй Картана. Обратно, если H — некоторая картановская подалгебра A, содержащая регулярный элемент h, то $H = A_0^h$.*

Для доказательства предложения годится то же рассуждение, что и в случае алгебр Ли [2]. Заметим, что в случае бинарно лиевых алгебр оно теряет силу, так как подпространство A_0^x в бинарно лиевой алгебре A может не быть подалгеброй. В [11] дано определение подалгебр Картана в бинарно лиевых алгебрах, более жесткое по сравнению с определением 1. Однако оно представляется менее удачным, так как требует слишком много; подалгебр Картана в смысле этого определения может не существовать даже в алгебрах Мальцева, не говоря уже о классе всех бинарно лиевых алгебр.

§ 2. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ ЛИ. КРИТЕРИИ РАЗРЕШИМОСТИ И ПОЛУПРОСТОТЫ АЛГЕБР МАЛЬЦЕВА

1. В этом параграфе предполагается (если не оговорено противное), что основное поле F имеет характеристику нуль.

С каждым представлением ρ алгебры Мальцева A можно связать билинейную форму следа $(x, y) = \operatorname{tr}(R_x R_y)$. Ясно, что форма (x, y) симметрична, $(x, y)=(y, x)$. Из соотношения (4) следует, после сокращения на 2, $(yx, x)=0$. Линеаризация последнего соотношения по x дает $(yx, z)+(yz, x)=0$, или

$$(xy, z)=(x, yz) \tag{35}$$

для любых $x, y, z\in A$. Будем говорить, что форма (x, y), удовлетворяющая этим свойствам, *инвариантна*. Форму (x, y), ассоциированную с регулярным представлением, естественно называть киллинговой. Использование техники следов позволяет получить ряд содержательных утверждений об алгебрах Мальцева характеристики 0. При этом существенную роль играет следующая лемма, обобщающая известную лемму Джекобсона о нильпотентных элементах алгебры Ли линейных преобразований [2, гл. II, лемма 4].

Лемма 4. *Пусть A — алгебра Мальцева характеристики 0 и для некоторого $c\in A$ имеют место соотношения $c=\sum_{i=1}^{r} a_ib_i$, $ca_i=0$ $(i=1, \ldots, r)$. Тогда оператор R_c нильпотентен в любом представлении ρ: $x\mapsto R_x$ алгебры A.*

Доказательство. Покажем, что равенство $ac=0$ для некоторых $a, c\in A$ влечет $\operatorname{tr} R_c^kR_{ab}=0$ для всех $k\geqslant 1$ и любого $b\in A$. Полагая $a=a_i$, $b=b_i$ и суммируя по i, получим тогда $\operatorname{tr} R_c^{k+1}=0$ $(k\geqslant 1)$, откуда, как известно, следует нильпотентность оператора R_c.

Заметим, что в силу (12) $\operatorname{tr} R_{xyz}=0$ для любых $x, y, z\in A$. Учитывая это замечание и сравнивая следы операторов в обеих частях равенства (17), получим $\operatorname{tr} R_x^nR_{yx}=0$ $(n\geqslant 1)$. В частности,

$$\operatorname{tr} R_c^nR_{bac}=0,\quad n\geqslant 0. \tag{36}$$

Из (9) следует $R_{bac}=R_bR_aR_c-R_cR_bR_a+R_aR_{cb}$; вставляя это соотношение в (36), получим

$$\operatorname{tr} R_c^nR_aR_{cb}=0,\quad n\geqslant 0. \tag{37}$$

С другой стороны,

$$0=R_{cab}=R_cR_aR_b-R_bR_cR_a+R_aR_{bc}-R_{ab}R_c;$$

умножая это равенство слева на R_c^n и учитывая (37), получим

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} R_c^nR_{ab}R_c &= \operatorname{tr}\left(R_c^{n+1}R_aR_b-R_c^nR_bR_cR_a\right)=\\ &=\operatorname{tr}\left(R_c^{n+1}R_a-R_cR_aR_c^n\right)R_b,\quad n\geqslant 0.\end{aligned}$$

Остается проверить, что $R_c^{n+1}R_a-R_cR_aR_c^n=0$ при $n\geqslant 0$, а это легко следует из (16). Итак, $\operatorname{tr} R_c^{n+1}R_{ab}=0$ для всех $n\geqslant 0$. Лемма доказана.

Понятие разрешимости, применимое к произвольным неассоциативным алгебрам, в случае алгебр Мальцева допускает полезную модификацию. Заметим предварительно, что из тождества (10) сразу следует, что если $I\lhd A$, то $L(I)=I^2+I^2\cdot A\lhd A$. Для произвольного идеала I алгебры Мальцева A определим цепочку идеалов $I_k=L_k(I)$, $k\leqslant 0$, полагая $I_0=I$, $I_k=L(I_{k-1})$, $k\geqslant 1$. С другой стороны, для I обычным образом определяется производный ряд $I^{(k)}$: $I^{(0)}=I$, $I^{(k)}=I^{(k-1)}\cdot I^{(k-1)}$, $k\geqslant 1$. Идеал I называется *разрешимым* (*L-разрешимым*), если $I^{(k)}=0$ $(I_k=0)$ для некоторого $k\geqslant 0$. Так как $I_k\supseteq I^{(k)}$ для любого k, то всякий L-разрешимый идеал алгебры Мальцева A является разрешимым. Справедливо, однако, и обратное.

Предложение 5 [12]. *Всякий разрешимый идеал алгебры Мальцева A является L-разрешимым.*

Замечание. Сходное определение разрешимости для алгебр Мальцева дает Ямагути [13]. Но он не замечает, что это определение эквивалентно разрешимости в обычном смысле.

В целях замкнутости приведем доказательство предложения 5. Пусть $I \lhd A$, покажем, что $I_2 \subseteq I^{(1)} = I^2$. Так как $I_1 \subseteq I$, то достаточно, очевидно, доказать, что $I_1^2 \cdot A \subseteq I^2$, или $(I^2 + I^2A)^2 A \subseteq I^2$, что сводится к доказательству включений $(I^2 \cdot I)A \subseteq I^2$, $[(I^2A)I]A \subseteq I^2$. Первое из них очевидным образом следует из (10). Если теперь $c_1 \in I^2$, $c_2 \in I$, a_1, $a_2 \in A$, то

$$c_1a_1c_2a_2 + a_1c_2a_2c_1 + c_2a_2c_1a_1 + a_2c_1a_1c_2 = (c_1c_2)(a_1a_2),$$

причем $a_1c_2a_2c_1$, $a_2c_1a_1c_2 \in I^2$, $c_2a_2c_1a_1$, $c_1c_2 \cdot a_1a_2 \in I^3 \cdot A$. Но мы уже видели, что $I^3 \cdot A \subseteq I^2$. Пусть для некоторого $k \geqslant 1$ уже доказано, что $I_{2k} \subseteq I^{(k)}$. Тогда по предыдущему $I_{2k+2} = L_2(I_{2k}) \subseteq I_{2k}^2 \subseteq I^{(k+1)}$. Следовательно, $I^{(n)} = 0$ влечет $I_{2n} = 0$, т. е. L-разрешимость идеала I.

Так как все члены ряда $\{I_k | k \geqslant 0\}$ являются идеалами алгебры A, то из предложения 5 непосредственно вытекает

Следствие 1. *В любом ненулевом разрешимом идеале алгебры Мальцева A содержится ненулевой абелев идеал этой алгебры.*

Радикалом алгебры A называется ее наибольший разрешимый идеал $S(A)$; если $S(A) = 0$, то алгебра A называется *полупростой*. Согласно предыдущему, полупростые алгебры Мальцева можно определить эквивалентно как алгебры, не имеющие нетривиальных абелевых идеалов.

В некотором смысле близкими к полупростым алгебрам Ли являются так называемые *редуктивные алгебры Ли*, т. е. алгебры Ли, регулярное представление которых вполне приводимо (или, эквивалентно, алгебра умножений которых полупроста). Более общо они определяются как алгебры, обладающие точным вполне приводимым представлением. Описание таких алгебр дает теорема 8 [2, гл. II]. Сходное определение можно дать и редуктивным алгебрам Мальцева. Результаты о них аналогичны результатам для алгебр Ли.

Теорема 4. *Пусть A — алгебра Мальцева, обладающая почти точным представлением ρ с полупростой обертывающей алгеброй A_ρ^*. Тогда $A = A_1 \dotplus C$, где A_1 — полупростая подалгебра и C — центр (аннулятор) алгебры A.*

Доказательство. Пусть S — радикал алгебры A; покажем, что S совпадает с центром A. Действительно, в противном случае $S_1 = S \cdot A \subseteq S$ — ненулевой разрешимый идеал в A. Пусть S_2 — ненулевой абелев идеал, лежащий в S_1 (и существующий по следствию 1), $S_3 = S_2 \cdot A \subseteq S_2$. По лемме 4 каждый элемент идеала S_3 представляется нильпотентным оператором, а по теореме 2 S_3^* лежит в радикале A_ρ^*, т. е. $S_3^* = 0$. Но тогда $S_3 \subseteq \operatorname{Ker} \rho$, и так как ρ почти точно, то $S_3 = 0$. Тем самым S_2 лежит в центре алгебры A и, с другой стороны, $S_2 \subseteq S \cdot A$. Снова применяя лемму 4 и повторяя соответствующие рассуждения, находим, что $S_2 = 0$. Но это противоречит предположению, что S_2 — ненулевой идеал. Итак, $S \cdot A = 0$. По той же причине $S \cap A^2 = 0$, следовательно, $A = S \dotplus A_1$, где A_1 — дополнительное к S подпространство, содержащее A^2. Так как $A_1 \supseteq A^2$, то автоматически $A_1 \lhd A$. Кроме того, $A_1 \simeq A/S$, поэтому алгебра A_1 полупроста.

Определение 3. *Обертывающей алгеброй Ли $\mathscr{L}_\rho(A)$ представления ρ* называется алгебра Ли, порожденная операторами R_x, $x \in A$.

Соотношение 12 показывает, что линейное пространство алгебры $\mathscr{L}_\rho(A)$ совпадает с $\rho(A) + [\rho(A), \rho(A)]$; если алгебра A абелева, то $\mathscr{L}_\rho(A)$ по крайней мере метабелева. Обертывающая ассоциативная алгебра для алгебры $\mathscr{L}_\rho(A)$ совпадает с A_ρ^*.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы 4 A — разрешимая алгебра, то на самом деле A абелева и алгебра A_ρ^* коммутативна. Более общо, если ρ — (почти точное) представление разрешимой алгебры Мальцева A и $\mathfrak{R}$ — радикал алгебры A_ρ^*, то фактор-алгебра $A_\rho^*/\mathfrak{R}$ коммутативна.*

Доказательство. Алгебра A абелева по теореме 4. Тогда $\mathscr{L}_\rho(A)$ по крайней мере метабелева. Но так как обертывающая ассоциативная алгебра A_ρ^* для $\mathscr{L}_\rho(A)$ полупроста, то $\mathscr{L}_\rho(A)$ на самом деле абелева. Следовательно, алгебра A_ρ^* коммутативна.

Для доказательства второго утверждения следует, как и в случае алгебр Ли [2], рассмотреть сквозное отображение

$$A \xrightarrow{\rho} A_\rho^* \xrightarrow{\text{кан}} A_\rho^*/\mathfrak{R},$$

которое также будет представлением разрешимой алгебры Мальцева, а в качестве своей ассоциативной обертывающей алгебры имеет полупростую алгебру $A_\rho^*/\mathfrak{R}$.

Существенные применения имеет следующая теорема, опирающаяся на теорему 4 и следствие 2.

Теорема 5. *Пусть* ρ — *почти точное представление алгебры Мальцева* A *в пространстве* V; S — *радикал* A; $\mathfrak{R}$ — *радикал* A_ρ^*; $\bar\rho$ — *индуцированное представление* $A \to A_\rho^*/\mathfrak{R}$; $I = \widetilde{\operatorname{Ker}}\,\bar\rho$. *Тогда* I — *нильпотентный идеал* A, *совпадающий с множеством* S_0 *элементов из* S, *нильпотентных относительно* ρ. *Далее*, $S \cdot A \subseteq S_0$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R}_0$ — радикал подалгебры $S^* \leqslant A_\rho^*$, тогда по следствию 2 алгебра $S^*/\mathfrak{R}_0$ полупроста и коммутативна. Множество S_0 совпадает с ядром представления $S \to S^*/\mathfrak{R}_0$, следовательно, S_0 — подпространство в S. Рассмотрим представление $\bar\rho$; его обертывающей алгеброй является полупростая алгебра $A_\rho^*/\mathfrak{R}$. Элементы идеала I представляются (относительно ρ) нильпотентными операторами. По теореме 2 I — нильпотентный идеал в A, т. е. заведомо $I \subseteq S$ и, по определению S_0, $I \subseteq S_0$. Радикал алгебры $\bar A = A/I$ равен S/I, и индуцированное представление $\bar A \to A_\rho^*/\mathfrak{R}$ почти точно. По теореме 4 радикал алгебры $\bar A$ совпадает с ее центром, откуда $S \cdot A \subseteq I \subseteq S_0$, S_0 — идеал алгебры A. Снова применяя теорему 2, находим, что $S_0^* \subseteq \mathfrak{R}$, следовательно, $S_0 \subseteq \widetilde{\operatorname{Ker}}\,\bar\rho = I$, в то время как выше было установлено обратное включение. Теорема доказана.

Следствие 3. *Если* S — *радикал и* N — *ниль-радикал алгебры* A, *то* $S \cdot A \subseteq N$. *В частности, если алгебра* A *разрешима, то алгебра* A^2 *нильпотентна.*

Лемма 5. *Пусть* ρ — *расщепляемое представление разрешимой алгебры* A, *и пусть пространство представления* V *неприводимо. Тогда пространство* V *одномерно.*

Доказательство. Алгебра A_ρ^* полупроста и, в силу разрешимости A, коммутативна. Дальнейшее очевидно.

Следующие теоремы 6, 7 являются обобщением теорем Ли.

Теорема 6. *Пусть* ρ — *расщепляемое представление разрешимой алгебры Мальцева* A. *Тогда все матрицы* R_x *могут быть приведены одновременно к треугольному виду. Другими словами, в пространстве представления* V *существует* A*-инвариантный флаг подпространств.*

То же самое верно, конечно, и для расщепляемых представлений нильпотентных алгебр Мальцева, но так как в этом случае пространство представления распадается в прямую сумму весовых подпространств (теорема 3), то матрицы R_x будут иметь более специфический вид — так же как и в случае алгебр Ли.

Теорема 7. *Пусть* ρ — *расщепляемое представление нильпотентной алгебры Мальцева* A *в пространстве* V. *Тогда* V *разлагается в прямую сумму весовых подпространств* V_α *и все матрицы ограничений операторов* R_x *на* V_α *могут быть приведены одновременно к треугольному виду с числом* $\alpha(x)$ *на главной диагонали.*

Следствие 4. *В условиях теоремы 7 веса* α: $A \to F$ *суть линейные функции на* A, *обращающиеся в нуль на* A^2.

Последнее утверждение означает, что элементы из A^2 представляются нильпотентными операторами. Но это верно и в более общем случае разрешимой алгебры A. Действительно, по теореме 5 $S \cdot A = A^2 \subseteq S_0$.

2. Приводимое ниже доказательство критериев разрешимости и полупростоты алгебр Мальцева характеристики 0 близко к известному доказательству тех же критериев (критериев Картана) для алгебр Ли [2].

Пусть поле F алгебраически замкнуто, H — картановская подалгебра алгебры Мальцева A над F и ρ — представление алгебры A в пространстве V. Тогда V разлагается на весовые подпространства V_α относительно представления H в V, индуцированного представлением ρ. С другой стороны, имеется разложение A по подалгебре H на корневые подпространства A_β $(A_0 = H)$. Покажем, что имеют место соотношения

$$V_\alpha A_\beta \subseteq V_{\alpha+\beta} \quad (\alpha \neq \beta), \qquad V_\alpha A_\alpha \subseteq V_{2\alpha} + V_{-\alpha}, \tag{38}$$

где, как обычно, полагаем $V_\alpha = 0$, если α не является весом H в пространстве V. Рассмотрим полупрямое расширение $E = V + A$ алгебры A, определенное представлением ρ, и регулярное представление H в E. Так как H — нильпотентная подалгебра в E, то E разлагается на корневые подпространства относительно H. Эти подпространства имеют вид $V_\alpha + A_\alpha$, где одно из слагаемых, например V_α, может отсутствовать (если корень α подалгебры H в A не является весом H в пространстве V). В самом деле, система таких подпространств в E отвечает условиям теоремы 3. По лемме 3 имеем

$$V_\alpha A_\beta \subseteq E_{\alpha+\beta} \cap V = (V_{\alpha+\beta} + A_{\alpha+\beta}) \cap V = V_{\alpha+\beta}.$$

Точно так же доказывается и вторая из формул (38).

Лемма 6. *Если* α, β, γ *попарно различны, то справедливы соотношения* $v_\alpha(x_\beta x_\gamma) = (v_\alpha x_\beta)x_\gamma - (v_\alpha x_\gamma)x_\beta$ *для любых* $v_\alpha \in V_\alpha$, $x_\beta \in A_\beta$, $x_\gamma \in A_\gamma$. *То же самое верно, если* $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = 0$.

Доказательство леммы аналогично доказательству соотношений (38): для алгебры $E = V + A$ утверждение леммы означает, что $J(V_\alpha, A_\beta, A_\gamma) = 0$, $J(V_\alpha, A_0, A_0) = 0$; остается применить лемму 3.

Заметим, что $A^2 = \sum A_\alpha A_\beta$; формулы умножения для корневых подпространств показывают, что $H \cap A^2 = \sum\limits_\alpha A_\alpha A_{-\alpha}$.

Лемма 7. *Пусть* A — *алгебра Мальцева над алгебраически замкнутым полем* F *характеристики* 0; H — *картановская подалгебра* A; ρ — *представление* A *в пространстве* V. *Пусть, далее,* α *и* $-\alpha$ *являются корнями* H, $e_\alpha \in A_\alpha$, $e_{-\alpha} \in A_{-\alpha}$ *и* $h_\alpha = e_\alpha \cdot e_{-\alpha}$. *Тогда для любого веса* φ *алгебры* H *в пространстве* V *значение* $\varphi(h_\alpha)$ *рационально кратно значению* $\alpha(h_\alpha)$.

Доказательство. Если φ — целое кратное α, то утверждение тривиально верно для любого $h \in H$, в частности для h_α. Пусть φ не является кратным α, тогда расмотрим прямую сумму U подпространств вида $V_{\varphi+k\alpha}$, где k пробегает все целые числа (эта сумма имеет, конечно, лишь конечное число ненулевых слагаемых). Пространство U инвариантно относительно e_α и $e_{-\alpha}$. Для тройки весов $\varphi + k\alpha$, α, $-\alpha$ выполнены условия леммы 6, поэтому R_{h_α} на U совпадает с коммутатором $[R_{e_\alpha}, R_{e_{-\alpha}}]$ и след R_{h_α} на U равен нулю. Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством леммы 1 [2, гл. III]. (Если $n_\alpha = \dim V_\alpha$, то

$$0 = \mathrm{tr}_U R_{h_\alpha} = \sum_k n_{\varphi+k\alpha} \cdot (\varphi + k\alpha)(h_\alpha),$$

$$\varphi(h_\alpha) = r_{\varphi,\alpha} \cdot \alpha(h_\alpha), \quad \text{где} \quad r_{\varphi,\alpha} = -\sum_k k n_{\varphi+k\alpha} \Big/ \sum_k n_{\varphi+k\alpha}.)$$

Теорема 8. *Пусть A — алгебра Мальцева над полем характеристики нуль, ρ — почти точное представление A и билинейная форма на $A'=A^2$, ассоциированная с представлением ρ, тривиальна. Тогда алгебра A разрешима.*

Доказательство. Переходя, если нужно, к алгебраическому замыканию поля F, воспользуемся индукцией по размерности A. Так же как в [2], доказывается, что A' строго содержится в A. Если $A=A^2$, то $H=\sum\limits_{\alpha} A_\alpha\cdot A_{-\alpha}$ и условие $\operatorname{tr} R^2_{h_\alpha}=0$ влечет ввиду леммы 7, что $\varphi(h_\alpha)=0$ для любого веса φ алгебры H в V; из линейности весов следует, что $\varphi=0$ является единственным весом H, т. е. $V=V_0$. Но тогда $VA_\alpha=0$ для всех $\alpha\neq 0$ и представление ρ алгебры A сводится к представлению H с нулевым весом, т. е. ρ — представление A нильпотентными операторами. По теореме 1 алгебра A нильпотентна, а это противоречит равенству $A=A^2$. Пусть ρ' — ограничение ρ на A', $I=\widetilde{\operatorname{Ker}}\,\rho'\subseteq\operatorname{Ker}\rho$, тогда алгебра ${}^{A'}/_{I}$ удовлетворяет предположениям индукции и разрешима. По предложению 5 она также L-разрешима, т. е. $L_m(A')\subseteq I\subseteq\operatorname{Ker}\rho$ для некоторого $m\geqslant 0$. Так как $L_m(A')\lhd A$, а представление ρ почти точное, то $L_m(A')=0$; отсюда следует разрешимость алгебры A.

Следствие 5. *Алгебра Мальцева A над полем характеристики нуль разрешима тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} R_x^2=0$ для всех $x\in A^2$ (R_x — оператор правого умножения на x в A).*

Для доказательства необходимости достаточно заметить, что в регулярном представлении разрешимой алгебры Мальцева A операторы R_x, где $x\in A^2\subseteq N$, нильпотентны.

Теорема 9. *Пусть ρ — почти точное представление полупростой алгебры Мальцева A. Тогда форма, ассоциированная с ρ, невырождена. Если киллингова форма алгебры A невырождена, то алгебра A полупроста.*

Доказательство первого утверждения теоремы, как и доказательство теоремы 8, содержит нюанс, связанный с L-разрешимостью. Из инвариантности формы, ассоциированной с представлением ρ, следует, что ее ядро B является идеалом A. Предположим, что $B\neq 0$, и пусть ρ' — сужение ρ на B, $I=\widetilde{\operatorname{Ker}}\,\rho'$. Тогда алгебра ${}^{B}/_{I}$ удовлетворяет условиям теоремы 8 и разрешима, а значит, и L-разрешима: $L_m(B)\subseteq I\subseteq\operatorname{Ker}\rho$. Но $L_m(B)\lhd A$, следовательно, $L_m(B)=0$, B — разрешимый идеал алгебры A; противоречие.

Вторая часть теоремы принадлежит Сейглу [6] и является очевидным следствием общей теоремы Дьедонне [2] (из нее следует, что неассоциативная алгебра, обладающая невырожденной инвариантной киллинговой формой, разлагается в прямую сумму идеалов, являющихся простыми алгебрами, а такая алгебра, очевидно, полупроста). Впрочем, имея в виду следствие 1, можно было бы доказать вторую часть теоремы, дословно повторяя рассуждения, относящиеся к случаю алгебр Ли: если A неполупроста, то A содержит ненулевой абелев идеал, а такой идеал лежит в ядре киллинговой формы.

Следствие 6. *Любое почти точное представление полупростой алгебры Мальцева является на самом деле точным.*

Так как свойство невырожденности киллинговой формы не зависит от расширений основного поля, то имеет место

Следствие 7. *Алгебра Мальцева A над полем F характеристики 0 полупроста тогда и только тогда, когда алгебра A_Ω полупроста для любого расширения Ω поля F.*

Приведем еще несколько утверждений, доказательства которых совершенно стандартны.

Структурная теорема. *Если A — конечномерная полупростая алгебра Мальцева над полем характеристики 0, то A разлагается в прямую сумму идеалов, являющихся простыми алгебрами.*

Следствие 8. *Если A — полупростая алгебра, то каждый идеал алгебры A является полупростой подалгеброй.*

Следствие 9. *Если алгебра A полупроста, то $A = A^2$.*

Следствие 10. *Если S — радикал алгебры A и $B \lhd A$, то $B \cap S$ — радикал алгебры B.*

Доказательство. Фактор-алгебра $\overline{B} = {}^{B}/_{B \cap S}$ изоморфна идеалу полупростой алгебры ${}^{A}/_{S}$ и потому полупроста.

Предложение 6. *Если N — ниль-радикал алгебры A и $B \lhd A$, то $B \cap N$ — ниль-радикал алгебры B.*

Доказательство. Если N_1 — ниль-радикал алгебры B, а S_1 — радикал B, то $N_1 \subseteq S_1 \subseteq S$ и $N_1 A \subseteq S \cdot A \cap B \subseteq N \cap B \subseteq N_1$, откуда N_1 — (нильпотентный) идеал алгебры A, $N_1 \subseteq N \cap B$.

Предложение 7. *Радикал S алгебры Мальцева A совпадает с ортогональным дополнением в A к подалгебре A^2 относительно киллинговой формы на A.*

Следствие 11. *Всякая разрешимая, соответственно нильпотентная субинвариантная подалгебра алгебры A лежит в радикале, соответственно ниль-радикале A.*

Замечание. Критерии разрешимости и полупростоты алгебр Мальцева, аналогичные критериям Картана (теоремы 8, 9),— правда, только для случая регулярного представления,— были получены первоначально в [14] с помощью обходного пути, используя связь алгебр Мальцева с лиевыми тройными системами (ЛТС) и вложение последних в алгебры Ли.

К дальнейшему изучению алгебр Мальцева характеристики нуль мы вернемся в § 4, 5 ниже.

§ 3. ПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ МАЛЬЦЕВА НАД ПОЛЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В этом параграфе предполагается, что основное поле F имеет характеристику нуль или произвольную конечную характеристику $p > 3$. Рассмотрим вопрос о классификации нелиевых простых алгебр Мальцева над F.

Пусть A — нелиева простая алгебра Мальцева, H — картановская подалгебра алгебры A и регулярное представление H в A расщепляемо. (Если такая подалгебра H существует, то она называется *расщепляющей подалгеброй Картана*, а алгебра A — *расщепляемой.* Как показывает предложение 4 § 1, для существования картановских подалгебр достаточно, чтобы поле F было бесконечным; если же F алгебраически замкнуто, то любая картановская подалгебра является расщепляющей). Заметим, что существуют ненулевые корни α подалгебры H в A. В самом деле, в противном случае имели бы $A = A_0 = H$, A нильпотентна, что невозможно. Тождество (11) показывает, что подпространство $J(A, A, A)$ является идеалом в A, поэтому

$$A = J(A, A, A). \tag{39}$$

Лемма 8 [10]. *Если для некоторых x, $y \in A$*

$$J(x, y, A) = 0, \tag{40}$$

то $xy = 0$.

Доказательство. Соотношение (40) можно записать в виде $R_{xy} = [R_x, R_y]$. Тогда $D(x, y) = 2R_{xy}$ и тождество

$$R_{zD(x,y)} = [R_z, D(x, y)]$$

означает, что $R_{z(xy)} = [R_z, R_{xy}]$ для любых $z \in A$ или

$$J(xy, A, A) = 0. \tag{41}$$

Это рассуждение показывает, в частности, что множество элементов $x \in A$ таких, что $J(x, A, A)=0$ (так называемый *лиев центр алгебры* A), является лиевым идеалом A. В простой алгебре A этот идеал должен быть равен нулю. В частности, $xy=0$.

Лемма 9 [10]. *Для любого ненулевого корня* α *алгебры* H *в* A *имеет место* $A_\alpha^2 \subseteq A_{-\alpha}$. *Далее*, $A=A_0+A_\alpha+A_{-\alpha}$, $A_0=A_\alpha A_{-\alpha}$.

Доказательство. Пусть $x_\alpha y_\alpha = z_{2\alpha}+z_{-\alpha}$ (см. (27)), тогда по (21) $J(h, x_\beta, z_{2\alpha})=0$ для всех $\beta \neq 2\alpha$. Если же $\beta=2\alpha$, то ввиду леммы 3

$$J(h, x_{2\alpha}, z_{2\alpha})=J(h, x_{2\alpha}, x_\alpha y_\alpha)=-J(x_\alpha, x_{2\alpha}, hy_\alpha)+$$
$$+J(h, x_{2\alpha}, y_\alpha)x_\alpha+J(x_\alpha, x_{2\alpha}, y_\alpha)h=0.$$

Следовательно, $J(h, z_{2\alpha}, A)=0$, $hz_{2\alpha}=0$ и, в силу произвольности $h \in H$, $z_{2\alpha}=0$.

По только что доказанному подпространство $B=A_\alpha A_{-\alpha}+A_\alpha+$ $+A_{-\alpha} \subseteq A_0+A_\alpha+A_{-\alpha}$ инвариантно относительно умножения на A_α и $A_{-\alpha}$. Инвариантность $A_\alpha A_{-\alpha}$ относительно умножения на A_0 следует из соотношения $J(A_0, A_\alpha, A_{-\alpha})=0$. Итак, B — подалгебра. Покажем, что B — идеал алгебры A. Для любого $\beta \neq 0$, α, $-\alpha$ ввиду формул (30), (31) $J(A, A_\alpha, A_\beta)=0$, $A_\alpha A_\beta=0$. Аналогично $A_{-\alpha}A_\beta=0$. Из соотношения $J(A_\alpha, A_{-\alpha}, A_\beta)=0$ следует теперь, что также $(A_\alpha A_{-\alpha})A_\beta=0$. Итак, $BA \subseteq$ $\subseteq B$, $B \triangleleft A$, откуда $B=A$ и, в частности, $A_0=A_\alpha A_{-\alpha}$.

В лемме 9 заключен очень сильный смысл, она показывает, что система корней алгебры A устроена крайне просто.

Лемма 10. *Подалгебра* $H=A_0$ *абелева. Корень* α: $H \to F$ *является линейной функцией.*

Доказательство. Используя, например, тождество (11), находим, что подпространство $J(A_0, A_0, A_0)$ инвариантно относительно умножения на A_0, A_α, $A_{-\alpha}$, т. е. является идеалом алгебры A. Отсюда следует, что

$$J(A_0, A_0, A_0)=0, \quad J(A_0, A_0, A)=0, \; A_0^2=0. \tag{42}$$

Для любых $x, y \in H$ имеем по (42) $R_{xy}=R_xR_y-R_yR_x=0$. Следовательно, операторы R_x, R_y имеют в A_α общий собственный вектор e_α: $e_\alpha(x+y)=$ $=[\alpha(x)+\alpha(y)]e_\alpha$. Но оператор R_{x+y} имеет в A_α единственное собственное значение $\alpha(x+y)$. Следовательно, $\alpha(x+y)=\alpha(x)+\alpha(y)$. Лемма доказана.

Выберем в H какой-либо элемент h_0, для которого $\alpha(h_0)=1$. Тогда произвольный элемент $h \in H$ представляется в виде $h=\alpha(h)h_0+h_1$, где $\alpha(h_1)=0$. Для любых $x \in A_\alpha$, $y \in A_{-\alpha}$, $h \in H$ имеем

$$0=J(h, x, y)=hx \cdot y+yh \cdot x, \quad xh \cdot y=-x \cdot yh,$$
$$x[\alpha(h)-R_h] \cdot y=x \cdot y[\alpha(h)+R_h]. \tag{43}$$

Лемма 11. *Пусть* $h \in H$, $h \neq 0$, U — *какое-либо циклическое относительно* R_h *подпространство в* A_α (или в $A_{-\alpha}$). *Тогда для любых* $u_1, u_2 \in$ $\in U$ $u_1u_2=0$.

Доказательство. Выберем в U какой-либо элемент u максимальной высоты. Для любого $h' \in H$ имеем $J(h', h, u)=0$, т. е. тройка элементов $\{h', h, u\}$ лиева. Но тогда она порождает некоторую лиеву подалгебру $B \leqslant A$ [5]. В частности, $J(U, U, h')=0$. Следовательно, оператор $R_{h'}$ является «дифференцированием» линейного пространства $U \cdot U$ и, ввиду произвольности $h' \in H$, $U \cdot U \subseteq A_{2\alpha}$. Но 2α не является корнем. Следовательно, $U \cdot U=0$.

Формула (39) показывает, что

$$A_{-\alpha}=J(A_0, A_\alpha, A_\alpha)+J(A_{-\alpha}, A_{-\alpha}, A_\alpha). \tag{44}$$

Используя тождество (11) и известные соотношения для корневых подпространств, находим, что

$$A_0J(A_0, A_\alpha, A_\alpha) \subseteq J(A_0, A_\alpha, A_\alpha),$$
$$A_0J(A_{-\alpha}, A_{-\alpha}, A_\alpha)=J(A_0, A_\alpha, A_{-\alpha}^2) \subseteq J(A_0, A_\alpha, A_\alpha).$$

Умножая обе части (44) слева на A_0, получим поэтому $A_{-\alpha} \subseteq J(A_0, A_\alpha, A_\alpha)$. Так как имеет место и обратное включение, то

$$A_{-\alpha} = J(A_0, A_\alpha, A_\alpha) \subseteq A_\alpha^2 + A_\alpha^2 \cdot A_0.$$

Аналогично $A_\alpha = J(A_0, A_{-\alpha}, A_{-\alpha})$. В частности, $A_\alpha^2 \neq 0$, $A_{-\alpha}^2 \neq 0$.

Лемма 12. *Для любых* $x, y \in A_\alpha$, $h \in A_0$

$$yx \cdot x = 0, \quad hx \cdot x = 0. \tag{45}$$

Доказательство. Положим $y = J(a_0, a_{-\alpha}, b_{-\alpha})$, тогда в силу (6)

$$yx = J(b_{-\alpha}, a_0, a_{-\alpha})x = -J(x, a_0, a_{-\alpha})b_{-\alpha} +$$
$$+ J(b_{-\alpha}, a_0, xa_{-\alpha}) + J(x, a_0, b_{-\alpha}a_{-\alpha}) = J(x, a_0, b_{-\alpha}a_{-\alpha}) =$$
$$= J(x, a_0, c_\alpha), \quad yx \cdot x = J(x, a_0, xc_\alpha) \in J(A_0, A_\alpha, A_{-\alpha}) = 0.$$

Второе утверждение леммы следует из леммы 11.

Обозначим систему корней H в A через Δ: $\Delta = \{0, \alpha, -\alpha\}$, и определим на A симметричную билинейную форму (x, y), полагая

$$(x, y) = \begin{cases} 0, \ x \in A_\beta, \quad y \in A_\gamma, \ \beta, \ \gamma \in \Delta, \ \beta + \gamma \neq 0, \\ \alpha(x)\alpha(y), \quad x, y \in A_0, \\ \alpha(x \cdot y_1), \ x \in A_\alpha, \ y_1 \in A_{-\alpha}, \ y = y_1 h_0. \end{cases} \tag{46}$$

Форма (46) определена корректно, так как ограничение R_{h_0} на $A_{-\alpha}$ является невырожденным. Во всех предыдущих леммах корни α и $-\alpha$ были равноправны, но в определении формы (46) они участвуют не совсем симметрично. Покажем, что эта несимметрия лишь кажущаяся. Заменим α на $\alpha' = -\alpha$, h_0 — на $h_0' = -h_0$, так что $\alpha'(h_0') = 1$. Тогда для $x, y \in A_0$ имеем $(x, y) = \alpha(x)\alpha(y) = \alpha'(x)\alpha'(y)$. Для $x \in A_\alpha$, $y \in A_{-\alpha}$ определение формы (46) можно записать в виде $(xh_0, yh_0) = \alpha(xh_0 \cdot y)$. Проверим, что $(yh_0', xh_0') = \alpha'(yh_0' \cdot x)$. В самом деле,

$$(yh_0', xh_0') = (yh_0, xh_0) = (xh_0, yh_0) = \alpha(xh_0 \cdot y) = \alpha(-x \cdot yh_0) =$$
$$= \alpha(yh_0 \cdot x) = \alpha'(yh_0' \cdot x).$$

Лемма 13. *Форма* (46) *инвариантна* (т. е. для любых $x, y, z \in A$ справедливо равенство (35)).

Доказательство. Учитывая линейность (35) по x, y, z, достаточно рассмотреть случаи, когда x, y, z лежат в корневых подпространствах. Исключая тривиальные соотношения, приходим к проверке соотношений $(xh, y) = (x, hy)$, $(xy, h) = (x, yh)$, где $x \in A_\alpha$, $y \in A_{-\alpha}$, $h \in H$, и случаев, когда $x, y, z \in A_\alpha$ или $x, y, z \in A_{-\alpha}$.

(а) Пусть $x \in A_\alpha$, $y \in A_{-\alpha}$. Полагая $y = y_1 h_0 (y_1 \in A_{-\alpha})$, будем иметь по определению $(xh, y) = \alpha(xh \cdot y_1)$, $(x, hy) = (x, hy_1 \cdot h_0) = \alpha(x \cdot hy_1)$, и равенство $(xh, y) = (x, hy)$ следует из соотношения $xh \cdot y_1 = x \cdot hy_1$.

(б) Для тех же x, y, h, y_1 имеем $(xy, h) = \alpha(xy)\alpha(h) = \alpha(x \cdot y_1 h_0) \times \alpha(h)$, $(x, yh) = \alpha(x \cdot y_1 h)$. Покажем, что имеет место равенство

$$\alpha(x \cdot yh_0)\alpha(h) = \alpha(x \cdot yh), \quad x \in A_\alpha, \ y \in A_{-\alpha}. \tag{47}$$

Соотношение (47) линейно по h; при $h = h_0$ оно тривиально, остается рассмотреть случай $\alpha(h) = 0$. Обозначим $x \cdot yh = h_1$. Так как $\alpha(h) = 0$, то оператор R_h нильпотентен. Пусть $xR_h^{m-1} = x_1 \neq 0$, $x_1 h = 0$ $(m \geqslant 1)$. Из соотношения $J(x, y, h) = 0$ следует, что элементы x, y, h, x_1 лежат в одной лиевской подалгебре алгебры A, в частности,

$$0 = J(x, x_1, yh) = xx_1 \cdot yh + (x_1 \cdot yh)x + x_1 h_1 = x_1 h_1,$$

так как $xx_1 = 0$ по лемме 11 и $x_1 \cdot yh = -x_1 h \cdot y = 0$ ввиду равенства $x_1 h = 0$. Из равенства $x_1 h_1 = 0$ следует теперь $\alpha(h_1) = 0$, что и требовалось.

(в) $x, y, z \in A_\alpha$. Соотношение (35) запишем в виде $(yx, z)+$ $+(yz, x)=0$, откуда видно, что достаточно доказать соотношение $(yx, x)=0$ $(x, y\in A_\alpha)$, а затем применить линеаризацию по x. Полагая $x=x_1h_0$ $(x_1\in A_\alpha)$, получим по предыдущему $(yx, x)=(yx\cdot x_1, h_0)=$ $=\alpha(yx\cdot x_1)$. Докажем, что $yx\cdot x_1=0$. Линеаризуя второе из соотношений (45), находим $yx=y\cdot x_1h_0=-x_1\cdot yh_0=yh_0\cdot x_1$. Применяя теперь первое из соотношений (45), получим $yx\cdot x_1=(yh_0\cdot x_1)x_1=0$, что и требовалось. Случай $x, y, z\in A_{-\alpha}$ можно не рассматривать ввиду отмеченной выше симметрии между корнями α и $-\alpha$. Лемма доказана.

Форма (x, y) нетривиальна, так как, например, $(h_0, h_0)=1$; из ее инвариантности и простоты A следует, что эта форма невырождена. Если $\alpha(h)=0$ для некоторого $h\in H$, то по формулам (46) имеем $(h, A)=0$, откуда $h=0$. Следовательно, подалгебра H одномерна, $H=$ $=(h_0)$. Подпространства A_α и $A_{-\alpha}$ двойственны между собой относительно формы (x, y); в частности, $\dim A_\alpha=\dim A_{-\alpha}$. Если $x\in A_\alpha$, $y\in$ $\in A_{-\alpha}$, то $xy=\lambda h_0$, где $\lambda=(xy, h_0)=(x, yh_0)$. Элемент h_0 будем обозначать дальше просто через h.

Лемма 14. *Все циклические подпространства в A_α (и $A_{-\alpha}$) относительно оператора R_h одномерны.*

Доказательство. Пусть U — циклическое подпространство в A_α, $\dim U=n>1$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — циклический базис U (x_k — вектор высоты k), y — любой собственный (относительно R_h) вектор из $A_{-\alpha}$. Тогда из (43) следует, что $xy=0$ для любого вектора $x\in U$ высоты, меньшей n; в частности, $x_1\cdot y=0$. Пусть V — произвольное циклическое подпространство в $A_{-\alpha}$, покажем, что $x_1\cdot V=0$. Если $\dim V=1$, это уже известно. Пусть $\dim V=m>1$, $y_1, \ldots, y_m$ — циклический базис V, тогда $x_1y_i=0$ для $i=1, \ldots, m-1$. Если $x_1y_m\neq 0$, то без ограничения общности $x_1y_m=h$. Так как A бинарно лиева, то элементы x_1, y_m порождают лиеву подалгебру в A с базисом $x_1, y_1, \ldots, y_m, h$. Но тогда $0=J(x_1, y_m,$ $y_1)=x_1y_m\cdot y_1=y_1$, что невозможно. Следовательно, $x_1A_{-\alpha}=0$, $(x_1, A_{-\alpha})=$ $=0$, что противоречит невырожденности формы (x, y). Лемма доказана.

Лемма 14 показывает, что оператор R_h действует в подпространствах A_α и $A_{-\alpha}$ диагонально, на A_α он совпадает с единичным оператором 1, а на $A_{-\alpha}$ — с оператором (-1). В частности, для любых $x\in A_\alpha$, $y\in$ $\in A_{-\alpha}$ имеем $xy=-(x, y)h$.

Дальнейшие рассуждения могут быть проведены так же, как в случае характеристики 0 [10]. Для любых $x, y, z\in A_\alpha$ имеем $xy\cdot z=yz\cdot x=$ $=zx\cdot y=(xy, z)h$; далее, $J(x, y, h)=-3xy$. Если $x, y\in A_\alpha$, $z'\in A_{-\alpha}$, то

$$J(x, y, z'h)+J(z', y, xh)=J(x, y, h)z'=-3xy\cdot z'. \tag{48}$$

С другой стороны, левая часть (48) равна $-2J(x, y, z')$, следовательно, $3xy\cdot z'=2J(x, y, z')$ или

$$xy\cdot z'=2(yz'\cdot x+z'x\cdot y). \tag{49}$$

Согласно (49) для элементов $x, y, z, t\in A_\alpha$ имеем

$$xz\cdot yt=2[(z\cdot yt)x+(yt\cdot x)z]=2yztx+2txyz.$$

Сравнивая это равенство с (10), получим

$$xyzt=yztx-ztxy+txyz. \tag{50}$$

Найденных соотношений достаточно для построения базы и таблицы умножения алгебры A. Учитывая, что $A_\alpha^2\neq 0$, выберем в A_α два произвольных элемента x, y, для которых $xy=z'\neq 0$, тогда $xz'=yz'=0$. Если z — такой элемент из A_α, что $zz'=\frac{1}{2}h$, то элементы x, y, z линейно независимы, а формула (50) показывает, что любой элемент $t\in A_\alpha$ линейно выражается через x, y, z. Таким образом, $\dim A_\alpha=\dim A_{-\alpha}=3$. Обозначим $yz=x'$, $zx=y'$, тогда $xx'=yy'=zz'=\frac{1}{2}h$, и из соотношений ортогональности между элементами x, y, z и x', y', z' следует, что x', y', z' образуют базу $A_{-\alpha}$. Для того чтобы найти формулы умножения для $A_{-\alpha}$, воспользуемся соотношением (49):

$$x'y' = yz \cdot zx = 2[(z \cdot zx)y + (zx \cdot y)z] = 2(zx \cdot y)z = 2y'y \cdot z = -hz = z.$$

Аналогично $y'z' = x$, $z'x' = y$. Итак, таблица умножения алгебры A полностью определена. Заметим, что $\dim A = 7$. Можно явно указать автоморфизм второго порядка, меняющий ролями A_α и $A_{-\alpha}$, который скрыто появлялся при обсуждении свойств формы (x, y). Это автоморфизм, переводящий x в x', $y \to y'$, $z \to z'$, $h = 2xx' \to 2x'x = -h$.

Имеется тесная связь между найденной алгеброй A и расщепляемой алгеброй Кэли — Диксона C над F. Напомним, что C — простая альтернативная алгебра, элементами которой являются матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix},$$

где α, $\beta \in F$, a, b — произвольные векторы трехмерного пространства над F. Если $a \times b$ — обычное векторное произведение, а (a, b) — скалярное произведение с единичной матрицей Грамма в выбранном базисе, то произведение двух элементов из C определяется по формуле

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & c \\ d & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma - (a, d) & \alpha c + \delta a + b \times d \\ \gamma b + \beta d + a \times c & \beta\delta - (b, c) \end{pmatrix}.$$

Определим в C новую операцию умножения $x * y = \frac{1}{2}[x, y]$, несущественно отличающуюся от коммутирования; относительно этой операции C превращается в алгебру Мальцева $C^{(-)}$. Элементы вида $\operatorname{diag}(\alpha, \alpha)$ образуют одномерный центр алгебры $C^{(-)}$. Дополнительное к центру подпространство образовано матрицами со следом 0, это подпространство является на самом деле подалгеброй, которую можно обозначить через $C^{(-)}/F$. Умножение в алгебре $C^{(-)}/F$ определяется по формуле

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & -\alpha \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \beta & c \\ d & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[(b, c) - (a, d)] & \alpha c - \beta a + b \times d \\ \beta b - \alpha d + a \times c & \frac{1}{2}[(a, d) - (b, c)] \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Сравнение формулы (51) с известной таблицей умножения алгебры A показывает, что A изоморфна алгебре $C^{(-)}/F$. Элементу h можно поставить в соответствие матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а элементу $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'$ — матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

указанное соответствие и является изоморфизмом $A \to C^{(-)}/F$.

Теорема 10. *Если F — произвольное поле, характеристика которого отлична от 2 и 3, то существует единственная нелиева расщепляемая простая алгебра Мальцева A над F. Эта алгебра изоморфна алгебре $C^{(-)}/F$, получаемой из расщепляемой алгебры Кэли — Диксона C над F с помощью операции $x * y = \frac{1}{2}(xy - yx)$ и последующей факторизации по центру.*

Структурный смысл определенной на A билинейной формы (46) выясняется следующим предложением.

Предложение 8. *Для любых* $x, y \in A$

$$xy \cdot y = (y, y)x - (x, y)y. \tag{52}$$

Доказательство состоит в несложной проверке на основе известной таблицы умножения алгебры A. Используя указанный выше изоморфизм $A \simeq C^{(-)}/_F$, вычисления можно провести, например, в матричной форме. При этом следует заметить, что если

$$x \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & -\alpha \end{pmatrix}, \quad y \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \beta & c \\ d & -\beta \end{pmatrix},$$

то в силу указанного изоморфизма $(x, y) = \alpha\beta - \frac{1}{2}[(a, d) + (b, c)]$.

Формула (52) показывает, что определенная нами форма (46) на A имеет на самом деле инвариантное, не зависящее от выбора картановской подалгебры H определение. Кроме того, из (52) следует, что для любых $x, y \in A$ подпространство, натянутое на x, y, xy, является подалгеброй, т. е. любые два элемента $x, y \in A$ порождают не более чем трехмерную подалгебру.

Лемма 15.

$$(xy, xy) = (x, y)^2 - (x, x)(y, y). \tag{53}$$

Доказательство. Утверждение тривиально, если $x = 0$. Пусть $x \neq 0$; заменяя в (52) y на xy, получим $(x \cdot xy)(xy) = (xy, xy)x$. С другой стороны,

$$(x \cdot xy)(xy) = [(x, x)y - (x, y)x](xy) = [(x, y)^2 - (x, x)(y, y)]x,$$

откуда следует утверждение.

Линеаризация соотношения (53) по y дает

$$(xy, xz) = (x, y)(x, z) - (x, x)(y, z). \tag{54}$$

Хорошо известно, что проблема классификации конечномерных простых алгебр над произвольным полем F сводится к задаче описания центральных простых алгебр над F и над конечными расширениями поля F. Опишем центральные простые нелиевы алгебры Мальцева над полем F характеристики $\neq 2, 3$. Пусть A — такая алгебра. Если F алгебраически замкнуто, то алгебра A расщепляема и ее строение уже известно. В общем случае пусть $\bar{F}$ — алгебраическое замыкание поля F, $\bar{A} = A_F \otimes \bar{F}$ — соответствующее расширение алгебры A. Тогда $\bar{A}$ — центральная простая алгебра Мальцева над $\bar{F}$ и $\dim_F A = \dim_{\bar{F}} \bar{A} = 7$. Пусть (x, y) — билинейная форма (46), определенная на $\bar{A}$. Формула (52) показывает, что сужение этой формы на A определено над F и также является невырожденной формой, которую будем обозначать по-прежнему через (x, y). Построим базис $e_1, \ldots, e_7$ алгебры A следующим образом. В качестве e_1, e_2 выберем два произвольных взаимно ортогональных относительно формы (x, y) неизотропных элемента алгебры A. Обозначим $(e_1, e_1) = -\alpha$, $(e_2, e_2) = -\beta$, $e_1e_2 = e_3$. Тогда e_1, e_2, e_3 попарно ортогональны и из (52), (53) следует, что $e_2e_3 = \beta e_1$, $e_3e_1 = \alpha e_2$, $(e_3, e_3) = -\alpha\beta \neq 0$. Подпространство (e_1, e_2, e_3) невырождено, тем же свойством обладает и его ортогональное дополнение $(e_1, e_2, e_3)^\perp$. В качестве e_4 выберем произвольный неизотропный элемент из $(e_1, e_2, e_3)^\perp$. Обозначим $(e_4, e_4) = -\gamma$, $e_1e_4 = e_5$, $e_2e_4 = e_6$, $e_3e_4 = e_7$. Тогда для любых $i, j = 1, 2, 3$ будем иметь ввиду (54) $(e_i, e_je_4) = (e_ie_j, e_4) = 0$, $(e_ie_4, e_je_4) = -(e_4, e_4)(e_i, e_j)$, откуда следует, что e_5, e_6, e_7 неизотропны и все элементы $e_1, \ldots, e_7$ попарно ортогональны; следовательно, e_i $(i = 1, \ldots, 7)$ образуют базис алгебры A. Для тех же $i, j = 1, 2, 3$, используя линеаризацию соотношения (52), будем иметь

$$e_ie_4 \cdot e_j + e_ie_j \cdot e_4 = -(e_i, e_j)e_4, \quad e_4e_i \cdot e_4e_j + (e_4 \cdot e_4e_j)e_i = 0.$$

В результате находим, что таблица умножения A в выбранном базисе имеет вид

$$\begin{gathered} e_1e_2 = e_3, \quad e_2e_3 = \beta e_1, \quad e_3e_1 = \alpha e_2, \\ e_ie_4 = e_{i+4}, \quad e_ie_{i+4} = (e_i, e_i)e_4, \quad e_4e_{i+4} = \gamma e_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ e_{i+4}e_j = -e_ie_j \cdot e_4, \quad e_{i+4}e_{j+4} = -\gamma e_ie_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \end{gathered} \tag{55}$$

где $(e_1, e_1) = -\alpha$, $(e_2, e_2) = -\beta$, $(e_3, e_3) = -\alpha\beta$.

Антикоммутативную алгебру с таблицей умножения (55) обозначим через $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Она может быть определена над полем F произвольной характеристики и является алгеброй Мальцева (т. е. удовлетворяет тождеству (10)) при любых значениях $\alpha, \beta, \gamma \in F$. Если $\operatorname{char} F \neq 3$, то алгебра $M(\alpha, \beta, \gamma)$ нелиева, а если $\alpha\beta\gamma \neq 0$, то она является центральной простой. Нами доказана

Теорема 11. *Класс нелиевых центральных простых алгебр Мальцева над произвольным полем F характеристики $\neq 2$, 3 совпадает с классом алгебр $M(\alpha, \beta, \gamma)$ для произвольных $\alpha, \beta, \gamma \neq 0 \in F$.*

Если, например, A — расщепляемая простая алгебра Мальцева с построенным выше базисом h, x, y, z, x', y', z', то можем положить $e_1 = h$, $e_2 = x + x'$, $e_3 = e_1e_2 = x' - x$, $e_4 = y + y'$, $e_5 = e_1e_4 = y' - y$, $e_6 = e_2e_4 = z + z'$, $e_7 = e_3e_4 = z - z'$. Соответственно этому параметры α, β, γ принимают следующие значения: $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, т. е. $A = M(-1, 1, 1)$.

Различным наборам $\alpha, \beta, \gamma \in F$ $(\alpha\beta\gamma \neq 0)$ могут отвечать, конечно, изоморфные алгебры $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Из описанного выше способа построения базиса и теоремы Витта о продолжении частичных изометрий билинейно-метрических пространств вытекает решение проблемы изоморфизма для алгебр $M(\alpha, \beta, \gamma)$.

Теорема 12. *Две алгебры типа $M(\alpha, \beta, \gamma)$ $(\alpha\beta\gamma \neq 0)$ над одним и тем же полем F характеристики $\neq 2$ изоморфны тогда и только тогда, когда эквивалентны определенные для них квадратичные формы $f(x) = (x, x)$.*

Заметим, что если $x = \sum\limits_i t_ie_i (t_i \in F)$, то

$$(x, x) = -\alpha t_1^2 - \beta t_2^2 - \alpha\beta t_3^2 - \gamma t_4^2 - \alpha\gamma t_5^2 - \beta\gamma t_6^2 - \alpha\beta\gamma t_7^2. \tag{56}$$

С каждой алгеброй $M(\alpha, \beta, \gamma)$ над F можно связать алгебру $C(\alpha, \beta, \gamma) = F \dotplus M(\alpha, \beta, \gamma)$, умножение в которой задается по формуле

$$(\alpha + x) \cdot (\beta + y) = \alpha\beta + \alpha y + \beta x + x \cdot y,$$

где $x \cdot y = (x, y) + xy$ для любых $\alpha, \beta \in F$, $x, y \in M(\alpha, \beta, \gamma)$. Если $\alpha\beta\gamma \neq 0$ и $\operatorname{char} F \neq 2$, то $C(\alpha, \beta, \gamma)$ — простая альтернативная алгебра (алгебра Кэли — Диксона), с которой $M(\alpha, \beta, \gamma)$ связана тем же способом, как алгебра $C^{(-)}/_F$ связана с расщепляемой алгеброй Кэли — Диксона $C = C(-1, 1, 1)$. Ясно, что две алгебры $M(\alpha, \beta, \gamma)$ и $M(\alpha', \beta', \gamma')$ изоморфны между собой тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие альтернативные алгебры $C(\alpha, \beta, \gamma)$ и $C(\alpha', \beta', \gamma')$.

Обсудим вопрос о картановских подалгебрах в центральной простой алгебре $A = M(\alpha, \beta, \gamma)$. Пусть y — произвольный ненулевой элемент из A. Если $(y, y) \neq 0$, то подпространство $V = (y)^{\perp}$ инвариантно относительно R_y и формула (52) показывает, что для любого $x \in V$

$$xy \cdot y = (y, y)x, \tag{57}$$

т. е. оператор R_y на V невырожден, $A_0^y = (y)$, y — регулярный элемент в смысле определения 2. Если $(y, y) = 0$, то из (52) следует $R_y^3 = 0$, $A_0^y = A$. Таким образом, элемент $y \in A$ регулярен тогда и только тогда, когда $(y, y) \neq 0$. Так как любая картановская подалгебра H в A совпадает с пересечением подпространств $A_0^y (y \in H)$, то H содержит регулярный элемент y и, следовательно, совпадает с одномерной подалгеброй, порожденной элементом y. Обратно, любой регулярный элемент в A порождает (одномерную) картановскую подалгебру в A независимо от мощности поля F.

Из (57) следует, что ненулевые характеристические корни оператора R_y совпадают с квадратными корнями из (y, y); картановская подалгебра $H=(y)$ является расщепляющей тогда и только тогда, когда (y, y) является квадратом (ненулевого) элемента из F. Таким образом, имеет место

Предложение 9. *Алгебра $M(\alpha, \beta, \gamma)$ расщепляема (и, следовательно, изоморфна $M(-1, 1, 1)$) тогда и только тогда, когда квадратичная форма* (56) *представляет единицу в F.*

Теорема 12 показывает, что классификация центральных простых алгебр Мальцева над F связана с теорией квадратичных форм над F. Пусть, например, F совпадает с полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Если не все α, β, γ положительны, то форма (56) является неопределенной, а так как любая неопределенная (или положительно определенная) квадратичная форма ранга $n \geqslant 4$ над $\mathbf{Q}$ представляет 1, то алгебра $M(\alpha, \beta, \gamma)$ будет расщепляемой. Если же $\alpha, \beta, \gamma > 0$, то форма $-(x, x)$ будет положительно определенной и (ввиду упомянутого выше свойства квадратичных форм над $\mathbf{Q}$) $M(\alpha, \beta, \gamma) \simeq M(1, 1, 1)$. Таким образом, имеется лишь две различные нелиевые центральные простые алгебры Мальцева над $\mathbf{Q}$. То же верно, если $F=\mathbf{R}$ — поле действительных чисел. Если же основное поле F является полем p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$, то любая алгебра вида $M(\alpha, \beta, \gamma)$ над F будет расщепляемой — как в случае алгебраически замкнутого поля F, хотя $\mathbf{Q}_p$ не является алгебраически замкнутым.

§ 4. СОПРЯЖЕННОСТЬ КАРТАНОВСКИХ ПОДАЛГЕБР В АЛГЕБРАХ МАЛЬЦЕВА

Если A — произвольная (неассоциативная) алгебра над полем характеристики 0 и D — нильпотентное дифференцирование алгебры A, то $\exp D$ — автоморфизм A. Дифференцирование D называется *внутренним*, если D принадлежит алгебре A^* умножений алгебры A (A^* порождается операторами правых и левых умножений). Рассмотрим группу Φ автоморфизмов алгебры A, порожденную автоморфизмами вида $\exp D$, где D — нильпотентное внутреннее дифференцирование. Элементы группы Φ будем называть *специальными автоморфизмами алгебры A*.

Пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, A — алгебра Мальцева над F, H — картановская подалгебра алгебры A и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — ненулевые корни H в A. Каждой паре элементов $x, y \in A$ сопоставляется внутреннее дифференцирование $D(x, y)=R_{xy}+[R_x, R_y]$ (см. (13)). Покажем, что любой элемент $e_\alpha \in A_\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ и элемент $h \in H$ определяют нильпотентное дифференцирование $D(e_\alpha, h)$. В самом деле, если $e_\beta \in A_\beta$ и $\beta \neq k\alpha$, где k — некоторое целое число, то для любого $k>0$ будем иметь $e_\beta D^k(e_\alpha, h) \in A_{\beta+k\alpha}$ и так как число различных корней H конечно, то $e_\beta D^k(e_\alpha, h)=0$ для достаточно большого k. То же верно для $\beta=k\alpha$ при $k \geqslant 2$. Особый интерес представляет случай $\beta= -\alpha$. Тогда $J(h, e_\alpha, e_{-\alpha})=0$; отсюда следует, что элементы h, e_α, $e_{-\alpha}$ порождают лиеву подалгебру в A. Ограничение оператора $D(e_\alpha, h)$ на этой подалгебре совпадает с $R_{e'_\alpha}$, где $e'_\alpha=2e_\alpha h \in A_\alpha$, отсюда

$$e_{-\alpha}D^{k+1}(e_\alpha, h)=\underbrace{[(e_{-\alpha}e'_\alpha)\ldots]e'_\alpha}_{k+1}. \tag{58}$$

Для любого $h_1 \in H$ элементы $e_{-\alpha}$, e'_α, h_1 образуют лиеву тройку, т. е. $J(e_{-\alpha}, e'_\alpha, h_1)=0$. Следовательно, правая часть (58) принадлежит $A_{k\alpha}$ при любом $k \geqslant 0$, и так как $\alpha \neq 0$, то снова заключаем, что $e_{-\alpha}D^k(e_\alpha, h)=$

$=0$ для достаточно большого $k>0$. В силу (29) остальные случаи сводятся к уже рассмотренным.

Выберем в A базис $\{h_1, \ldots, h_s, e_{s+1}, \ldots, e_m\}$ так, что элементы $h_1, \ldots, h_s$ образуют базис H, а элементы $e_{s+1}, \ldots, e_m$ лежат в корневых подпространствах A_α, $\alpha \neq 0$. Выберем элемент $h_0 \in H$ так, чтобы $\alpha_i(h_0) \neq 0$ для всех $i=1, \ldots, n$. Это можно сделать в силу линейности корней: произведение $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ является полиномиальной функцией $H \to F$, не равной тождественно нулю. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — независимые переменные; $x=\lambda_1 h_1+\ldots+\lambda_s h_s+\lambda_{s+1}e_{s+1}+\ldots+\lambda_m e_m$ — общий элемент A; образуем элемент

$$xP = \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i h_i\right) \exp D(\lambda_{s+1}e_{s+1}, h_0) \ldots \exp D(\lambda_m e_m, h_0),$$

определяющий полиномиальное отображение P алгебры A в себя (координаты xP являются полиномиальными функциями координат x). Вычислим дифференциал $d_{h_0}P$ этого отображения в точке h_0. Положим $x=h+e$, $h\in H$, $e \in \sum\limits_{\alpha\neq 0} A_\alpha$. Тогда

$$(h_0+tx)P=[(h_0+th)+te]P \equiv (h_0+th)[1+tD(e, h_0)] (\operatorname{mod} t^2) \equiv$$
$$\equiv h_0+t[h+h_0D(e, h_0)] (\operatorname{mod} t^2),$$

откуда следует, что $d_{h_0}P$ является отображением

$$h+e \mapsto h+h_0D(e, h_0)=h-2(eh_0)h_0.$$

Поскольку отображения $h\mapsto h$ и $e\mapsto -2(eh_0)h_0$ невырождены, то $d_{h_0}P$ является эпиморфизмом. Рассуждая далее так же, как в [2, гл. IX, § 2], находим, что справедлива

Теорема 13. *Если H_1 и H_2 — подалгебры Картана конечномерной алгебры Мальцева A над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, то существует такой специальный автоморфизм η алгебры A, что $H_1^\eta=H_2$.*

(В процессе доказательства устанавливается, что открытое по Зарискому множество образуют регулярные элементы A, являющиеся образами относительно специальных автоморфизмов (регулярных) элементов из произвольной картановской подалгебры $H \leqslant A$). В частности, все картановские подалгебры в A имеют одинаковую размерность и содержат регулярные элементы. Так как при расширении основного поля $F\subset\Omega$ фиттингова 0-компонента A_0^x алгебры A относительно R_x для любого $x\in A$ переходит в фиттингову 0-компоненту $A_0^x\otimes\Omega$ алгебры $A_\Omega=A\otimes\Omega$ относительно того же оператора, то картановская подалгебра $H\leqslant A$ переходит в картановскую подалгебру $H_\Omega=H\otimes\Omega$ алгебры A_Ω. Таким образом, имеет место

Следствие 12. *Если A — конечномерная алгебра Мальцева над произвольным полем характеристики 0, то все картановкие подалгебры в A имеют одинаковую размерность. Более того, каждая такая подалгебра H содержит регулярный элемент.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только второе утверждение. Пусть $x=\lambda_1h_1+\ldots+\lambda_sh_s$ — общий элемент подалгебры H, $f(\lambda, x)=\det(\lambda-R_x)$ — характеристический многочлен оператора R_x. Если кратность нулевого собственного значения R_x (т. е. $\dim A_0^x$) превосходит $\dim H=s$ при любых специализациях $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ в основное поле F, то $f(\lambda, x)$ имеет вид

$$f(\lambda, x)=\lambda^m-\tau_1(x)\lambda^{m-1}+\ldots+(-1)^{m-l}\tau_{m-l}(x)\lambda^l,$$

где $l>s$. Но тогда то же верно и для любого расширения Ω поля F; это противоречит существованию в $H_\Omega=H\otimes\Omega$ регулярного элемента, когда поле Ω алгебраически замкнуто.

§ 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР МАЛЬЦЕВА ХАРАКТЕРИСТИКИ 0

Результаты этого параграфа основаны на связи алгебр Мальцева с лиевыми тройными системами, указанной Лоосом [14]. Основной результат — теорема о полной приводимости представлений полупростых алгебр Мальцева (теорема 16), аналогичная теореме Вейля для алгебр Ли.

Напомним определение и основные свойства лиевых тройных систем (ЛТС) [15, 16]. Линейное пространство T над полем F называется ЛТС, если на нем определена тернарная операция $[abc]$ линейная по каждому переменному и удовлетворяющая тождествам

$$[aab]=0, \quad [abc]+[bca]+[cab]=0,$$
$$[ab[xyz]]=[[abx]yz]+[x[aby]z]+[xy[abz]].$$

Последнее тождество показывает, что отображение $D_{a,b}$: $x\mapsto[abx]$ является дифференцированием ЛТС T, такие дифференцирования называются *внутренними*; они порождают алгебру Ли $D_0(T)$, которая называется *алгеброй внутренних дифференцирований*. Примером ЛТС может служить произвольная алгебра Ли L относительно композиции $[xyz]=xy\cdot z$ или какое-либо подпространство алгебры L, замкнутое относительно двойного умножения. Наоборот, всякая ЛТС допускает реализацию в виде подпространства некоторой алгебры Ли L, замкнутого относительно двойного умножения; в этом случае говорят, что ЛТС *вложена в алгебру* L. Если ЛТС T вложена в алгебру Ли L, то подалгебра в L, порожденная множеством T, называется *обертывающей алгеброй Ли данного вложения*. Для произвольных ЛТС определяются понятия идеала, разрешимости, радикала и полупростоты. Если ЛТС T полупроста, то ее обертывающая алгебра Ли также полупроста для любого вложения $T\to L$. Среди всех вложений ЛТС T в алгебры Ли выделяются два специфических: стандартное и универсальное. Линейное пространство стандартной обертывающей алгебры Ли $L_s(T)$ имеет вид $T\dotplus D_0(T)$; умножение в $L_s(T)$ определяется очевидным образом, в частности, если a, $b\in T$, то $ab=D_{a,b}$. Универсальная обертывающая алгебра Ли $L_u(T)$ характеризуется свойством, что любой гомоморфизм $T\to L$, где L — произвольная алгебра Ли, однозначно продолжается до гомоморфизма $L_u(T)\to L$. Если ЛТС T полупроста, то ее стандартное вложение совпадает с универсальным.

Ниже предполагается, что характеристика основного поля F равна 0.

Если A — алгебра Мальцева, то на линейном пространстве A возникает строение ЛТС T_A [14] относительно композиции $[xyz]=2xyz-yzx-zxy$.

Если алгебра A полупроста, то и T_A полупроста; в общем случае радикал A совпадает с радикалом T_A [14]. Внутренние дифференцирования T_A порождаются операторами вида $R(x, y)=2R_{xy}+[R_x, R_y]$. Соотношение (15) показывает, что каждый оператор R_z является дифференцированием ЛТС T_A. Таким образом, обертывающая алгебра Ли $L(A)$ регулярного представления A является подалгеброй алгебры $D(T_A)$ всех дифференцирований T_A:

$$D_0(T_A)\subseteq L(A)\subseteq D(T_A). \tag{59}$$

Так как все дифференцирования полупростых ЛТС являются внутренними [15], то для полупростой алгебры Мальцева включения в (59) превращаются в равенства [14].

Предложение 10. *Если A — простая, соответственно полупростая алгебра Мальцева, то обертывающая алгебра Ли $L(A)$ ее регулярного представления также простая, соответственно полупростая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложению алгебры A в прямую сумму идеалов A_i отвечает разложение $L(A)$ в прямую сумму идеалов, изоморфных $L(A_i)$. Если A_i — простая алгебра Ли, то $L(A_i)$ — также простая алгебра Ли, изоморфная A_i. Пусть A — нелиева простая алгебра Мальцева, покажем, что в этом случае $L(A)$ — снова простая алгебра Ли. Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда A — центральная простая алгебра. А самом деле, если A нецентральна, то A можно рассматривать как центральную простую алгебру A_Γ над ее центроидом $\Gamma \supset F$ [2]. Поскольку все операторы $R_x (x \in A) \Gamma$ — линейны и $R_{\gamma a} = \gamma R_a$, $a \in A$, $\gamma \in \Gamma$, то алгебру Ли $L(A)$ можно рассматривать как алгебру (меньшей размерности) над полем Г, которая, очевидно, совпадает с $L(A_\Gamma)$. Если будет доказано, что $L(A_\Gamma)$ — центральная простая алгебра (над Г), то отсюда будет следовать, что $L(A)$ также проста и имеет центроид, изоморфный Г. По аналогичным соображениям можно ограничиться случаем алгебраически замкнутого поля F. В этом случае алгебра имеет размерность 7, и ее строение полностью известно (§ 3). Внутренние дифференцирования $D(x, y) = R_{xy} + [R_x, R_y]$ порождают в $L(A)$ подалгебру L_0 размерности 14, являющуюся простой алгеброй Ли типа G_2 [6]. Линейное пространство $L(A)$ разлагается в сумму подпространств L_0 и $R(A)$, где $R(A)$ — подпространство, порожденное операторами R_x, и эта сумма — прямая, так как R_x является дифференцированием A тогда и только тогда, когда x лежит в лиевом центре A, который в нелиевой простой алгебре Мальцева равен 0 (ср. с леммой 8). Следовательно, $\dim L(A) = 21$. Киллингова форма на A невырождена, и каждый из операторов R_x $(x \in A)$ является кососимметрическим относительно этой формы. Следовательно, $L(A)$ является подалгеброй простой алгебры Ли типа B_3 (ортогональной алгебры 7-мерного пространства). Сравнение размерностей $L(A)$ и B_3 показывает, что $L(A) = B_3$. Предложение доказано.

Следствие 13. *Если A — простая, соответственно полупростая алгебра Мальцева над полем характеристики 0, то алгебра $D(T_A)$ дифференцирований ЛТС T_A также простая, соответственно полупростая. В частности, если $A = C^{(-)}/F$, то $D(T_A) = L(A) = B_3$.*

Теорема 14. *Пусть A — алгебра Мальцева над полем характеристики 0, S — ее радикал, N — ниль-радикал. Тогда каждое дифференцирование D алгебры A отображает S в N.*

Доказательство. Как показано в [14], S совпадает с радикалом T_A. Но для любой ЛТС T радикал $L_s(T)$ порождается как идеал радикалом T: если R — радикал T, то радикал $L_s(T)$ равен $R + [R, T]$ [15]. В частности, S лежит в радикале $L_s(T_A)$. Дифференцирование D алгебры A автоматически является дифференцированием ЛТС T_A, т. е. D можно рассматривать как элемент алгебры Ли $D(T_A)$. Так как $L_s(T_A)$ — идеал алгебры Ли $T_A \dotplus D(T_A)$, то $(S)D$ лежит в ниль-радикале алгебры $L_s = L_s(T_A)$. Чтобы отличать операторы правого умножения на x $(x \in A)$ в L_s от соответствующих операторов R_x в A, будем обозначать их через $\operatorname{ad} x$. Итак, для любого $x \in (S)D$ оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Далее, $(\operatorname{ad} x)^2$ оставляет подпространство $T_A \subset L_s$ инвариантным, и так как $[[a, x], x] = [axx] = 3(ax)x$ для любого $a \in A$, то $(\operatorname{ad} x)^2$ совпадает на T_A с оператором $3R_x^2$. Следовательно, оператор R_x нильпотентен. Но из теоремы 5 легко следует, что ниль-радикал алгебры A совпадает с множеством элементов из S, нильпотентных относительно регулярного представления, поэтому $x \in N$. (Мы, конечно, предполагаем известным, что радикал S вообще замкнут относительно дифференцирований алгебры A, этим свойством обладает разрешимый радикал любой конечномерной алгебры характеристики 0.)

Важную информацию о структуре представлений полупростых алгебр Мальцева дает следующая теорема.

Теорема 15. *Пусть A — полупростая алгебра Мальцева характеристики 0; ρ — представление алгебры A в пространстве V и $L_\rho(A)$ — обертывающая алгебра Ли представления ρ. Тогда алгебра $L_\rho(A)$ полупроста.*

Доказательство. Пусть $E \neq V \dotplus A$ — полупрямое расширение A посредством V, определенное представлением ρ. Если $\tilde{\rho}$ — регулярное представление A в E и $\tilde{L}(A)$ — обертывающая алгебра Ли представления $\tilde{\rho}$, то V инвариантно относительно $\tilde{L}(A)$ $(V \lhd E)$; ограничение ρ на V индуцирует эпиморфизм π: $\tilde{L}(A) \to L_\rho(A)$. Рассмотрим ЛТС T_A и T_E; имеется естественное вложение i: $T_A \to T_E \subset L_s(T_E)$. Так как ЛТС T_A полупроста, то стандартное вложение для T_A совпадает с универсальным, следовательно, i продолжается до гомоморфизма i^*: $L_s(T_A) \to L_s(T_E)$. Образами элементов $[x, y] = R(x, y) \in D_0(T_A)$ при гомоморфизме i^* будут операторы $\tilde{R}(x, y) = 2\tilde{R}_{xy} + [\tilde{R}_x, \tilde{R}_y] \in \tilde{L}(A)$. Сужение i^* на $D_0(T_A) = D(T_A)$ дает гомоморфизм i': $D(T_A) \to \tilde{L}(A)$, а композиция гомоморфизмов i' и π определяет гомоморфное отображение $D(T_A)$ на подалгебру $I \subseteq L_\rho(A)$, порожденную операторами

$$\rho(x, y) = 2\rho(xy) + [\rho(x), \rho(y)], \quad x, y \in A.$$

Соотношение (15), справедливое для произвольных представлений, показывает, что I является идеалом алгебры $L_\rho(A)$. По следствию 13 алгебра $D(T_A)$ полупроста, значит, полупрост и ее гомоморфный образ I. Рассмотрим фактор-алгебру $\bar{L} = {}^{L_\rho(A)}/_I$ и обозначим через $\bar{\rho}(x)$ образ элемента $\rho(x) \in L_\rho(A)$ при каноническом гомоморфизме $L_\rho(A) \to \bar{L}$. Линейное пространство алгебры $\bar{L}$ порождается элементами $\bar{\rho}(x)$, и для них выполнено соотношение $2\bar{\rho}(xy) + [\bar{\rho}(x), \bar{\rho}(y)] = 0$ или

$$-\frac{1}{2}\bar{\rho}(xy) = \left[-\frac{1}{2}\bar{\rho}(x), -\frac{1}{2}\bar{\rho}(y)\right].$$

Но тогда сквозное отображение $x \to -\frac{1}{2}\rho(x) \to -\frac{1}{2}\bar{\rho}(x)$ является гомоморфизмом алгебры A на $\bar{L}$, и так как алгебра A полупроста, то из структурной теоремы § 2 следует, что $\bar{L}$ полупроста (или тривиальна). Алгебра $L_\rho(A)$ также оказывается полупростой, как расширение полупростой алгебры Ли с помощью полупростой. Теорема доказана.

Так как каждое представление ρ полупростой алгебры A в пространстве V можно понимать как естественное представление алгебры Ли $L_\rho(A)$ в том же пространстве, то в качестве непосредственного следствия теоремы 15 находим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 16. *Всякое представление полупростой алгебры Мальцева характеристики* 0 *вполне приводимо.*

Следствие 14. *Если радикал алгебры Мальцева A совпадает с ее центром C, то $A = A_1 \dotplus C$, где A_1 — полупростая подалгебра (совпадающая с A^2).*

Доказательство. Достаточно рассмотреть регулярное представление A и заметить, что индуцированное им представление фактор-алгебры ${}^A/_C$ в пространстве A вполне приводимо. Дополнительное к C инвариантное подпространство A_1 и будет искомой подалгеброй (даже идеалом).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кузьмин Е. Н.** Алгебры Мальцева и их представления // Алгебра и логика.— 1968.— Т. 7, № 4.— С. 48—69.
2. **Джекобсон Н.** Алгебры Ли.— М.: Мир, 1964.
3. **Кузьмин Е. Н.** Алгебры Мальцева: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.06.— Новосибирск, 1969.
4. **Stitzinger E. L.** Supersolvable Malcev algebras // J. Algebra.— 1986.— V. 103, N 1.— P. 69—79.
5. **Мальцев А. И.** Аналитические лупы // Мат. сб.— 1955.— Т. 36(78), № 3.— С. 569—576.
6. **Sagle A. A.** Malcev algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1961.— V. 101, N 3.— P. 426—458.
7. **Eilenberg S.** Extensions of general algebras // Ann. Soc. Polon. Math.— 1948.— V. 21.— P. 125—134.

8. **Кузьмин Е. Н.** Об антикоммутативных алгебрах, удовлетворяющих условию Энгеля // Сиб. мат. журн.— 1967.— Т. 8, № 5.— С. 1026—1034.
9. **Жевлаков К. А.** Ниль-радикал алгебры Мальцева // Алгебра и логика.— 1965.— Т. 4, № 5.— С. 67—78.
10. **Sagle A. A.** Simple Malcev algebras over fields of characteristic zero // Pacif. J. Math.— 1962.— V. 12, N 3.— P. 1057—1078.
11. **Sagle A. A.** On simple extended Lie algebras over fields of characteristic zero // Pacif. J. Math.— 1965.— V. 15, N 2.— P. 621—648.
12. **Кузьмин Е. Н.** Локально нильпотентный радикал алгебр Мальцева, удовлетворяющих n-му условию Энгеля // Докл. АН СССР.— 1967.— Т. 177, № 3.— С. 508—510.
13. **Yamaguti K.** On the theory of Malcev algebras // Kumamoto J. Sci. Ser. A.— 1963.— V. 6, N 1.— P. 9—45.
14. **Loos O.** Über eine Beziehung zwischen Malcev — Algebren und Lie — Tripelsystemen // Pacif. J. Math.— 1966.— V. 18, N 3.— P. 553—562.
15. **Lister W. G.** A structure theory of Lie triple systems // Trans. Amer. Math. Soc.— 1952.— V. 72, N 2.— P. 217—242.
16. **Harris B.** Cohomology of Lie triple systems and Lie algebras with involution // Trans. Amer. Math. Soc.— 1961.— V. 98, N 1.— P. 148—162.

Н. Г. НЕСТЕРЕНКО

ГИПОТЕЗА АНАНЬИНА ОБ АЛГЕБРАХ, ПРЕДСТАВИМЫХ ТРЕУГОЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Данная работа посвящена теории представлений ассоциативных алгебр над полем Φ алгебрами матриц над коммутативной алгеброй. Наличие единицы в алгебре не предполагается, хотя основные результаты работы справедливы для алгебр с единицей в сигнатуре.

Во многих работах (например, [1—6]), посвященных этой тематике, на самом деле рассматриваются представления треугольными матрицами. Кроме того, как отмечено в [1], в нулевой характеристике класс представимых многообразий не изменится, если заменить представимость квадратными матрицами на представимость верхнетреугольными матрицами. В этой связи возникла задача описания T_n-алгебр (т. е. алгебр, вложимых в алгебру $T_n(K)$ верхнетреугольных матриц порядка n над коммутативной алгеброй K) на языке квазитождеств. Ж. Левин [6] показал, что T_2-алгебра — это алгебра, удовлетворяющая тождеству $[x, y][z, t]=0$, где, как обычно, $[x, y]=xy-yx$, $[x_1, \ldots, x_{n+1}]=[[x_1, \ldots, x_n], x_{n+1}]$. В случае алгебр над произвольным коммутативным кольцом T_2-алгебры описаны в [3].

В середине 70-х годов А. З. Ананьин выдвинул гипотезу о характеризации T_n-алгебр на языке квазитождеств. При $n=3$ положительный ответ на эту гипотезу получен в [3]. В настоящей работе получен положительный ответ на гипотезу Ананьина для произвольного натурального числа n (см. теорему 3). Показано также, что эта гипотеза справедлива для алгебр с единицей в сигнатуре. (Говоря об алгебрах с единицей в сигнатуре, всегда подразумеваем, что все гомоморфизмы таких алгебр сохраняют единицу). Это позволяет легко перенести результат из [1] на случай многообразий алгебр с единицей в сигнатуре. Кроме того, найдены необходимые и достаточные условия, аналогичные квазитождествам Ананьина, для существования такого вложения алгебр (с единицей) $\varphi\colon R\to T_n(K)$ (K — коммутативная алгебра; $\varphi(r)=(\varphi_{ij}(r))_{i\leqslant j}$), что $\ker\varphi_{ii}=I_i$ ($i=1, \ldots, n$) — фиксированные идеалы алгебры R, содержащие ее коммутаторный идеал (R, R) (т. е. идеал, порожденный всеми элементами вида $[x, y]$, где $x, y\in R$). Через $R^{\#}$ будем обозначать результат присоединения единицы к алгебре R, т. е. $R^{\#}=R\oplus\Phi\cdot 1$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Л. А. Бокутю за внимание и поддержку.