8. **Кузьмин Е. Н.** Об антикоммутативных алгебрах, удовлетворяющих условию Энгеля // Сиб. мат. журн.— 1967.— Т. 8, № 5.— С. 1026—1034.
9. **Жевлаков К. А.** Ниль-радикал алгебры Мальцева // Алгебра и логика.— 1965.— Т. 4, № 5.— С. 67—78.
10. **Sagle A. A.** Simple Malcev algebras over fields of characteristic zero // Pacif. J. Math.— 1962.— V. 12, N 3.— P. 1057—1078.
11. **Sagle A. A.** On simple extended Lie algebras over fields of characteristic zero // Pacif. J. Math.— 1965.— V. 15, N 2.— P. 621—648.
12. **Кузьмин Е. Н.** Локально нильпотентный радикал алгебр Мальцева, удовлетворяющих n-му условию Энгеля // Докл. АН СССР.— 1967.— Т. 177, № 3.— С. 508—510.
13. **Yamaguti K.** On the theory of Malcev algebras // Kumamoto J. Sci. Ser. A.— 1963.— V. 6, N 1.— P. 9—45.
14. **Loos O.** Über eine Beziehung zwischen Malcev — Algebren und Lie — Tripelsystemen // Pacif. J. Math.— 1966.— V. 18, N 3.— P. 553—562.
15. **Lister W. G.** A structure theory of Lie triple systems // Trans. Amer. Math. Soc.— 1952.— V. 72, N 2.— P. 217—242.
16. **Harris B.** Cohomology of Lie triple systems and Lie algebras with involution // Trans. Amer. Math. Soc.— 1961.— V. 98, N 1.— P. 148—162.

Н. Г. НЕСТЕРЕНКО

ГИПОТЕЗА АНАНЬИНА ОБ АЛГЕБРАХ, ПРЕДСТАВИМЫХ ТРЕУГОЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Данная работа посвящена теории представлений ассоциативных алгебр над полем Φ алгебрами матриц над коммутативной алгеброй. Наличие единицы в алгебре не предполагается, хотя основные результаты работы справедливы для алгебр с единицей в сигнатуре.

Во многих работах (например, [1—6]), посвященных этой тематике, на самом деле рассматриваются представления треугольными матрицами. Кроме того, как отмечено в [1], в нулевой характеристике класс представимых многообразий не изменится, если заменить представимость квадратными матрицами на представимость верхнетреугольными матрицами. В этой связи возникла задача описания T_n-алгебр (т. е. алгебр, вложимых в алгебру $T_n(K)$ верхнетреугольных матриц порядка n над коммутативной алгеброй K) на языке квазитождеств. Ж. Левин [6] показал, что T_2-алгебра — это алгебра, удовлетворяющая тождеству $[x, y][z, t]=0$, где, как обычно, $[x, y]=xy-yx$, $[x_1, \ldots, x_{n+1}]=[[x_1, \ldots, x_n], x_{n+1}]$. В случае алгебр над произвольным коммутативным кольцом T_2-алгебры описаны в [3].

В середине 70-х годов А. З. Ананьин выдвинул гипотезу о характеризации T_n-алгебр на языке квазитождеств. При $n=3$ положительный ответ на эту гипотезу получен в [3]. В настоящей работе получен положительный ответ на гипотезу Ананьина для произвольного натурального числа n (см. теорему 3). Показано также, что эта гипотеза справедлива для алгебр с единицей в сигнатуре. (Говоря об алгебрах с единицей в сигнатуре, всегда подразумеваем, что все гомоморфизмы таких алгебр сохраняют единицу). Это позволяет легко перенести результат из [1] на случай многообразий алгебр с единицей в сигнатуре. Кроме того, найдены необходимые и достаточные условия, аналогичные квазитождествам Ананьина, для существования такого вложения алгебр (с единицей) $\varphi\colon R\to T_n(K)$ (K — коммутативная алгебра; $\varphi(r)=(\varphi_{ij}(r))_{i\leqslant j}$), что $\ker\varphi_{ii}=I_i$ $(i=1, \ldots, n)$ — фиксированные идеалы алгебры R, содержащие ее коммутаторный идеал (R, R) (т. е. идеал, порожденный всеми элементами вида $[x, y]$, где $x, y\in R$). Через $R^{\#}$ будем обозначать результат присоединения единицы к алгебре R, т. е. $R^{\#}=R\oplus\Phi\cdot 1$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Л. А. Бокутю за внимание и поддержку.

§ 1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

А. З. Ананьин сформулировал гипотезу о том, что алгебра R является T_n-алгеброй тогда и только тогда, когда в ней выполняется условие: если А — конечное множество наборов вида $\alpha=(a_1, x_1, \ldots, a_n, x_n, a_{n+1})$ $(a_i \in R^{\#}, x_j \in R)$ и для каждого непустого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и произвольных элементов $y_{i_1}, \ldots, y_{i_k} \in R$ выполнено равенство

$$\sum_{\alpha\in A} a_1x_1a_2x_2\cdot\ldots\cdot a_{i_1}\delta_{x_{i_1}y_{i_1}}a_{i_1+1}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}\delta_{x_{i_k}y_{i_k}}a_{i_k+1}\cdot\ldots\cdot a_nx_na_{n+1}=0,$$

где δ_{xy} — символ Кронекера, то в алгебре R выполнено равенство $\sum_{\alpha\in A} a_1x_1a_2x_2\ldots a_nx_na_{n+1}=0.$

То, что в каждой T_n-алгебре выполняется приведенное выше условие, впервые заметил А. З. Ананьин. При $n=3$ эта гипотеза принимает более простой вид, а именно: алгебра R является T_3-алгеброй тогда и только тогда, когда для любых $a_i, b_i \in (R, R)$, $x\in R$

$$\sum_i a_ib_i=0 \Rightarrow \sum_i a_ixb_i=0.$$

Нам будет удобно формулировать утверждения на языке обобщенных полиномов.

Пусть X — счетное множество переменных. Через $R\langle X\rangle$ обозначим алгебру обобщенных полиномов над алгеброй R с переменными из X (считаем, что $X, R\subseteq R\langle X\rangle$); через $\mathscr{X}$ (соответственно $\mathscr{X}'$) будем обозначать коммутативную полугруппу с единицей (без единицы), свободно порожденную множеством X. Частную производную обобщенного полинома f по переменным $x_1, \ldots, x_m$ условимся обозначать через $\partial f/\partial w$, где $w=x_1\ldots x_m\in\mathscr{X}$. Положим $\partial f/\partial w=f$ при $w=1$. Обобщенный полином $f\in R\langle X\rangle$ назовем *n-полиномом*, если существуют попарно непересекающиеся подмножества $X_1^f, \ldots, X_n^f \subseteq X$ такие, что полином f разлагается в сумму мономов вида $a_1x_1a_2x_2\ldots a_nx_na_{n+1}$, где $a_i\in R^{\#}, x_i\in X_j^f$. При этом будем считать, что f существенно зависит от каждой переменной $x\in X_i^f$, т. е. $f\notin R\langle X\backslash\{x\}\rangle$. В этом случае множества $X_1^f, \ldots, X_n^f$ определяются по f однозначно. Отметим, что если $\partial f/\partial w\neq 0$ (f — n-полином, $w\in\mathscr{X}$), то w имеет вид $x_{i_1}\ldots x_{i_m}$, где $i_1<\ldots<i_m$ $(m\geqslant 0)$, $x_{i_\nu}\in X_{i_\nu}^f$. Пусть ξ: $X'\to R (X'\subseteq X)$ — отображение, $f\in R\langle X\rangle$, тогда через $f\xi$ будем обозначать результат замены в полиноме f каждой переменной $x\in X'$ на $\xi(x)$.

Теорема 1 (основная). *Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — собственные идеалы алгебры R с единицей такие, что $(R, R)\subseteq I_j$ $(j=1, \ldots, n)$. Тогда эквивалентны следующие условия:*

а) *существуют коммутативная алгебра K с единицей и вложение алгебр с единицей φ: $R\to T_n(K)$ такие, что $\ker\varphi_{ii}=I_i$ $(i=1, \ldots, n)$;*

б) *для каждого n-полинома f над R и произвольной интерпретации ξ: $X\to R$ справедлива импликация*

$$\bigwedge_w ((\partial f/\partial w)\,\xi=0)\Rightarrow f\xi=0, \qquad (1)$$

где w пробегает все непустые мономы из множества $\mathscr{X}(f, \xi, I)=\{x_{i_1}\ldots x_{i_k}\in\mathscr{X}\mid i_1<\ldots<i_k,\ k\geqslant 0,\ x_p\in X_p^f,\ x_p\xi\notin I_p\}$,

в) *для каждого n-полинома f над Φ и произвольной интерпретации ξ: $X\to R$ справедлива импликация (1).*

Доказательство теоремы 1 приведено в § 3, 4.

Замечание 1. Справедливость теоремы 1 сохраняется, если в ее формулировке опустить слова «собственные» и «с единицей». В дальнейшем эта измененная формулировка цитируется как теорема 1′, при этом условимся через а′), б′), в′) обозначать условия теоремы 1′, соответствующие условиям а), б), в) теоремы 1.

С помощью процедуры «присоединения единицы» утверждение теоремы 1′ легко сводится к теореме 1. Именно, покажем, что если алгебра R удовлетворяет одному из условий а′), б′), в′), то алгебра $R^{\#}$ удовлетворяет соответственно одному из условий а), б), в) (обратное утверждение тривиально). В случае а′) это очевидно. Пусть R удовлетворяет условию в′), f — n-полином над Φ, ξ: $X \to R^{\#}$ — интерпретация. Определим интерпретации η: $X \to R$ и λ: $X \to \Phi$ так, чтобы $x\xi = x\eta - x\lambda \cdot 1$. Тогда для любого $w \in \mathscr{X}$

$$\frac{\partial f}{\partial w}\eta = \frac{\partial f}{\partial w}\xi + \sum_{v \in \mathscr{X}^{\cdot}} w\lambda \frac{\partial f}{\partial (wv)}\xi.$$

Отсюда легко вытекает, что если интерпретация ξ удовлетворяет посылкам импликации 1), то $f\xi = f\eta$ и интерпретация η удовлетворяет посылкам импликации (1). Этим доказана справедливость условия в) для $R^{\#}$.

Если для алгебры R выполнены условие б′), а следовательно, и условие в′), то $R^{\#}$ удовлетворяет (по доказанному выше) условию в) и по теореме 1 — условию б).

Основной интерес представляет частный случай теоремы 1′, когда каждый из идеалов $I_1, \ldots, I_n$ совпадает либо с алгеброй R, либо с ее коммутативным идеалом. В связи с этим алгебру назовем T_n^M*-алгеброй* ($M \subseteq \{1, \ldots, n\}$), если она вложима в алгебру $T_n^M(K)$ верхнеугольных матриц порядка n (над коммутативной алгеброй K), у которых (i, i)-я компонента равна нулю при $i \notin M$. Обобщенный полином над R назовем (n, M)*-полиномом*, если он получается из некоторого n-полинома g над R заменой переменных из множеств X_i^g $(i \notin M)$ на некоторые элементы из R.

Теорема 2. *Для того чтобы алгебра R являлась T_n^M-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы для каждого (n, M)-полинома f и произвольной интерпретации ξ: $X \to R$ выполнялось условие*

$$\bigwedge_{w \in \mathscr{X}^{\cdot}} ((\partial f/\partial w)\xi = 0) \Rightarrow f\xi = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть φ: $R \to T_n^M(K)$ (K — коммутативная алгебра) — вложение алгебр. Положим в теореме 1′ (см. замечание 1) $I_i = \ker \varphi_{ii}$. Так как φ_{ii}: $R \to K$ — гомоморфизм, то $(R, R) \subseteq I_i$. Теперь требуемое утверждение непосредственно вытекает из импликации а′) $\Rightarrow$ б′) (нужно только учесть, что $I_i = R$ при $i \notin M$).

Достаточность. Положим в теореме 1′ $I_i = (R, R)$ при $i \in M$ и $I_i = R$ в противном случае. В силу теоремы 1′ нужно только проверить условие б′). Понятно, что в данном случае условие б′) эквивалентно условию: для каждого (n, M)-полинома f и произвольной интерпретации ξ справедлива импликация (2), в которой конъюнкция берется по всем мономам $w \in \mathscr{X}^{\cdot}$, не содержащим переменных из множества $X_\xi^f = \{x \in X^f \mid x\xi \in (R, R)\}$ (здесь X^f — множество переменных из X, от которых f зависит существенно).

Проверим это условие. С этой целью для переменной $x \in X_\xi^f$ подберем элементы $a_{x,i} \in R^{\#}$, $b_{x,i}$, $c_{x,i} \in R$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ такие, что

$$x\xi = \sum_{i=1}^{p} a_{x,i}\,[b_{x,i}, c_{x,i}].$$

Обозначим через g (n, M)-полином, получающийся из f заменой каждой переменной $x \in X_\xi^f$ на полином $\sum_{i=1}^{p} a_{x,}\,[y_{x,i}, c_{x,i}]$, где $y_{x,i}$ $(x \in X_\xi^f,\ i = 1, \ldots$

$\ldots, p$)— различные переменные из $X\backslash X^f$, множество которых мы обозначим через Y. Определим интерпретацию η: $X \to R$, отличную от интерпретации ξ только, быть может, на множестве Y, полагая $y_{x,i}\eta = b_{x,i}$.

Заметим, что $(\partial g/\partial w)\eta = 0$ при всех $w \in \mathscr{X}^{\cdot}$. В самом деле, если моном w не содержит переменных из множества $Z = Y \bigcup X_\xi^f$, то, обозначая через ξ' и η' (соответственно ξ'' и η'') сужение отображений ξ и η на множество Z (соответственно на множество $X\backslash Z$), получим

$$\frac{\partial g}{\partial w}\eta = \left(\frac{\partial g}{\partial w}\eta'\right)\eta'' = \frac{\partial (g\eta')}{\partial w}\eta'' = \frac{\partial (f\xi')}{\partial w}\xi'' = \frac{\partial f}{\partial w}\xi = 0.$$

Здесь мы воспользовались равенствами $f\xi' = g\eta'$, $\xi'' = \eta''$ и перестановочностью частичной интерпретации с дифференцированием по переменным, не принадлежащим области определения данной частичной интерпретации.

Если же в моном w входит переменная из Z, то уже $\partial g/\partial w = 0$. Действительно, поскольку каждая переменная из Z, существенно входящая в полином g, принадлежит множеству Y, то достаточно заметить, что $\partial g/\partial y_{x,i} = 0$ при $y_{x,i} \in Y$. А это непосредственно вытекает из равенства $\partial [y_{x,i}, c_{\alpha,i}]/\partial y_{x,i} = 0$ и того, что g раскладывается в сумму обобщенных полиномов вида a, $u[y_{x,i}, c_{\alpha,i}]v$, где a, u, v — обобщенные мономы (причем мономы u, v могут отсутствовать), не содержащие данной переменной $y_{x,i}$.

Пользуясь импликацией (2), получаем $g\eta = 0$ из равенства $f\xi = g\eta$ имеем $f\xi = 0$, что и требовалось проверить. Теорема 2 доказана.

Полагая в теореме 2 $M = \varnothing$, получаем известный результат, доказанный независимо И. В. Львовым [2], Дж. Бергманом и С. М. Вовси [5], о том, что нильпотентная индекса n алгебра над полем вкладывается в алгебру строго верхнетреугольных матриц порядка n над коммутативной алгеброй. С другой стороны, полагая в теореме 2 $M = \{1, \ldots, n\}$, получаем положительный ответ на гипотезу Ананьина:

Теорема 3. *Алгебра R является T_n-алгеброй тогда и только тогда, когда для всякого n-полинома f над R и произвольной интерпретации ξ: $X \to R$ справедлива импликация* (2).

Замечание 2. Полагая в доказательстве теоремы 2 $M = \{1, \ldots, n\}$ и заменяя все ссылки на теорему 1′ ссылками на теорему 1 (учитывая при этом, что коммутаторный идеал T_n-алгебр не содержит единицу, так как он нильпотентен), получаем справедливость теоремы 3 для алгебр с единицей в сигнатуре.

Следствие. *Если алгебра R с единицей вложима (без сохранения единицы) в алгебру вида $T_n(C)$, где C — коммутативная алгебра, то существует коммутативная алгебра C' с единицей такая, что алгебра R вложима в алгебру $T_n(C')$ с сохранением единицы.*

Из теоремы 3 получаем простое доказательство достаточности в следующей теореме.

Теорема [1]. *Для того чтобы многообразие алгебр $\mathfrak{M}$ над полем характеристики нуль было представимым, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathfrak{M}$ выполнялись тождества вида*

$$[x_1, \ldots, x_t]y_1 \ldots y_t[z_1, \ldots, z_t] = 0, \quad [x_1, y_1] \cdot \ldots \cdot [x_t, y_t] = 0 \qquad (3)$$

для некоторого числа t.

С этой целью положим $R^{(0)} = R^{\#}$, $R^{(k+1)} = (R^{(k)}, R)$ — идеал алгебры R, порожденный всеми элементами вида $[a, b]$, где $a \in R^{(k)}$, $b \in R$. Легко заметить, что если в алгебре R выполняются тождества (3), то она удовлетворяет равенству

$$R^{(k)}R^mR^{(l)} = 0 \qquad (4)$$

для некоторых чисел k, m, l, зависящих только от t. Поэтому для доказательства достаточности в теореме [1] в силу теоремы 3 достаточно показать, что если f — n-полином над R $(n = k + m + l)$ и ξ: $X \to R$ —

интерпретация переменных, такая, что $(\partial f/\partial w)\xi=0$ при всех $w\in\mathscr{X}^{\cdot}$, то $f\xi\in R^{(k)}R^{m}R^{(l)}$. С этой целью определим линейные операторы L и Ψ на алгебре $R\langle X\rangle$, тождественные на подалгебре R, полагая $L(axg)=[a, x]g$, $\Psi(gxa)=g[x, a]$ при $a\in R^{\#}$, $x\in X$, $g\in R\langle X\rangle$.

Через $\mathscr{A}_{ij}$ обозначим подпространство обобщенных полиномов, порожденное мономами вида $a_ix_{i+1}a_{i+1}\ldots x_{n-j}a_{n-j}$ $\left(x_h\in X_k^f, a_{i+1}, \ldots, a_{n-j-1}\in R^{\#}, a_i\in R^{(i)}, a_{n-j}\in R^{(j)}\right)$. Ограничение интерпретации ξ на множество X_i^f обозначим через ξ_i.

Положим $f_0=f$, $f_i=(L(f_{i-1}))\xi_i$ $(i\leqslant n)$. Понятно, что $(L(\mathscr{A}_{i-1,0}))\xi_i\subseteq\mathscr{A}_{i,0}$. Отсюда вытекает, что $f_i\in\mathscr{A}_{i,0}$. Покажем индукцией по i, что $(\partial f_i/\partial w)\xi=0$ при $w\in\mathscr{X}^{\cdot}$ и $f_i\xi=f\xi$. При $i=0$ это утверждение тривиально. Пусть теперь $i>0$. Если моном $w\in\mathscr{X}$ содержит хотя бы одну переменную из множества X_i^f, то $\partial f_i/\partial w=0$ (так как $f_i\in\mathscr{A}_{i,0}$). Поскольку $f_{i-1}\in\mathscr{A}_{i-1,0}$, то

$$L(f_{i-1})=f_{i-1}-\sum_{x\in X_i^f}x\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x}.$$

Если моном $w\in\mathscr{X}$ не зависит от переменных из X_i^f, то, применяя к последнему равенству частичную интерпретацию ξ_i и оператор $\partial/\partial w$ (учитывая при этом их перестановочность), получаем

$$\frac{\partial f_i}{\partial w}=\frac{\partial f_{i-1}}{\partial w}\xi_i-\sum_{x\in X_i^f}\left(x\frac{\partial f_{i-1}}{\partial xw}\right)\xi_i.$$

Пользуясь индукционным предположением, выводим отсюда, что $(\partial f_i/\partial w)\xi=0$ при $w\in\mathscr{X}^{\cdot}$ и $f_i\xi=f_{i-1}\xi=f\xi$.

Положим теперь $f_{k,0}=f_k$, $f_{k,i+1}=(\Psi(f_{k,i}))\xi_{n-i}$ $(i<n-k)$. Аналогично проверяется, что $f_{k,i}\in\mathscr{A}_{k,i}$, $(\partial f_{k,i}/\partial w)\xi=0$ (при $w\in\mathscr{X}^{\cdot}$) и $f_{k,i}\xi=f\xi$. В частности, $f\xi=f_{k,l}\xi\in(\mathscr{A}_{k,l})\xi\subseteq R^{(k)}R^{m}R^{(l)}$, что и требовалось установить.

Отметим, что это доказательство проходит и для алгебр с единицей в сигнатуре.

С другой стороны, если $\mathfrak{M}$ — унитарно представимое многообразие алгебр (т. е. многообразие алгебр с едницей в сигнатуре, каждая алгебра которого вложима с сохранением единицы в алгебру матриц над коммутативной алгеброй с единицей) над полем характеристики нуль, то для некоторого числа t в многообразии $\mathfrak{M}$ выполнены тождества вида (1). В самом деле, рассмотрим многообразие $\mathfrak{M}_0$ алгебр без единицы в сигнатуре, порожденное $\mathfrak{M}$. В силу теоремы [1] достаточно показать, что $\mathfrak{M}_0$ — представимое многообразие. Для этого достаточно заметить, что каждая алгебра $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_0$ вложима в алгебру из $\mathfrak{M}$. Из теоремы Бирхгофа следует, что алгебра A является гомоморфным образом подходящей подалгебры C некоторой алгебры $B\in\mathfrak{M}$, так что $\mathrm{A}\cong C/I$, $I\lhd C$. Теперь имеем $I\lhd C_1$, где $C_1=C+\Phi\cdot 1_B\in\mathfrak{M}$, и алгебра A вкладывается в алгебру C_1/I из $\mathfrak{M}_0$.

Тем самым мы показали, что теорема [1] справедлива для многообразий алгебр с единицей в сигнатуре, при этом, конечно, первое из тождеств (1) можно заменить на тождество

$$[x_1, \ldots, x_t][z_1, \ldots, z_t]=0.$$

Далее под словом алгебра понимается алгебра с единицей и все гомоморфизмы алгебр сохраняют единицу. Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые факты о представлении треугольных категорий.

§ 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНЫХ КАТЕГОРИЙ

На протяжении этого параграфа K — коммутативное кольцо с единицей, все K-модули унитальны.

Малую категорию D назовем *категорией над* K или K*-категорией*, если для всяких двух объектов i, j множество $D(i, j)$ морфизмов из i в j является K-модулем, а умножение на каждый фиксированный морфизм есть K-линейное отображение соответствующих модулей. Под K*-функтором между* K*-категориями* понимается аддитивный (ковариантный) функтор, перестановочный с умножениями морфизмов на элементы кольца K. Функтор $F\colon \mathrm{D} \rightsquigarrow C$ назовем *унивалентным*, если для всяких двух объектов i, j сужение F на множество $\mathrm{D}(i, j)$ инъективно.

Категорию над K назовем *представимой*, если существует унивалентный K-функтор из этой категории в коммутативную K-алгебру, рассматриваемую как категорию с одним объектом.

Категорию D над K такую, что $\mathrm{ob}\, D = \{1, \ldots, n\}$, $D(i, j) = 0$ $(i > j)$, назовем *треугольной* (соответственно *унитреугольной*) *категорией порядка* n, если для каждого объекта i алгебра $\mathrm{D}(i, i)$ коммутативна (изоморфна K). При этом обычные «матричные» операции на $\oplus \mathrm{D}(i, j)$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ определяют алгебру $T(\mathrm{D})$ матриц над D. Ясно, что представимость категории D означает существование вложения из K-алгебры матриц над D в алгебру верхнеугольных матриц порядка n над коммутативной K-алгеброй, при котором матрица с нулевой (i, j)-й компонентой переходит в матрицу с нулевой (i, j)-й компонентой.

Отметим результат Дж. Бергмана [4] о том, что всякая унитреугольная категория над K представима. Далее нам потребуется следующее обобщение этого результата.

Предложение 1. *Пусть* D *— треугольная категория над* Φ *порядка* n, $\chi_{ii+1}\colon \mathrm{D}(i+1, i+1) \to \mathrm{D}(i, i)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ *— гомоморфизмы алгебр такие, что для любых* $\alpha \in \mathrm{D}(i, i+1)$, $\beta \in \mathrm{D}(i+1, i+1)$

$$\alpha\beta = \chi_{ii+1}(\beta)\alpha. \tag{5}$$

Тогда Φ *— категория* D *представима.*

Доказательство. В силу упомянутого выше результата Дж. Бергмана [4] достаточно вложить Φ-категорию D в унитреугольную категорию S порядка n над коммутативной алгеброй K. В качестве K возьмем тензорное произведение $\mathrm{D}(1, 1) \otimes \mathrm{D}(2, 2) \otimes \ldots \otimes \mathrm{D}(n, n)$ коммутативных алгебр, при этом условимся отождествлять алгебру $\mathrm{D}(m, m)$ с подалгеброй $1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \mathrm{D}(m, m) \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \subseteq K$. Через K_{ij} обозначим подалгебру в K, порожденную подалгебрами $\mathrm{D}(m, m)$ $(i \leqslant m \leqslant j)$. На модуле $\mathrm{D}(i, j)$ $(i < j)$ определим структуру K_{ij}-модуля, полагая

$$a \cdot b = \chi_{im}(a) b \quad (a \in \mathrm{D}(m, m),\ b \in D(i, j),\ i \leqslant m \leqslant j),$$

где $\chi_{im} = \chi_{ii+1} \ldots \chi_{m-1\, m}$ при $i < m$ и χ_{im} — тождественное отображение алгебры $\mathrm{D}(m, m)$ при $m = i$. В качестве K-модуля $S(i, j)$ морфизмов из объекта i в j возьмем модуль $K \otimes_{K_{ij}} D(i, j)$ при $i < j$ и некоторую изоморфную копию алгебры K при $i = j$. При этом условимся отождествлять пространство $\mathrm{D}(i, j)$ $(i < j)$ с подпространством $1 \otimes \mathrm{D}(i, j) \subseteq S(i, j)$.

Для элемента $a = \sum\limits_{\tau} \alpha_\tau \otimes a_\tau \in S(i, j)$ $(i < j)$ определяем отображение

$$l_{a,k}\colon\ K \times \mathrm{D}(j, k) \to S(i, k) \quad (i < j < k),$$

$$(\beta, b) \mapsto \sum_{\tau} \alpha_\tau \beta \otimes a_\tau b.$$

Ясно, что это отображение K-линейно по первому аргументу. Покажем, что оно K_{jk}-линейно по второму аргументу, при этом достаточно проверить $\mathrm{D}(p, p)$-линейность $(j \leqslant p \leqslant k)$ по второму аргументу отображения $l_{a,k}$. Пусть $\alpha \in \mathrm{D}(p, p)$. Используя равенство (5) и ассоциативность умножения морфизмов в категории D, получаем требуемое равенство:

$$l_{a,k}(\beta, \alpha\cdot b) = l_{a,k}(\beta, \chi_{jp}(\alpha)\, b) = \sum_\tau \alpha_\tau\beta \otimes a_\tau\chi_{jp}(\alpha)\, b =$$
$$= \sum_\tau \alpha_\tau\beta \otimes \chi_{ip}(\alpha)\, a_\tau b = \sum_\tau \alpha_\tau\beta\alpha \otimes a_\tau b = \alpha l_{a,k}(\beta, b).$$

Следовательно, отображение $l_{a,k}$ индуцирует K-линейное отображение

$$\bar{l}_{a,k}\colon\ S(j, k) \to S(i, k) \quad (\beta \otimes b \mapsto l_{a,k}(\beta, b)).$$

Теперь мы определим умножение морфизмов в унитреугольной категории S, полагая $ac = \bar{l}_{a,k}(c)$ для $a \in S(i, j)$, $c \in S(j, k)$ $(i < j < k)$. Очевидно, что это умножение ассоциативно и его ограничение на подкатегорию D совпадает с умножением в категории D. Предложение доказано.

§ 3. ТОЖДЕСТВО С ДИАГОНАЛЬЮ И ИМПЛИКАЦИЯ а) ⇒ б)

Диагональным отображением алгебры R назовем всякий гомоморфизм из алгебры R в ее центр.

Лемма 1. *Пусть $d_1, \ldots, d_n$ — диагональные отображения алгебры R такие, что в R*

$$(x_1 - d_1(x_1))(x_2 - d_2(x_2))\ldots(x_n - d_n(x_n)) = 0. \tag{6}$$

Тогда в R выполнено условие б) *при $I_i = \ker d_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

Доказательство. Из справедливости в алгебре R тождества (6) и равенств

$$xy - d_k(xy) = x(y - d_k(y)) + (x - d_k(x))\, d_k(y)$$

вытекает, что для любых $a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in R$

$$a_0(b_1 - d(b_1))\, a_1 \ldots (b_n - d_n(b_n))\, a_n = 0.$$

Рассмотрим n-моном $g = a_0x_1a_1\ldots x_na_n \in R\langle X\rangle$. Раскрытие скобок в предыдущем равенстве показывает, что для любой интерпретации $\xi\colon X \to R$

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n \\ k \geqslant 0}} (-1)^k \frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}\, \xi d_{i_1}(x_{i_1}\xi) \ldots d_{i_k}(x_{i_k}\xi) = 0,$$

где $b_i = x_i\xi$. Отсюда для всякого n-полинома $f \in R\langle X\rangle$ вытекает равенство

$$f\xi = -\sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n \\ x_{i_1} \in X^f_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in X^f_{i_k} \\ k \geqslant 1}} (-1)^k \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}\, \xi d_{i_1}(x_{i_1}\xi) \ldots d_{i_k}(x_{i_k}\xi).$$

Если выполнена посылка импликации (1), то все слагаемые в правой части последнего равенства равны нулю и, следовательно, $f\xi = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)} \in T_n(\mathrm{A})$, A — произвольное кольцо, $a^{(i)}_{ii} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $a^{(1)}a^{(2)} \cdot \ldots \cdot a^{(n)} = 0$.*

Доказательство. Индукцией по n легко показать, что для любой неубывающей последовательности $i_0, \ldots, i_n$ $(1 \leqslant i_0,\ i_n \leqslant n)$ целых чисел найдется число t $(1 \leqslant t \leqslant n)$ такое, что $i_{t-1} = i_t = t$. Теперь $a^{(1)}_{i_0i_1}a^{(2)}_{i_1i_2} \cdot \ldots \cdot a^{(n)}_{i_{n-1}i_n} = 0$, откуда и следует нужное равенство. Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает, что алгебра $T_n(K)$ (K-коммутативная алгебра) с естественными диагональными отображениями $d_1, \ldots, d_n$ $(d_i(r) = r_{ii}E_n$ — скалярная матрица) удовлетворяет тождеству (6), а значит, в силу леммы 1 всякая подалгебра $R \subseteq T_n(K)$ удовлетворяет условию б) (при этом в качестве I_i нужно взять идеал $R \cap \ker d_i = \{r \in R | r_{ii} = 0\}$). Отсюда непосредственно вытекает импликация а) $\Rightarrow$ б).

Так как б) $\Rightarrow$ в) тривиально, то остается доказать в) $\Rightarrow$ а).

§ 4. ИМПЛИКАЦИЯ в) $\Rightarrow$ а)

Пусть далее $I_1, \ldots, I_n$ — собственные идеалы алгебры R, каждый из которых содержит ее коммутаторный идеал. Обозначим через H алгебру многочленов $R[q]$, через V — алгебру многочленов от новых переменных $q_1, \ldots, q_n$ над коммутативной алгеброй $(R/I_1) \otimes \ldots \otimes (R/I_n)$, а через $\mathfrak{R}$ — алгебру $V \otimes H$, при этом условимся отождествлять алгебры V, H с их естественными образами в алгебре $\mathfrak{R}$.

На алгебре $\mathfrak{R}$ определим диагональные отображения $d_1, \ldots, d_n$, беря в качестве d_i эпиморфизм V-алгебр $\mathfrak{R} \to V$ такой, что $d_i(\mathrm{q}) = \mathrm{q}_i$, $d_i(r) = 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes (r + I_i) \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \subseteq V (r \in R)$. Положим $V_{ij} = d_i(H) \ldots d_j(H)$ при $i \leqslant j$ и $V_{ij} = \Phi$ при $i > j$. Через Δ_i обозначим V-линейное отображение на $\mathfrak{R}$, полагая $\Delta_i(r) = r - d_i(r)$. Отметим, что $d_i(d_j(r)) = d_j(r)$, $d_i(\Delta_j(r)) = d_i(r) - d_j(r)$ $(r \in \mathfrak{R})$.

Пусть $\mathrm{Q}_0 = H$, $\mathrm{Q}_i = H\Delta_1(H) \ldots \Delta_i(H)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — подпространства в $\mathfrak{R}$. Используя равенства

$$\Delta_m(xy) = x\Delta_m(y) + \Delta_m(x) d_m(y), \quad [x, \Delta_k(y)] = \Delta_k([x, y]),$$

легко устанавливаем, что пространство Q_i является идеалом подалгебры $V_{1i}H \subseteq \mathfrak{R}$. Отметим, что пространство $\Delta_i(H)$, а следовательно и пространство Q_i, содержится в ядре гомоморфизма d_i.

Учитывая, что $Q_i \subseteq Q_{i-1}V_{ii}$, подберем прямое дополнение $\mathfrak{R}_i$ к подпространству Q_i в $Q_{i-1}V_{ii}$. Положим $W_i = Q_i V_{j+1n}$, $N_j = \mathfrak{R}_j V_{j+1n}$ $(i = 0, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$. Ясно, что W_i — идеал алгебры $\mathfrak{R}$ и

$$\mathfrak{R} = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \ldots \supseteq W_n = Q_n, \quad d_i(W_i) = 0,$$
$$W_{i-1} = N_i \oplus \ldots \oplus N_n \oplus W_n \quad (i \geqslant 1).$$

Следуя конструкции, аналогичной одной из конструкций работы [5], каждому элементу $r \in \mathfrak{R}$ сопоставим линейные отображения $r_{ij}\colon N_i \to N_j$ $(i \leqslant j)$ (которые будем писать справа от аргумента), однозначно определенные условиями

$$hr \equiv hr_{ii} + \ldots + hr_{in} \mod W_n (h \in N_i).$$

Простая проверка показывает, что

$$(rs)_{ij} = \sum_{i \leqslant k \leqslant j} r_{ik} s_{kj}. \tag{7}$$

В частности, имеем гомоморфизм алгебр $\psi_i\colon \mathfrak{R} \to \mathrm{End}_\Phi N_i\, (r \mapsto r_{ii})$.

Лемма 3. $\ker \psi_i \cap V_{in} = 0$.

Доказательство. В самом деле, пусть $v_{ii} = 0$ для некоторого $v \in V_{in}$, тогда $W_{i-1}v \subseteq W_i$ и, следовательно, $d_i(W_{i-1})v = d_i(W_{i-1}v) = 0$. В частности, $0 = d_i(\Delta_1(q) \cdot \ldots \cdot \Delta_{i-1}(\mathrm{q}))v = (\mathrm{q}_i - \mathrm{q}_1) \ldots (\mathrm{q}_i - \mathrm{q}_{i-1})v$. Отсюда $v = 0$, так как элементы $q_i - q_j$ $(i \neq j)$ не являются делителями нуля в алгебре многочленов V. Лемма доказана.

Определим треугольную категорию D порядка n (над Φ), полагая

$$\mathrm{D}(i, i) = \psi_i(V_{in}),$$

$$\mathrm{D}(i, j) = \sum_{r \in R} \mathrm{D}(i, i) r_{ij} \mathrm{D}(j, j) + \sum_{i < k < j} \mathrm{D}(i, k) \mathrm{D}(k, j) (i < j),$$

где умножение морфизмов означает суперпозицию преобразований. Включение алгебр $V_{i+1n} \subseteq V_{in}$ индуцирует (в силу леммы 3) вложение алгебр $\chi_{ii+1}\colon \mathrm{D}(i+1, i+1) \to \mathrm{D}(i, i)$ $(v_{i+1,i+1} \mapsto v_{ii},\ v \in V_{i+1n})$.

Лемма 4. *Для любых* $\alpha \in \mathrm{D}(i, i+1)$, $\beta \in \mathrm{D}(i+1, i+1)$

$$\alpha\beta = \chi_{ii+1}(\beta)\alpha.$$

Доказательство. Положим $j = i+1$. Понятно, что достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha = r_{ij}$, $\beta = v_{jj}$ $(r \in R,\ v \in V_{jn})$. Учитывая, что пространство $N_i = \mathfrak{R}_i V_{jn}$ выдерживает умножение на элементы из V_{jn}, получаем $hv_{ii} = hv$, $(hv)r_{ii} = v(hr_{ii})$ для произвольного элемента $h \in N_i$. Поэтому $hv_{ii}r_{ij} = (hv)r_{ij} \equiv (vh)r - (vh)r_{ii} = vhr - v(hr_{ii}) = (hr - hr_{ii})v \equiv \equiv hr_{ij}v \equiv hr_{ij}v_{jj} \bmod W_j$, откуда $hv_{ii}r_{ij} = hr_{ij}v_{jj}$, $v_{ii}r_{ij} = r_{ij}v_{jj}$, т. е. $\chi_{ij}(\beta)\alpha = \alpha\beta$. Лемма доказана.

Отметим, что из включения $N_i(r - d_i(r)) \subseteq W_i$ $(r \in \mathfrak{R})$ вытекает равенство отображений $r_{ii} = (d_i(r))_{ii}$. Поэтому $r_{ii} \in D(i, i)$ при $r \in R$.

В силу (7) отображение φ: $R \to T_n(\mathrm{D})$ $(r \mapsto (r_{ij})_{i \leqslant j})$ является гомоморфизмом алгебр, причем

$$r_{ii} = 0 \Leftrightarrow (d_i(r))_{ii} = 0 \Leftrightarrow d_i(r) = 0 \Leftrightarrow r \in I_i \quad (r \in R)$$

(средняя эквивалентность вытекает из леммы 3).

Если $r \in R \cap W_n$, то $N_i r \subseteq W_n \subseteq W_j$ при $i \leqslant j$, откуда $r_{ij} = 0$ и $\varphi(r) = 0$. Обратно, если $\varphi(r) = 0$, то $r_{in} = 0$, откуда $N_i r \subseteq W_n$ и, следовательно, $\mathfrak{R}r \subseteq W_n$. В частности, $r \in W_n \cap \mathfrak{R}$. Таким образом, $\ker \varphi R \cap W_n = = R \cap \mathrm{Q}_n$.

Очевидно, что пространство Q_n содержится в сумме пространства $\mathcal{F} = R\Delta_1(R)\ldots\Delta_n(R)$ и идеала $\mathfrak{R}'$ алгебры $\mathfrak{R}$, порожденного переменными $q, q_1, \ldots, q_n$. Поэтому, полагая $\mathfrak{R}_0 = \mathcal{F} + R$, получаем

$$R \cap Q_n \subseteq R \cap (\mathfrak{R}_0 \cap (\mathcal{F} + \mathfrak{R}')) = R \cap (\mathcal{F} + \mathfrak{R}_0 \cap \mathfrak{R}') = R \cap \mathcal{F} \subseteq R \cap Q_n.$$

Таким образом, $\ker \varphi = R \cap \mathcal{F}$ и импликация в) $\Rightarrow$ а) вытекает из леммы 4, предложения 1 и следующей леммы.

Лемма 5. *Пусть алгебра R удовлетворяет условию* в), *тогда* $R \cap \cap \mathcal{F} = 0$.

Доказательство. Выберем базис $\mathfrak{M}_i$ алгебры R по модулю $I_i + + \Phi \cdot 1_R$. Ясно, что произвольный элемент λ из $\mathcal{F}$ представим в виде

$$\lambda = \sum_{t=1}^{m} a_t \Delta_1(b_{1t}) \ldots \Delta_n(b_{nt}) \, (a_t \in R,\ b_{it} \in \mathfrak{M}_i \cup I_i), \tag{8}$$

при этом будем считать, что число m минимально.

Пусть, кроме того, $\lambda \in R$. Покажем, что для любого $t = 1, \ldots, m$ один из элементов $d_1(b_{1t}), \ldots, d_n(b_{nt})$ равен нулю. Допустим противное. Тогда для некоторого $p \in \{1, \ldots, m\}$ элементы $b_{1p}, \ldots, b_{np}$ лежат соответственно в базисах $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$. Для любого $t \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{p\}$ ввиду минимальности m набор $(b_{1t}, \ldots, b_{nt})$ отличен от набора $(b_{1p}, \ldots, b_{np})$. Кроме того, $a_p \neq 0$, элемент λ лежит в подалгебре $Rd_1(R)\ldots d_n(R) \subseteq R$, которую можно рассматривать как свободный левый R-модуль с базисом

$$d_1(r_1)d_2(r_2)\ldots d_n(r_n) \, (r_i \in \mathfrak{M}_i \cup \{1\}). \tag{9}$$

Элемент λ имеет в разложении по этому базису коэффициент $a_p \neq 0$ при базисном элементе $d_1(b_{1p})\ldots d_n(b_{np})$, что противоречит включению $\lambda \in R$. Тем самым наше утверждение об элементах $d_i(b_{it})$ доказано.

Пользуясь теперь равенствами $[a, \Delta_k(b)] = \Delta_k([a, b])$, $a\Delta_k(c) = = \Delta_k(ac)$ (где $a, b, c \in R$ и $d_k(c) = 0$, т. е. $c \in I_k$), получим, что существует представление элемента λ в виде (8), в котором $a_t \in \Phi$ (при этом число m уже не будет, вообще говоря, минимальным).

Итак, пусть далее элемент λ представлен в виде (8), в котором $a_t \in \Phi$. Рассмотрим n-мономы $g_t = a_t x_{1t} \ldots x_{nt}$ $(t = 1, \ldots, m)$ над Φ такие, что переменные x_{it} и x_{jp} из X совпадают тогда и только тогда, когда $i = j$ и $b_{it} = b_{jp}$. Через ξ: $X \to R$ обозначим интерпретацию, которая отлична от нуля только на переменных вида x_{it} $(i = 1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots \ldots, m)$, причем $x_{it}\xi = b_{it}$.

Обозначим через f n-полином $g_1+\ldots+g_m$ над Φ и для краткости положим $\mathrm{d}(y_{i_1}\ldots y_{i_k})\xi = d_{i_1}(y_{i_1}\xi)\ldots d_{i_k}(y_{i_k}\xi)$ для любых $y_{i_1}\in X^f_{i_1},\ldots,y_{i_k}\in X^f_{i_k}$, $\mathrm{d}(1)\xi=1$. Поскольку

$$a_t\Delta_1(b_{1t})\ldots\Delta_n(b_{nt}) = \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ 1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}} (-1)^k \frac{\partial^k g_t}{\partial x_{i_1 t}\ldots\partial x_{i_k t}}\xi \mathrm{d}(x_{i_1 t}\ldots x_{i_k t})\xi,$$

то

$$\lambda = \sum_{w\in\mathscr{X}(f,\xi,I)} (-1)^{|w|}\frac{\partial f}{\partial w}\xi\mathrm{d}(w)\xi \tag{10}$$

($|w|$ — длина монома w).

Так как сужение интерпретации ξ на множество X^f_i есть инъективное отображение в $\mathfrak{M}_i\cup I_i$, то $\mathrm{d}(w)\xi$ ($w\in\mathscr{X}(f,\xi,I)$) — различные элементы базиса (9). Поэтому из (10) вытекает, что $\lambda=f\xi$, $(\partial f/\partial w)\xi=0$ для любого непустого монома w из $\mathscr{X}(f,\xi,I)$. Из условия в) получаем, что $\lambda=f\xi=0$. Лемма 5 доказана. Тем самым доказана теорема 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ананьин А. З.** Представимые многообразия алгебр/Ред. журн. Сиб. мат. журн.— Новосибирск, 1986.— Деп. в ВИНИТИ 13.05.86, № 3471.
2. **Львов И. В.** О представлении нильпотентных алгебр матрицами // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 5.— С. 158—161.
3. **Нестеренко Н. Г.** Представление алгебр треугольными матрицами // Алгебра и логика.— 1985.— Т. 24, № 1.— С. 65—86.
4. **Bergman G. M.** Embedding rings in completed graded rings. 1. Triangular embeddings // J. Algebra.— 1983.— V. 84, N 1.— P. 14—24.
5. **Bergman G. M., Vovsi S. M.** Embedding rings in completed graded rings. 2. Algebras over a field // J. Algebra.— 1983.— V. 84, N 1.— P. 25—41.
6. **Lewin J.** A matrix representation for associative algebras. I, II // Trans. Amer. Math. Soc.— 1974.— V. 188.— P. 293—317.

С. В. ПЧЕЛИНЦЕВ

ТОЖДЕСТВА СВОБОДНОЙ (—1,1)-АЛГЕБРЫ РАНГА 3

Известно [1, 2], что тождества свободных $(-1, 1)$-алгебр зависят от числа свободных порождающих (ранга алгебры). Поскольку всякая свободная $(-1, 1)$-алгебра ранга n порождает конечнобазируемое многообразие $\mathfrak{M}_n$ [2], то для каждого числа n представляет интерес задача отыскания какой-либо определяющей системы тождеств (базиса тождеств) многообразия $\mathfrak{M}_n$. В [3] найден базис тождеств многообразия $\mathfrak{M}_2$. Напомним, что $\mathfrak{M}_2$ выделяется из многообразия всех $(-1, 1)$-алгебр следующими тремя тождествами:

$$[(x,x,y),z]=0,\quad ((x,x,y),z,t)=0,\quad \sum_{\sigma\in G_0}(x,y_{1\sigma},[y_{2\sigma},y_{3\sigma}])=0,$$

где G_0 — группа четных подстановок третьей степени.

Данная работа посвящена построению базиса тождеств многообразия $\mathfrak{M}_3$. Доказано, что система тождеств

$$\left.\begin{aligned}&(x,y,y)=0, && (\mathrm{T}.1)\\ &\sum_{\sigma\in G_0}(x_{1\sigma},x_{2\sigma},x_{3\sigma})=0, && (\mathrm{T}.2)\end{aligned}\right\}\ \text{определяющие тождества } (-1,\ 1)\text{-алгебр}$$

$$\sum_{\sigma\in G_0}\left\{(x,x,y_{1\sigma})[y_{2\sigma},y_{3\sigma}]+\frac{3}{2}(x,(x,y_{1\sigma},y_{2\sigma}),y_{3\sigma})\right\}=0, \tag{T.3}$$