Обозначим через f n-полином $g_1+\ldots+g_m$ над Φ и для краткости положим $\mathrm{d}(y_{i_1}\ldots y_{i_k})\xi=d_{i_1}(y_{i_1}\xi)\ldots d_{i_k}(y_{i_k}\xi)$ для любых $y_{i_1}\in X^f_{i_1},\ldots$ $\ldots, y_{i_k}\in X^f_{i_k}$, $\mathrm{d}(1)\xi=1$. Поскольку

$$a_t\Delta_1(b_{1t})\ldots\Delta_n(b_{nt})=\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ 1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}}(-1)^k\frac{\partial^k g_t}{\partial x_{i_1t}\ldots\partial x_{i_kt}}\xi\mathrm{d}(x_{i_1t}\ldots x_{i_kt})\xi,$$

то

$$\lambda=\sum_{w\in\mathscr{X}(f,\xi,I)}(-1)^{|w|}\frac{\partial f}{\partial w}\xi\mathrm{d}(w)\xi \qquad (10)$$

($|w|$ — длина монома w).

Так как сужение интерпретации ξ на множество X^f_i есть инъективное отображение в $\mathfrak{M}_i\cup I_i$, то $\mathrm{d}(w)\xi$ $(w\in\mathscr{X}(f,\xi,I))$ — различные элементы базиса (9). Поэтому из (10) вытекает, что $\lambda=f\xi$, $(\partial f/\partial w)\xi=0$ для любого непустого монома w из $\mathscr{X}(f,\xi,I)$. Из условия в) получаем, что $\lambda=f\xi=0$. Лемма 5 доказана. Тем самым доказана теорема 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ананьин А. З.** Представимые многообразия алгебр/Ред. журн. Сиб. мат. журн.— Новосибирск, 1986.— Деп. в ВИНИТИ 13.05.86, № 3471.
2. **Львов И. В.** О представлении нильпотентных алгебр матрицами // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 5.— С. 158—161.
3. **Нестеренко Н. Г.** Представление алгебр треугольными матрицами // Алгебра и логика.— 1985.— Т. 24, № 1.— С. 65—86.
4. **Bergman G. M.** Embedding rings in completed graded rings. 1. Triangular embeddings // J. Algebra.— 1983.— V. 84, N 1.— P. 14—24.
5. **Bergman G. M., Vovsi S. M.** Embedding rings in completed graded rings. 2. Algebras over a field // J. Algebra.— 1983.— V. 84, N 1.— P. 25—41.
6. **Lewin J.** A matrix representation for associative algebras. I, II // Trans. Amer. Math. Soc.— 1974.— V. 188.— P. 293—317.

С. В. ПЧЕЛИНЦЕВ

ТОЖДЕСТВА СВОБОДНОЙ (—1,1)-АЛГЕБРЫ РАНГА 3

Известно [1, 2], что тождества свободных $(-1, 1)$-алгебр зависят от числа свободных порождающих (ранга алгебры). Поскольку всякая свободная $(-1, 1)$-алгебра ранга n порождает конечнобазируемое многообразие $\mathfrak{M}_n$ [2], то для каждого числа n представляет интерес задача отыскания какой-либо определяющей системы тождеств (базиса тождеств) многообразия $\mathfrak{M}_n$. В [3] найден базис тождеств многообразия $\mathfrak{M}_2$. Напомним, что $\mathfrak{M}_2$ выделяется из многообразия всех $(-1, 1)$-алгебр следующими тремя тождествами:

$$[(x,x,y),z]=0,\quad ((x,x,y),z,t)=0,\quad \sum_{\sigma\in G_0}(x,y_{1\sigma},[y_{2\sigma},y_{3\sigma}])=0,$$

где G_0 — группа четных подстановок третьей степени.

Данная работа посвящена построению базиса тождеств многообразия $\mathfrak{M}_3$. Доказано, что система тождеств

$$\left.\begin{array}{ll}(x,y,y)=0, & (\text{Т.1})\\ \sum_{\sigma\in G_0}(x_{1\sigma},x_{2\sigma},x_{3\sigma})=0, & (\text{Т.2})\end{array}\right\}\ \text{определяющие тождества } (-1,\ 1)\text{-алгебр}$$

$$\sum_{\sigma\in G_0}\left\{(x,x,y_{1\sigma})[y_{2\sigma},y_{3\sigma}]+\frac{3}{2}(x,(x,y_{1\sigma},y_{2\sigma}),y_{3\sigma})\right\}=0, \qquad (\text{Т.3})$$

$$(([x, y], z, t)+$$
$$+([z, t], x, y), r, s)=0, \quad (\mathrm{T}.4)$$
$$([x, y][z, t], r, s)=0, \quad (\mathrm{T}.5)$$
$$[(x, y, [z, t])\cdot r, s]=0, \quad (\mathrm{T}.6)$$
$$\sum_{\sigma\in G_0} (([r, x_{1\sigma}], s, x_{2\sigma}), t, x_{3\sigma}) = 0, \quad (\mathrm{T}.7)$$
$$(x, x, y)(z, z, t) = \frac{3}{8}(([x, z], x, y), z, t) \quad (\mathrm{T}.8)$$

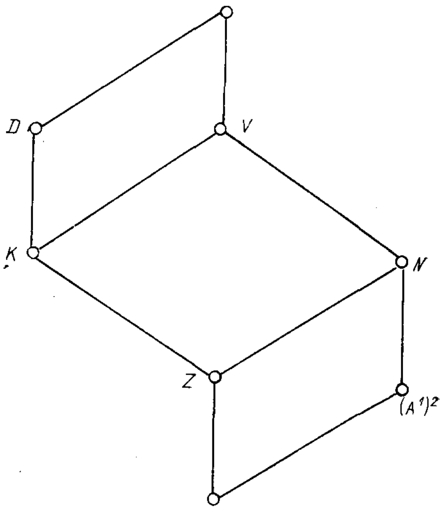

Рис. 1

является базисом тождеств свободной $(-1, 1)$-алгебры A ранга 3 над полем характеристики нуль. Попутно удается получить описание основных центральных подмножеств алгебры A. Так, например, центр $Z(A)$ как T-идеал алгебры A порождается полиномом $(x, y, [z, t])+(z, t, [x, y])$ и совпадает с аннулятором коммутанта, т. е. $Z(A)=\operatorname{Ann} A'$, а коммутативный центр $K(A)$ как T-идеал порождается полиномом $(x, y, [z, t])$ и совпадает с пересечением ассоциаторного идеала и его аннулятора, т. е. $K(A)=D(A)\cap\operatorname{Ann} D(A)$. Другая характеризация центров содержится в следующем утверждении: решетка всех T-идеалов алгебры A содержит подрешетку вида, указанного на рис. 1.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОСНОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА

Пусть Φ — фиксированное поле характеристики нуль. Всюду в работе под *алгеброй* мы понимаем алгебру над Φ. Хорошо известно, что во всякой правоальтернативной алгебре справедливы тождества:

$$(xy, z, t)+(x, y, [z, t])=x(y, z, t)+(x, z, t)y, \tag{1}$$

$$(x, yz, t) = (x, y, t)z + (x, z, t)y + \frac{1}{2}\{(x, y, [t, z]) + (x, z, [t, y]) + (x, t, [z, y])\}, \tag{2}$$

$$(x, y^2, t)=2(x, y, t)y+(x, y, [t, y]), \tag{2'}$$

$$((z, x, y), x, y)+(z, x, y)[x, y]=0. \tag{3}$$

Напомним, что правоальтернативная алгебра называется $(-1, 1)$-*алгеброй*, если в ней выполнено тождество

$$(x, y, z)+(y, z, x)+(z, x, y)=0. \tag{*}$$

Нам потребуются выполняющиеся во всякой $(-1, 1)$-алгебре следующие тождества:

$$([x, y], z, t)-([z, t], x, y)=[x, (y, z, t)]+[(x, z, t), y], \tag{4}$$

$$([x, y], x, z) - ([x, z], x, y) = \frac{4}{3}[z, (x, x, y)] = 2[x, (x, y, z)] = -4[x, (y, z, x)], \tag{5}$$

$$[xy, z]=x[y, z]+[x, z]y+(x, y, z)+(y, x, z), \tag{6}$$

$$[xy, z]+[yz, x]+[zx, y]=0, \tag{7}$$

$$[[x, y], z]+[[y, z], x]+[[z, x], y]=0, \tag{8}$$

$$[(x,\ x,\ y)z,\ y]=[z(x,\ x,\ y),\ y]=0, \tag{9}$$

$$[(x,\ x,\ y),\ [z,\ t]]=0, \tag{10}$$

$$(x,\ [y,\ z],\ [u,\ v])=0, \tag{11}$$

$$((x,\ y,\ z),\ a,\ b)=((x,\ a,\ b),\ y,\ z)+(x,\ (y,\ a,\ b),\ z)+ \\ +(x,\ y,\ (z,\ a,\ b)), \tag{12}$$

$$(x, x, (x, y, z)) = -(y, x, (x, x, z)) = -2((x, x, z), x, y) = \\ = -2(x, y, (x, x, z)) = -2(x, x, (y, z, x)) = -\frac{2}{3}(x, x, y)[x, z], \tag{13}$$

$$\begin{gathered} ((x,\ x,\ y),\ z,\ y)=\bar{a}+2\bar{a}',\ ((x,\ y,\ z),\ x,\ y)=\bar{a}', \\ (y,\ x,\ (x,\ y,\ z))=(x,\ y,\ (y,\ x,\ z))=\bar{a}+\bar{a}', \\ (z,\ y,\ (x,\ x,\ y))=\bar{a}-\bar{a}',\ (y,\ y,\ (x,\ x,\ z))=-3\bar{a}, \end{gathered} \tag{14}$$

где $\bar{a}=(x,\ y,\ (x,\ y,\ z)),\ \bar{a}'=(y,\ x,\ (y,\ x,\ z))$,

$$([x,\ y],\ x,\ z)[x,\ y]=0. \tag{15}$$

Пусть A — алгебра типа $(-1,\ 1)$. Введем обозначения:

$A^{\#}$ — алгебра, полученная из A внешним присоединением единицы;

A' — коммутант алгебры A, т. е. идеал алгебры A, порожденный коммутаторами;

A'' — идеал алгебры A, порожденный коммутаторами вида $[[x,\ y],\ z]$;

$D(A)$ — ассоциаторный идеал алгебры A. Известно, что идеал $D(A)$ линейно порождается элементами $(x,\ x,\ y)$.

Через $K(A),\ N(A),\ V(A),\ Z(A)$ обозначаются коммутативный, ассоциативный, левоальтернативный и полный центр алгебры A соответственно. Если $S(A)$ — один из центров алгебры A, то $S^*(A)$ обозначает наибольший по включению идеал алгебры A, содержащийся в центре $S(A)$. Если ясно, о какой алгебре A идет речь, то вместо $S(A)$ мы будем писать S.

Известно, что

$$S^*=\{s\in S\mid s\cdot A\subseteq S\},\ \text{если}\ S\in\{K,\ N\};\quad N^*=N\cap\operatorname{Ann}D;$$

$$Z^*=Z\cap\operatorname{Ann}A'=K^*\cap\operatorname{Ann}A'=N\cap K^*;\quad K+N\subseteq V.$$

Далее, если $k\in K,\ x,\ y\in A$, то

$$(k,\ x,\ y)+2(x,\ y,\ k)=0,\quad (K,\ K,\ A)=0, \tag{16}$$

$$[kx,\ y]=k[x,y]+\frac{3}{2}(k,x,y), \tag{17}$$

$$(A,\ A,\ K)\subseteq K,\quad (K,\ [A,\ A],\ A)=0. \tag{18}$$

Кроме того, справедливы включения

$$A''\subseteq\operatorname{Ann}D, \tag{19}$$

$$(x,\ x,\ [y,\ z]);\quad ([x,\ y],\ [z,\ t],\ u);\quad (x,\ y,\ [[z,\ t],\ u])\in Z^*, \tag{20}$$

$$[[x,\ y]^2,\ z];\quad [[x,\ y],\ [z,\ t]]\in N^*,\quad A'\cdot A''+A''\cdot A'\subseteq N^*, \tag{21}$$

$$[x,\ y]\cdot[z,\ t]\in V, \tag{22}$$

$$[D,\ A]\subseteq(A,\ A,\ [A,\ A])\subseteq K. \tag{23}$$

Доказательство приведенных утверждений можно найти в работах [2, 4—6].

Далее, справедлива

Лемма (см. [7]). *Во всякой $(-1, 1)$-алгебре справедливы тождества*

$$\sum_\sigma [(t, x_{1\sigma}, [x_{2\sigma}, x_{3\sigma}]) + (x_{1\sigma}, t, [x_{2\sigma}, x_{3\sigma}])\} = 0, \tag{24}$$

$$\sum_\sigma (t, x_{1\sigma}, [x_{2\sigma}, x_{3\sigma}, y_1, \ldots, y_n]) = 0, \tag{25}$$

$$\sum_\sigma (x_{1\sigma}, t, [x_{2\sigma}, x_{3\sigma}, y_1, \ldots, y_n]) = 0, \tag{26}$$

где $n \geqslant 1$, σ пробегает группу G_0 четных подстановок третьей степени; функция

$$(a, x_1, [b, c, x_2, \ldots, x_n]) \tag{27}$$

является симметрической относительно $x_1, \ldots, x_n$.

Отсюда при $n = 2$:

$$(x, a, [w, b]) = (x, b, [w, a]), \quad \text{где } w = [r, s]. \tag{28}$$

§ 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $X_0 = \{x, y, z\}$. Если не оговорено противное, то A означает свободную $(-1, 1)$-алгебру с множеством X_0 свободных порождающих. Если X, Y — подмножества A, то X^Δ обозначает идеал алгебры A, порожденный множеством X; $(X, Y) = (X, Y)_1 = X \cdot Y + Y \cdot X$, $(X, Y)_{n+1} = ((X, Y)_n, Y)$.

Лемма 1. (а) $(D, A') \subseteq (A, A, D)^\Delta$,

(б) $(x, y, [x, y])$, $([x, y], x, y) \in Z^*(A)$,

(в) $(A')^2 + (A, A, D) \subseteq N^*(A)$.

Доказательство. (а) Считая без ограничения общности $(A, A, D) = 0$, в силу (2) имеем $D^2 = 0$. Положив $p = (x, x, y)$, на основании (6) и (9) получаем $p[y, z] = [y, pz] + (p, z, y) + (z, p, y) = 0$, аналогично $p[x, z] = 0$, т. е. $p[X_0, X_0] = 0$. Учитывая, что $A' = [X_0, X_0] \cdot A^\# + A'' + D(A)$, имеем $p \cdot A' = 0$. Аналогично $A' \cdot p = 0$.

(б) Достаточно воспользоваться [2, лемма 1].

(в) Из (15) и (20) имеем $(x, z, [x, y])[x, y] = 0$. Применяя (2′) и (11), получаем $(x, z, [x, y]^2) = 0$. Индукцией по $\deg t$ на основании (1), (21) и (22) имеем $(t, z, [x, y]^2) = 0$. Следовательно, $[x, y]^2 \in N(A)$.

Докажем теперь, что $[x, y]^2 \in \operatorname{Ann} D$. В силу (19) и (17) последовательно получаем $[[x, y], z] \in \operatorname{Ann} D$ и $[x, y]^2 + \frac{3}{2}([x, y], x, y) \in \operatorname{Ann} D$, откуда ввиду (б)

$$[x, y]^2 \in N(A) \cap \operatorname{Ann} D = N^*(A). \tag{29}$$

На основании (29), (21) и (20) в фактор-алгебре $B = A/_{N^*(A)}$ выполняются тождества

$$[x, y]^2 = 0, \ ([x, y], [z, t], u) = 0,$$
$$[[x, y], [z, t]] = 0, \ B' \cdot B'' + B'' \cdot B' = 0. \tag{30}$$

Для доказательства (в) надо проверить, что $(B')^2 + D(D) \subseteq N(B)$. Покажем сначала, что $D(B) \subseteq N(B)$. Из (30) имеем

$$[x, y][x, z] = 0, \tag{31}$$

значит, на основании (7) $[a, b, c][x, y] = 0$ для любых $a, b, c \in X_0$. Так как $D(B) \subseteq B'$, то ассоциатор (a, b, c) представим в виде линейной комбинации элементов вида $[uv, w]$, $u \cdot [v, w]$ того же состава, что и ассоциатор. Следовательно,

$$(a, b, c)[x, y] = 0. \tag{32}$$

Отсюда в силу (13) $(x, x, (x, y, z)) = 0$. Применив линеаризацию $x \to y$ этого тождества, имеем (ввиду (14)) $\bar{a} + (\bar{a} + \bar{a}') - 3\bar{a}' = 0$, т. е.

$\bar{a}=\bar{a}'$. Далее, линеаризуя подстановкой $x\to z$ тождество $((x, x, y), x, y)=0$, получаем $((x, x, y), z, y)+((z, x, y), x, y)+((x, z, y), x, y)=0$. Применяя теперь (32), (3) и (14) имеем $\bar{a}+2\bar{a}'=((x, x, y), z, y)=-((x, z, y), x, y)=\bar{a}'$, т. е. $\bar{a}+\bar{a}'=0$. Следовательно, $\bar{a}=\bar{a}'=0$. Отсюда в силу (14)

$$(x, x, (y, y, z))=0, \tag{33}$$

$$((x, x, y), y, z)=0. \tag{34}$$

Линеаризация $y\to[u, v]$ последнего тождества на основании (20) дает

$$(p, [u, v], z)=0, \text{ где } p=(x, x, y). \tag{35}$$

Из (2) вытекает, что (p, B, B) содержится в идеале, порожденном множеством $(p, X_0, X_0)\cup(p, [B, B], B)$, значит, ввиду (34) и (35) имеем $p\in N_l(B)$. Так как в силу (33) $p\in V(B)$, то $p\in N(B)=N_l(B)\cap V(B)$, т. е.

$$D(B)\subseteq N(B). \tag{36}$$

Наконец, учитывая равенство $B'=[X_0, X_0]\cdot B^{\#}+B''+D(B)$, на основании (31), (19), (36) и (а) имеем

$$(B')^2\subseteq(D, B')\subseteq(B, B, D)^{\Delta}=0.$$

Лемма 2. $(A, A, D)\subseteq Z^*(A)$.

Доказательство. Напомним, что если $n\in N(A)$, то отображение $a\mapsto[n, a]$ является диференцированием произвольной алгебры A. Следовательно, $n\in Z(A)\Leftrightarrow n\in N(A)$ и $[n, X_0]=0$. В силу [8, лемма 1] $[(x, x, z), (y, y, z)]=0$, $[(x, x, y), (y, y, z)]=0$. Так как функция $[(x, x, y), z]$ кососимметрична по y, z, то $[(x, x, (y, y, z)), z]=0$, $[(x, x, (y, y, z)), y]=0$. Полагая $h=(x, x, (y, y, z))$, имеем $[h, X_0]=0$, откуда в силу леммы 1(в) $h\in Z(A)$.

Покажем теперь, что $h\in K^*(A)$, т. е. $h\cdot A\subseteq K(A)$. Так как $h\in N^*(A)$, то ввиду (7)

$$[h\cdot A, A]\subseteq[h\cdot A, X_0]^{\Delta}\subseteq[h\cdot X_0, A]^{\Delta}\subseteq[h\cdot X_0, X_0]^{\Delta}\subseteq$$
$$\subseteq\{[hx_i, x_j]|x_i, x_j\in X_0\}^{\Delta}.$$

Учитывая вновь (7), имеем $[ht, t]=(1/2)[h, t^2]=0$. Далее, поскольку $(x^2, x, y)=(x, x^2, y)$, то линеаризации $x\to x^2$ тождества $[h, t]=0$ дают $[(x^2, x, q), t]=0$, где $q=(y, y, z)$, $[(x, x, (y^2, y, z)), t]=0$. Отсюда, учитывая (1), (2) и (23), получаем

$$h\cdot x=(x, x, q)x=(1/2)(x^2, x, q)$$

и по модулю $D^2+K(A)$

$$h\cdot y=(x, x, q)y\equiv(x, x, qy)\equiv(1/2)(x, x, (y^2, y, z)).$$

Так как $[h, t]=0$, то $[D, D]=0$, и в силу (7) $D^2\subseteq K(A)$, поэтому hx, $hy\in K(A)$ и $h\in K^*(A)$, т. е. $h\in Z^*(A)$. Тогда в фактор-алгебре $B={}^{A}/_{Z^*(A)}$ выполняется тождество $(x, x, (y, y, z))=0$. Следовательно, в B ввиду (14) $\bar{a}=\bar{a}'=0$, в частности, в B выполняются тождества (33) и (34), а потому и (36), т. е. $(B, B, D(B))=0$. Откуда и вытекает включение $(A, A, D)\subseteq Z^*(A)$.

Лемма 3. (а) $(D, D, A)=0$;

(б) $(D, A')_2=0$ (в частности, $(A', A', D)=0$).

Доказательство. Пункт (а) следует немедленно из (12) и леммы 1; (б) вытекает из лемм 1 и 2.

Лемма 4. $(A, A, A')\subseteq K^*(A)$.

Доказательство. Пусть $H_0\subseteq H=(A, A, [A, A])$. Ввиду леммы 2 и включения $H\subseteq K(A)$: $H_0^{\Delta}\subseteq H_0\cdot A^{\#}+Z^*(A)$. Покажем, что $H\subseteq K^*(A)$. Достаточно проверить, что $[(([x, y], z, r)s, t]=0$ для любых

$r, s, t \in A$. Индукцией по $\deg r$ имеем на основании (2) и (20)

$$([x, y], z, r) \in \{([x, y], z, w) \mid w \in \{x, y\}\} \cdot A^{\#} + Z^*(A).$$

Далее, учитывая (7), получаем

$$[([x, y], z, x) \cdot u, t] \in [\{([x, y], z, x) \cdot u\}^{\Delta}, X_0] \subseteq$$
$$\subseteq [([x, y], z, x) \cdot A, X_0] \subseteq [([x, y], z, x) \cdot X_0, A].$$

Ввиду леммы 1(б) элементы y, z в выражении $[([x, y], z, x) \cdot X_0, v]$ равноправны. Поэтому достаточно показать, что $([x, y], z, x)x$, $([x, y], z, x)z \in K(A)$. Однако последнее следует немедленно из правого тождества Муфанг и (23). Итак, $H \subseteq K^*(A)$. Наконец, согласно лемме 2

$(A, A, A') \subseteq H^{\Delta} + (A, A, D)^{\Delta} \subseteq$ [в силу (2) и леммы 1(а)] $\subseteq K^*(A)$.

Лемма 5. (а) $(A, A, A') \subseteq \operatorname{Ann} D$;

(б) $D(A') = 0$.

Доказательство. (а) Прежде всего, из тождества (6) и лемм 2, 3 вытекает

$$D \cdot [A, D] \subseteq [D, D] \cdot A^{\#} + (D, A, D) + (A, D, D) = 0.$$

Пусть $\bar{A} = {}^{A}/_{\operatorname{Ann} D}$. В силу (4) в алгебре $\bar{A}$

$$([x, y], z, t) = ([z, t], x, y).$$

Кроме того, на основании (20) и леммы 1(б) в алгебре $\bar{A}$ справедливы также тождества

$$(x, x, [y, z]) = 0, \ ([x, y], x, y) = 0, \ ([x, y], [z, t], u) = 0.$$

Следовательно, в $\bar{A}$ имеем $([x, y], x, z) = 0$. Индукцией по $\deg t$ на основании (2) $([x, y], z, t) = 0$. Далее, ввиду (*)

$$2(x, y, [z, t]) = (x, y, [z, t]) - (y, x, [z, t]) =$$
$$= (x, y, [z, t]) + (y, [z, t], x) + ([z, t], x, y) = 0.$$

Поскольку $A' = [A, A] \cdot A^{\#}$ [9, лемма 15], то

$$(A, A, A') = (A, A, [A, A] \cdot A^{\#}) \subseteq D \cdot A' + (A, A, [A, A])A^{\#} \subseteq$$
$$\subseteq [\text{ввиду } (2)] \subseteq (A, A, D)^{\Delta} + \operatorname{Ann} D \subseteq$$
$$\subseteq [\text{ввиду леммы } 1(\text{а})] \subseteq N^*(A) + \operatorname{Ann} D \subseteq \operatorname{Ann} D.$$

(б) Учитывая (1), (2), (4), (11), (20), леммы 1(в), 3(б), а также пункт (а), получаем последовательно

$$([A, A], A', A') \subseteq ((A')^2, A, A) + [A, (A, A', A')] = 0,$$
$$(A', A', A') = ([A, A] \cdot A^{\#}, A', A') \subseteq [A, A](A, A', A') =$$
$$= [A, A] \cdot (A, [A, A] \cdot A^{\#}, A') \subseteq [A, A] \cdot (A, [A, A], A')A^{\#} +$$
$$+ (D, A')_2 \subseteq [A, A] \cdot (A, [A, A], [A, A] \cdot A^{\#})A^{\#} \subseteq (D, A')_2 = 0.$$

Лемма доказана.

Закончим этот параграф теоремой, устанавливающей определенную «двойственность» между $D(A)$ и A'. Кроме того, из нее следует описание ассоциативных идеалов алгебры A.

Теорема 1. *Пусть A — свободная $(-1, 1)$-алгебра ранга 3. Тогда*

а) *ассоциаторный идеал является наибольшим по включению коммутативным идеалом алгебры A;*

б) *коммутант является наибольшим по включению ассоциативным идеалом в A.*

Доказательство. Первое утверждение принадлежит Р. Э. Роомельди и содержится в его диссертации [10]. Докажем второе утверждение. Пусть I — ассоциативный идеал алгебры A такой, что $I \not\subseteq A'$. Так как A/A' — алгебра коммутативно-ассоциативных многочленов, то ни одна из разрешимых степеней идеала I также не содержится в A', в частности, $I_{(4)} \not\subseteq A'$. Из $D(I)=0$ легко следует $(A, A, I_{(4)})=0$. Следовательно, $D \cdot I_{(4)}=0$, откуда $(x, x, (y, y, z)) \cdot I_{(4)}=0$. Так как в силу леммы 2 $(x, x, (y, y, z)) \in \operatorname{Ann} A'$, то существует ненулевой ассоциативно-коммутативный многочлен $g(x, y, z)$ такой, что $(x, x, (y, y, z)) \times \times g(x, y, z)=0$. Применяя необходимое число раз частные производные вида Δ_w, где $w \in X_0$, получаем $(x, x, (y, y, z))=0$. Отсюда следует, что во всякой $(-1, 1)$-алгебре B: $D(B) \subseteq V(B)$. Следовательно, $(D(B))^2=0$, что противоречит работе [11]. Теорема доказана.

Отметим, что для свободной $(-1, 1)$-алгебры ранга 4 эта теорема не выполняется, поскольку ввиду [2, § 1, лемма 4]

$$[(x, x, y), (z, z, t)] \neq 0, \qquad (x[z, t], y[z, t], [x, y])=(x, y, [x, y]) \cdot [z, t]^2 \neq 0.$$

§ 3. НЕНУЛЕВЫЕ ПОЛИНОМЫ АЛГЕБРЫ A

Целью этого параграфа является доказательство следующего утверждения.

Предложение. *Пусть A — свободная $(-1, 1)$-алгебра от свободных порождающих x, y, z. Тогда*

$$((x, x, y), x, z) \neq 0, \tag{37}$$

$$\bar{a}, \bar{a}' \text{ линейно независимы над } \Phi, \tag{38}$$

$$(([x, y], x, z), y, z) \neq 0. \tag{39}$$

Доказательство. Докажем сначала (39). Обозначим через A_0 алгебру, построенную в [11], а через I — ее идеал, порожденный многочленами вида $((z, x_{i_1}, x_{i_2}), x_{i_3}, x_{i_4})$, где $i_1 < \ldots < i_4$. Пусть $\bar{A}_0 = A_0/I$. Будем считать, что $\bar{A}_0$, как и A_0, порождается элементами $z, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$. Тогда $\bar{A}_0$ имеет аддитивный базис из элементов вида

$$z^m (z, x_{i_1}, x_{i_2}) \ldots (z, x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}}) x_{i_{2n+1}},$$

где последний символ может отсутствовать, а индексы идут в возрастающем порядке слева направо; эти элементы кососимметричны по переменным x_i. Кроме того, напомним, что $z \in K(A_0)$ и $x_i x_j = 0$ для любых i, j.

Допустим, что в $\bar{A}_0$ выполняется тождество $(([x, y], x, t), y, t)=0$. Положив $z_k = z x_k$, $x = z_1 + x_2$, $y = z_3 + x_4$, $t = z_5 + x_6$, получим

$$\begin{gathered}
(([z_1, z_3], x_2, z_5), x_4, x_6) + (([x_2, z_3], z_1, z_5), x_4, x_6) + \\
+ (([z_1, x_4], x_2, z_5), z_3, x_6) + (([x_2, x_4], z_1, z_5), z_3, x_6) + \\
+ (([z_1, z_3], x_2, x_6), x_4, z_5) + (([x_2, z_3], z_1, x_6), x_4, z_5) + \\
+ (([z_1, x_4], x_2, x_6), z_3, z_5) + (([x_2, x_4], z_1, x_6), z_3, z_5) = 0.
\end{gathered}$$

Докажем, что все слагаемые, кроме первого, равны нулю. Если $k \in \in K(A_0)$, то

$$\begin{gathered}
[z_i, x_j] = (3/2)(z, x_i, x_j), \; [z_i, z_j] = 3z(z, x_i, x_j), \\
(k, z_i, x_j) = z(k, x_i, x_j), \; (k, z_i, z_j) = z^2(k, x_i, x_j).
\end{gathered}$$

Учитывая, что $x_i x_j = 0$ и $[r, s] \in K(A_0)$, для любых r, s получаем, что четвертое и восьмое слагаемые равны нулю, кроме того, нулевыми являются второе, третье и шестое слагаемые, так как их внутренние ассоциаторы равны нулю. Докажем, что пятое слагаемое равно нулю (аналогично седьмое). В силу (1)

$$([z_1, z_3], x_2, x_6), x_4, z_5) = 3((z(z, x_1, x_3), x_2, x_6), x_4, z_5) =$$
$$= 3((z, x_1, x_3)(z, x_2, x_6), x_4, x_5)z = 0.$$

Покажем, наконец, что первое слагаемое отлично от нуля. Имеем

$$(([z_1, z_3], x_2, z_5), x_4, x_6) = 3((z(z, x_1, x_3), x_2, x_5)z, x_4, x_6) =$$
$$= 3((z, x_1, x_3)(z, x_2, x_5)z, x_4, x_6) = 3(z, x_1, x_3)(z, x_2, x_5)(z, x_4, x_6) =$$
$$= 3(z, x_1, x_2)(z, x_3, x_4)(z, x_5, x_6) \neq 0.$$

Докажем теперь (37). Пусть $((x, x, y), x, z) = 0$. Тогда линеаризация $x \to [y, z]$ дает в силу (20)

$$(3/2)(([y, z], x, y), x, z) + ((x, x, y), [y, z], z) = 0.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое последнего равенства, заметим, что ввиду [4, с. 869]

$$(([z, t], x, y), x, y) = 0. \tag{40}$$

Имеем

$$(3/2)(([y, z], x, y), x, z) = -(3/2)(([y, x], z, y), x, z) =$$
$$= [\text{ввиду леммы } 1(б)] =$$
$$= (3/2)(([x, y], z, y), x, z) = -(3/2)(([x, y], z, x), y, z) =$$
$$= [\text{ввиду } (40)] = (3/2)(([x, y], x, z), y, z),$$
$$((x, x, y), [y, z], z) = (1/2)([y, z], (x, x, y), z) =$$
$$= [\text{ввиду } (6),\ (10),\ (19),\ (*)] = (1/2)([(x, x, y), z], y, z) =$$
$$= [\text{ввиду } (4) \text{ и леммы } 2] =$$
$$= -(1/2)([z, (x, x, y)], y, z) = -(3/8)\cdot(4/3)([z, (x, x, y)], y, z) =$$
$$= -(3/4)(([x, y], x, z), y, z) \quad [\text{ввиду } (5) \text{ и леммы } 1(б)].$$

Следовательно, $(3/4)(([x, y], x, z), y, z) = 0$, что противоречит (39).

Переходим к доказательству (38). Пусть $\lambda\bar{a} + \mu\bar{a}' = 0$. После переименования переменных x и y, получаем $\lambda\bar{a}' + \mu\bar{a} = 0$, откуда $(\lambda + \mu)(\bar{a} + \bar{a}') = 0$. В силу (14) $(\lambda + \mu)(x, y, (y, x, z)) = 0$. Линеаризация $x \to [x, z]$ дает

$$(\lambda + \mu)\{([x, z], y, (y, x, z)) + (x, y, (y, [x, z], z))\} = 0.$$

Докажем теперь, что

$$([x, z], y, (y, x, z)) = (([x, y], x, z), y, z),$$
$$(x, y, (y, [x, z], z)) = -(1/4)(([x, y], x, z), y, z).$$

В самом деле,

$$([x, z], y, (y, x, z)) = ([y, (y, x, z)], x, z) =$$
$$= [\text{ввиду } (4) \text{ и леммы } 2] = (([y, x], y, z), x, z) =$$
$$= [\text{ввиду } (5) \text{ и леммы } 1(б)] = -(([y, x], x, z), y, z) =$$
$$= [\text{ввиду } (40)] = (([x, y], x, z), y, z),$$
$$(x, y, (y, [x, z], z)) = (1/4)(([x, z], y, z), y, x) =$$
$$= [\text{ввиду } (*),\ (20) \text{ и } (23)] = -(1/4)(([x, z], y, x), y, z) = [\text{ввиду } (40)] =$$
$$= -(1/4)(([x, y], x, z), y, z) \quad [\text{ввиду леммы } 1(б)].$$

Следовательно, на основании (39) $\lambda+\mu=0$, т. е. $\lambda(\bar{a}-\bar{a}')=0$. Применяя вновь (14), имеем $\lambda(z, y, (x, x, y))=0$, в частности $\lambda(z, x, (x, x, y))=0$, откуда в силу (13) $\lambda((x, x, y), x, z)=0$. Учитывая (37), имеем $\lambda=0$, значит, $\bar{a}$ и $\bar{a}'$ линейно независимы над Ф. Предложение полностью доказано.

§ 4. ТОЖДЕСТВА АЛГЕБРЫ A

В § 2 доказано, что алгебра A удовлетворяет тождествам (Т.5), (Т.6). Этот параграф целиком посвящен доказательству тождеств (Т.3), (Т.4), (Т.7) и (Т.8).

Лемма 6. *Функция* $(([x, y], z, t), u, v)$ *является дифференцированием алгебры A по любой переменной.*

Доказательство. Докажем, что указанная функция является дифференцированием по x (по остальным переменным аналогично). Имеем

$$(([ab, y], z, t), u, v)=((a\cdot[b, y], z, t), u, v)+(([a, y]\cdot b, z, t), u, v)=$$

$$=[\text{ввиду (6) и леммы 1(в)}]=(a\cdot([b, y], z, t), u, v)+$$

$$+(([a, y], z, t)\cdot b, u, v)=[\text{ввиду (1), (20) и леммы 1(а), (в)}]=$$

$$=a\cdot(([b, y], z, t), u, v)+(([a, y], z, t), u, v)\cdot b$$

$$[\text{ввиду (1), (23), (18) и леммы 5(а)}].$$

Лемма 7. *Функция* $(a, b, c)(r, s, t)$ *является дифференцированием алгебры A по любой переменной.*

Доказательство. Заметим сначала, что это утверждение достаточно доказать только для переменной b. В самом деле, ввиду (*) $(b, a, c)=(a, b, c)-(c, b, a)$; в силу леммы 2 $[D, D]=0$.

Пусть $u, v\in A$, d, $l\in D$. Учитывая (23) и леммы 3(а) и 5(а), имеем

$$eu\cdot d=ue\cdot d=u\cdot ed,\quad eu\cdot d=e\cdot ud=e\cdot du=ed\cdot u.$$

Используя эти равенства, на основании (2) и леммы 5(а) получаем

$$(a, uv, c)d=(a, v, c)u\cdot d+(a, u, c)v\cdot d=u\cdot(a, v, c)d+(a, u, c)d\cdot v.$$

Лемма 8. $(x, x, y)(z, z, t)=(3/8)(([x, z], x, y), z, t)$.

Доказательство. В силу лемм 6 и 7 достаточно доказать это равенство при условии, что $t\in X_0$. Если $t=z$, то оно тривиально. Если равенство справедливо для $t=y$, то его линеаризация $y\to x$ показывает, что нужное равенство справедливо также при $t=x$. Итак, можно считать, что $t=y$. Прежде чем приступить к рассмотрению этого случая, сделаем два простых замечания.

(i) Пусть A — произвольная $(-1, 1)$-алгебра. Если $x\in A$, $w\in[A, A]$, $d\in D$, то $(w, d, x)=-2(x, w, d)$. В самом деле, в силу (6), (10) и (19)

$$(d, x, w)+(x, d, w)=[dx, w]-d[x, w]-[d, w]x=0,$$

откуда

$$(w, d, x)=-(d, x, w)-(x, w, d)=(x, d, w)-(x, w, d)=-2(x, w, d).$$

(ii) Если $h=(z, z, y)$, то

$$[x, y]h=-(x, h, y)-(h, x, y),\quad [x^2, y]h=-(x^2, h, y)-(h, x^2, y).$$

Для доказательства этих равенств достаточно воспользоваться тождествами (6) и (9).

Теперь имеем

$$2(x, x, y)(z, z, y) = 2(x, x, y)h = \{[x^2, y] - x\cdot[x, y]\}h =$$
$$= [\text{ввиду } (6)] = [x^2, y]h - 2x[x, y]\cdot h = [\text{ввиду } (19)] =$$
$$= [x^2, y]h - 2x\cdot[x, y]h - 2(x, [x, y], h) =$$
$$= [x^2, y]h - 2x\cdot[x, y]h + ([x, y], h, x) = [\text{ввиду } (\mathrm{i})] =$$
$$= -(x^2, h, y) - (h, x^2, y) + 2x(x, h, y) + 2x(h, x, y) + ([x, y], h, x) =$$
$$= [\text{ввиду } (\mathrm{ii})] = -2(x, h, y)x - 2(h, x, y)x - (h, x, [y, x]) +$$
$$+ 2(x, h, y)x + 2(h, x, y)x + ([x, y], h, x) =$$
$$= [\text{ввиду } (1),\ (2'),\ (23) \text{ и леммы } 2] =$$
$$= ([x, y], h, x) + (h, x, [x, y]) = -(x, [x, y], h) = (1/2)([x, y], h, x) =$$
$$= [\text{ввиду } (\mathrm{i})] = (1/2)([h, x], x, y) = [\text{ввиду } (4) \text{ и леммы } 2] =$$
$$= (3/8)\cdot(4/3)([h, x], x, y) = -(3/8)(4/3[x, (z, z, y)], x, y) =$$
$$= -(3/4)(([z, y], z, x), x, y) \quad [\text{ввиду } (5) \text{ и леммы } 1(\text{б})].$$

Далее, учитывая лемму 1(б) и (40), получаем

$$(([z, y], z, x), x, y) = -(([z, x], z, y), x, y) = -(([x, z], x, y), z, y).$$

Следовательно,

$$2(x, x, y)(z, z, y) = (3/4)(([x, z], x, y), z, y),$$

т. е. требуемое равенство выполняется при $t = y$. Лемма доказана.

В дальнейшем через G и G_0 мы обозначаем симметрическую и знакопеременную группы третьей степени соответственно.

Лемма 9. (а) $(([x, y], z, t) + ([z, t], x, y), r, s) = 0$;

(б) $\sum\limits_{\sigma\in G_0} (([r, x_{1\sigma}], s, x_{2\sigma}), t, x_{3\sigma}) = 0.$

Доказательство. В силу леммы 6 можно считать, что все переменные лежат в X_0. Проверка указанных равенств в этом случае проводится непосредственно с использованием леммы 1(б) и тождества (40).

Лемма 10. $\sum\limits_{\sigma\in G_0} \{(x, x, y_{1\sigma})[y_{2\sigma}, y_{3\sigma}] + (3/2)(x, (x, y_{1\sigma}, y_{2\sigma}), y_{3\sigma})\} = 0.$

Доказательство разобьем на ряд шагов.

(i) Функция $f_0 = (([x, y], z, t), x, t)$ симметрична относительно y, z. Из леммы 9(б) следует $(([x, z], y, x), x, t) = 0$. После линеаризации $x \to t$ имеем $(([x, z], y, t), x, t) + (([t, z], y, x), x, t) = 0$. Отсюда на основании леммы 9(а) получаем

$$(([x, z], y, t), x, t) = -(([t, z], y, x), x, t) =$$
$$= (([y, x], t, z), x, t) = (([x, y], z, t), x, t),$$

что и доказывает (i).

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие, порожденное алгеброй A; $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$; $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; $\mathfrak{A} = \Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ — свободная $\mathfrak{M}$ — алгебра с множеством X свободных порождающих.

Ненулевой полином f алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[x, y, z, t]$, имеющий вид $(([a_1, a_2], a_3, a_4), a_5, a_6)$, назовем *правильным*, если

а) $\{a_1, \ldots, a_6\} = \{x, y, z, t\}$;

б) $\deg_x f = \deg_t t = 2$, $\deg_y f = \deg_z f = 1$.

Обозначим через U пространство, порожденное правильными полиномами.

(ii) $\dim U = 1$, f_0 — базисный элемент U.

Пусть f — правильный полином. Допустим, что $t \notin \{a_5, a_6\}$. Тогда можно считать, что $f = (([t, a_2], t, a_4), a_5, a_6)$. В силу леммы 9(а) можно считать, что $a_2 = a_5 = x$. Применяя лемму 9(б), получаем $f = (([t, x], t, a_4), x, a_6) = -(([a_4, x], t, a_6), x, t)$. Итак, можно считать, что $a_6 = t$. Из леммы 9(а) следует, что можно считать $a_4 = t$. Допустим, что $a_5 \neq x$. Тогда можно считать, что f имеет вид $(([a_1, x], x, t), a_5, t)$. На основании леммы 9(б) $f = -(([a_5, x], a_1, t), x, t)$. Таким образом, достаточно рассмотреть полином f вида $(([a_1, a_2], a_3, t), x, t)$. В силу (40) $a_3 \neq x$, значит, можно считать, что $a_1 = x$. Отсюда в силу (i) $f = f_0$. Из (39) легко выводим, что $f_0 \neq 0$.

(iii) В алгебре $\mathfrak{A}$ каждый из ассоциаторов $([x_1, x_2], x_3, (x_4, x_5, x_6))$, $(x_1, [x_2, x_3], (x_4, x_5, x_6))$, $(x_1, x_2, (x_3, x_4, [x_5, x_6]))$, $(x_1, x_2, x_3)(x_4, x_5, x_6)$ представим в виде линейной комбинации элементов вида $(([a, b], c, d), r, s)$, где $\{a, b, c, d, r, s\} = X_6$.

Доказательство следует немедленно из (23), (20), (16), (4), (5), лемм 2 и 8 и пункта (i) леммы 8. Так, например, для второго ассоциатора имеем

$$(x_1, [x_2, x_3], (x_4, x_5, x_6)) = -(1/2)([x_2, x_3], (x_4, x_5, x_6), x_1) =$$
$$= [\text{ввиду леммы 8 (i)}] =$$
$$= -(1/2)([(x_4, x_5, x_6), x_1], x_2, x_3) \quad [\text{ввиду (4) и леммы 2}],$$

однако в силу (5) каждый элемент такого вида представим нужным образом.

(iv) $(x, (x, a, b), [c, d]) + (x, (x, b, [c, d]), a) + (x, (x, [c, d], a), b) = 0.$

Каждый из ассоциаторов в левой части этого равенства является дифференцированием в силу (iii) и леммы 6. Значит можно считать, что $a, b, c, d \in X_0$. Если по некоторой переменной левая часть имеет степень 3, то на основании (iii) и (i) все ассоциаторы равны нулю. Итак, можно считать, что $a = c = y$, $b = d = z$. Имеем

$$(x, (x, y, z), [y, z]) + (x, (x, z, [y, z]), y) + (x, (x, [y, z], y), z) =$$
$$= (1/2)([y, z], (x, y, z), x) + (1/4)(([y, z], z, x), x, y) +$$
$$+ (1/4)(([y, z], x, y), x, z) = [\text{ввиду леммы 8 (i), (20), 23)}] =$$
$$= (1/2)([(x, y, z), x], y, z) + (1/2)(([y, z], z, x), x, y) =$$
$$= [\text{ввиду (40) и леммы 2}] = -(1/2)(([x, y], x, z), y, z) +$$
$$+ (1/2)(([y, z], z, x), x, y) = [\text{ввиду (5) и леммы 1(б)}] = 0,$$

так как в силу леммы 9(б)

$$(([y, z], z, x), x, y) = -(([y, x], z, x), z, y) = (([x, y], x, z), y, z).$$

(v) Функции $\sum_{\sigma \in G_0} (x, x, y_{1\sigma})[y_{2\sigma}, y_{3\sigma}]$, $\sum_{\sigma \in G_0} (x, (x, y_{1\sigma}, y_{2\sigma}), y_{3\sigma})$

являются дифференцированиями относительно y_1.

В силу (iv), (19) и (20) достаточно доказать, что указанные функции являются йордановыми гомоморфизмами алгебры $A^{(+)}$ в алгебру $A^{((+))}$, где умножения в $A^{(+)}$ и $A^{((+))}$ имеют вид $a \odot b = (1/2)(ab + ba)$, $a \circ b = ab + ba$. Прежде всего заметим, что в силу лемм 1(а) и 2 справедливо включение $D \cdot A' \subseteq Z(A)$. Кроме того, из леммы 8(i) вытекает $(t_x, t, [y, z]) = 0$, где $t_x = (x, x, t)$. Имеем

$$(x, x, t^2)[y, z] = 2(t_x \cdot t)[y, z] = [\text{ввиду (2}') \text{ и леммы 1(б)}] =$$
$$= 2t_x(t[y, z]) = 2t_x([y, z]t) = [\text{ввиду (19)}] = 2(t_x \cdot [y, z])t = (t_x \cdot [y, z]) \circ t.$$

Далее,

$$(x, x, y)[z, t^2] = -y_x \cdot [t^2, z] = -y_x \cdot (t \circ [t, x]) -$$
$$- 2y_x \cdot (t, t, z) = [\text{ввиду (6)}] = -2y_x \cdot ([t, z]t) - 2y_x \cdot z_t =$$

$$= [\text{ввиду } (19)] = -2y_x[t, z]\cdot t + 2(y_x, [t, z], t) - 2y_x\cdot z_t =$$
$$= ((x, x, y)[z, t])\circ t + \alpha\cdot f_0 = [\text{ввиду (ii) и леммы 8}].$$

Отсюда на основании (i) имеем
$$(x, x, z)[y, t^2] = ((x, x, z)[y, t])\circ t + \alpha\cdot f_0.$$

Следовательно,
$$\sum_\sigma (x, x, y_{1\sigma})[y_{2\sigma}, y_{3\sigma}]\,\big|_{y_1=t^2, y_2=y, y_3=z} =$$
$$= (x, x, t^2)[y, z] + (x, x, y)[z, t^2] + (x, x, z)[t^2, y] =$$
$$= \{(x, x, t)[y, z] + (x, x, y)[z, t] + (x, x, z)[t, y]\}\circ t =$$
$$= \left\{\sum_\sigma (x, x, y_{1\sigma})[y_{2\sigma}, x_{3\sigma}]\,\big|_{y_1=t, y_2=y, y_3=z}\right\}\circ t.$$

Тем самым доказано, что первая функция является йордановым гомоморфизмом из $A^{(+)}$ в $A^{((+))}$ относительно y_1.

Рассматривая вторую функцию, имеем
$$(x, (x, y, z), t^2) = 2(x, (x, y, z), t)t + (x, [(x, y, z), t], t) =$$
$$= [\text{ввиду } (2')] = (x, (x, y, z), t)\circ t \quad [\text{ввиду леммы 2}],$$
поскольку ввиду пунктов (ii) и (iii) справедливо равенство $(x, [(x, y, z), t], t) = \beta\cdot f_0$, левая часть которого ввиду правой альтернативности кососимметрична по y, z, а правая часть ввиду (i) симметрична по этим переменным. Следовательно, $\beta = 0$.

Применяя необходимое число раз $(2')$, лемму 2 и пункты (i)—(iii), получаем
$$(x, (x, z, t^2), y) = (x, (x, z, t), y)\circ t + \gamma\cdot f_0.$$

Из приведенных соотношений, как легко понять, следует, что и вторая функция является йордановым гомоморфизмом.

(vi) Пусть $f_x(y_1, y_2, y_3)$ является общим обозначением для функций $(x, x, y_1)[y_2, y_3]$, $(x, (x, y_1, y_2), y_3)$. Заметим, что
$$\sum_{\sigma\in G_0} f_x(y_{1\sigma}, y_{2\sigma}, y_{3\sigma}) = (1/2)\sum_{\sigma\in G}(-1)^\sigma f_x(y_{1\sigma}, y_{2\sigma}, y_{3\sigma}),$$
где $(-1)^\sigma$ — знак подстановки σ. Так как функция $\sum\limits_{\sigma\in G_0} f_x(y_{1\sigma}, y_{2\sigma}, y_{2\sigma})$ является дифференцированием в A относительно y_1, y_2, y_3, то можно считать, что $y_1 = x$, $y_2 = y$, $y_3 = z$. Положим $u = (x, x, (x, y, z))$. Заметим, что функции $(x, x, y)[x, z]$, $(x, (x, x, y), z)$ кососимметричны по y, z. Из предыдущего ввиду (13) имеем
$$\sum_{\sigma\in G_0}\{(x, x, y_{1\sigma})[y_{2\sigma}, y_{3\sigma}] + (3/2)(x, (x, y_{1\sigma}, y_{2\sigma}), y_{3\sigma})\}\,\big|_{y_1=x, y_2=y, y_3=z}$$
$$= (x, x, y)[z, x] + (x, x, z)[x, y] +$$
$$+ (3/2)\{(x, (x, x, y), z) + (x, (x, y, z), x) + (x, (x, z, x), y)\} =$$
$$= -2(x, x, y)[x, z] + (3/2)\{(x, y, (x, x, z)) - (x, x, (x, y, z)) +$$
$$+ (x, y, (x, x, z))\} = 3u + (3/2)\{-1/2u - u - (1/2)u\} = 3u + (3/2)(-2u) = 0.$$
Лемма доказана.

§ 5. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ A

Всюду в дальнейшем через $\mathfrak{M}_0$ обозначается многообразие алгебр, удовлетворяющих тождествам (T.1)—(T.8). Докажем, что в многообразии $\mathfrak{M}_0$ справедливы тождества
$$(x, y, [z, t])\cdot(u, v, w) = 0, \tag{T.9}$$
$$((x, y, [z, t]) + (z, t, [x, y]), r, s) = 0, \tag{T.10}$$
$$(([x, y], r, s), z, t) + (([z, t], r, s), x, y) = 0. \tag{T.11}$$

Применяя (Т.1) и (Т.2), получаем

$$([x, y], z, t)+2(z, t, [x, y])=-(z, t, [x, y])-(t, [x, y], z)+$$
$$+2(z, t, [x, y])=(z, t, [x, y])+(t, z, [x, y]).$$

Отсюда ввиду (20) выводим, что, во-первых, линеаризация $x\to[r, s]$ тождества (Т.8) влечет (Т.9) и, во-вторых, тождество (Т.4) влечет (Т.10).

Переходим к доказательству (Т.11). Положим $u=[x, y]$, $v=[z, t]$, $k=(v, r, s)$. В силу (Т.6) $k\in K^*$, значит, на основании (17), имеем

$$u(v, r, s)=[x, y]k=k[x, y]=-(3/2)(k, x, y)=$$
$$=-(3/2)(([z, t], r, s), x, y).$$

Аналогично $(u, r, s)v=-(3/2)(([x, y], r, s), z, t)$, следовательно,

$$(([x, y], r, s), z, t)+(([z, t], r, s), x, y)=$$
$$=-(2/3)\{(u, r, s)v+u(v, r, s)\}=-(2/3)(uv, r, s)=0$$

ввиду (1), (11) и (Т.5). Тем самым (Т.11) доказано.

Лемма 11. *Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ содержится в многообразии $\mathfrak{M}_0$ и удовлетворяет тождеству*

$$(x, y, [z, t])+(z, t, [x, y])=0. \tag{41}$$

Тогда

а) $(D, \mathfrak{A}')=0$; б) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, D)=0$;

в) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}'')=0$; г) $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}', \mathfrak{A})=0$.

Доказательство. Полагая последовательно в (41) $t=[u, v]$ и $z=[u, v]$, получаем ввиду (11)

$$(x, y, [z, [u, v]])=0,\ ([u, v], t, [x, y])=0. \tag{42}$$

Далее, имеем

$$0=(x^2, y, [z, t])+(z, t, [x^2, y])=2(x, y, [z, t])x+2(z, t, x[x, y])+$$
$$+2(z, t, (x, x, y))=[\text{ввиду } (1), (6), (42)]=$$
$$=2\{(x, y, [z, t])+(z, t, [x, y])\}x+$$
$$+2\{(z, t, x)[x, y]+(z, t, (x, x, y)\}\ [\text{ввиду } (2), (42), (11)],$$

следовательно,

$$(z, t, x)[x, y]+(z, t, (x, x, y))=0. \tag{43}$$

Полагая в (43) $t=y$, получаем $(z, y, x)[x, y]+(z, y, (x, x, y))=0$. Учитывая (3), имеем $-((z, y, x), x, y)+(z, y, (x, x, y))=0$. Применяя несколько раз (*), на основании (14), выводим

$$\bar{a}-\bar{a}'=(z, y, (x, x, y))=((z, y, x), x, y)=-(x, y, (z, y, x))+$$
$$+(y, x, (z, y, x))=(x, y, (y, x, z))-(x, y, (x, y, z))-$$
$$-(y, x, (y, x, z))+(y, x, (x, y, z))=2(x, y, (y, x, z))-(x, y, (x, y, z))-$$
$$-(y, x, (y, x, z))=2(\bar{a}+\bar{a}')-\bar{a}-\bar{a}'=\bar{a}+\bar{a}',$$

т. е. $\bar{a}'=0$, значит, $\bar{a}=\bar{a}'=0$. Отсюда ввиду (43) вытекает:

(i) каждая из функций $(x_1, x_2, (x_3, x_4, x_5))$, $(x_1, x_2, x_3)[x_4, x_5]$, содержащая ровно две пары равных элементов, является нулевой. Используя это замечание и (Т.3), имеем

$$(x, x, a)[b, c]+(3/2)(x, (x, a, b), c)=0. \tag{44}$$

Так как $(x, x, a)[x, c]=0$, то ввиду (44) и (*)

$$(3/2)(x, (x, a, b), c)=-(x, x, a)[b, c]=\{(b, x, a)+(x, b, a)\}[x, c]=$$
$$=\{-(b, a, x)-(b, a, x)+(a, b, x)\}[x, c]=-3(b, a, x)[x, c],$$

т. е. в силу (43) $(x, (x, a, b), c)=2(b, a, (x, x, c))$. Так как $(x, a, (x, x, c))=0$, то $(x, a, (x, c, b))=-(x, (x, c, b), a)=(x, (x, a, b), c)= = 2(b, a, (x, x, c))=-2(x, a, (x, b, c)+(b, x, c))$, т. е. $(x, a, (x, b, c)+ + 2(b, x, c))=0$. Учитывая вновь (i) и (*), получаем

$$0=(x, a, \{-(b, c, x)+(c, b, x)+2(b, x, c)\})=-4(x, a, (b, c, x)),$$

откуда $(x, a, (b, c, x))=0$. Учитывая теперь (44), имеем $(x, x, a)[b, c]= = 0$, следовательно, $(a, b, c)[x, y]=0$. Сравнивая это равенство с (43), получаем $(z, t, (x, x, y))=0$, что и доказывает пункт (б). Поскольку $D\cdot[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]=0$, то в силу (10) $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]\subseteq \operatorname{Ann} D$, значит, $\mathfrak{A}'\subseteq \operatorname{Ann} D$, что равносильно (а). Пункт (в) следует немедленно из (42) и (19).

Докажем теперь (г). Положим $\mathfrak{A}_0=[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$. Поскольку $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}_0\cdot\mathfrak{A}^{\#}$, то

$$(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}', \mathfrak{A})=(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}_0\cdot\mathfrak{A}^{\#}, \mathfrak{A})\subseteq(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A})^{\Delta}=$$

$$=[\text{ввиду } (2),\ (42) \text{ и } (а)]=(\mathfrak{A}_0\cdot\mathfrak{A}^{\#}, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A})^{\Delta}\subseteq(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A})^{\Delta}=$$

$$=[\text{ввиду } (1),\ (а),\ (в)]=0\quad [\text{ввиду } (42)].$$

Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{A}$ обозначает свободную $\mathfrak{M}_0$-алгебру счетного ранга. Положим $f_0=(x, y, [z, t])+(z, t, [x, y])$, $g_0=(x, y, [z, t])$, $h_0=[x, y][z, t]$ и обозначим через $Z_0(\mathfrak{A})$, $K_0(\mathfrak{A})$, $N_0(\mathfrak{A})$ вполне характеристические идеалы (Т-идеалы) алгебры $\mathfrak{A}$, порожденные соответственно полиномами f_0, g_0, h_0.

Лемма 12. *Пусть* $S\in\{Z, K, N\}$. *Тогда* $S_0(\mathfrak{A})\subseteq S(\mathfrak{A})\cap \operatorname{Ann} D$.

Доказательство. Если $S=K$, то нужное включение вытекает немедленно из (23), (Т.6) и (Т.9). Из (23) и (Т.10) следует, что $f_0\in \in N(\mathfrak{A})$. Поскольку $f_0\in K_0(\mathfrak{A})$, то $f_0\in K^*(\mathfrak{A})$, значит, $f_0\in Z^*(\mathfrak{A})= =N(\mathfrak{A})\cap K^*(\mathfrak{A})$, поэтому нужное включение справедливо также при $S=Z$.

Далее, в силу предыдущего и леммы 11 имеем $(D, \mathfrak{A}')\subseteq Z_0(\mathfrak{A})\subseteq \subseteq Z^*(\mathfrak{A})$, значит, $(D, \mathfrak{A}')_2=0$. Так как $(D, (\mathfrak{A}')^2)\subseteq(D, \mathfrak{A}')_2$, то $N_0(\mathfrak{A})\subseteq \subseteq(\mathfrak{A}')^2\subseteq \operatorname{Ann} D$. Применяя теперь (Т.5) и (22), имеем $h_0\in N(\mathfrak{A})$. Следовательно, $h_0\in N^*(\mathfrak{A})$, откуда $N_0(\mathfrak{A})\subseteq N(\mathfrak{A})$.

Лемма 13. (а) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}')\subseteq K_0(\mathfrak{A})$;

(б) $(\mathfrak{A}')^2\subseteq N_0(\mathfrak{A})+Z_0(\mathfrak{A})$.

Доказательство. (а) Без ограничения общности можно считать, что $g_0=0$ в алгебре $\mathfrak{A}$. Тогда в $\mathfrak{A}$ выполняется тождество (41). Учитывая, что $\mathfrak{A}'=[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]\cdot\mathfrak{A}^{\#}$, и применяя (2) и лемму 11, получаем $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}')=0$.

(б) Пусть $\mathfrak{A}_0=[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$. Тогда, учитывая лемму 11(г), имеем

$$(\mathfrak{A}')^2\subseteq(\mathfrak{A}_0\cdot\mathfrak{A}^{\#})\,\mathfrak{A}'\subseteq\mathfrak{A}_0\cdot\mathfrak{A}'+(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}')\subseteq\mathfrak{A}_0\cdot\mathfrak{A}'+Z_0(\mathfrak{A})\subseteq$$

$$\subseteq\mathfrak{A}_0(\mathfrak{A}_0\cdot\mathfrak{A}^{\#})+Z_0(\mathfrak{A})\subseteq\mathfrak{A}_0^2\cdot\mathfrak{A}^{\#}+Z_0(\mathfrak{A})\subseteq N_0(\mathfrak{A})+Z_0(\mathfrak{A}).$$

Лемма 14. $(D, \mathfrak{A}')\leqslant(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, D)^{\Delta}$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, D)=0$. Тогда из (6) и (9) вытекает, что функция $(x, x, y)[z, t]$ кососимметрична по y, z, t, откуда в силу (Т.3) имеем $(x, x, y)[z, t]=0$. Учитывая (10), получаем $[z, t]\in \operatorname{Ann} D$. Следовательно, $\mathfrak{A}'\subseteq \subseteq \operatorname{Ann} D$, что и требовалось.

Теорема 2. *Центры* Z, K, N, V *свободной алгебры* $\mathfrak{A}$ *счетного ранга многообразия* $\mathfrak{M}_0$, *определенного тождествами* (Т.1)—(Т.8), *являются* Т-*идеалами алгебры* $\mathfrak{A}$. *В решетке* Т-*идеалов* D, K, N, $(\mathfrak{A}')^2$ *порождают подрешетку вида, указанного на рис.* 2.

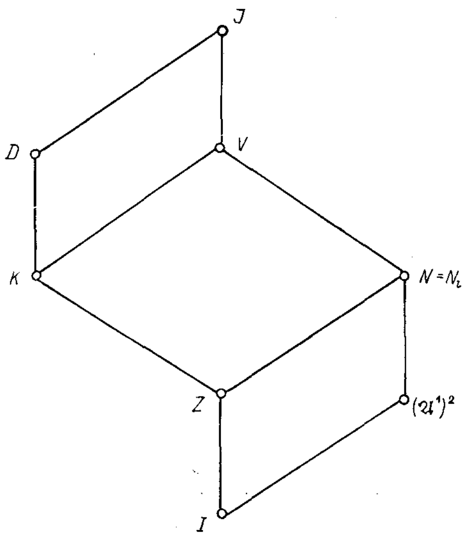

Рис. 1

Здесь $I=(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, D)^\Delta+(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}', \mathfrak{A})^\Delta$; $J=D+(\mathfrak{A}')^2$; N_l — *левый ассоциативный центр.*

Далее, пусть $f_0=(x, y, [z, t])+(z, t, [x, y])$, $g_0=(x, y, [z, t])$, $h_0=[x, y][z, t]$; Z_0, K_0, N_0 *суть* T-*идеалы, порожденные соответственно полиномами* f_0, g_0, h_0. *Тогда справедливы равенства* $Z=Z_0=\operatorname{Ann}\mathfrak{A}'$, $K=K_0=D\cap\operatorname{Ann}D$, $N=N_0+Z_0$, $V=K_0+N_0$.

Доказательство. Поскольку все рассматриваемые подалгебры и идеалы являются вполне характеристическими, устойчивыми относительно частных производных и основное поле имеет характеристику нуль, то в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением только собственных полиномов. Напомним, что полилинейный многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется собственным, если $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)=0$ для любого индекса i. Хорошо известно строение собственных полиномов свободной ассоциативной алгебры. С другой стороны, в [2] приведено описание собственных полиномов свободной правоальтернативной алгебры.

Доказательство теоремы разобьем на ряд шагов.

(i) Пусть $I_1=(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}')^\Delta+(\mathfrak{A}')^2+\mathfrak{A}''$. Тогда $I_1=\operatorname{Ann}D$.

Из леммы 13 и (19) следует, что $I_1\subseteq\operatorname{Ann}D$. Допустим, что существует собственный полином f из $\operatorname{Ann}D$, не содержащийся в I_1, т. е. $f\in(\operatorname{Ann}D)\setminus I_1$. Легко понять, что всякий собственный полином алгебры $\mathfrak{A}$ степени не меньше четырех содержится в идеале I_1, значит, по модулю I_1 полином f имеет вид либо $\alpha[x, y]$, либо $\beta(x, y, z)+\gamma(y, x, z)$, где α, β, $\gamma\in\Phi$. Однако, учитывая (13), (T.8) и предложение § 3, имеем

$$[x, y](x, x, z)=-3((x, x, y), x, z)\neq 0,$$

$$(x, x, y)(z, z, y)=3/8(([x, z], x, y), z, y)\neq 0.$$

Следовательно, $\alpha=\beta=\gamma=0$ и $f\in I_1$.

(ii) $Z_0=Z=\operatorname{Ann}\mathfrak{A}'$.

В силу леммы 12 $Z_0\subseteq Z^*\subseteq\operatorname{Ann}\mathfrak{A}'$. Докажем обратное включение $\operatorname{Ann}\mathfrak{A}'\subseteq Z_0$. Пусть $f\in(\operatorname{Ann}\mathfrak{A}')\setminus Z_0$. Поскольку свободная ассоциативная алгебра первична, то $f\in D$. В силу (i) $\deg f\neq 3$. С другой стороны, из леммы 11 вытекает, что если $\deg f\geqslant 5$, то $f\in Z_0$. Следовательно, $\deg f=4$. Так как $(x, x, [y, z])\in Z_0$, то легко понять, что f является скалярным кратным многочлена $(x, y, [z, t])+\alpha(x, z, [t, y])+\beta(x, t, [y, z])$. Итак, без ограничения общности можно считать, что f совпадает с этим многочленом. Тогда в силу леммы 12 $f\in K^*$. Поскольку $f\in\operatorname{Ann}\mathfrak{A}'$, то в силу (17)

$$(\{(x, y, [z, t])+\alpha(x, z, [t, y])+\beta(x, t, [y, z])\}, r, s)=0.$$

Полагая последовательно $t=x$, $z=y$, на основании предложения § 3, получаем $1+\alpha=0$, $1-\alpha=0$; противоречие. Итак, $Z_0=\operatorname{Ann}\mathfrak{A}'$. Аналогично $Z_0=Z$.

(iii) $K_0=K=D\cap\operatorname{Ann}D$.

Прежде всего, заметим, что в силу леммы 13(а) $K_0=(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}')^{\Delta}$. Включения $K_0 \subseteq K \subseteq D \cap \operatorname{Ann} D$ следуют из утверждений

а) свободная ассоциативная алгебра имеет нулевой центр;

б) K не содержит собственных полиномов степени 3;

в) если f — собственный полином степени не меньше четырех и $f \in D$, то $f \in K_0$ (см. лемму 13(а));

г) $K_0 \subseteq \operatorname{Ann} D$ (см. лемму 12).

Для доказательства обратного включения $D \cap \operatorname{Ann} D \subseteq K_0$ достаточно воспользоваться (i) и заметить, что по модулю K_0 идеал $(\mathfrak{A}')^2+\mathfrak{A}''$ имеет такой же аддитивней базис (базис Шпехта), что и идеал $(\overline{\mathfrak{A}'})^2+\overline{\mathfrak{A}}''$ свободной ассоциативной алгебры $\overline{\mathfrak{A}}={}^{\mathfrak{A}}/_{D}$.

(iv) $N_l \cap D=Z_0$.

Доказательство этого равенства проводится аналогично доказательству (ii).

(v) $N_l=Z_0+(\mathfrak{A}')^2$.

Из работы [12] вытекает, что ядерные функции свободной $(-1, 1)$-алгебры ранга 2 содержатся в идеале $D+(\mathfrak{A}')^2$, значит, $N_l \subseteq D+(\mathfrak{A}')^2$. Так как $(\mathfrak{A}')^2 \subseteq N$ в силу леммы 13(б), то на основании (iv) $N_l=N_l \cap D+(\mathfrak{A}')^2=Z_0+(\mathfrak{A}')^2$.

(vi) $N=N_l$.

Это равенство следует немедленно из (v), на основании лемм 12 и 13(б).

(vii) $V=K_0+(\mathfrak{A}')^2$.

Доказательство аналогично (v).

Из леммы 13(б) вытекает, что в равенствах (v) и (vii) вместо $(\mathfrak{A}')^2$ можно писать N_0.

(viii) Пусть $I_2=(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, D)^{\Delta}$, $I_3=(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}', \mathfrak{A})^{\Delta}$, $I_4=D \cap (\mathfrak{A}')^2$. Тогда $I_2+I_3=I_4$.

Ясно, что $I_3 \subseteq I_4$. Покажем, что $I_2 \subseteq I_4$. Для этого достаточно проверить, что в фактор-алгебре $\mathfrak{B}^2={}^{\mathfrak{A}}|_{(\mathfrak{A}')^2}$ выполняется включение $D(\mathfrak{B}) \subseteq N(\mathfrak{B})$. Поскольку $(\mathfrak{B}')^2=0$, то в алгебре $\mathfrak{B}$ справедливы тождества (30), а значит, и тождества (33), т. е. а) $D(\mathfrak{B}) \subseteq V(\mathfrak{B})$, б) в алгебре $\mathfrak{B}$ функция $(x_1, x_2, (x_3, x_4, x_5))$, содержащая два равных символа, кососимметрична по остальным переменным. Кроме того, учитывая включение $D(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{B}'$, на основании (Т.3) получаем следующее тождество алгебры $\mathfrak{B}$:

$$\sum_{\sigma \in G_0} (x, (x, y_{1\sigma}, y_{2\sigma}), y_{3\sigma})=0),$$

значит, $(x, (x, a, b), c)=0$. Далее, поскольку $D(\mathfrak{B}) \subseteq V(\mathfrak{B})$, то тройка элементов (x, a, b), x, c ассоциативна. Применяя (12), получаем $((x, x, a), b, c)=((x, b, c), x, a)+(x, (x, b, c), a)+(x, x, (a, b, c))=0$, т. е. $D(\mathfrak{B}) \subseteq N_l(\mathfrak{B})$, значит, $D(\mathfrak{B}) \subseteq N(\mathfrak{B})=N_l(\mathfrak{B}) \cap V(\mathfrak{B})$. Тем самым, доказано, что $I_2 \subseteq I_4$, значит, $I_2+I_3 \subseteq I_4$. Для доказательства обратного включения достаточно заметить, что идеал $(\mathfrak{A}')^2$ по модулю I_2+I_3 имеет такой же аддитивный базис, что и идеал $(\overline{\mathfrak{A}'})^2$ свободной ассоциативной алгебры $\overline{\mathfrak{A}}={}^{\mathfrak{A}}/_{D}$.

(ix) $D \cap V=K$.

Имеем

$$D \cap V=D \cap (K_0+(\mathfrak{A}')^2)=[\text{ввиду (vii)}]=K_0+D \cap (\mathfrak{A}')^2=$$
$$=[\text{ввиду модулярности решетки идеалов}]=K_0+I=[\text{ввиду (viii)}]=$$
$$=K_0=[\text{ввиду лемм 11, 12}].$$

(x) $K \cap (\mathfrak{A}')^2=Z \cap (\mathfrak{A}')^2=I$.

Ввиду (viii) достаточно доказать второе равенство, так как $D \supseteq K \supseteq Z$. Имеем $Z \cap (\mathfrak{A}')^2 \subseteq D \cap (\mathfrak{A}')^2 \subseteq I$. Ввиду (viii) $I \subseteq (\mathfrak{A}')^2$, а из лемм 11, 12 вытекает, что $I \subseteq Z$, т. е. $I \subseteq Z \cap (\mathfrak{A}')^2$. Теорема полностью доказана.

§ 6. БАЗИС ТОЖДЕСТВ АЛГЕБРЫ A

Теорема 3. *Система тождеств* (Т.1) — (Т.8) *является базисом тождеств свободной* $(-1,\ 1)$*-алгебры* A *ранга* 3 *над полем характеристики нуль.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Var}(A)$ — многообразие, порожденное алгеброй A. Ввиду [2, § 2, лемма 1] многообразие $\mathrm{Var}(A)$ является унитарно-замкнутым; унитарная замкнутость многообразия $\mathfrak{M}_0$ очевидна; следовательно, для доказательства равенства $\mathfrak{M}_0 = \mathrm{Var}(A)$ ввиду [3, лемма 10] достаточно показать, что всякий собственный полином алгебры $\mathfrak{A}$, являющийся тождеством A, равен нулю. В дальнейшем термин «тождество» означает собственный полином алгебры $\mathfrak{A}$, являющийся тождеством алгебры A в обычном смысле. Будем говорить, что *алгебра A не имеет тождеств степени n*, если всякое тождество степени n является нулевым полиномом в алгебре $\mathfrak{A}$. Ясно, что алгебра A не имеет тождеств степени 3.

Из § 4, 5 следует, что всякий собственный полином из $D(\mathfrak{A})$ представим в виде линейной комбинации элементов

(а) $(x_i,\ x_j,\ [x_r,\ x_s])$;

(б) $(x_i,\ x_j,\ (x_k,\ x_r,\ x_s))$;

(в) $(([x_i,\ x_j],\ x_k,\ x_l),\ x_r,\ x_s)$;

(г) $(x_i,\ x_j,\ [x_r,\ x_{s1},\ \ldots,\ x_{sn}])$, где $n \geqslant 2$, которые называются *предбазисными ассоциаторами* соответствующего типа.

Так, например,

1) $[(x_1,\ x_2,\ x_3),\ x_4]$ в силу (23) представим в виде линейной комбинации предбазисных ассоциаторов типа (а);

2) $([x_1,\ x_2],\ [x_3,\ x_4],\ x_5)$ в силу (4) и (23) представим в виде линейной комбинации предбазисных ассоциаторов типа (г);

3) $(x_1,\ x_2,\ x_3)[x_4,\ x_5]$ в силу леммы 14 представим в виде линейной комбинации предбазисных ассоциаторов типа (б);

4) $(x_1,\ x_2,\ x_3)(x_4,\ x_5,\ x_6)$ в силу (Т.8) представим в виде линейной комбинации предбазисных ассоциаторов типа (в);

5) $(x_1,\ [x_2,\ x_3],\ (x_4,\ x_5,\ x_6))$ в силу пункта (iii) из леммы 10 представим в виде линейной комбинации предбазисных ассоциаторов типа (в);

6) всякий собственный полином из $D(\mathfrak{A})$ степени $\geqslant 7$, представим в виде линейной комбинации предбазисных ассоциаторов типа (г).

Докажем теперь, что тождество f представимо в виде линейной комбинации предбазисных ассоциаторов типа (а) — (в), отсюда, в частности, следует, что $4 \leqslant \deg f \leqslant 6$, если $f \neq 0$. Если $\deg f = 4$, то доказывать нечего. Пусть $\deg f \geqslant 5$. Тогда $f = \sum\limits_i \alpha_i u_i + \sum\limits_i \beta_i v_i$, где $\alpha_i, \beta_i \in \Phi$, u_i — предбазисные ассоциаторы типов (б) и (в), v_i — предбазисные ассоциаторы типа (г). Следуя лемме 6 [3] и используя при этом лемму А, получаем, что всякий предбазисный ассоциатор v_i представим в виде линейной комбинации базисных ассоциаторов в смысле определения 3 [3]. Значит, $f = \sum\limits_i u_i\alpha_i + \sum\limits_i \gamma_i w_i$, где w_i — базисные ассоциаторы степени не меньше пяти. Поскольку f, u_i являются тождествами свободной алгебры типа $(-1,\ 1)$ ранга 2, а базисные ассоциаторы на этой алгебре линейно независимы, то все γ_i — нулевые скаляры, поэтому $f = \sum\limits_i \alpha_i u_i$, что и требовалось.

Таким образом, осталось проверить, что алгебра A не имеет тождеств степени 4, 5, 6. Рассмотрим в отдельности каждый из этих случаев.

1°. Докажем, что алгебра A не имеет тождеств степени 4. Пусть $f(x_1,\ \ldots,\ x_4)$ — тождество степени 4. Тогда f лежит в пространстве U, порожденном предбазисными ассоциаторами типа (а) от символов из

X_4. Из (24) вытекает, что U порождается элементами вида

$$(x_i,\ x_j,\ [x_r,\ x_s]),\ \text{где}\ i\neq 4,\ r<s. \tag{45}$$

Элементов вида (45) ровно девять. Докажем, что $\dim U=9$. Проверим сначала, что ассоциаторы

$$\begin{gathered} e_1=(x,\ y,\ [x,\ z]),\ e_2=(y,\ x,\ [x,\ z]),\\ e_3=(x,\ z,\ [x,\ y]),\ e_4=(z,\ x,\ [x,\ y]) \end{gathered} \tag{46}$$

линейно независимы в алгебре A. Пусть

$$\sum_{i=1}^{4}\alpha_i e_i=0. \tag{47}$$

Полагая в (47) последовательно $x=a$, $y=z=[a,\ b]$ и $x=[a,\ b]$, $y=$ $=z=a$, а также учитывая, что $([a,\ b],\ a,\ [a,\ [a,\ b]])\neq 0$, получаем α_2+ $+\alpha_4=0$, $\alpha_1+\alpha_3=0$. Далее, линеаризация $x\to[a,\ b]$ тождества (47) с последующей подстановкой $x=z=a$, $y=[a,\ b]$ дает $\alpha_2=\alpha_3$. Аналогично $\alpha_1=\alpha_4$. Допустим, что $\alpha_1\neq 0$. Тогда в алгебре A

$$(x,\ y,\ [x,\ z])-(y,\ x,\ [x,\ z])-(x,\ z,\ [x,\ y])+(z,\ x,\ [x,\ y])=0.$$

Из (24) следует, в частности,

$$2(x,\ x,\ [y,\ z])+(y,\ x,\ [z,\ x])+(x,\ y,\ [z,\ x])+(z,\ x,\ [x,\ y])+(x,\ z,\ [x,\ y])=0. \tag{48}$$

Из последних двух тождеств получаем

$$(x,\ x,\ [y,\ z])+(x,\ y,\ [z,\ x])+(x,\ z,\ [x,\ y])=0.$$

В силу (20) и (T.4)

$$\begin{gathered} 0=((x,\ x,\ [y,\ z])+(x,\ y,\ [z,\ x])+(x,\ z,\ [x,\ y]),\ y,\ z)=\\ =-2((x,\ y,\ [x,\ z]),\ y,\ z)=(([x,\ z],\ x,\ y),\ y,\ z), \end{gathered}$$

что противоречит (39). Значит, $e_1,\ \ldots,\ e_4$ линейно независимы. В силу (48) ясно, что если один из e_i $(i=1,\ \ldots,\ 4)$ заменить на $(x,\ x,\ [y,\ z])$, то полученная система также будет линейно независимой.

Предположим теперь, что элементы (45) линейно зависимы, т. е. существуют скаляры α, β, γ, δ, λ, μ, χ, φ, ψ, среди которых хотя бы один ненулевой, такие, что в алгебре A выполняется тождество

$$\begin{gathered} \alpha(x,\ y,\ [z,\ t])+\beta(x,\ z,\ [t,\ y])+\gamma(x,\ t,\ [y,\ z])+\delta(y,\ x,\ [z,\ t])+\lambda(z,\ x,\ [t,\ y])+\\ +\mu(y,\ z,\ [t,\ x])+\chi(z,\ y,\ [t,\ x])+\varphi(y,\ t,\ [x,\ z])+\psi(z,\ t,\ [x,\ y])=0. \end{gathered}$$

Положив $y=x$, имеем

$$\begin{gathered} (\alpha+\delta)(x,\ x,\ [z,\ t])+(\beta+\mu)(x,\ z,\ [t,\ x])+\\ +(\gamma+\varphi)(x,\ t,\ [x,\ z])+(\lambda+\chi)(z,\ x,\ [t,\ x])=0. \end{gathered}$$

Поскольку ассоциаторы, входящие в это равенство, линейно независимы, то $\alpha+\delta=\beta+\mu=\gamma+\varphi=\lambda+\chi=0$. Полагая последовательно $z=x$ и $t=x$, аналогично получаем $\alpha-\chi=\beta+\lambda=\gamma-\psi=\delta-\mu=0$ и $\alpha-\gamma/2=$ $=\beta-\gamma/2=\delta-\varphi-\gamma/2=\lambda+\psi-\gamma/2=0$. Следовательно, $\alpha=\beta=\gamma/2=$ $=-\delta=-\lambda=-\mu=\chi=-\varphi/2=\psi/2\neq 0$. Это означает, что в алгебре A справедливо тождество

$$\begin{gathered} (x,\ y,\ [z,\ t])+(x,\ z,\ [t,\ y])+2(x,\ t,\ [y,\ z])-(y,\ x,\ [z,\ t])-(z,\ x,\ [t,\ y])-\\ -(y,\ z,\ [t,\ x])+(z,\ y,\ [t,\ x])-2(y,\ t,\ [x,\ z])+2(z,\ t,\ [x,\ y])=0. \end{gathered}$$

Учитывая $(*)$, последнее тождество можно записать в виде

$$\begin{gathered} -([z,\ t],\ x,\ y)-([t,\ y],\ x,\ z)-([t,\ x],\ z,\ y)+\\ +2\{(x,\ t,\ [y,\ z])+(y,\ t,\ [z,\ x])+(z,\ t,\ [x,\ y])\}=0, \end{gathered}$$

т. е.

$$\sum_{\sigma\in G_0}\{([t, x_{1\sigma}], x_{2\sigma}, x_{3\sigma}) + 2(x_{1\sigma}, t, [x_{2\sigma}, x_{3\sigma}])\} = 0. \tag{49}$$

В силу (6), (1), (11) и (23) имеем

$$([t^2, a], b, c) = (t \circ [t, a], b, c) + 2((t, t, a), b, c) =$$
$$= 2(t[t, a], b, c) + ([[t, a], t], b, c) + 2((t, t, a), b, c) = 2([t, a], b, c)t +$$
$$+ ([[t, a], t], b, c) + 2(t, b, c)[t, a] + 2((t, t, a), b, c). \tag{50}$$

Далее, учитывая (5), (23), (11) и (*), получаем $([[t, a], t], b, c) = ([b, c], [t, a], t) = ([t, a], [b, c], t) = ([[b, c], t], t, a) = -(t, a, [[b, c], t]) + (a, t, [[b, c], t])$. Отсюда ввиду (25) и (26)

$$\sum_{\sigma\in G_0}([[t, x_{1\sigma}], t], x_{2\sigma}, x_{3\sigma}) = 0. \tag{51}$$

Кроме того, в силу (2′)

$$(a, t^2, [b, c]) = 2(a, t, [b, c])t + (a, t, [[b, c], t]). \tag{52}$$

Ввиду (49) — (52) и (26)

$$0 = \sum_\sigma\{([t^2, x_{1\sigma}], x_{2\sigma}, x_{3\sigma}) + 2(x_{1\sigma}, t^2, [x_{2\sigma}, x_{3\sigma}])\} =$$
$$= 2\sum_\sigma\{([t, x_{1\sigma}], x_{2\sigma}, x_{3\sigma}) + 2(x_{1\sigma}, t, [x_{2\sigma}, x_{3\sigma}])\}\cdot t +$$
$$+ \sum_\sigma([[t, x_{1\sigma}], t], x_{2\sigma}, x_{3\sigma}) + 2\sum_\sigma(x_{1\sigma}, t, [[x_{2\sigma}, x_{3\sigma}], t]) +$$
$$+ 2\sum_\sigma\{(t, x_{1\sigma}, x_{2\sigma})[t, x_{3\sigma}] + ((t, t, x_{1\sigma}), x_{2\sigma}, x_{3\sigma})\} =$$
$$= 2\sum_\sigma\{(t, x_{1\sigma}, x_{2\sigma})[t, x_{3\sigma}] + ((t, t, x_{1\sigma}), x_{2\sigma}, x_{3\sigma})\}. \tag{53}$$

Положив в (53) $t = x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ имеем на основании (13) $0 = (x, x, y)[x, z] + (x, z, x)[x, y] + ((x, x, y), z, x) + ((x, x, z), x, y) = 2(x, x, y)[x, z] + 2((x, x, z), x, y) = 8((x, x, z), x, y)$, что противоречит (37).

2°. Докажем, что алгебра A не имеет тождеств степени пять. Для этого достаточно построить в алгебре $\mathfrak{A}$ базис пространства, порожденного предбазисными ассоциаторами типа (б), и показать, что построенная система базисных элементов линейно независима на алгебре A.

(i) Всякий предбазисный ассоциатор типа (б) от X_5 является линейной комбинацией элементов

$$(x_5, x_4, (a, b, c)),\ (a, b, (c, d, x_5)). \tag{54}$$

Будем писать $u \equiv v$, если $u - v$ является линейной комбинацией элементов (54). В силу (*) имеем

$$(a, b, (x_5, c, d)) \equiv ((a, b, x_5), c, d) \equiv ((x_5, a, b), c, d) \equiv 0. \tag{55}$$

Применяя (12) и (55), получаем

$$((a, b, c), d, x_5) = ((a, d, x_5), b, c) + (a, (b, d, x_5), c) +$$
$$+ (a, b, (c, d, x_5)) \equiv 0, \tag{56}$$

$$\text{и } 0 \equiv ((x_5, a, b), c, x_4) = ((x_5, c, x_4), a, b) + (x_5, (a, c, x_4), b) +$$
$$+ (x_5, a, (b, c, x_4)) \equiv (x_5, (a, c, x_4), b) + (x_5, a, (b, c, x_4)),$$
$$\text{т. е. } (x_5, a, (b, c, x_4)) \equiv (x_5, b, (a, c, x_4)). \tag{57}$$

Аналогично $0 \equiv ((x_5, a, x_4), b, c) = ((x_5, b, c), a, x_4) + (x_5, (a, b, c), x_4) + (x_5, a, (x_4, b, c)) \equiv (x_5, a, (x_4, b, c))$, откуда в силу (*)

$$(x_5, a, (b, c, x_4)) \equiv (x_5, a, (c, b, x_4)). \tag{58}$$

Из (57) и (58) следует, что для любой подстановки $\sigma \in G$

$$(x_5, x_{1\sigma}, (x_{2\sigma}, x_{3\sigma}, x_4)) \equiv (x_5, x_1, (x_2, x_3, x_4)). \quad (59)$$

Полная линеаризация тождества $(y, x, (x, x, y)) = 0$ дает ввиду (59)

$$0 = \sum_{\sigma \in G} \{(x_4, x_{1\sigma}, (x_{2\sigma}, x_{3\sigma}, x_5)) + (x_5, x_{1\sigma}, (x_{2\sigma}, x_{3\sigma}, x_4))\} \equiv$$

$$\equiv 6(x_5, x_1, (x_2, x_3, x_4)),$$

т. е. $(x_5, a, (b, c, x_4)) \equiv 0$. Отсюда на основании (56) и (*) имеем $(a, x_5, (b, c, x_4)) \equiv 0$.

(ii) Пространство V, порожденное элементами вида (54) от X_5, имеет базис, состоящий из многочленов

$$e_1 = (x_5, x_4, (x_1, x_2, x_3)), \quad e_2 = e_1^{(12)},$$

$$g_{ijkl} = (x_i, x_j, (x_k, x_l, x_5)), \quad (60)$$

причем индексы i, j, k, l не могут одновременно удовлетворять условиям $i > j$, $k > l$; если σ — подстановка степени n, то $[f(x_1, \ldots, x_n)]^\sigma$ означает, как обычно, $f(x_{1\sigma}, \ldots, x_{n\sigma})$.

Обозначим через V_0 — пространство, порожденное элементами вида (60). Докажем вначале, что $V = V_0$. Так как ввиду (*) ассоциатор $(x_5, x_4, (a, b, c))$ представим в виде линейной комбинации e_1 и e_2, то достаточно показать, что если $i > j$, $k > l$, то $g_{ijkl} \in V_0$.

Из (14) следует тождество $(y, y, (x, x, x_5)) = -3(x, y, (x, y, x_5))$, полная линеаризация которого дает $(x_4, a, (b, c, x_5)) + (a, x_4, (b, c, x_5)) + (x_4, a, (c, b, x_5)) + (a, x_4, (c, b, x_5)) = -3(b, a, (c, x_4, x_5)) - 3((b, x_4, (c, a, x_5)) - 3(c, a, (b, x_4, x_5)) - 3(c, x_4, (b, a, x_5))$, т. е. если $x_4 > a$, b, c, $b > c$, то

$$(x_4, a, (b, c, x_5)) \equiv 0 \quad (61)$$

(всюду в этом пункте сравнение идет по модулю V_0). Применяя еще раз полную линеаризацию указанного тождества, имеем $(x_3, a, (x_4, b, x_5)) + (a, x_3, (x_4, b, x_5)) + (x_3, a, (b, x_4, x_5)) + (a, x_3, (b, x_4, x_5)) = -3(x_4, x_3, ((b, a, x_5)) - 3(b, x_3, (x_4, a, x_5)) - 3(x_4, a, (b, x_3, x_5)) - 3(b, a, (x_4, x_3, x_5))$, откуда

$$(x_3, x_2, (x_4, x_1, x_5)) \equiv 0, \quad (62)$$

$$(x_3, x_1, (x_4, x_2, x_5)) \equiv -3(x_2, x_1, (x_4, x_3, x_5)). \quad (63)$$

Далее, из (13) $(x, x, (y, z, x)) = (x, y, (x, x, z))$, т. е. $(x, x, (x_4, x, x_5)) + (x, x_4, (x, x, x_5)) = 0$; полная линеаризация последнего равенства дает

$$0 = \sum_{\sigma \in G} \{(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, (x_4, x_{3\sigma}, x_5)) + (x_{1\sigma}, x_4, (x_{2\sigma}, x_{3\sigma}, x_5))\} \equiv$$

$$\equiv \sum_{\sigma \in G} (x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, (x_4, x_{3\sigma}, x_5)),$$

откуда ввиду (62) и (63) $0 \equiv (x_2, x_1, (x_4, x_3, x_5)) + ((x_3, x_1, (x_4, x_2, x_5)) + (x_3, x_2, (x_4, x_1, x_5)) \equiv (x_2, x_1, (x_4, x_3, x_5)) - 3(x_2, x_1, (x_4, x_3, x_5)) \equiv -2(x_2, x_1, (x_4, x_3, x_5))$, т. е.

$$(x_2, x_1, (x_4, x_3, x_5)) \equiv 0. \quad (64)$$

Из (61)—(64) следует, что если $i > j$, $k > l$, то $g_{ijkl} \equiv 0$.

Итак, $V = V_0$. Докажем теперь, что элементы вида (60):

$$\begin{array}{llll} e_1, e_2 & e_3 = g_{4123}, & e_4 = g_{4213}, & \\ e_5 = g_{4312}, & e_6 = g_{1423}, & e_7 = g_{1432}, & e_8 = g_{2413}, \\ e_9 = g_{2431}, & e_{10} = g_{3412}, & e_{11} = g_{3421}, & e_{12} = g_{2341}, \\ e_{13} = g_{1342}, & e_{14} = g_{1243}, & e_{15} = g_{2314}, & e_{16} = g_{3214}, \\ e_{17} = g_{1324}, & e_{18} = g_{3214}, & e_{19} = g_{1234}, & e_{20} = g_{2134} \end{array}$$

линейно независимы в алгебре A. Допустим, что в алгебре A выполняется тождество

$$\sum_{i=1}^{20} \lambda_i e_i = 0. \tag{65}$$

Рассмотрим всевозможные специализации тождества (65) вида $x_i = z$, $x_j = x_k = x$, $x_r = x_s = y$. Всего таких специализаций 15. Каждая из них дает два уравнения относительно λ_i. Так, например, если $x_1 = z$, $x_2 = x_3 = x$, $x_4 = x_5 = y$, то, используя (14), легко получаем

$$(3\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 - \lambda_9 - \lambda_{11} + \lambda_{13} + \lambda_{14})\bar{a} + \\ + (\lambda_3 - \lambda_6 - \lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_{10} + 3\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14})\bar{a}' = 0.$$

Поскольку в силу (38) $\bar{a}$ и $\bar{a}'$ линейно независимы, то

$$3\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 - \lambda_9 - \lambda_{11} + \lambda_{13} + \lambda_{14} = 0,$$
$$\lambda_3 - \lambda_6 - \lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_{10} + 3\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} = 0.$$

Тем самым, получается однородная система из 30-ти уравнений относительно 20 переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_{20}$. Можно проверить, что ранг этой системы уравнений равен 20, значит, она имеет только нулевое решение. Указанная процедура доказательства линейной независимости системы векторов $e_1, \ldots, e_{20}$ достаточно просто реализуется на ЭВМ.

3°. Докажем, наконец, что алгебра A не имеет тождеств степени шесть. Обозначим через W пространство, порожденное предбазисными ассоциаторами типа (в) от X_6. Используя (Т.7), (Т.10) и (Т.11), нетрудно проверить, что пространство W порождается элементами u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, t, где $u = h_{234}$, $v = h_{342}$, $w = h_{423}$, $h_{ijk} = (([x_1, x_i], x_j, x_k), x_5, x_6)$, $\bar{u} = u^{(45)}$, $\bar{v} = v^{(45)}$, $\bar{w} = w^{(45)}$, $t = (([x_1, x_2], x_4, x_5), x_3, x_6)$ (доказательство этого утверждения аналогично пункту (*ii*) леммы 10).

Докажем, что система u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, t линейно независима в алгебре A. Пусть в алгебре A

$$\alpha u + \beta v + \gamma w + \bar{\alpha}\bar{u} + \bar{\beta}\bar{v} + \bar{\gamma}\bar{w} + \delta t = 0.$$

Полагая $x_4 = x_5 = y$, имеем

$$(\alpha + \bar{\alpha})(([x_1, x_2], x_3, y), y, x_6) + (\beta + \bar{\beta})(([x_1, x_3], y, x_2), y, x_6) + \\ + (\gamma + \bar{\gamma})(([x_1, y], x_2, x_3), y, x_6) = 0.$$

Докажем, что ассоциаторы, участвующие в этом тождестве, линейно независимы в алгебре A. Пусть

$$(\lambda([x_1, x_2], x_3, y) + \mu([x_1, x_3], y, x_2) + \nu([x_1, y], x_2, x_3), y, x_6) = 0.$$

Полагая последовательно $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$, получаем в силу (39) $\mu + \nu = 0$, $\lambda + \nu = 0$, $\lambda + \mu = 0$. Следовательно, $2(\lambda + \mu + \nu) = 0$. Тогда $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Итак, $\alpha + \bar{\alpha} = \beta + \bar{\beta} = \gamma + \bar{\gamma} = 0$. Значит,

$$\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta t = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} + \gamma\bar{w}.$$

Считая $x_1^0 = x_2^0 = x$, $x_3^0 = x_5^0 = y$, $x_4^0 = x_6^0 = z$, имеем $u_0 = \bar{u}_0 = \bar{v}_0 = t_0 = 0$ Следовательно,

$$(\beta([x, y], z, x) + \gamma([x, z], x, y), y, z) = 0,$$

откуда $\beta + \gamma = 0$. Полагая последовательно $x_1 = x_5 = x$, $x_2 = x_3 = y$, $x_4 = x_6 = z$ и $x_1 = x_3 = x$, $x_2 = x_5 = y$, $x_4 = x_6 = z$, получаем $\alpha + \beta + \delta = 0$ и $\alpha + \gamma + \delta = 0$. Следовательно, $\beta = \gamma$. Значит, $\beta = \gamma = 0$, $\delta = -\alpha$; имеем $\alpha u - \alpha t = \alpha\bar{u}$. Положив $x_1 = x_4 = x$, $x_2 = x_5 = y$, $x_3 = x_6 = z$, получим $2\alpha = 0$, т. е. $\alpha = 0$.

Таким образом, алгебра A не имеет тождеств степени шесть. Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пчелинцев С. В.** Нильпотентность ассоциаторного идеала свободного конечнопорожденного (—1, 1)-кольца // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 5.— С. 543—571.
2. **Пчелинцев С. В.** О многообразиях, порожденных свободными алгебрами типа (—1, 1) конечного ранга // Сиб. мат. журн.— 1987.— Т. 28, № 2.— С. 211—220.
3. **Пчелинцев С. В.** О многообразии, порожденном свободной алгеброй типа (—1, 1) ранга 2 // Сиб. мат. журн.— 1981.— Т. 22, № 3.— С. 162—178.
4. **Роомельди Р. Э.** Центры свободного (—1, 1)-кольца // Сиб. мат. журн.— 1977.— Т. 18, № 4.— С. 861—876.
5. **Hentzel J. R.** The characterization of (—1, 1) rings // J. Algebra.— 1974.— V. 30, N 1—3.— P. 236—258.
6. **Kleinfeld E.** Right alternative rings // Proc. Amer. Math. Soc.— 1953.— V. 4, N 6.— P. 939—944.
7. **Пчелинцев С. В.** О многообразии алгебр типа (—1, 1) // Алгебра и логика.— 1986.— Т. 25, № 2.— С. 154—171.
8. **Пчелинцев С. В.** Нильпотентность ассоциаторов в свободном (1, 1)-кольце // Алгебра и логика.— 1974.— Т. 13, № 2.— С. 217—223.
9. **Thedy A.** Right alternative rings // J. Algebra.— 1975.— V. 37, N 1.— P. 1—43.
10. **Роомельди Р. Э.** Кольца типа (—1, 1): Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Новосибирск, 1974.
11. **Пчелинцев С. В.** Абсолютные делители нуля специальных йордановых алгебр // Алгебра и логика.— 1982.— Т. 21, № 6.— С. 706—720.
12. **Пчелинцев С. В.** Свободная (—1, 1)-алгебра с двумя порождающими // Алгебра и логика.— 1974.— Т. 13, № 4.— С. 425—449.

В. Г. СКОСЫРСКИЙ

СТРОГО ПЕРВИЧНЫЕ НЕКОММУТАТИВНЫЕ ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ

Общие исследования класса некоммутативных йордановых алгебр берут свое начало с работ А. А. Алберта и Р. Д. Шейфера [1, 2]. Так названы алгебры, удовлетворяющие тождествам $(x, y, x) = (x^2, y, x) = 0$ и их линеаризациям.

Отметим здесь другой, также достаточно хорошо известный, подход к определению некоммутативных йордановых алгебр. Если на том же пространстве A некоммутативной йордановой алгебры ввести новое умножение $a \odot b = (ab + ba)/2$, то новая алгебра $A^{(+)}$ будет, как известно, коммутативной йордановой алгеброй [1], при этом будет справедливо тождество $[x^2, y] = 2[x, y] \odot x$, где $[x, y] = xy - yx$. Легко видеть, что верно и обратное. А именно, если у некоторой алгебры A алгебра $A^{(+)}$ является йордановой и отображения $\mathrm{adj}(a)\colon x \mapsto [x, a]$ для всех $a \in A$ — дифференцирования алгебры $A^{(+)}$, то алгебра A некоммутативная йорданова. С этой точки зрения на некоммутативную йорданову алгебру A можно смотреть как на йорданову (коммутативную) алгебру J с определенной на ней дополнительной кососимметрической операцией $[\ ,\ ]\colon J \times J \to J$ такой, что $[x^2, y] = 2[x, y] \odot x$ для всех $x, y \in J$. Исходное умножение алгебры A легко при этом восстанавливается: $xy = x \odot y + (1/2)[x, y]$, где $x \odot y$ — умножение в J.

Строение конечномерных некоммутативных йордановых алгебр изучено в работах А. А. Алберта, Р. Д. Шейфера, А. А. Кокориса, Р. Х. Оемки, К. С. Смита, К. Мак-Криммона, И. П. Шестакова. Обзор результатов и литературу по этому вопросу можно найти в [3]. Нынешнее состояние этой теории вполне сравнимо с классической теорией Веддерберна конечномерных ассоциативных алгебр.

Наличие же достаточно содержательной теории некоммутативных йордановых алгебр без условий конечности долгое время казалось маловероятным (см., например, [4]). Поэтому часто на исследуемые некоммутативные йордановы алгебры накладывались достаточно сильные ограничения, например дополнительные тождества. Это приводило к изучению собственных подклассов некоммутативных йордановых алгебр та-