

Время выполнения рабочей программы составляет 5.42 с при $N = 61$ (см. табл. 1) и 9.43 с при $N = 101$ (см. табл. 2).

Необходимо отметить следующий факт. Чем ближе к нулю мы берем Z_1 , тем точнее в этой точке вычисляются коэффициенты пространственных и временных аберраций, а также начальные данные для расчета коэффициентов аберраций на отрезке $z_1 < z \leq ZA$. Однако при этом значения некоторых коэффициентов в точке $z = Z_1$ резко возрастают, что вызывает трудности при расчете этих коэффициентов. Эти трудности можно избежать, если взять более густую или неравномерную сетку или ввести больше дополнительных узлов. Такие возможности предусмотрены программой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Численные методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем/ В. П. Ильин, В. А. Катешов, Ю. В. Куликов, М. А. Монастырский.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.— 192 с.
2. Иванов В. Я. Методы автоматизированного проектирования приборов электроники.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986.
3. Глазер В. Основы электронной оптики.— М.: Гостехиздат, 1957.— 763 с.
4. Брюхе Е., Шерцер О. Геометрическая электронная оптика.— Л.: Газетно-журн. изд-во, 1943.— 393 с.
5. Куликов Ю. В., Монастырский М. А., Фейгин Х. И. Теория аберраций третьего порядка катодных линз. Аберрации катодных линз с комбинированными электрическими полями и магнитными полями // Радиотехника и электроника.— 1978.— Т. 23, № 1.— С. 167—174.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1971.— 576 с.
7. Монастырский М. А. Об асимптотике решений параксиального уравнения электронной оптики // ЖТФ.— 1978.— Т. 48, вып. 6.— С. 1117—1122.
8. Завьялов Ю. С., Квасов Б. Н., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.— 350 с.
9. Hairer E. A Runge-Kutta Method of Order 10 // J. Inst. Maths. Applics.— 1978.— V. 21.— P. 47—59.

С. К. ГОДУНОВ, Е. И. РОМЕНСКИЙ, Г. А. ЧУМАКОВ

ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СЕТОК В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ С ПОМОЩЬЮ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Работа посвящена описанию вычислительного алгоритма для построения криволинейных разностных сеток в сложных областях. Идея излагаемого ниже алгоритма является развитием работы [1], в которой предложен способ построения разностных сеток путем отыскания квазиконформного отображения данной области на квадрат. Это отображение является суперпозицией конформного и чебышевского и определяется путем минимизации некоторого функционала. Продолжением [1] является работа [2], в которой доказано существование специального квазиконформного отображения криволинейного шестиугольника на два сложенных квадрата. В этом случае возникает новый объект — эйлерова внутренняя граница, разделяющая исходную область на две подобласти с различными параметрами чебышевского отображения и которая находится из условия минимума соответствующего функционала. Название

«эйлерова граница» возникло по предложению А. В. Забродина [1] при использовании подвижных сеток в гидродинамических расчетах, когда внешняя граница связана с лагранжевыми координатами и ее движение является следствием движения вещества. Вводимые при раскрое эйлеровы границы с веществом не связаны и разрезают область по некоторым линиям, закон движения которых задается в геометрических (эйлеровых) координатах. Наше предложение состоит в том, чтобы определять положение эйлеровой границы из условия минимума соответствующего функционала. Отметим также, что при данном способе построения разностной сетки, точкам, лежащим на границах области (за исключением вершин шестиугольника), разрешается двигаться по этим границам.

В данной работе описана методика построения разностных сеток, основанная на отыскании квазиконформного отображения на сложную структуру из нескольких квадратов, содержащую большое число эйлеровых границ. Основной задачей при таком подходе является отыскание раскроя данной области, позволяющего получить достаточно хорошие разностные сетки.

Описанная методика иллюстрируется соответствующими примерами. Подход состоит в отыскании преобразования координат $x, y \rightarrow \xi, \eta$, которое позволяет осуществить квазиконформное отображение физической области на каноническую область в преобразованной плоскости — многоугольник, составленный из нескольких квадратов или прямоугольников.

Расчет сетки означает нахождение координат узлов, т. е. точек пересечения координатных линий криволинейной системы координат, связанной с границами области. По определению, в такой системе координат каждая часть границы физической области принадлежит какой-либо координатной линии. Такая система позволяет определить численное решение уравнений с частными производными на канонической квадратной сетке в криволинейной системе координат, используя в качестве независимых соответствующие криволинейные (вместо декартовых) координаты.

Ниже мы приведем необходимые формулы, а сейчас дадим словесное описание метода построения разностных сеток в областях сложной формы. Сначала двумерная область разбивается на несколько соприкасающихся блоков или счетных областей. Каждый блок выбирается топологически эквивалентным квадрату, т. е. имеет четыре вершины и четыре стороны. Вершины криволинейных четырехугольников выбираются на границе физической области. Начальные границы раздела соседних подобластей — искусственно выделенные линии, не имеющие физического смысла, которые для краткости будем называть эйлеровыми границами, выбираются пользователем и могут быть криволинейными. В описанном подходе допустим произвол в разбиении области на блоки с учетом тех или иных особенностей протекания физических процессов, для изучения которых строится сетка.

Далее описываются для каждой из соприкасающихся подобластей четыре ее граничных сегмента и в каждой подобласти строится начальная сетка, например интерполяцией. После этого в процессе итераций вершины криволинейных четырехугольников остаются неизменными, а эйлеровы границы, внутренние точки сетки в подобластях и внутренние точки границ области изменяются в процессе итераций и находятя из условия минимума некоторого функционала. В полученной криволинейной системе координат каждый блок будет представлять собой квадрат или прямоугольник, который будем называть его образом.

Описанный метод обладает важным достоинством: распределение граничных и внутренних узлов сетки определяется только геометрической формой границы и заданным распределением узловых точек соприкасающихся подобластей, поскольку для того, чтобы правильно выбрать соответствующую «конформному» преобразованию координат расстановку точек на границах области, в ряде случаев требуется неоправданно большое количество проб.

**§ 1. УРАВНЕНИЯ И АЛГОРИТМ
ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СЕТОК**

Для численного построения разностных сеток в областях сложной формы С. К. Годунов предложил рассматривать класс квазиконформных отображений физической области на область, составленную из нескольких квадратов, для которого

$$dx + idy = e^{p(\xi, \eta) + iq(\xi, \eta)} [e^{\alpha(\xi, \eta) + i\beta(\xi, \eta)} d\xi + ie^{q(\xi, \eta) + i\beta(\xi, \eta)} d\eta]. \quad (1.1)$$

Этот класс отображений содержит четыре произвольные функции $p(\xi, \eta)$, $q(\xi, \eta)$, $\alpha(\xi, \eta)$, $\beta(\xi, \eta)$, удовлетворяющие условиям

$$p_\eta(\xi, \eta) = q_\xi(\xi, \eta) = \alpha_\eta(\xi, \eta) = \beta_\xi(\xi, \eta) = 0. \quad (1.2)$$

Конечно p , q , α , β должны здесь удовлетворять условию интегрируемости дифференциала $dx + idy$. Если каноническая область является выпуклой по переменной ξ , то условие (1.2) означает, что q , β — функции одного аргумента η , аналогично, если каноническая область выпукла по переменной η , то условие (1.2) означает, что p , α — функции одного аргумента ξ .

Отображения класса (1.1) состоят из суперпозиции двух отображений. Сначала физическая область конформно отображается на промежуточную область, составленную из нескольких параллелограммов. Отношения сторон параллелограммов и их углы являются конформными инвариантами промежуточной области. Один из вариантов, а именно угол в каком-либо параллелограмме или сумма углов двух каких-либо параллелограммов, может быть произвольно наперед задан. Остальные же инварианты промежуточной области заранее неизвестны и должны быть определены в процессе расчета. Затем при помощи чебышевского отображения промежуточная область отображается на каноническую — многоугольник, составленный из нескольких квадратов.

Анализ ситуации, когда физическая область разбивается на два блока, был проведен в работе В. М. Гордиенко [2]. В этом случае показано, что указанный выше класс квазиконформных отображений состоит из суперпозиции конформного отображения криволинейного шестиугольника на область, составленную из двух сложенных параллелограммов, один угол которой произвольно наперед задан, и чебышевского отображения пары сложенных параллелограммов на пару сложенных квадратов.

Рассмотрим квазиконформное отображение, описываемое функциями $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, из класса (1.1). Каждое такое отображение задает метрику, соответствующую положительно определенной форме

$$dx^2 + dy^2 = \lambda^2 [g_{11}d\xi^2 + g_{12}d\xi d\eta + g_{22}d\eta^2], \quad (1.3)$$

где $g_{11} = e^{2p}$, $g_{22} = e^{2q}$, $g_{12} = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}} \sin(\alpha - \beta)$, $\lambda = e^{p(\xi, \eta)}$. Действительно, преобразуем (1.1) к виду

$$dx + idy = [a \cos \varphi(\xi, \eta) - b \sin \varphi(\xi, \eta) + i(a \sin \varphi(\xi, \eta) + b \cos \varphi(\xi, \eta))], \quad (1.4)$$

где

$$a = e^p \cos \alpha d\xi - e^q \sin \beta d\eta, \quad b = e^p \sin \alpha d\xi + e^q \cos \beta d\eta.$$

Из (1.4) непосредственно получаем

$$dx^2 + dy^2 = e^{2p(\xi, \eta)} (a^2 + b^2) = e^{2p(\xi, \eta)} [e^{2p} d\xi^2 + 2e^{p+q} \sin(\alpha - \beta) d\xi d\eta + e^{2q} d\eta^2],$$

что и требовалось доказать.

Задачу об отыскании функций p , q , α , β можно сформулировать как вариационную задачу о минимизации функционала

$$\Phi = \int_D \frac{g_{22}(x_\xi^2 + y_\xi^2) - 2g_{12}(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) + g_{11}(x_\eta^2 + y_\eta^2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} d\xi d\eta$$

или, эквивалентно,

$$\Phi = \int_D \frac{e^{q-p} (x_\xi^2 + y_\xi^2) - 2 \sin(\alpha - \beta) (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) + e^{p-q} (x_\eta^2 + y_\eta^2)}{\cos(\alpha - \beta)} d\xi d\eta. \quad (1.5)$$

Мы будем рассматривать для функционала (1.5) следующую вариационную задачу. Среди всех функций, обладающих свойствами

1) $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ определены на канонической области D ,
 2) на границе ∂D области D они определены так, что устанавливаются взаимно однозначное соответствие между точками границы канонической области и точками границы физической области,

3) $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ продолжаютс я внутрь области D произвольным образом, но так, чтобы функционал (1.5) был ограничен, найти те, которые доставляют функционалу Φ наименьшее возможное значение. Функции, удовлетворяющие этому условию, называются *экстремальными* для функционала Φ . Всякая пара экстремальных функций $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ для функционала (1.5) является решением следующих эллиптических уравнений:

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial x}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} B \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (1.6)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial y}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} B \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (1.7)$$

где

$$A = \frac{e^{q-p}}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad B = \operatorname{tg}(\alpha - \beta), \quad C = \frac{e^{p-q}}{\cos(\alpha - \beta)}. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.6) есть не что иное, как уравнение Эйлера — Лагранжа для функционала (1.5), минимизируемого только по переменной x , а уравнение (1.7) есть уравнение Эйлера — Лагранжа для функционала (1.5), минимизируемого только по переменной y . Величины $p - q$ в каждом блоке вычисляются по текущим значениям $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ по формуле

$$p - q = \ln \sqrt{\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{x_\eta^2 + y_\eta^2}}. \quad (1.9)$$

Величины же $\alpha - \beta = \gamma$ в каждом блоке могут задаваться одним из трех способов:

- 1) величина γ в блоке наперед задана, т. е. $\gamma = \gamma^0$;
- 2) величина γ в блоке находится из условия минимума функционала (1.5), т. е.

$$\gamma = \arcsin \frac{x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}}; \quad (1.10)$$

3) в случае, когда мы хотим задать разность величин $\gamma_2 - \gamma_1 = \omega$ для двух соприкасающихся параллелограммов, то для определения γ_i используется итерационный процесс

$$\sin \gamma_1^{(n+1)} = \frac{b_1 \cos^2 \gamma_2^{(n)} + b_2 \cos^2 \gamma_1^{(n)} - a_2 \cos^2 \gamma_1^{(n)} (\sin \gamma_2^{(n+1)} - \sin \gamma_1^{(n)})}{a_1 \cos^2 \gamma_2^{(n)} + a_2 \cos^2 \gamma_1^{(n)}}, \quad (1.11)$$

$$\sin \gamma_2^{(n+1)} = \sin \gamma_1^{(n)} + \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} (\cos \gamma_2^{(n)} + \cos \gamma_1^{(n)}), \quad (1.12)$$

который также вытекает из алгебраического условия минимума функционала (1.5); величины a_i, b_i ($i = 1, 2$) в каждом блоке вычисляются по формулам

$$a = 2\sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2)}, \quad b = 2(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta). \quad (1.13)$$

Отметим, что под символами $x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2$, $x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2$, $x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}$ в формулах (1.9), (1.10), (1.13) имеются в виду некоторые усредненные по рассматриваемому блоку величины. Ниже, в § 2, мы приведем все необходимые формулы.

§ 2. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СЕТОК

Цель настоящего параграфа — изложение численной реализации метода расчета квазиконформных отображений. Сначала мы дадим необходимые определения и опишем разностную форму функционала Φ .

Счетную область G на плоскости x, y будем представлять из множества соприкасающихся подобластей — четырехугольников с криволинейными границами (блоков). Границы блоков для наглядности назовем нижней, верхней, левой и правой. Отметим, что допускается стягивание границ в точку. В каждом блоке сетка задается совокупностью координат ее узлов $\{x_{kj}, y_{kj}\}$, $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, J$, где K, J согласованы для соприкасающихся подобластей. Границы соприкасающихся подобластей задаются, таким образом, дважды. Соединяя отрезками прямых узлы с соседними номерами k и $k + 1$ при фиксированном j , получим совокупность «горизонтальных» линий сетки ($j = 1, \dots, J$).

Аналогично, соединяя отрезками прямых узлы с соседними номерами j и $j + 1$ при фиксированном k , получаем совокупность «вертикальных» линий сетки ($k = 1, \dots, K$). Четырехугольник с вершинами (x_{kj}, y_{kj}) , (x_{k-1j}, y_{k-1j}) , (x_{k-1j-1}, y_{k-1j-1}) , (x_{kj-1}, y_{kj-1}) назовем ячейкой $(k - 1/2, j - 1/2)$. В программах мы использовали нумерацию ячеек (k, j) , где $2 \leq k \leq K$, $2 \leq j \leq J$. Таким образом, каждый блок расчетной области G оказывается разрезанным на $(K - 1)(J - 1)$ ячеек, которые предполагаются не налегающими друг на друга. Начальная расстановка точек на контуре счетной области осуществляется вычислителем исходя из конкретных особенностей задачи. Однако в ходе расчета узлов сетки избранный вначале закон расстановки точек вдоль границ физической области, кроме вершин блоков, может изменяться.

Будем предполагать, что для каждого блока каждая из четырех границ задается парой функций x, y , которые аппроксимируются достаточно густой таблицей точек. Пусть эти таблицы содержат по K точек для нижней и верхней границ и по J точек для левой и правой границ. Если вычислитель не задает начального расположения внутренних узлов сетки, то предусмотрена интерполяция координат между нижними и верхними границами блоков.

Теперь мы обратимся к изложению разностных уравнений для систем (1.6), (1.7) и разностного аналога для функционала (1.5). Поскольку дифференциальные уравнения (1.6), (1.7) инвариантны относительно растяжения ξ и η , можно полагать шаги сетки $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$. В этом случае каноническая область в преобразованной плоскости будет состоять из нескольких соприкасающихся прямоугольников. Аппроксимацию производных, входящих в (1.5), (1.9), (1.10), (1.13), осуществим посредством разностных соотношений

$$x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \approx \frac{1}{2} [(x_{kj} - x_{k-1j})^2 + (x_{kj-1} - x_{k-1j-1})^2 + (y_{kj} - y_{k-1j})^2 + (y_{kj-1} - y_{k-1j-1})^2] \equiv R_{k-1/2j-1/2}, \quad (2.1)$$

$$x_{\eta}x_{\xi} + y_{\eta}y_{\xi} \approx \frac{1}{4} [(x_{kj} - x_{kj-1} + x_{k-1j} - x_{k-1j-1})(x_{kj} - x_{k-1j} + x_{kj-1} - x_{k-1j-1}) + (y_{kj} - y_{kj-1} + y_{k-1j} - y_{k-1j-1})(y_{kj} - y_{k-1j} + y_{kj-1} - y_{k-1j-1})] \equiv M_{k-1/2j-1/2}, \quad (2.2)$$

$$(x_n^2 + y_n^2) \approx \frac{1}{2} [(x_{kj} - x_{kj-1})^2 + (x_{k-1j} - x_{k-1j-1})^2 + (y_{kj} - y_{kj-1})^2 + (y_{k-1j} - y_{k-1j-1})^2] \equiv L_{k-1/2j-1/2}, \quad (2.3)$$

где $2 \leq k \leq K$, $2 \leq j \leq J$. Предположим, что физическая область разбита на N блоков. Каждому блоку присвоим индекс n , $1 \leq n \leq N$. Разностную аппроксимацию минимизируемого функционала (1.5) определим сначала для блока с номером n :

$$\Phi_n = \sum_{k=2}^{K_n} \sum_{j=2}^{J_n} [A_n R_{k-1/2j-1/2}^n - 2B_n M_{k-1/2j-1/2}^n + C_n L_{k-1/2j-1/2}^n]. \quad (2.4)$$

Функции A , B , C будем считать заданными совокупностью значений $\{A_n, B_n, C_n, n = 1, \dots, N\}$, «приписанных» блокам, а функции L , M , R будем определять совокупностью значений

$$\{L_{k-1/2j-1/2}^n, M_{k-1/2j-1/2}^n, R_{k-1/2j-1/2}^n, k = 2, \dots, K_n, j = 2, \dots, J_n, n = 1, \dots, N\},$$

которые «приписаны» ячейкам сетки в соответствующих блоках. Пусть

$$R_n = \sum_{k=2}^{K_n} \sum_{j=2}^{J_n} R_{k-1/2j-1/2}^n, \quad L_n = \sum_{k=2}^{K_n} \sum_{j=2}^{J_n} L_{k-1/2j-1/2}^n, \quad M_n = \sum_{k=2}^{K_n} \sum_{j=2}^{J_n} M_{k-1/2j-1/2}^n. \quad (2.5)$$

Разностная аппроксимация функционала (1.5) в силу аддитивности интеграла будет иметь вид

$$\Phi = \sum_{n=1}^N \Phi_n = \sum_{n=1}^N (A_n R_n - 2B_n M_n + C_n L_n). \quad (2.6)$$

Формулы для коэффициентов A_n , B_n , C_n , входящих в (2.6), основываются на (1.8) — (1.13):

$$A_n = \frac{1}{S_n \cos \gamma_n}, \quad B_n = \operatorname{tg} \gamma_n, \quad C_n = \frac{S_n}{\cos \gamma_n}, \quad (2.7)$$

где $S_n = \sqrt{R_n/L_n}$.

Величина γ_n в блоке с номером n вычисляется одним из трех способов:

- 1) $\gamma_n = \gamma_0$, т. е. величина γ_n наперед задана;
- 2) $\gamma_n = \arcsin(M_n/\sqrt{R_n L_n})$, т. е. величина γ_n находится из условия минимума функционала;
- 3) в случае, если мы хотим задать разность величин $\gamma_l - \gamma_m = \omega$ для двух соприкасающихся блоков с индексами l и m , то для определения γ_l , γ_m будем использовать итерационный процесс

$$\sin \gamma_l^{(i+1)} = \frac{b_1 \cos^2 \gamma_m^{(i)} + b_2 \cos^2 \gamma_l^{(i)} - a_2 \cos^2 \gamma_l^{(i)} (\sin \gamma_m^{(i+1)} - \sin \gamma_l^{(i)})}{a_1 \cos^2 \gamma_m^{(i)} + a_2 \cos^2 \gamma_l^{(i)}},$$

$$\sin \gamma_m^{(i+1)} = \sin \gamma_l^{(i)} + \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} (\cos \gamma_m^{(i)} + \cos \gamma_l^{(i)}),$$

где $a_j = 2\sqrt{R_j L_j}$, $b_j = 2M_j$, $j = 1, 2$, а $\gamma_l^{(i)}$, $\gamma_m^{(i)}$ — величины γ_l , γ_m из предыдущей итерации. В качестве $\gamma_l^{(0)}$, $\gamma_m^{(0)}$ можно взять для $0 < \alpha < 1$

$$\gamma_l^{(0)} = \frac{1}{2} \left[\arcsin \frac{M_l}{\sqrt{R_l L_l}} + \arcsin \frac{M_m}{\sqrt{R_m L_m}} \right] - \alpha \omega,$$

$$\gamma_m^{(0)} = -\frac{1}{2} \left[\arcsin \frac{M_l}{\sqrt{R_l L_l}} + \arcsin \frac{M_m}{\sqrt{R_m L_m}} \right] - (1 - \alpha) \omega.$$

Теперь мы изложим алгоритм. На первом этапе в каждом блоке на имеющейся сетке, полученной на предыдущей итерации, вычисляются

коэффициенты A, B, C . (Здесь и там, где это не вызывает разночтения, нижний индекс n мы будем опускать.) Далее, при фиксированных значениях коэффициентов A, B, C выполняются несколько итераций по пересчету внутренних точек сетки в каждом блоке. При этом используется явный итерационный процесс, определяемый равенством

$$z_{kj}^{(i+1)} = z_{kj}^{(i)} - \theta^{(i)} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{kj}}, \quad (2.8)$$

где z — координата x или y внутренней точки сетки. Величина $\theta^{(i)}$ в каждом блоке задается формулой $\theta^{(i)} = \theta / (2(A + C) + |B|)$, где θ — обычный релаксационный параметр, который может изменяться в процессе итераций ($0 < \theta < 2$). Величина $\frac{\partial \Phi}{\partial z_{kj}}$ в (2.8) вычисляется по формуле

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_{kj}} = 4(A + C)z_{kj} - [G(k + 1/2, j - 1/2) + G(k + 1/2, j + 1/2) + G(k - 1/2, j + 1/2) + G(k - 1/2, j - 1/2)], \quad (2.9)$$

где

$$G(k + 1/2, j \mp 1/2) = Az_{k+1j} \pm Bz_{k+1j-j} + Cz_{kj-1}, \quad (2.10)$$

$$G(k - 1/2, j \mp 1/2) = Az_{k-1j} \mp Bz_{k-1j-1} + Cz_{kj-1}.$$

На втором этапе при фиксированных значениях коэффициентов A, B, C , полученных на первом этапе итерационного процесса, выполняется несколько итераций по пересчету эйлеровых границ в каждом блоке. Эйлеровы границы будем рассматривать двух видов:

1) эйлерова граница между левым и правым блоками,

2) эйлерова граница между нижним и верхним блоками.

Пусть в первом случае левому блоку соответствуют коэффициенты A_l, B_l, C_l и функции G_l и пусть левый блок имеет K точек на нижней границе. Аналогично предположим, что коэффициенты A_r, B_r, C_r и функции G_r соответствуют правому блоку. Тогда для пересчета эйлеровой границы первого вида, для которой $z_{kj}^l = z_{lj}^r$ для всех j , имеем явный итерационный процесс

$$(z_{lj}^r)^{(i+1)} = (z_{lj}^r)^{(i)} - \theta_{\min} [2(A_r + C_r)z_{lj}^r - (G_r(1 + 1/2, j - 1/2) + G_r(1 + 1/2, j + 1/2)) + 2(A_l + C_l)z_{kj}^l - (G_l(K - 1/2, j + 1/2) + G_l(K + 1/2, j - 1/2))], \quad (2.11)$$

где

$$\theta_{\min} = \min \left\{ \frac{\theta_l}{2(A_l + C_l) + |B_l|}, \frac{\theta_r}{2(A_r + C_r) + |B_r|} \right\}. \quad (2.12)$$

Рассмотрим теперь второй вид эйлеровой границы. Пусть нижнему блоку соответствуют коэффициенты A_d, B_d, C_d и функции G_d и пусть нижний блок имеет J точек на левой границе. Кроме того, введем коэффициенты A_u, B_u, C_u и функции G_u для верхнего блока. Тогда для пересчета эйлеровой границы второго вида, для которой $z_{kJ}^d = z_{k1}^u$, имеем явный итерационный процесс

$$(z_{kJ}^d)^{(i+1)} = (z_{kJ}^d)^{(i)} - \theta_{\min} [2(A_d + C_d)z_{kJ}^d - (G_d(k - 1/2, J - 1/2) + G_d(k + 1/2, J - 1/2)) + 2(A_u + C_u)z_{k1}^u - (G_u(k - 1/2, 1 + 1/2) + G_u(k + 1/2, 1 + 1/2))], \quad (2.13)$$

где

$$\theta_{\min} = \min \left\{ \frac{\theta_d}{2(A_d + C_d) + |B_d|}, \frac{\theta_u}{2(A_u + C_u) + |B_u|} \right\}. \quad (2.14)$$

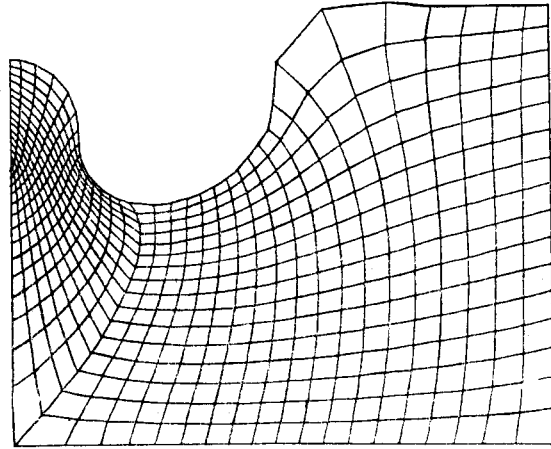


Рис. 1.

Наконец, на третьем этапе при фиксированных значениях коэффициентов A, B, C , полученных на первом этапе итерационного процесса, выполняется несколько итераций по пересчету точек границ области в каждом блоке. Каждая итерация организована следующим образом. Сначала для точек сетки, принадлежащих какой-либо свободной границе, находим величину смещения для координат x и y . При этом используется алгебраическое уравнение, которое получается из условия минимума функционала (1.5)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_{kj}} = 0. \quad (2.15)$$

Компоненты вектора смещения Δz_{kj} для z_{kj} имеют вид соответственно для левой границы

$$\Delta z_{kj} = \frac{G(k+1/2, j-1/2) + G(k+1/2, j+1/2)}{2(A+C)} - z_{kj}, \quad (2.16)$$

для правой границы

$$\Delta z_{kj} = \frac{G(k-1/2, j+1/2) + G(k-1/2, j-1/2)}{2(A+C)} - z_{kj}, \quad (2.17)$$

а для нижней и верхней границ имеют место аналогичные формулы. Затем вычисляем единичный касательный вектор (q, p) к границе области в рассматриваемой точке (x_{kj}, y_{kj}) и находим новые координаты

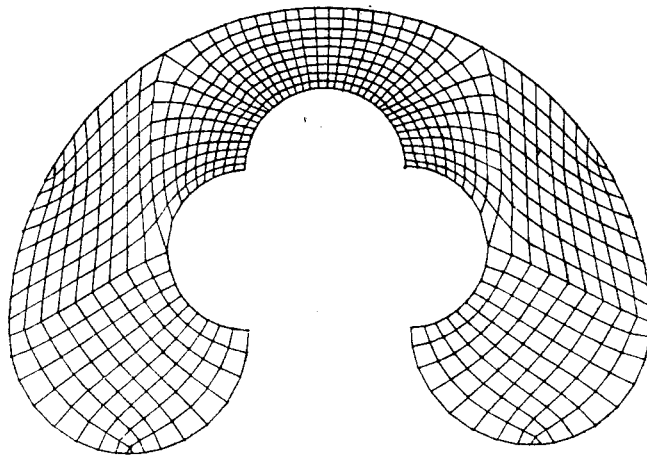


Рис. 2.

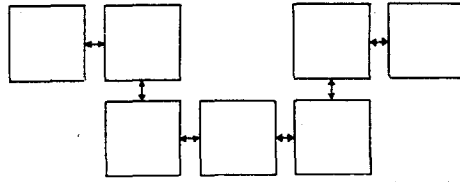


Рис. 3.

по формулам

$$x_{kj}^{(i+1)} = x_{kj}^{(i)} + sq, \quad y_{kj}^{(i+1)} = y_{kj}^{(i)} + sp, \quad (2.18)$$

где $s = (\Delta x_{kj}^{(i)} q + \Delta y_{kj}^{(i)} p) d$, d — демпфирующий множитель, $d > 0$. Координаты этих вновь полученных точек и задают новое положение граничных точек.

Сейчас мы приведем несколько примеров сеток, построенных с помощью описанного алгоритма. Сетка на рис. 1 получена по алгоритму, используемому в качестве конформного прообраза пару сложенных параллелограммов. На рис. 2 приведена сетка для области, которая давно используется как тестовый пример [1]. Мы улучшили сетку, построенную в [1], за счет изменения квазиконформного прообраза. Если прежде в качестве прообраза выбирался квадрат или прямоугольник, то теперь мы взяли многоугольник, составленный из семи прямоугольников (рис. 3), вследствие чего сетка стала гораздо более равномерной.

Мы используем следующий алгоритм для вычисления касательного вектора к границе физической области. По заданным трем точкам $(x, y)_{i-1}$, $(x, y)_i$, $(x, y)_{i+1}$ строим окружность, за параметр которой примем угол φ с вершиной в точке $i-1$, опирающийся на дугу i , $i+1$, и определим касательный вектор к этой окружности в точке i . Таким образом, касательный вектор (q, p) вычисляется по формулам $q = (x_{i+1} - x_i) \cos \varphi - (y_{i+1} - y_i) \sin \varphi$, $p = (x_{i+1} - x_i) \sin \varphi + (y_{i+1} - y_i) \cos \varphi$, где

$$\sin \varphi = \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) - (x_i - x_{i-1})(y_{i+1} - y_{i-1})}{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Численное решение многомерных задач газовой динамики/С. К. Годунов, Л. В. Забродин, М. Я. Иванов и др.— М.: Наука, 1976.— 400 с.
2. Гордиенко В. М. О конформном отображении шестиугольника // Численные методы механики сплошной среды.— 1976.— № 4.— С. 57—60.

Е. И. РОМЕНСКИЙ

МЕТОД РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА

В данной работе описана явная разностная схема Годунова первого порядка точности для нелинейной модели Максвелла упругопластической среды с релаксацией касательных напряжений. Схема Годунова для задач газовой динамики изложена в [1], в настоящее время она получила развитие в виде схем высокого порядка точности [2]. Уравнения, с которыми ниже придется иметь дело, впервые были сформулированы в [3] и более подробно описаны в [4]. Отметим, что тех-