РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ, ТОМ 19

А. А. БОРОВКОВ А. А. МОГУЛЬСКИЙ

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ И ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Ответственный редактор
академик *М. М. Лаврентьев*

НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1992

ВВЕДЕНИЕ

Более точное (и более длинное) название книги могло бы быть таким: «Большие уклонения и статистические выводы, касающиеся проверки сложных параметрических статистических гипотез». По своей сути и структуре книга близка к большой целенаправленной статье, посвященной новым результатам в названной области, большинство из которых публикуется впервые.

Книга состоит из пяти глав. Две первые главы носят в известной мере предварительный характер, хотя они представляют на наш взгляд и самостоятельный интерес. Главы III, IV посвящены собственно теории статистических критериев для проверки параметрических гипотез, построенной на концепции больших уклонений; глава V — выводу качественно новых следствий, вытекающих из содержания глав III, IV, и сравнению этих результатов с уже известными, в частности, с результатами, касающимися эффективности критериев по Бахадуру и Ходжесу — Леману.

Глава I называется «Интегральные и локальные равномерные теоремы о больших уклонениях (б. у.) сумм случайных векторов». Она содержит как «грубые» (для асимптотики логарифмов распределений), так и точные (для асимптотики самих распределений) теоремы, связанные с аппроксимацией вероятностей

$$\mathbf{P}(S_n/n \in V) \to 0, \tag{1}$$

где $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ (ξ_i — независимые, одинаково распределенные случайные векторы), V — произвольные множества. Распределение F вектора ξ_i и множество V зависят от n, но таким образом, чтобы выполнялось (1). Полученные асимптотические представления для вероятности (1) являются равномерными по паре (F, V) из конкретного, четко описанного класса. Здесь также приведены локальные теоремы (грубые и точные) о распределении S в области б. у. В отдельный параграф выделено изучение свойств так называемых функций уклонений, которые используются (и играют важную, определяющую роль) на протяжении всей книги.

Глава II посвящена рассмотрению равномерных интегральных теорем о вероятностях б. у. точки максимума сумм большого числа одинаково распределенных полей. Применительно к задачам математической статистики результаты их рассмотрения можно использовать в задаче, когда по выборке X объема n из распределения $\mathbf{P}_\theta$ оценивается параметр θ. В частности, из этих результатов можно немедленно получить описание вероятностей б. у. (во всем спектре уклонений) оценок максимального правдоподобия параметра θ. Главная же цель главы II — равномерные приближения (в области б. у.) распределений для двух типов функционалов от случайных полей (см. § 5); эти функционалы мы называем соответственно статистиками отношения правдоподобия и статистиками байесовского типа (см. формулы (5), (7)).

В главе III рассматриваются основные статистические задачи, связанные с проверкой сложных параметрических статистических гипотез. Они состоят в том, что по выборке X_n объема n из распределения $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in R^k$, $k \geqslant 1$, нужно принять одну из двух сложных гипотез: $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$ или $H_2 = \{\theta \in \Theta_2\}$, где Θ_1 и Θ_2 — два непересекающихся подмножества в k-мерном евклидовом пространстве R^k. При этом нашей главной целью является отыскание оптимальных в том или ином смысле тестов, когда объем выборки n неограниченно возрастает. Для фиксированного n оптимальные решения в этой задаче удается найти крайне редко — при очень специальных ограничениях относительно множеств Θ_i (в основном при $k=1$) и распределений $\mathbf{P}_\theta$ [1]. Для произвольных Θ_i и $\mathbf{P}_\theta$ доступными оказываются лишь асимптотические подходы, когда $n \to \infty$.

Существует по крайней мере два таких подхода, основанных на разных (хотя и не полностью альтернативных) предположениях и на разной математической технике.

Первый подход достаточно хорошо изучен и связан с близкими (контигуальными) гипотезами, когда предполагается, что множества Θ_i зависят от n и сближаются так, что расстояние между ними (например, евклидово) имеет порядок малости $n^{-1/2}$. Пусть, например, множества Θ_i имеют вид $\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}}\Gamma_i$, где множества Γ_i от n не зависят. Тогда, если сделать замену параметра $\theta = \theta_0 + \gamma n^{-1/2}$, то гипотезы H_i можно представить в виде $\{\gamma \in \Gamma_i\}$. В этом случае хорошо известные результаты об асимптотическом представлении логарифмической функции правдоподобия и об асимптотической нормальности оценки максимального правдоподобия позволяют редуцировать исходную задачу проверки гипотез H_i (назовем ее задачей (A)) к более простой задаче (задаче (B)) о проверке по одному наблюдению гипотез $h_i = \{\gamma \in \Gamma_i\}$ для параметра сдвига γ нормального распределения $\Phi_{\gamma, I^{-1}}$, где I^{-1} — фиксированная матрица, обратная к информационной матрице Фишера для распределения $\mathbf{P}_\theta$ в точке $\theta = \theta_0$.

Схема этой редукции такова. Пусть распределение $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$, имеет плотность $f_\theta(x)$ относительно некоторой меры μ в фазовом пространстве $\mathscr{X}_n$ наблюдений x_i, $i = 1, \ldots, n$, и пусть $f_\theta(X) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$ есть функция правдоподобия выборки $X = (x_1, \ldots, x_n)$. В силу второй фундаментальной теоремы теории статистических игр (см., например [2]) при выполнении некоторых условий регулярности для $\mathbf{P}_\theta$ класс байесовских тестов для проверки H_1 и H_2 образует полный минимальный класс статистических решений (минимальный класс наилучших тестов, среди которых находятся, в частности, минимаксные тесты и равномерно наиболее мощные критерии, если последние существуют и т. д.). Но вид байесовских тестов хорошо известен — это тесты $T(X)$ ($T(X)$ есть вероятность принятия гипотезы H_2), для которых $T(X) = 1$, если

$$S(X) \equiv \frac{\int_{\Gamma_2} f_{\theta_0 + u/\sqrt{n}}(X)\, Q_2(du)}{\int_{\Gamma_1} f_{\theta_0 + u\sqrt{n}}(X)\, Q_1(du)} > c, \tag{2}$$

где Q_1 и Q_2 — априорные распределения на Γ_1 и Γ_2, $c = p_2^{-1} - 1$, p_2 — априорная вероятность гипотезы H_2. Варьируя Q_1, Q_2, p_2, мы получим все мыслимые байесовские тесты. Вместо $f_{\theta_0 + u\sqrt{n}}(X)$ в числитель и знаменатель (2) поставим отношение

$$f_{\theta_0 + u/\sqrt{n}}(X)/f_{\theta_0}(X).$$

Логарифм этого отношения разложим в ряд около точки максимума $u = \gamma^*$:

$$z(u) \equiv \ln f_{\theta_0+u/\sqrt{n}}(X) - \ln f_{\theta_0}(X) = z(\gamma^*) - \frac{1}{2}(u-\gamma^*) I (u-\gamma^*)^{\mathrm{T}} + \ldots, \tag{3}$$

где $\gamma^* = (\theta^* - \theta_0)\sqrt{n}$, θ^* — оценка максимального правдоподобия параметра θ по выборке X (см. [1]). Нетрудно понять теперь, что критерий (2) асимптотически эквивалентен (в подходящем смысле) критерию $\pi(\gamma^*)$, где $\pi(Y) = 1$, если

$$S(Y) \equiv \frac{\int\limits_{\Gamma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}(Y-u) I (Y-u)^{\mathrm{T}}\right) Q_2(du)}{\int\limits_{\Gamma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}(Y-u) I (Y-u)\right)^{\mathrm{T}} (Q_1)(du)} > c. \tag{4}$$

Действительно, величина γ^* при $X \in \mathbf{P}_\theta$, $\theta = \theta_0 + \frac{\gamma}{\sqrt{n}}$, распределена асимптотически нормально с параметрами (γ, I^{-1}). Но (4) образует семейство байесовских тестов для задачи (B) о проверке гипотез

$$h_i = \{\gamma \in \Gamma_i\}$$

о параметре сдвига γ нормального распределения $\Phi_{\gamma, I^{-1}}$ по одному наблюдению.

Все сказанное (оно требует, конечно, весьма непростого аналитического обоснования) позволяет сделать следующее замечательное заключение. Пусть $\pi(Y)$ есть оптимальный в том или ином смысле критерий (равномерно наиболее мощный критерий, байесовский, минимаксный) для проверки h_1 против h_2 в задаче (B). И пусть θ^*, как обычно, есть оценка максимального правдоподобия в задаче (A), $\gamma^* = (\theta^* - \theta_0)\sqrt{n}$. Тогда критерий $\pi(\gamma^*)$ для проверки H_1 против H_2 в задаче (A) будет *асимптотически* обладать теми свойствами оптимальности, что и критерий $\pi(Y)$ в задаче (B).

Этот факт иногда называют «статистическим принципом инвариантности» (по аналогии с функциональной предельной теоремой), поскольку предельные характеристики тестов π не зависят от конкретной природы распределений $\mathbf{P}_\theta$, важны лишь характеристики на уровне первых двух моментов.

В силу статистического принципа инвариантности для того, чтобы отыскать асимптотически оптимальный критерий в задаче (A), мы должны рассмотреть более простую задачу (B) и найти в ней (если это возможно) критерий π, обладающий нужным свойством оптимальности. Если теперь взять в качестве наблюдения Y значение γ^* и подставить его в π, то получим искомый критерий в задаче (A).

Это обстоятельство означает, в частности, что статистика θ^* (или $\gamma^* = (\theta^* - \theta_0)\sqrt{n}$) является асимптотически достаточной. Используя ее для проверки H_1 и H_2, мы асимптотически ничего не теряем в информации, относящейся к нашей задаче.

Основные идеи, связанные с отысканием асимптотически оптимальных тестов для близких гипотез, изложены в работах Вальда [3], Ле-Кама, Русаса [4], Чибисова [5] и др. (см. также [1]).

Из сказанного видно, что для близких гипотез скорость их сближения $1/\sqrt{n}$ подобрана так, чтобы параметры критерия $\pi(\gamma^*)$ (вероятности ошибок 1 и 2 рода) сближались при $n \to \infty$ к некоторым собственным (отличным от 0 и 1) пределам, т. е. асимптотически оставались неизменными.

Рассмотрим теперь другой альтернативный подход. Он состоит в том, что множества Θ_i сближаются, но не со скоростью $1/\sqrt{n}$, а медленнее (можно положить, например, $\theta = \theta_0 + \frac{t}{\sqrt{n}}\gamma$, где $0 < t \leqslant \sqrt{n}$, $t \to \infty$, и проверять гипотезы $H_i = \{\gamma \in \Gamma_i\}$, где множества Γ_i и априорные распределения Q_i на них фиксированы). Для простоты можно считать, что множества Θ_i (а вместе с ним и гипотезы H_i) остаются фиксированными, т. е. не зависящими от n (напомним, что в первом подходе мало зависели от n вероятности ошибок критериев). В этом случае вероятности ошибок любого разумного критерия будут стремиться к нулю.

В отличие от первого, второй из названных подходов изучен совсем мало, так как он приводит к довольно трудным задачам об исследовании вероятностей б. у. для весьма сложных статистик. Можно указать лишь несколько разрозненных результатов [1], которые, вместе взятые, очень далеки от общей постановки задачи и ее решения.

Цель предлагаемой книги и, в частности, глав III, IV — восполнить этот пробел. Исходной точкой исследования при этом снова служит вторая фундаментальная теорема теории статистических игр (ее асимптотический вариант) и явная форма (ср. с (2)) байесовских тестов $T(X)$ в рассматриваемой задаче: $T(X) = 1$, если

$$S(X) \equiv \frac{\int\limits_{\Theta_2} f_\theta(X)\, Q_2(d\theta)}{\int\limits_{\Theta_1} f_\theta(X)\, Q_1(d\theta)} > c. \tag{5}$$

Но теперь число c (ср. с (2)), множества Θ_1, Θ_2 и распределения $\mathbf{P}_\theta$ предполагаются такими, что

$$\sup_{\theta\in\Theta_1} \mathbf{P}_\theta(S(X) > c) \to 0, \qquad \sup_{\theta\in\Theta_2} \mathbf{P}_\theta(S(X) \leqslant c) \to 0. \tag{6}$$

Таким образом, мы имеем дело с задачами о б. у. для статистик (5), которые рассмотрены в главе II. Результаты исследований, проведенных в главе II, дают нам возможность получить явные асимптотические представления для вероятностей в (6) в том случае, когда распределения на Q_i в известном смысле регулярны (например, имеют непрерывные, положительные в окрестностях некоторых точек плотности). При этом оказалось, что для искомой асимптотики существенно поведение Q_i лишь в окрестности этих отдельных точек и что существуют другие статистики, в том числе значительно более простые, например, статистики отношения максимального правдоподобия

$$S^*(X) \equiv \sup_{\theta\in\Theta_2} \ln f_\theta(X) - \sup_{\theta\in\Theta_1} \ln f_\theta(X), \tag{7}$$

для которых вероятности б. у. (в соответствующей зоне) ведут себя почти точно так же. Это позволяет строить в явном виде критерии, асимптотически эквивалентные (2), и, стало быть, асимптотически оптимальные.

Итак, отличие от первого подхода состоит в том, что мы имеем теперь *явные асимптотические представления для распределений*, а не для *статистик*, поэтому здесь получен *явный вид асимптотически оптимальных тестов* (основанных на статистике S^*) и *явный вид асимптотик вероятностей их ошибок* (правда, при более жестких, как правило, условиях на регулярность распределений $\mathbf{P}_\theta$, на форму множеств Θ_i и на объем выборки n), в то время как для первого подхода имеем только редукцию, сводящую исходную задачу к более простой задаче об оптимальных тестах для нормальных совокупностей и для одного наблюдения, не имея при этом (для множеств Γ_i общего вида) ни явного вида тестов, ни приближенных формул для вероятностей ошибок.

С точки зрения приложений оба рассматриваемых подхода оправданы в равной степени (на самом деле вместе они охватывают некоторый непрерывный спектр различных возможностей).

Один из важнейших результатов книги (гл. IV) состоит в том, что при больших n названные два подхода имеют значительную область, где они перекрываются, т. е. область, где применимы оба подхода. Эта область соответствует ситуации, когда множества Θ_i сближаются со скоростью $o(n^{-1/3})$, но медленнее, чем $n^{-1/2}$. Тогда в зоне нормированных уклонений порядка $o(n^{-1/6})$ сохраняется асимптотическое представление и асимптотическая нормальность оценок максимального правдоподобия (см. гл. III, § 8—11) и, как выяснилось, остается в силе статистический принцип инвариантности. Кроме того, мы находимся в условиях второго статистического подхода, поэтому вид асимптотически оптимальных критериев и асимптотические формулы для их параметров (известные для второго подхода в явном виде) для обоих подходов должны быть одни и те же и, стало быть, их можно применять и к статистическому принципу инвариантности.

Таким образом, в этой области уклонений на многие вопросы мы имеем ответы, полученные с разных позиций и часто разные по форме. Благодаря данному факту можно получить целый ряд новых асимптотических соотношений, так что асимптотический анализ в данной области «наиболее продвинут».

Один из главных вопросов, возникающих при использовании асимптотических методов, состоит в следующем: при каких конкретных условиях и какие из асимптотических подходов можно применять в реальных, практических задачах? Рекомендации па этот счет мы проиллюстрируем на простейшем случае, когда параметр θ является одномерным, а гипотезы H_1 и H_2 — простыми. Рассмотрения в этих условиях становятся более наглядными, так как они не используют ни общих конструкций, связанных с представлениями (2), (4), ни результатов асимптотического анализа в главах III, IV. Позже мы поясним, каким образом эти рекомендации трансформируются на общий случай проверки сложных гипотез.

Итак, пусть $\Theta_i = \{\theta_i\}$, $i = 1, 2$, θ_i — вещественны,

$$L_\theta(X) = \ln f_\theta(X) = \sum_{i=1}^{n} l_\theta(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_\theta(x_i)$$

— логарифмическая функция правдоподобия выборки X, удовлетворяющая нужным условиям регулярности (существования двух непрерывных производных по θ; равенство $_\theta\mathbf{E}\left(l'_\theta(x_1)\right)^2 = -\mathbf{E}l''_\theta(x_1) = \sigma^2_\theta > 0$ и др.), и пусть для определенности $\theta_2 > \theta_1$. Для проверки простых гипотез $H_i = \{\theta = \theta_i\}$ существует наиболее мощный критерий $T(X)$ (оптимальный с точки зрения всех используемых в книге подходов, так что проблема выбора оптимального критерия здесь не возникает), имеющий вид

$$T(X) = \mathbf{1}\left\{L_{\theta_2}(X) - L_{\theta_1}(X) > \alpha n\right\}.$$

Для того чтобы был применим первый асимптотический подход, связанный с близостью гипотез, нужно, чтобы выполнялись три следующих условия:

1. Разность $L_{\theta_2}(X) - L_{\theta_1}(X)$ должна достаточно хорошо приближаться двумя членами разложения в ряд

$$(\theta_2 - \theta_1) L'_{\theta_1}(X) + \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 L''_{\theta_1}(X). \tag{8}$$

Не уточняя здесь, в каком смысле надо понимать данное приближение, отметим лишь, что при этом должны иметь место приближенные равенства

$$\mathbf{E}_{\theta_1}\left(L_{\theta_2}(X) - L_{\theta_1}(X)\right) \simeq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{2}\mathbf{E}L''_{\theta_1}(X) = -\frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{2} n\sigma^2_{\theta_1}, \quad \sigma^2_{\theta_1} \simeq \sigma^2_{\theta_2}. \tag{9}$$

(Напомним, что $\mathbf{E}_{\theta_i} L'_{\theta_i}(X) = 0$, $\sigma^2_{\theta_i} \equiv \mathbf{E}_{\theta_i}(l'_{\theta_i}(x_1))^2$, $i = 1, 2$.)

2. Объем выборки n должен быть достаточно большим, чтобы удовлетворительно действовали нормальное приближение для распределения сумм

$$\frac{1}{\sqrt{n}} L'_{\theta_j}(X) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} l'_{\theta_j}(x_i)$$

и имело место приближенное равенство

$$\frac{1}{n} L''_{\theta_j}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} l''_{\theta_j}(x_i) \simeq -\sigma_{\theta_j}, \quad j = 1, 2.$$

Опыт показывает, что область таких n в типичных случаях начинается со значений n порядка 30—50.

Заметим теперь, что вероятность ошибки 1-го рода критерия

$$\varepsilon(T) = E_{\theta_1} T(x_1) = \mathbf{P}_{\theta_1}(L_{\theta_2}(X) - L_{\theta_1}(X) > \alpha n) \tag{10}$$

может быть представлена, согласно (8), в виде

$$\varepsilon(T) \simeq \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\frac{1}{\sigma_{\theta_1}\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} l'_{\theta_1}(x_i) > \sqrt{n}\left[\frac{\alpha}{(\theta_2 - \theta_1)\sigma_{\theta_1}} + \frac{(\theta_2 - \theta_1)\sigma_{\theta_1}}{2}\right]\right).$$

3. Последнее условие состоит в том, чтобы значение

$$t = \sqrt{n}\left(\frac{\alpha}{\Delta} + \frac{\Delta}{2}\right), \quad \text{где} \quad \Delta \equiv (\theta_2 - \theta_1)\sigma_{\theta_1}$$

(см. (10)), попало в область уклонений, для которых действует нормальное приближение, обсуждавшееся в п. 2). Другими словами, это значение должно быть не слишком большим (не более 2,3 — 2,4 для n порядка 30—50; это соответствует вероятности ошибки 1-го рода порядка 0,01). При бóльших t могут возникать большие относительные погрешности нормального приближения (оно приводится ниже); с ростом n граница для приемлемых значений t растет примерно как $n^{1/6}$. При выполнении этого условия будем иметь

$$\varepsilon(T) = \mathbf{E}_{\theta_1} T(X) \simeq 1 - \Phi(t), \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{11}$$

Кроме того, те же три условия должны быть выполнены, если везде θ_1 и θ_2 поменять местами, а $\varepsilon(T)$ заменить на $\delta(T) = \mathbf{E}_{\theta_2}(1 - T(X))$. Мы получим тогда наряду с (11)

$$\delta(T) \simeq \Phi\left(\sqrt{n}\left(\frac{\alpha}{\Delta} - \frac{\Delta}{2}\right)\right). \tag{12}$$

Именно такие приближенные формулы для $\varepsilon(T)$, $\delta(T)$ получим, если будем пользоваться статистическим принципом инвариантности.

Обозначим

$$\frac{\sqrt{n}\Delta}{2} = \frac{\sqrt{n}\,|\theta_2 - \theta_1|}{2}\sigma_{\theta_1} = R, \quad \frac{\sqrt{n}\alpha}{\Delta} = \beta. \tag{13}$$

Тогда (11), (12) можно записать в виде

$$\varepsilon(T) \simeq 1 - \Phi(\beta + R) = \mathbf{P}(\eta > \beta + R), \tag{14}$$
$$\delta(T) \simeq \Phi(\beta - R) = \mathbf{P}(\eta < \beta - R), \quad \eta \in \Phi_{0,1},$$

где β — переменный параметр (как и α), регулирующий соотношение между $\varepsilon(T)$ и $\delta(T)$. Из этих формул видно, что суммарные возможности критерия T обеспечить малые вероятности ошибок 1-го и 2-го рода определяются числом R, которое, согласно предыдущему, не должно превышать уровня 2,3—2,4 для небольших n (порядка 30—50).

Таковы, грубо говоря, основные требования, обеспечивающие применимость первого асимптотического подхода в этом конкретном примере. Отметим, что отсутствие близости θ_1 и θ_2 (т. е. невыполнение условия 1) делает использование первого подхода (статистического принципа инвариантности) невозможным по самой сути дела. То же происходит при невыполнении условия 3 — при больших n задача выходит из области применимости центральной предельной теоремы и становится задачей, связанной с теорией больших уклонений.

Обратимся теперь ко второму асимптотическому подходу. Если говорить совсем грубо на языке условий 1—3, то для его применения необходимо выполнение условия 2 (о том, что n должно быть достаточно большим, 50—100 и более) и условия, в каком-то смысле обратного к 3 (о том, что значение Δ должно быть также достаточно большим, порядка 2,5—3 и более).

При этом выполнение или невыполнение условия 1 влияет лишь на второстепенные вещи. Если оно не выполнено (близость θ_1 и θ_2 отсутствует), то показано применение второго асимптотического подхода, когда θ_1 и θ_2 считаются фиксированными (так что теоретически R растет как $\sqrt{n}$). Если же условие 1 выполнено (как и прежде $n \geqslant 50$, $R \geqslant 2{,}5$), то можно рекомендовать применение промежуточного подхода, когда θ_1 и θ_2 сближаются, но медленнее, чем со скоростью $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\theta_1 = \theta_2 + \frac{t}{\sqrt{n}}\gamma,\ t = t_n \to \infty,\ t = o(\sqrt{n})\right)$.

Таким образом, характеристическим признаком применимости второго подхода (или промежуточного) можно считать неравенство $R > 2{,}5$ при больших n ($\geqslant 50$). В этом случае при β, близких к нулю (см. (13)), для вычисления вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода более оправдано применение предельных теорем о больших уклонениях.

Два рассматриваемых подхода не являются полностью альтернативными — возможны ситуации, когда выполнены требования обоих подходов. Например, при выполнении условия 1 значение $R \simeq 2{,}5$ при значениях n порядка 500—1000 может удовлетворять условиям обоих подходов. Численный пример, иллюстрирующий применение обоих подходов для конкретных распределений, приведен в [1].

При применении второго подхода, приближение для $\varepsilon(T) = \mathbf{E}_{\theta_1} T(X)$ находится путем использования теорем о больших уклонениях:

$$\varepsilon(T) = P_{\theta_1}(S(X) > n\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\lambda(\alpha)\,\sigma(\alpha)}(1 + o(1)), \tag{15}$$

где $\Lambda(\alpha)$ — функция уклонений случайной величины $\xi = l_{\theta_2}(x) - l_{\theta_1}(x)$:

$$\Lambda(\alpha) = \sup_\lambda \{\alpha\lambda - \ln \mathbf{E}_{\theta_1} e^{\lambda\xi}\} = \sup_\lambda \left\{\alpha\lambda - \ln \mathbf{E}_{\theta_1}\left[\frac{f_{\theta_2}(x_1)}{f_{\theta_1}(x_1)}\right]^\lambda\right\},$$

$\lambda(\alpha) = \Lambda'(\alpha)$, $\sigma^2(\alpha) = (\Lambda''(\alpha))^{-1}$. Симметричным образом определяется $\delta(T)$. Если выполнено условие 1, а значения αn таковы, что $\beta + R > 2{,}5$, но в то же время действует приближение (11), (14) (т. е. $\beta + R$ не очень велико), то приближения (14) и (15) смыкаются. Другими словами, если воспользоваться приближением $1 - \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,t} e^{-\frac{t^2}{2}}$, то (14) и (15) означает, что

$$\varepsilon(T) \simeq \frac{e^{-\frac{(\beta+R)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,(\beta + R)} \simeq \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{2\pi n}\,\lambda(\alpha)\sigma(\alpha)}. \tag{16}$$

В совпадении этих приближений можно убедиться и непосредственно, воспользовавшись разложением функций Λ, λ, σ:

$$\Lambda(\alpha) \simeq \frac{\left(\alpha + \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{2}\sigma_{\theta_1}\right)^2}{2(\theta_2-\theta_1)^2\sigma_{\theta_1}^2},$$

$$\lambda(\alpha) \simeq \frac{\alpha + \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{2}\sigma_{\theta_1}}{(\theta_2-\theta_1)^2\sigma_{\theta_1}^2}, \quad \sigma(\alpha) \simeq |\theta_2-\theta_1|\sigma_{\theta_1}. \tag{17}$$

Соотношения (17) легко выводятся из известных свойств функции уклонений (см. § 1):

$$\Lambda_\xi(\alpha) \sim \frac{(\alpha - \mathbf{E}\xi)^2}{2\mathbf{D}\xi}.$$

При аналогичных условиях

$$\delta(T) \simeq \frac{e^{-\frac{(R-\beta)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,(R-\beta)}. \tag{18}$$

Если считать, что β мало по сравнению с R (это соответствует тому, что вероятности ошибок 1-го и 2-го рода не сильно отличаются друг от друга) и обозначить

$$b = \ln(\sqrt{2\pi}\,R),$$

то из (16), (18) следует, что

$$\sqrt{-\ln\varepsilon(T) + b} + \sqrt{-\ln\delta(T) + b} \simeq R\sqrt{2}. \tag{19}$$

Если к тому же b мало по сравнению с $\ln\varepsilon(T)$ и $\ln\delta(T)$ (при больших R это так и есть), то

$$\sqrt{-\ln\varepsilon(T)} + \sqrt{-\ln\delta(T)} \simeq R\sqrt{2}. \tag{20}$$

Соотношения (19), (20) в грубой форме показывают зависимость от параметра R суммарных возможностей критерия T, относящихся к вероятностям ошибок первого и второго рода.

Сказанное в связи с условиями применимости двух асимптотических подходов можно резюмировать следующим образом. Существует три ключевых параметра, характеризующих в совокупности возможности применения этих подходов.

1. Разность $|\theta_2 - \theta_1|$ характеризует близость распределений $\mathbf{P}_{\theta_1}$, $\mathbf{P}_{\theta_2}$ и качество приближений (8), (9).

Наличие удовлетворительных приближений (8), (9) является необходимым условием для первого подхода.

2. Объем выборки n должен быть достаточно большим (нижние границы для стандартных семейств $\mathbf{P}_\theta$ составляют $n \geqslant 30$ для первого подхода, $n \geqslant 50$ для второго).

3. Важную роль играют параметры

$$R_i = \sqrt{n}\,|\theta_2 - \theta_1|\,\sigma_1, \quad \sigma_i^2 \equiv \mathbf{E}_{\theta_i}\left(l'_{\theta_i}(x_1)\right)^2.$$

Характерными для первого асимптотического подхода являются неравенства $R_1 \simeq R_2 \leqslant 1{,}5 + 0{,}3n^{1/6}$, для второго $-R_i \geqslant 2{,}5$, $i = 1, 2$.

Если иметь в виду качественную сторону дела, то один из важных результатов книги состоит в том, что все приведенные выше рекомендации и асимптотические соотношения, относящиеся к двум асимптотическим подходам, сохраняются (в несколько измененной форме и при соответствующих предположениях) и в общем случае при проверке сложных параметрических гипотез в R^k. Надо лишь в качестве θ_1, θ_2 рассматривать «крайние» (ближайшие друг к другу в некотором смысле) точки $\widehat{\theta}_1(\alpha)$ и $\widehat{\theta}_2(\alpha)$ из множеств Θ_1 и Θ_2 соответственно. Определение этих точек вместе с новым определением функции уклонений $\Lambda(\alpha)$ содержится в соотношениях

$$\Lambda(\alpha) \equiv \Lambda(\alpha; \widehat{\theta}_1(\alpha), \widehat{\theta}_2(\alpha)) = \inf_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2} \Lambda(\alpha; \theta_1, \theta_2), \tag{21}$$

$$\Lambda(\alpha; \theta_1, \theta_2) = \sup_{\lambda} \{\alpha\lambda - \ln \mathbf{E}_{\theta_1} e^{\lambda\xi}\}, \quad \xi = l_{\theta_2}(x) - l_{\theta_1}(x).$$

Под σ_i^2 надо понимать теперь $\sigma_i^2 = \dfrac{1}{|\theta_2 - \theta_1|^2} \mathbf{E}_{\theta_i} \left((\theta_2 - \theta_1),\ l'_{\theta_i}(x)\right)^2$ при $\theta_i = \widehat{\theta}_i(\alpha)$. При таком новом понимании обозначений три характеристики, названные выше, по-прежнему будут играть решающую роль при определении применимости того или иного асимптотического подхода. При этом числовые границы, приведенные выше, по-видимому, должны стать более жесткими. Мы не располагаем здесь конкретным эмпирическим материалом. Можно отметить только, что выработка практических рекомендаций требует проведения значительного объема работ и практического опыта. Сбор статистических данных в задачах, связанных с большими уклонениями, затруднен малостью оцениваемых вероятностей. Например, для того, чтобы эмпирически подтвердить тот факт, что для критерия $T(X)$ вероятность ошибки первого рода равна 10^{-3}, требуется число испытаний порядка $10^4 n$, где n — объем выборки.

При переходе к общему случаю среди многих других сохраняют свою силу и соотношения (19), (20), возникающие в зоне действия обоих асимптотических подходов, где под T надо понимать критерий отношения правдоподобия, основанный на статистике S^* (см. (7)). Если же под T понимать произвольный критерий T, то левые части этих соотношений всегда не превосходят правых, т. е. при $n \to \infty$, $R \equiv \dfrac{\sigma_1}{2}$, $|\widehat{\theta}_2(\alpha) - \widehat{\theta}_2(\alpha)| \sqrt{n} = o(n^{1/6})$ всегда выполнено, например, неравенство

$$\sqrt{-\ln \varepsilon(T)} + \sqrt{-\ln \delta(T)} \leqslant R\sqrt{2}.$$

Эти соотношения названы в книге «законами сохранения». Законы такого типа верны и в рамках второго подхода в целом, но не приводятся здесь, так как их запись в общем случае требует введения ряда новых обозначений.

Вернемся к общей структуре книги. Главы I, II представляют собой основу, содержащую математический аппарат, необходимый для достаточно полного исследования задач глав III, IV о проверке гипотез при втором асимптотическом подходе и для распространения статистического принципа инвариантности на область больших уклонений.

Основные разделы главы III связаны с построением асимптотически оптимальных тестов (асимптотически байесовские и асимптотически минимаксные; определение см. в гл. III, § 8) для различных типов проверяемых гипотез. Классификация основных типов гипотез происходит по виду и взаимной конфигурации множеств Θ_1 и Θ_2, а также по мощности множества пар ближайших точек $\widehat{\theta}_1(\alpha)$, $\widehat{\theta}_2(\alpha)$ (см. (21)). Мы выделяем случай, когда пара $(\widehat{\theta}_1(\alpha), \widehat{\theta}_2(\alpha))$ единственна, и случай, когда множество пар точек $(\widehat{\theta}_1(\alpha), \widehat{\theta}(\alpha))$ континуально.

В главе III рассмотрены следующие типы гипотез.

1. Множества Θ_1 и Θ_2 состоят из конечного числа точек (см. § 9).
2. Множество $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ одноточечно (гипотеза H_1 простая), а множество Θ_2 — телесно в R^k (§ 10). При этом возможны две существенно разные ситуации:

а) точка минимума (см. (21)) $(\widehat{\theta}_1(\alpha), \widehat{\theta}_2(\alpha)) = (\theta_1, \widehat{\theta}_2(\alpha))$ единственна (реализуется, когда множество Θ_2 расположено в стороне от множества $\Theta_1=\{\theta_1\}$);

б) множество точек $(\widehat{\theta}_1(\alpha), \widehat{\theta}_2(\alpha))=(\theta_1, \widehat{\theta}_2(\alpha))$ континуально (реализуется, когда множество Θ_2 окружает множество $\Theta_1=\{\theta_1\}$ таким образом, что множество точек $\widehat{\theta}_2(\alpha)$ совпадает с границей или частью границы множества Θ_2).

3. Оба множества Θ_1 и Θ_2 телесны в R^k (§ 11). Здесь также рассмотрены две ситуации, когда:

а) пара точек $(\widehat{\theta}_1(\alpha), \widehat{\theta}_2(\alpha))\in\Theta_1\times\Theta_2$ единственна (реализуется, например, когда оба множества Θ_1 и Θ_2 выпуклы);

б) множество пар точек $(\widehat{\theta}_1(\alpha), \widehat{\theta}_2(\alpha))$ континуально и совпадает с частью границы $\Theta_1\times\Theta_2$ (реализуется, например, когда множество Θ_2 окружает множество Θ_1).

В главе III рассмотрен также (§ 12) случай «соприкасающихся» гипотез, когда множества Θ_1 и Θ_2 имеют общие участки границы. Малость вероятностей ошибок тестов T и, следовательно, применимость результатов о б. у. здесь определяются тем, что, например, для фиксированных Θ_i априорная вероятность Q_i (для регулярных мер Q_i) попасть в $c/\sqrt{n}$-окрестности границы Θ_i мала.

Глава IV посвящена распространению описанного выше статистического принципа инвариантности на область больших уклонений. Речь идет о тех ситуациях, когда применимы оба асимптотических подхода, т. е. для пары ближайших точек $\widehat{\theta}_1(\alpha)$, $\widehat{\theta}_2(\alpha)$ выполняется

$$\sqrt{n}|\widehat{\theta}_2(\alpha)-\widehat{\theta}_1(\alpha)|=o(n^{1/6}),$$

$$\sqrt{n}|\widehat{\theta}_2(\alpha)-\widehat{\theta}_1(\alpha)|\to\infty.$$

В главе V рассматриваются следствия статистических результатов глав III, IV. Одним из главных таких следствий является «закон сохранения» (о сути этого закона в случае близких гипотез можно судить по формулам (19), (20)). Из него получаются утверждения о нижних границах для вероятностей ошибок произвольных критериев, о форме функциональной связи между этими вероятностями и др.

Другое важное следствие результатов глав III, IV — возможность для заданных малых ε и δ получить явный асимптотический вид нижней границы для наименьшего объема выборки $n=n(\varepsilon, \delta)$, при котором существует тест T (он также указан в явном виде) такой, что $\varepsilon(T)\leqslant\varepsilon$, $\delta(T)\leqslant\delta$. Этот результат, как и названные выше, также вытекает из закона сохранения. Исследованы связи с понятиями асимптотической эффективности по Бахадуру и по Ходжесу — Леману. Введены более естественные, на наш взгляд, числовые характеристики эффективности и установлены верхние границы для них.

Авторы выражают благодарность Я. Ю. Никитину за помощь в составлении библиографии и М. Г. Бекишеву за помощь в обработке числовых примеров.

ГЛАВА I

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ РАВНОМЕРНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

§ 1. ФУНКЦИЯ УКЛОНЕНИЙ И ЕЕ СВОЙСТВА

1. Определение. Пусть ξ, ξ_1, ξ_2, ... — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных векторов в k-мерном евклидовом пространстве R^k. Для векторов $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ и $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ в R^k скалярное произведение и норму обозначим соответственно

$$\langle\alpha, \beta\rangle=\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_k\beta_k, \quad |\alpha|=\langle\alpha, \alpha\rangle^{1/2}.$$

Верхний индекс т будет обозначать транспонирование. Если $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — вектор-строка, то $\alpha^{\text{т}}$ — вектор-столбец, так что

$$\langle\alpha, \beta\rangle=\alpha\beta^{\text{т}}, \quad \sum_{i,j=1}^{k}\alpha_i\alpha_j D_{ij}=\alpha D\alpha^{\text{т}},$$

где $\|D_{ij}\|$ — матрица порядка k.

Обозначим далее $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_k$. Пусть $F(A)$ — вероятностная мера в R^k; тот факт, что ξ имеет распределение F, обозначим символом $\xi\in F$. Иногда будем использовать обозначения $F=F_\xi$, подчеркивая индексом ξ, что F является распределением случайного вектора ξ. Скажем, запись $G=F_{a\xi+b}$ означает, что G есть распределение вектора $a\xi+b$. Применим также обозначения

$$\mathbf{P}_F(\xi\in A), \ \mathbf{E}_F\xi,$$

отмечая нижним индексом F, что ξ имеет распределение F.

Функция уклонений, которой посвящен настоящий параграф, играет определяющую роль при описании вероятностей больших уклонений сумм S_n, т. е. поведении вероятностей вида

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in U\right), \tag{1}$$

где множество U, вообще говоря, зависит от n, но так (в случае $\mathbf{D}\xi_1<\infty$), что $c/\sqrt{n}$ — окрестность точки $\mathbf{E}\xi_1$ не пересекается с U при любом фиксированном c и всех достаточно больших n (в силу чего вероятность (1) сходится к нулю при $n\to\infty$).

Преобразование Лапласа над распределением F обозначим через

$$\varphi(\lambda)=\varphi_F(\lambda)\equiv\mathbf{E}_F e^{\langle\lambda,\xi\rangle}, \quad \lambda\in R^k.$$

Функция уклонений для случайного вектора $\xi\in F$ (она же — *преобразование Лежандра* (см. [6]) над функцией

$$A(\lambda)=A_F(\lambda)\equiv\ln\varphi_F(\lambda);$$

она же — *сопряженная к* $A(\lambda)$ функция в выпуклом анализе (см. [6])) определяется равенством

$$\Lambda(a)=\Lambda_F(a)\equiv\sup_\lambda\{\langle a, \lambda\rangle-A_F(\lambda)\}, \quad a\in R^k. \tag{2}$$

Как вероятностная характеристика функция $\Lambda(a)$ введена и изучена в [7, 8].

Там, где это удобно, наряду с A_F, Λ_F будем использовать обозначения A_ξ, Λ_ξ, полагая

$$A_\xi = A_{F_\xi}, \qquad \Lambda_\xi = \Lambda_{F_\xi}.$$

2. Основные свойства функции уклонений.

1) Из определения (2) вытекает, что для любых a и λ выполняется неравенство

$$A(\lambda) + \Lambda(a) \geqslant \langle a, \lambda \rangle \tag{3}$$

(так называемое неравенство Юнга [6]). Полагая в (3) $\lambda = 0$, получаем, что для всех $a \in R^k$ функция уклонений неотрицательна:

$$\Lambda(a) \geqslant 0.$$

2) Известно (см., например, [8]), что функция $A(\lambda)$ выпукла: для $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R^k$ справедливо

$$pA(\lambda_1) + qA(\lambda_2) \geqslant A(p\lambda_1 + q\lambda_2).$$

Кроме того, она полунепрерывна: для любой последовательности λ_n, сходящейся к λ_0, выполняется

$$\liminf_{n\to\infty} A(\lambda_n) \geqslant A(\lambda_0).$$

Из свойств сопряженной функции следует [9], что функция уклонений $\Lambda(a)$ также выпуклая и полунепрерывная, и, кроме того, справедлива следующая формула обращения

$$A(\lambda) = \sup_a \{\langle a, \lambda \rangle - \Lambda(a)\} \tag{4}$$

для любого $\lambda \in R^k$.

3) Следующее соотношение можно рассматривать как вероятностное определение функции уклонений [7, 8]: для любого $a \in R^k$

$$\Lambda_F(a) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in U_\varepsilon(a)\right), \tag{5}$$

где $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\xi_i \Subset F$, $U_\varepsilon(a)$ есть ε-окрестность точки a:

$$U_\varepsilon(a) = \{b \in R^k\colon |b - a| < \varepsilon\}.$$

Формулу (5) докажем позже в разд. 8.

4) Пусть Π есть произвольная прямоугольная матрица, состоящая из k строк и m столбцов, $1 \leqslant m < \infty$. Умножая вектор $\xi \in R^k$ на матрицу Π, получим вектор $\xi\Pi \in R^m$, так что распределение $F_{\xi\Pi}$ сосредоточено в R^m. Следующую формулу назовем формулой согласованности: для $a, b \in R^m$

$$\Lambda_{\xi\Pi+b}(a) = \inf\{\Lambda_\xi(c)\colon c \in R^k,\ c\Pi + b = a\}, \tag{6}$$

где по определению полагаем

$$\inf\{\Lambda_\xi(c)\colon c \in \varnothing\} = \infty$$

(может оказаться, что $\{c\colon c\Pi + b = a\} = \varnothing$). В частности, если Π — обратимая квадратная матрица, то из (6) следует

$$\Lambda_{\xi\Pi+b}(a) = \Lambda_\xi((a - b)\Pi^{-1}). \tag{7}$$

Формулу (6) достаточно доказать для $a = b = 0$, т. е.

$$\Lambda_{\xi\Pi}(0) = \inf\{\Lambda_\xi(c)\colon c \in R^k,\ c\Pi = 0\}. \tag{8}$$

Действительно, если множество $\{c\colon c\Pi + b = a\}$ пусто, то все значения вектора $\xi\Pi$ лежат в некотором подпространстве L, не содержащем вектор $(a-b)$, и непосредственно из определения (2) получаем, что левая часть (6) равна ∞. Таким образом, в этом случае формула (6) справедлива. Если же множество $\{c: c\Pi+b=a\}$ не пусто, т. е. существует вектор $c'\in R^k$ такой, что $c'\Pi+b=a$, то формулу (6) можно переписать в эквивалентной форме

$$\Lambda_{(\xi-c')\Pi}(0)=\inf\{\Lambda_{\xi-c'}(c)\colon c\Pi=0\}.$$

Тем самым мы пришли к формуле (8).

Докажем формулу (8). Убедимся сначала, что ее можно переписать в эквивалентной форме

$$\sup_{\lambda\in R^k}\inf_{c\in L}\{\langle c,\lambda\rangle-A(\lambda)\}=\inf_{c\in L}\sup_{\lambda\in R^k}\{\langle c,\lambda\rangle-A(\lambda)\},\tag{9}$$

где подпространство $L\subseteq R^k$ определяется как

$$\{c\in R^k\colon c\Pi=0\}.$$

Правая часть (9) совпадает с правой частью (8). Левая часть (9) представляется в виде

$$A=\max\{A_1,A_2\},$$

где ($L^\perp$ — ортогональное дополнение к L в R^k),

$$A_1=\sup_{\lambda\in L^\perp}\inf_{c\in L}\{\langle c,\lambda\rangle-A_\xi(\lambda)\},$$

$$A_2=\sup_{\lambda\notin L^\perp}\inf_{c\in L}\{\langle c,\lambda\rangle-A_\xi(\lambda)\}.$$

Поскольку $A_2=-\infty$, справедливо

$$A=A_1=\sup_{\lambda\in L^\perp}\{-A_\xi(\lambda)\}.$$

Левая часть (8) есть в точности

$$\sup_{\mu\in R^m}\{-A_\xi(\mu\Pi^\text{т})\};$$

поскольку в линейной алгебре известно, что

$$\{\lambda\in R^k\colon \lambda=\mu\Pi^\text{т},\ \mu\in R^m\}=L^\perp,$$

левые части (9) и (8) совпадают. Мы доказали, что (9) эквивалентно (8).

Формула (9) следует из следствия 371.3 в [9] (с. 462), поэтому формула (8) доказана. Формула согласованности (6) доказана.

Из (6) можно вывести ряд полезных свойств функции уклонений.

5) Для любых a, $b\in R^k$, $t\neq0$ справедливо

$$\Lambda_{t\xi+b}(a)=\Lambda_\xi\left(\frac{a-b}{t}\right).\tag{10}$$

Формула (10) получается, если в (6) положить $\Pi=tE$, где E — единичная матрица.

Пусть ξ, η — два независимых случайных вектора, тогда

$$\Lambda_{\xi+\eta}(a)=\inf_{b\in R^k}\{\Lambda_\xi(b)+\Lambda_\eta(a-b)\}.\tag{11}$$

Для вывода (11) рассмотрим случайный вектор

$$\zeta=(\xi,\eta)\in R^{2k}.$$

Поскольку для $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in R^{2k}$ справедливо

$$A_\zeta(\lambda)=A_\xi(\lambda_1)+A_\eta(\lambda_2),$$

из определения (2) выводим

$$\Lambda_\zeta(b)=\Lambda_\xi(b_1)+\Lambda_\eta(b_2),$$

где $b=(b_1, b_2)\in R^{2k}$. Пусть далее матрица Π такова, что $a\Pi=a_1+a_2$. В силу (6) получаем доказательство (11):

$$\Lambda_{\xi+\eta}(a)=\Lambda_{\xi\Pi}(a)=\inf_{b_1+b_2=a}\{\Lambda_\xi(b_1)+\Lambda_\eta(b_2)\}.$$

Из (11) можно вывести для $n=1, 2, \ldots$

$$\Lambda_{S_n}(a)=n\Lambda_{\xi_1}(a/n), \tag{12}$$

где $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ — сумма независимых одинаково распределенных слагаемых.

Отметим, что свойства этого раздела можно вывести и непосредственно из определения функции уклонений.

6) Следующие два соотношения тоже выводятся из формулы (6): для любых вещественных t, c и любого $\lambda\in R^k$ справедливо

$$\Lambda_{\langle\xi,\lambda\rangle}(t)=\inf\{\Lambda_\xi(a)\colon \langle a, \lambda\rangle=t\}, \tag{13}$$

$$\inf\{\Lambda_{\langle\xi,\lambda\rangle}(t)\colon t>c\}=\inf\{\Lambda_\xi(a)\colon \langle a, \lambda\rangle>c\}. \tag{14}$$

Для доказательства (13) достаточно положить $\Pi=\lambda^{\mathrm{T}}$, $a=t$, $b=0$ и воспользоваться (6). Чтобы доказать соотношение (14), представим в силу (13) его левую часть в виде

$$\inf_{t>c}\{\inf\{\Lambda_\xi(a)\colon \langle a, \lambda\rangle=t\}\}. \tag{15}$$

Остается заметить, что (15) совпадает с правой частью (14).

7) Из соотношения (13) и экспоненциального неравенства Чебышева получаем оценку сверху для вероятности попадания случайного вектора ξ в полупространство $\{a\colon \langle a, \lambda\rangle>c\}$: для любых $\lambda\in R^k$, $c\in R^1$ справедливо

$$\mathbf{P}(\langle\xi, \lambda\rangle>c)\leqslant\exp\{-\inf\{\Lambda_\xi(a)\colon \langle a, \lambda\rangle>c\}\}. \tag{16}$$

3. Условия на распределение F. Приведенные выше свойства функции уклонений $\Lambda_F(a)$ справедливы без каких-либо ограничений на распределение F. Однако «содержательными» эти утверждения становятся только в предположении выполнения условий невырожденности и существования экспоненциальных моментов случайного вектора ξ. В настоящем разделе речь пойдет об этих условиях.

Введем условие невырожденности распределения F случайного вектора ξ в R^k.

Cr_0. Для любого $\lambda\in R^k$, $|\lambda|\neq0$, справедливо

$$\mathbf{D}\langle\lambda, \xi\rangle>0.$$

Если условие Cr_0 не выполнено, то с вероятностью 1 случайный вектор ξ лежит в плоскости $L=\{a\colon \langle\lambda_0, a\rangle=t\}$ при некотором $\lambda_0\in R^k$, где $t=\mathbf{E}\langle\lambda_0, \xi\rangle=\langle\lambda_0, \xi\rangle$. Поэтому случайный вектор $\xi-\dfrac{\lambda_0 t}{|\lambda_0|}$ лежит в пространстве R^{k-1}. Функция уклонений «реагирует» на невыполнение условия Cr_0, обращаясь в ∞ при всех $a\in R^k$, лежащих вне L. В оставшихся разделах настоящего параграфа будем предполагать, что условие Cr_0 выполнено.

Введем три крамеровских условия на распределение F случайного вектора ξ.

Cr_1. Существует $\lambda\in R^k$, $\lambda\neq0$, такое, что

$$\mathbf{E}e^{\langle\lambda,\xi\rangle}<\infty,\quad \xi\Subset F.$$

Cr_2. Существуют $\lambda_0\in R^k$ и $\varepsilon>0$ такие, что

$$\mathbf{E}e^{\langle\lambda,\xi\rangle}<\infty \text{ для всех } \lambda\in U_\varepsilon(\lambda_0),\ \xi\Subset F.$$

Cr_3. Существует $\varepsilon>0$ такое, что

$$\mathbf{E}e^{\langle\lambda,\xi\rangle}<\infty \text{ для всех } |\lambda|<\varepsilon,\ \xi\Subset F.$$

Очевидно, что Cr_3 влечет Cr_2 и Cr_2 влечет Cr_1, но не наоборот. В одномерном случае условия Cr_1 и Cr_2 совпадают.

В тех случаях, когда мы предполагаем описывать асимптотику вероятностей (1) с помощью функции уклонений, условие Cr_1 необходимо. В пользу этого свидетельствует следующее утверждение: условие Cr_1 не выполнено тогда и только тогда, когда $\Lambda_F(a)=0$ для всех $a\in R^k$. Действительно, если для всех $\lambda\neq 0$ выполняется $A_F(\lambda)=\infty$, то по определению $\Lambda_F(a)=0$. Если же найдется $\lambda_0\neq 0$ такое, что $A_F(\lambda_0)<\infty$, то, очевидно, что

$$\Lambda_F(t\lambda_0)\geqslant t|\lambda_0|^2-A_F(\lambda_0)$$

и при достаточно больших t выполняется $\Lambda_F(t\lambda_0)>0$.

Необходимые и достаточные условия для выполнения Cr_3 в терминах функции уклонений дает

Лемма 1. *Условие Cr_3 эквивалентно существованию таких чисел $t>0$ и $T<\infty$, что для всех $a\in R^k$ выполняется*

$$\Lambda_F(a)\geqslant|a|t-T. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть

$$T=\sup_{|\lambda|\leqslant\varepsilon}A_F(\lambda).$$

В силу условия Cr_3 число T конечно при достаточно малых ε. При любом $a\in R^k$, $a\neq 0$ выполняется

$$\Lambda_F(a)\geqslant\left\langle a,\ \frac{a\varepsilon}{|a|}\right\rangle-A_F\left(\frac{a\varepsilon}{|a|}\right)\geqslant\frac{|a|}{\varepsilon}-T,$$

поэтому (17) имеет место при $t=1/\varepsilon$.

Пусть теперь выполнено условие (17). В силу неравенства (16) для любого $\lambda\in R^k$ справедливо

$$\mathbf{P}(|\langle\xi,\lambda\rangle|>x)\leqslant e^{-\frac{x}{|\lambda|}t+T};$$

из последнего, очевидно, следует условие Cr_3. Лемма 1 доказана.

Забегая вперед, поясним, что условия Cr_2 и Cr_3 появляются тогда, когда мы хотим отыскать не только грубую (логарифмическую, типа (5)), но и точную асимптотику вероятностей (1) (см. § 4 настоящей главы).

Приведем еще одно полезное утверждение, связанное с условием Cr_3.

Лемма 2. *Пусть для F выполнено условие Cr_3. Тогда для любого $N<\infty$ найдется $M<\infty$ такое, что для $n=1, 2, \ldots$*

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|>M\right)\leqslant e^{-nN},\quad \text{где}\quad S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n,$$

слагаемые ξ_i независимые и имеют общее распределение F.

Доказательство. В силу (10) и (12) справедливо

$$\Lambda_{\frac{S_n}{n}}(a)=n\Lambda_{\xi_1}(a). \tag{18}$$

Обозначим через

$$R(M)=\bigcup_{i=1}^{k}\left\{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k):\ |\alpha_i|>\frac{M}{\sqrt{k}}\right\},$$

$$S(M)=\{\alpha:\ |\alpha|>M\}$$

дополнения к кубу и шару соответственно. Легко видеть, что

$$S(M)\subseteq R(M)\subseteq S(M/\sqrt{k}),$$

поэтому в силу (18) и (16) справедливо

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|>M\right)\leqslant 2k\exp\left\{-n\inf_{a\in R(M)}\Lambda_F(a)\right\}\leqslant$$
$$\leqslant -2k\exp\left\{-n\inf_{a\in S(M/\sqrt{k})}\Lambda_F(a)\right\}.$$

Применяя далее лемму 1, получаем неравенство

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|>M\right)\leqslant 2ke^{-n(Mt/\sqrt{k}-T)},$$

которое и доказывает лемму 2.

4. Условия конечности функции $\Lambda(a)$ в точке a. Эти условия получаются обращением следующего утверждения.

Лемма 3. *Для того чтобы $\Lambda(a)=\infty$, достаточно, чтобы существовал вектор $\lambda\in R^k$ такой, что*

$$\mathbf{P}(\langle\xi-a,\ \lambda\rangle\geqslant 0)=0, \tag{19}$$

и необходимо, чтобы существовал вектор $\lambda\in R^k$ такой, что

$$\mathbf{P}(\langle\xi-a,\ \lambda\rangle> 0)=0. \tag{20}$$

Доказательство. Для любого $t\in R^1$ справедливо

$$\Lambda(a)\geqslant\langle a,\ \lambda\rangle t-A(t\lambda)=-\ln Ee^{t\eta}, \tag{21}$$

где $\eta=\langle\xi-a,\ \lambda\rangle$. Поскольку случайная величина η в силу (19) отрицательна с вероятностью 1, то

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}e^{t\eta}=0,$$

и в силу (21) получаем, что $\Lambda(a)=\infty$.

Пусть теперь $\Lambda(a)=\infty$. Тогда найдется последовательность $\lambda_n=t_ne_n$, где e_n — единичные вектора из R^k, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}e^{t_n\eta_n}=0, \tag{22}$$

где $\eta_n=\langle\xi-a,\ e_n\rangle$. В силу неравенства Чебышева для любого $t\geqslant 0$ выполняется

$$\mathbf{P}(\eta_n\geqslant 0)=\mathbf{P}\left(e^{t\eta_n}\geqslant 1\right)\leqslant\mathbf{E}e^{t\eta_n},$$

поэтому, как следствие (22), получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\eta_n\geqslant 0)=0. \tag{23}$$

Можно считать, не ограничивая общности, что последовательность единичных векторов e_n сходится к вектору e_0; тогда с вероятностью 1 случайные величины η_n сходятся к случайной величине $\eta_0=\langle\xi-a,\ e_0\rangle$. Поскольку при этом выполняется (23), можно утверждать, что

$$\mathbf{P}(\eta_0>0)=0,$$

т. е. (20) имеет место. Лемма 3 доказана.

Таким образом, между достаточным условием (19) и необходимым условием (20) для бесконечности $\Lambda(a)$ есть разрыв. Следующие два примера показывают, что он — по существу, т. е. условие (19) не является необходимым, а условие (20) — достаточным для выполнения $\Lambda(a)=\infty$.

Пример 1. Пусть $\xi=0$ с вероятностью 1, т. е. для $a=0$ и любого $\lambda\in R^k$ условие (20) имеет место. Однако

$$\Lambda(0)=0,$$

так что равенство $\Lambda(0)=\infty$ не имеет место; условие (19) не достаточно для $\Lambda(a)=\infty$.

Пример 2. Пусть теперь $k=2$ и случайный вектор $\xi \in R^2$ с вероятностью $^1/_2$ равен вектору ξ_1, который имеет «вырожденное» равномерное распределение на отрезке $[(0, 0), (1, 0)]$, и с вероятностью $^1/_2$ равен вектору ξ_2, с равномерным распределением в области из R^2, ограниченной кривыми $y=-x^2$, $y=-1$, $x=0$. Для вычисления $\Lambda(0)$ заметим, что для вектора $\lambda_\varepsilon=(-\varepsilon, 1)$ выполняется

$$\mathbf{E}e^{t\langle\lambda_\varepsilon,\xi\rangle} \leqslant \mathbf{E}e^{t\delta(\varepsilon)}\mathbf{P}(\langle\xi, \lambda_\varepsilon\rangle > 0) + \mathbf{E}\left(e^{t\langle\lambda_\varepsilon,\xi\rangle};\ \langle\lambda_\varepsilon, \xi\rangle < 0\right), \tag{24}$$

где $\delta(\varepsilon)\downarrow 0$ при $\varepsilon\to 0$. Поскольку второе слагаемое в (24) сходится к 0 при $t\to\infty$, $\mathbf{P}(\langle\lambda_\varepsilon, \xi\rangle > 0)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, из (24) и из неравенства $\Lambda(0)\geqslant -\ln\mathbf{E}e^{t'\langle\lambda_\varepsilon,\xi\rangle}$ следует, что $\Lambda(0)=\infty$. Очевидно, далее, что для любого $\lambda\in R^k$ выполняется

$$\mathbf{P}(\langle\lambda, \xi\rangle \geqslant 0) > 0,$$

так что из $\Lambda(a)=\infty$ для $a=0$ не следует (19).

Ниже мы докажем, что для одномерных случайных величин ($k=1$, $\xi\in R^1$) условие (19) является необходимым и достаточным для $\Lambda(a)=\infty$.

5. **Поверхности уровня b, преобразование Крамера.** Рассмотрим определение (2) функции уклонений и предположим, что в точке $a\in R^k$ существует вектор $\lambda=\lambda(a)$ (не единственный), в котором sup достигается:

$$\Lambda(a)=\sup_\lambda\{\langle a, \lambda\rangle - A(\lambda)\} = \langle a, \lambda(a)\rangle - A(\lambda(a)). \tag{25}$$

Разумеется, не для всех $a\in R^k$ такое значение $\lambda(a)$ определено (если, скажем, $\xi\in R^1$ и $\mathbf{P}(\xi\leqslant 0)=1$, то для $a\geqslant 0$ не существует $\lambda(a)$, для которого (25) имело бы место).

Обозначим $\Gamma=\Gamma_F\subseteq R^k$ совокупность векторов $\lambda\in R^k$, таких, что $A_F(\lambda)<\infty$. В силу перечисленных свойств функции A это множество выпукло. Обозначим (Γ) совокупность внутренних точек множества Γ. Таким образом, множество (Γ) не пусто тогда и только тогда, когда выполнено условие Cr_2.

Все значения $\lambda(a)$, которые существуют, лежат в множестве Γ. Если же выполнено условие невырожденности Cr_0, то для любого $a\in R^k$, для которого существует вектор $\lambda(a)$, этот вектор единствен. Докажем это. Пусть существуют два вектора λ_1, $\lambda_2\in\Gamma$, таких, что

$$\sup_\lambda\{-A(\lambda)\} = -A(\lambda_1) = -A(\lambda_2)$$

(не ограничивая общности, можно считать $a=0$). В силу выпуклости функции $A(\lambda)$ для случайных величин $\eta_i=\langle\lambda_i, \xi\rangle$, $i=1, 2$, для $t\in[-1/2, 1/2]$ выполняется

$$\mathbf{E}e^{\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)+t(\eta_1-\eta_2)} = \mathbf{E}e^{\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)}.$$

Это значит, что

$$\mathbf{P}(\langle\lambda_1-\lambda_2, \xi\rangle=0)=\mathbf{P}(\eta_1-\eta_2=0)=1,$$

что противоречит условию Cr_0.

Таким образом, если выполнено условие Cr_0, то можно считать, что задана функция $\lambda=\lambda(a)$: $G\to R^k$, где $G\subseteq R^k$ — множество, для которого вектора $\lambda(a)$ определены.

Обозначим

$$G_0=\{a\in R^k\colon a=A'(\lambda),\ \lambda\in(\Gamma)\},$$

где $A'(\lambda)=\operatorname{grad} A(\lambda)\in R^k$. Множество G_0 не пусто, если выполнено условие Cr_2. Поскольку функция $A(\lambda)$ в области (Γ) аналитична, можно выписать уравнение для $\lambda(a)$, $a\in G_0$:

$$A'(\lambda)=a. \tag{26}$$

Для всех $\lambda \in (\Gamma)$ матрица вторых производных $A''(\lambda)$ функции $A(\lambda)$ положительно определена (в силу условия $C\Gamma_0$), поэтому для всех $a \in G_0$ уравнение (26) имеет единственное решение $\lambda(a)$, аналитичное в области G_0. Таким образом, функции $\lambda(a)$, $a \in G_0$, и $a(\lambda) = A'(\lambda)$, $\lambda \in (\Gamma)$, являясь обратными друг к другу, осуществляют взаимно однозначное отображение областей G_0 и (Γ). Дифференцируя равенство (25) и используя (26), получаем для $a \in G_0$ соотношение

$$\Lambda'(a) = \lambda(a). \tag{27}$$

Для $\lambda \in (\Gamma)$ формулу обращения (4) можно переписать в виде

$$A(\lambda) = \sup_a \{\langle a, \lambda\rangle - \Lambda(a)\} = \langle a(\lambda), \lambda\rangle - \Lambda(a(\lambda)). \tag{28}$$

Очевидно, что формула (28) сохраняется для всех $\lambda \in \Gamma$, для которых $a(\lambda)$ конечно.

Обозначим $\Lambda''(a)$ матрицу вторых производных функции $\Lambda(a)$, $a \in G_0$. В силу (27) и (28) между матрицами $\Lambda''(a)$ и $A''(\lambda)$ имеет место связь:

$$A''(\lambda(a)) = [\Lambda''(a)]^{-1}, \quad a \in G_0,$$
$$\Lambda''(a(\lambda)) = [A''(\lambda)]^{-1}, \quad \lambda \in (\Gamma).$$

Поэтому матрица $\Lambda''(a)$ положительно определена для всех $a \in G_0$.

Совокупность точек $a \in R^k$, для которых $\Lambda(a) = b$, $b \geqslant 0$, назовем поверхностью уровня b функции уклонений Λ и обозначим ее $\partial H(b)$. Так как функция $\Lambda(a)$ выпукла и полунепрерывна, то поверхность $\partial H(b)$ является границей расширяющихся с ростом b выпуклых замкнутых множеств

$$H(b) = \{a: \Lambda(a) \leqslant b\}. \tag{29}$$

Отметим, что вектор a лежит на поверхности $\partial H(\Lambda(a))$, а вектор $\lambda(a)$ ортогонален этой поверхности в точке a и направлен вне множества $H(\Lambda(a))$).

Из определения (2) следует, что $\Lambda(\mathbf{E}\xi) = 0$, т. е. $\mathbf{E}\xi \in H(0)$. Если $\mathbf{E}\xi \in G_0$, то, очевидно, для любого $a \neq \mathbf{E}\xi$ выполняется $\Lambda(a) > 0$, так что в этом случае множество $H(0)$ состоит из одной точки $\mathbf{E}\xi$.

Для любого вектора $\mu \in \Gamma$ можно ввести новое распределение $\widetilde{F} \neq \widetilde{F}^{(\mu)}$, которое называют *преобразованием Крамера распределения* F (*или сопряженным к* F *распределением*):

$$\widetilde{F}^{(\mu)}(U) = \frac{\mathbf{E}(e^{\langle\mu,\xi\rangle}, U)}{\mathbf{E}e^{\langle\mu,\xi\rangle}}. \tag{30}$$

Поскольку

$$A_{\widetilde{F}}(\lambda) = A_F(\lambda + \mu) - A_F(\mu), \tag{31}$$

для $\mu \in (\Gamma)$ в силу определения (2) получаем

$$\Lambda_{\widetilde{F}}(a) = \Lambda_F(a) - \Lambda_F(a(\mu)) - \langle(a - a(\mu)), \mu\rangle.$$

Из последнего равенства следует, что функция уклонений $\Lambda_{\widetilde{F}}(a)$ обращается в 0 в точке $a = a(\mu) \in G_0$. При этом, дифференцируя (31), получаем, что $A'_{\widetilde{F}}(0) = a(\mu)$, т. е.

$$\mathbf{E}\xi = a(\mu) \text{ при } \xi \in \widetilde{F}^{(\mu)}, \ \mu \in (\Gamma). \tag{32}$$

Последнее означает, что для любого вектора a из области G_0 можно выбрать такое преобразование $\widetilde{F} = \widetilde{F}(\mu)$, что $\widetilde{F}$ — среднее вектора ξ будет равно a (для этого достаточно положить $\mu = \lambda(a)$).

Рассмотрим пример гауссовского распределения $\Phi = \Phi_{b,B}$ со средним b и ковариационной матрицей B (условие $C\Gamma_0$ означает, что матрица B не вырождена). Легко видеть, что

$$A_\Phi(\lambda)=\frac{\lambda B\lambda^{\mathrm{T}}}{2}+\langle\lambda, b\rangle,\ G_0=(\Gamma)=R^k, \tag{33}$$
$$\Lambda_\Phi(a)=(a-b)\frac{B^{-1}}{2}(a-b)^{\mathrm{T}},\ \lambda_\Phi(a)=(a-b)B^{-1}.$$

Заметим, что преобразование Крамера $\widetilde{\Phi}^{(\mu)}$ гауссовского распределения Φ тоже является гауссовским с новым средним $\widetilde{b}=\widetilde{b}(\mu)$, зависящим от μ, и прежней ковариационной матрицей B:

$$\widetilde{\Phi}^{(\mu)}_{b,B}=\Phi_{\widetilde{b},B},\quad \text{где}\quad \widetilde{b}=b+\mu B.$$

Обратимся вновь к функции уклонений $\Lambda_F(a)$ произвольного случайного вектора ξ с распределением F. Пусть $m=\mathbf{E}\xi$ и $m\in G_0$. Функция $\Lambda_F(a)$ аналитична в области G_0, $\Lambda_F(m)=0$, $\lambda_F(m)=\Lambda_F'(m)=0$, так что при $|a|\to 0$

$$\Lambda_F(m+a)=\frac{a\Lambda_F''(m)\,a^{\mathrm{T}}}{2}+O(|a|^3). \tag{34}$$

Сравнивая (33) с (34), убеждаемся, что в окрестности точки $m=\mathbf{E}\xi$ функция уклонений $\Lambda_F(a)$ ведет себя как функция уклонений гауссовского вектора с распределением $\Phi=\Phi_{m,B}$:

$$\Lambda_F(m+a)=\Lambda_\Phi(a)+O(|a|^3), \tag{35}$$

где $B=\mathbf{E}(\xi-m)^{\mathrm{T}}(\xi-m)$.

Закончим настоящий раздел следующим полезным утверждением.

Лемма 4. *Если функция Λ конечна в некоторой окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки a, то в этой точке a определена функция $\lambda(a)$.*

Доказательство. В силу леммы 3 для любого $\lambda>0$ выполняется (можно считать $a=0$)

$$\mathbf{P}(\langle\xi,\lambda\rangle>0)>0,$$

поэтому функция $-A(\lambda)$ при $|\lambda|\to\infty$ убывает до $-\infty$. Стало быть, существует вектор $\lambda=\lambda(0)$, на котором достигается

$$\sup_\lambda\{-A(\lambda)\}=A(\lambda(0)).$$

Лемма 4 доказана.

6. Теорема непрерывности. Пусть $F^{(n)}$, $n=1, 2, \ldots$,— последовательность распределений в R^k и при $n\to\infty$ имеет место слабая сходимость

$$F^{(n)}\Rightarrow F^{(0)}.$$

Обозначим $A^{(n)}(\lambda)$ и $\Lambda^{(n)}(a)$ функции A_F и Λ_F для $F=F^{(n)}$. В настоящем разделе рассмотрен вопрос: при каких дополнительных условиях из сходимости (34) следует сходимость функций уклонений.

Введем последовательность функций $B^{(n)}$, $n=0, 1, \ldots$, отображающих R^k в $(-\infty, \infty]$. Будем говорить, что функции $B^{(n)}$ слабо сходятся к функции $B^{(0)}$ при $n\to\infty$, если для любой точки непрерывности λ предельной функции $B^{(0)}$ имеет место сходимость

$$B^{(n)}(\lambda)\to B^{(0)}(\lambda)\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Слабую сходимость функций обозначим

$$B^{(n)}\mapsto B^{(0)}.$$

Теорема 1. *Пусть $F^{(n)}\Rightarrow F^{(0)}$ и для распределения $F^{(0)}$ выполнены условия Cr_0 и Cr_1. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1) $A^{(n)}\mapsto A^{(0)}$;

2) $\Lambda^{(n)}\mapsto\Lambda^{(0)}$.

Прежде чем доказывать теорему, посмотрим, что представляют условия Cr_0 и Cr_2 в терминах функций A и Λ. Обозначим $\mathscr{B}=\mathscr{B}_k$ класс выпуклых функции $B=B(\lambda)$: $R^k\to(-\infty, \infty]$. Для $B\in\mathscr{B}$ рассмотрим множество $\Gamma_B=\{\lambda: B(\lambda)<\infty\}$ и его внутренность (Γ_B). Очевидно, что условие Cr_2 для F эквивалентно тому, что $(\Gamma_A)\neq\varnothing$, где $A=A_F$. Убедимся далее, что условие Cr_0 выполнено для F тогда и только тогда, когда $(\Gamma_\Lambda)\neq\varnothing$, где $\Lambda=\Lambda_F$. Если условие Cr_0 не выполнено, т. е. существуют $\lambda_0\in R^k$ и $t_0\in R^1$ такие, что

$$\mathbf{P}(\langle\xi, \lambda_0\rangle = t_0)=1, \quad \xi\in F,$$

то по определению функции уклонений

$$\Lambda(a)=\infty$$

для всех a, не лежащих в плоскости,

$$L=L(\lambda_0, t_0)=\{a: \langle\lambda_0, \xi\rangle = t_0\}.$$

Это означает, что $(\Gamma_\Lambda)=\varnothing$. Если же $(\Gamma_\Lambda)=\varnothing$, то найдутся $\lambda_0\in R^k$ и $t_0\in R^1$ такие, что множество Γ_Λ содержится в плоскости $L(\lambda_0, t_0)$. Из неравенства (16) следует, что для любого $\delta>0$

$$\mathbf{P}(|\langle\xi, \lambda_0\rangle - t_0|>\delta)=0,$$

т. е. условие Cr_0 не выполнено.

Доказательство теоремы 1.

I. Пусть выполнено условие 2). В силу $F^{(n)}\Rightarrow F^{(0)}$ справедливо

$$\liminf_{n\to\infty}\mathbf{E}e^{\langle\lambda,\xi^{(n)}\rangle}\geqslant \mathbf{E}e^{\langle\lambda,\xi^{(0)}\rangle},$$

т. е. верна оценка снизу в 1):

$$\liminf_{n\to\infty} A^{(n)}(\lambda)\geqslant A^{(0)}(\lambda). \tag{36}$$

Оценку сверху

$$\limsup_{n\to\infty} A^{(n)}(\lambda)\leqslant A^{(0)}(\lambda)$$

достаточно доказать для λ из множества $(\Gamma^{(0)})$ аналитичности функции $A^{(0)}$. Действительно, в остальных точках непрерывности функции $A^{(0)}$ выполняется $A^{(0)}(\lambda)=\infty$, поэтому требуемая сходимость следует из (36). Итак, $\lambda\in(\Gamma^{(0)})$, так что в силу (28)

$$A^{(0)}(\lambda)=\langle a^{(0)}(\lambda), \lambda\rangle-\Lambda^{(0)}(a^{(0)}(\lambda)).$$

Для некоторого $\delta>0$ функция $\Lambda^{(0)}$ аналитична в области $U_\delta(a^{(0)}(\lambda))$, и последовательность аналитических функций $\Lambda^{(n)}(a)$ сходится к $\Lambda^{(0)}(a)$ равномерно на $U_\delta(a^{(0)}(\lambda))$. Поэтому точки максимума $a^{(n)}(\lambda)$ функции $\langle a, \lambda\rangle-\Lambda^{(n)}(a)$ сходятся к точке максимума $a^{(0)}(\lambda)$ функции $\langle a, \lambda\rangle-\Lambda^{(0)}(a)$. В силу формулы обращения (28) получаем

$$A^{(n)}(\lambda)=\langle a^{(n)}(\lambda), \lambda\rangle-\Lambda^{(n)}(a^{(n)}(\lambda))\to$$

$$\to\langle a^{(0)}(\lambda), \lambda\rangle-\Lambda^{(0)}(a^{(0)}(\lambda))=A^{(0)}(\lambda).$$

Мы доказали, что $A^{(n)}\Rightarrow A^{(0)}$.

II. Пусть теперь выполнено условие 1), $a\in R^k$, $\Lambda^{(0)}(a)=\infty$. Не ограничивая общности, будем считать $a=0$. Тогда найдется последовательность $\lambda_m\in R^k$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty}\left(-A^{(0)}(\lambda_m)\right)=\Lambda^{(0)}(0)=\infty, \tag{37}$$

и при этом все λ_m являются точками непрерывности функции $A^{(0)}(\lambda)$. Для любого m справедливо

$$\lim_{n\to\infty} A^{(n)}(\lambda_m) = A^{(0)}(\lambda_m), \tag{38}$$

поэтому

$$\liminf_{n\to\infty} \Lambda^{(n)}(0) \geqslant -A^{(0)}(\lambda_m). \tag{39}$$

Из (37), (39) следует, что

$$\liminf_{n\to\infty} \Lambda^{(n)}(0) \geqslant \Lambda^{(0)}(0) = \infty,$$

т. е. в этом случае требуемая сходимость имеет место.

Пусть теперь $\Lambda^{(0)}(a) < \infty$, и вектор a является точкой непрерывности функции $\Lambda^{(0)}$. В этом случае можно, не уменьшая общности, считать $a = 0$. Поскольку $\Lambda^{(0)}(a)$ конечно в некоторой окрестности $a = 0$, по лемме 4 существует единственный вектор $\lambda^{(0)}(0)$, удовлетворяющий равенству

$$\Lambda^{(0)}(0) = -A^{(0)}(\lambda^{(0)}(0)).$$

Точка $\lambda^{(0)}$ лежит в множестве $\Gamma^{(0)} = \{\lambda: A^{(0)}(\lambda) < \infty\}$, которое имеет непустую внутренность (Γ^0) (в силу условия Cr_2), и можно выбрать последовательность $\lambda_m \in (\Gamma^{(0)})$, сходящуюся к $\lambda^{(0)}$, такую, что

$$A^{(0)}\left(\lambda^{(0)}\right) = \lim_{m\to\infty} A^{(0)}(\lambda_m).$$

В этом случае соотношения (38) и (39) имеют место, поэтому

$$\liminf_{n\to\infty} \Lambda^{(n)}(0) \geqslant \Lambda^{(0)}(0). \tag{40}$$

Нам осталось доказать, что

$$\limsup_{n\to\infty} \Lambda^{(n)}(0) \leqslant \Lambda^{(0)}(0),$$

иначе говоря,

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{\lambda} \Lambda^{(n)}(\lambda) \geqslant \inf_{\lambda} A^0(\lambda) = A^{(0)}\left(\lambda^{(0)}\right). \tag{41}$$

Соотношение (40) нам понадобится в более удобной форме

$$\limsup_{n\to\infty} \inf_{\lambda} A^{(n)}(\lambda) \leqslant \inf_{\lambda} A^{(0)}(\lambda) = A^{(0)}\left(\lambda^{(0)}\right). \tag{42}$$

Поскольку $\inf A^{(0)}(\lambda)$ достигается в конечной точке $\lambda^{(0)}$, для любого $e \in R^k$, $|e| = 1$, найдутся $\varepsilon = \varepsilon(e) > 0$, $\delta = \delta(e) > 0$, $\Delta = \Delta(e) < \infty$ такие, что

$$\mathbf{P}(\langle e, \xi^{(0)}\rangle \geqslant \delta;\ |\xi^{(0)}| \leqslant \Delta) \geqslant \varepsilon. \tag{43}$$

Из (43) в силу сходимости $F^{(n)} \Rightarrow F^{(0)}$ получаем, что для любого $e \in R^k$, $|e| = 1$, найдутся $N = N(e)$, $\varepsilon = \varepsilon(e)$, $\delta = \delta(e)$, $\Delta = \Delta(e)$ такие, что для $n \geqslant N$

$$\mathbf{P}(\langle e, \xi^{(n)}\rangle \geqslant \delta;\ |\xi^{(n)}| \leqslant \Delta) \geqslant \varepsilon. \tag{44}$$

Каждый вектор e из компакта $E = \{e: |e| = 1\}$ можно накрыть открытым множеством $U_r(e)$, где $r = r(e) = \delta/(2N)$. Из этого покрытия выберем конечное подпокрытие, связанное с точками $e_1, \ldots, e_m$ из E. Обозначим

$$\delta^* = \min \delta(e_i),\ \varepsilon^* = \min \varepsilon(e_i),\ \Delta^* = \max \Delta(e_i),$$

$$N^* = \max N(e_i).$$

Для произвольного $e \in E$ можно выбрать вектор $e_i \in \{e_1, \ldots, e_m\}$, такой, что $|e - e_i| \leqslant \delta(e_i)$, поэтому справедливо

$$\left\{\left\langle \xi^{(n)}, e\right\rangle \geqslant \frac{\delta^*}{2}\right\} \supseteq \left\{\left\langle \xi^{(n)}, e\right\rangle \geqslant \frac{\delta^*}{2}, \left\langle \xi^{(n)}, e_i\right\rangle \geqslant \delta^*, \left|\left\langle \xi^{(n)}, e - e_i\right\rangle\right| \leqslant \frac{\delta^*}{2}, \tag{45}$$

$$\left|\xi^{(n)}\right| \leqslant \Delta^*\right\} \supseteq \left\{\left\langle \xi^{(n)}, e\right\rangle \geqslant \delta, \left|\xi^{(n)}\right| \leqslant \Delta\right\}.$$

В силу (44) и (45) для $n \geqslant N^*$ верно

$$\mathbf{P}\left(\left\langle \xi^{(n)}, e\right\rangle \geqslant \frac{\delta^*}{2}\right) \geqslant \varepsilon^* > 0. \tag{46}$$

Из (46) следует, что найдутся $T < \infty$ и $N < \infty$ такие, что для $n \geqslant N$

$$\inf_{\lambda} A^{(n)}(\lambda) = \inf_{|\lambda| \leqslant T} A^{(n)}(\lambda), \tag{47}$$

т. е. точки минимума функций $A^{(n)}(\lambda)$ лежат в круге радиуса T для всех достаточно больших n. Действительно, для $e \in E$, $t \geqslant 0$

$$\varphi^{(n)}(te) = \mathbf{E}e^{t\langle e, \xi^{(n)}\rangle} \geqslant \mathbf{E}\left(e^{t\langle e, \xi^{(n)}\rangle}; \left\langle e, \xi^{(n)}\right\rangle \geqslant \frac{\delta^*}{2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant e^{\frac{\delta^* t}{2}} \mathbf{P}\left(\left\langle e, \xi^{(n)}\right\rangle \geqslant \frac{\delta^*}{2}\right) \geqslant \varepsilon^* e^{\frac{\delta^* t}{2}}.$$

Из последнего для $T = \left(A^{(0)}\left(\lambda^{(0)}\right) + \ln \varepsilon + 1\right) \Big/ \left(\frac{\delta^*}{2}\right)$ получаем

$$\inf_{|\lambda| \geqslant T} A^{(n)}(\lambda) \geqslant A^{(0)}\left(\lambda^{(0)}\right) + 1.$$

Поскольку в силу (42) для всех достаточно больших n справедливо

$$\inf_{\lambda} A^{(n)}(\lambda) \leqslant A^{(0)}\left(\lambda^{(0)}\right) + 1/2,$$

соотношение (47) установлено. В силу (47) для доказательства (41) достаточно убедиться, что

$$\lim_{n \to \infty} \inf \inf_{\lambda} \widetilde{A}^{(n)}(\lambda) \geqslant \inf_{\lambda} \widetilde{A}^{(0)}(\lambda), \tag{48}$$

где $\widetilde{A}^{(n)}(\lambda) = A^{(n)}(\lambda)$, если $|\lambda| \leqslant T$, $A^{(n)}(\lambda) = \infty$, если $|\lambda| > T$.

Лемма 5. *Пусть* $B^{(n)} \in \mathscr{B}$, $B^{(n)} \mapsto B^{(0)}$ *при* $n \to \infty$, $(\Gamma^{(0)}) \neq \varnothing$ *и для некоторого* $T < \infty$ *и всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Gamma^{(n)} \subseteq U_T(0).$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{\lambda} B^{(n)}(\lambda) = \inf_{\lambda} B^{(0)}(\lambda). \tag{49}$$

Поскольку (48) следует из леммы 5, теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 5. Докажем несколько более сильный вариант леммы 5, в котором вместо сходимости $B^{(n)} \mapsto B^{(0)}$ будем предполагать сходимость

$$B^{(n)}(\lambda) \to B^{(0)}(\lambda) \text{ при } n \to \infty \tag{50}$$

для всех $\lambda \notin H^{(0)}$ ($H^{(0)}$ есть граница выпуклого множества $\Gamma^{(0)}$).

При $k = 1$ множество $\Gamma^{(0)}$ является непустым интервалом $\left(\lambda_-^{(0)}, \lambda_+^{(0)}\right)$, где $\left|\lambda_\pm^{(0)}\right| \leqslant T < \infty$. Для всех $\lambda \neq \lambda_\pm^{(0)}$ функция $B_{(\lambda)}^{(0)}$ непрерывна, и в интервале $\left(\lambda_-^{(0)}, \lambda_+^{(0)}\right)$ конечна и выпукла. Поэтому при $k = 1$ утверждение леммы 5 очевидно.

Пусть теперь $k = m > 1$. Любой вектор $\lambda \in R^m$ представим в виде $\lambda = (\widetilde{\lambda}, \lambda_m)$, где $\widetilde{\lambda} \in R^{m-1}$. Введем последовательность функций

$$\widetilde{B}^{(n)}(\widetilde{\lambda}) \equiv \inf_{\lambda_m \in R^1} B^{(n)}(\widetilde{\lambda}, \lambda_m), \ \widetilde{\lambda} \in R^{m-1}.$$

Все обозначения, введенные ранее для $B^{(n)}$, сохраним и для $\widetilde{B}^{(n)}$, снабдив их верхней волной. Очевидно, что функции $\widetilde{B}^{(n)}$ выпуклы,

$$(\widetilde{\Gamma}^{(0)})\neq\varnothing,\ \widetilde{\Gamma}^{(n)}\subseteq\widetilde{U}_\tau(0),\ n=0,\,1,\,\ldots.$$

Убедимся, что для всех $\widetilde{\lambda}\notin\widetilde{H}^{(0)}$

$$\widetilde{B}^{(n)}(\widetilde{\lambda})\to\widetilde{B}^{(0)}(\widetilde{\lambda}). \tag{51}$$

Для этого рассмотрим последовательность $f_{\widetilde{\lambda}}^{(n)}=f_{\widetilde{\lambda}}^{(n)}(t)\equiv B^{(n)}(\widetilde{\lambda},t)$ функций, отображающих R^1 в $(-\infty,\infty]$. Пусть $\widetilde{\lambda}\notin\widetilde{H}^{(0)}$. Тогда либо $\widetilde{B}^{(0)}(\widetilde{\lambda})=\infty$ и

$$\widetilde{B}^{(n)}(\widetilde{\lambda})\to\widetilde{B}^{(0)}(\widetilde{\lambda}), \tag{52}$$

либо $\widetilde{B}^{(0)}(\widetilde{\lambda})<\infty$ и тогда последовательность $f_{\widetilde{\lambda}}^{(n)}$ удовлетворяет всем условиям леммы 5 при $k=1$. Поэтому в силу уже доказанного утверждения леммы 5 при $k=1$ справедливо

$$\inf_t f_{\widetilde{\lambda}}^{(n)}(t)\to\inf_t f_{\widetilde{\lambda}}^{(0)}(t),$$

что вместе с (52) и дает (51). Очевидно далее, что

$$\inf_{\lambda\in R^m}B^{(m)}(\lambda)=\inf_{\widetilde{\lambda}\in R^{m-1}}\widetilde{B}^{(n)}(\widetilde{\lambda}).$$

Поэтому утверждение (49) при $k=m$ вытекает из этого же утверждения при $k=m-1$. В силу математической индукции лемма 5 доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть для распределения $F^{(0)}=F$ выполнены условия Cr_0 и Cr_2; распределение $F^{(n)}$ для $n=1,2,\ldots$ определим с помощью срезки на уровне n:*

$$F^{(n)}(U)\equiv F(U\cap U_n(0))/F(U_n(0)).$$

Тогда при $n\to\infty$

$$\Lambda^{(n)}\Rightarrow\Lambda^{(0)}.$$

Пусть F — произвольное распределение в R^k, $\Phi^{(\varepsilon)}$ — гауссовское распределение в R^k со средним 0 и ковариационной матрицей εB. Обозначим $F^{(\varepsilon)}=F*\Phi^{(\varepsilon)}$, и пусть $\Lambda^{(\varepsilon)}(a)$ есть функция уклонений, отвечающая распределению $F^{(\varepsilon)}$. В дальнейшем нам будет полезна

Лемма 6. *Для любого $a\in R^k$ при $\varepsilon\to0$ имеет место сходимость*

$$\Lambda^{(\varepsilon)}(a)\to\Lambda^{(0)}(a)\equiv\Lambda_F(a). \tag{53}$$

Доказательство. Пусть для простоты $B=E$. В силу (11)

$$\Lambda^{(\varepsilon)}(a)=\inf_b\left\{\Lambda_F(a-b)+\frac{|b|^2}{2\varepsilon}\right\}, \tag{54}$$

поэтому оценка сверху в (53)

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\Lambda^{(\varepsilon)}(a)\leqslant\Lambda_F(a)$$

имеет место. Оценка снизу в (53)

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\Lambda^{(\varepsilon)}(a)\geqslant\Lambda_F(a)$$

тоже следует из (54) в силу полунепрерывности функции уклонений. Лемма 6 доказана.

7. Функция уклонений в одномерном случае. Пусть случайная величина $\xi\in R^1$ с распределеним F на вещественной оси R^1 удовлетворяет условиям Cr_0 и Cr_2 (при $k=1$ условия Cr_1 и Cr_2 совпадают). Напомним, что функция $A(\lambda)=\ln \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$ и функция уклонений $\Lambda(a)$ связаны соотношениями

$$\Lambda(a)=\sup_\lambda\{a\lambda-A(\lambda)\},\quad A(\lambda)=\sup_a\{a\lambda-\Lambda(a)\},\tag{55}$$

где $a,\lambda\in R^1$. Обозначим $[\lambda_-,\lambda_+]$ отрезок, внутри которого функция $\Lambda(\lambda)$ конечна и вне которого она обращается в ∞. В силу условия Cr_2 выполняется $\lambda_-<\lambda_+$. В интервале (λ_-,λ_+) функция $A(\lambda)$ аналитична и в силу условия Cr_0 строго выпукла, так что $A''(\lambda)>0$ при $\lambda\in(\lambda_-,\lambda_+)$. Обозначим

$$a_-=\inf_{\lambda_-<\lambda<\lambda_+}A'(\lambda),\quad a_+=\sup_{\lambda_-<\lambda<\lambda_+}A'(\lambda).$$

На отрезке $[a_-,a_+]$ функция $\lambda(a)$ есть единственное решение уравнения (см. (26))

$$A'(\lambda)=a.$$

Если $a_+<\infty$, то при $a>a_+$ функция $\lambda(a)$ равна константе λ_+; аналогично при $a<a_-$ выполняется $\lambda(a)=\lambda_-$. Из определения функции $\Lambda(a)$ (см. (55)) следует, что при $a\geqslant a_+$ справедливо

$$\Lambda(a)=\Lambda(a_+)+\lambda_+(a-a_+);\tag{56}$$

аналогично при $a\leqslant a_-$

$$\Lambda(a)=\Lambda(a_-)+\lambda_-(a-a_-).\tag{57}$$

В силу условия Cr_2 число $m=\mathbf{E}\xi$, конечное или равное $\pm\infty$, всегда определено, и выполняется равенство

$$\Lambda(m)=0.$$

Поэтому (см. (27), (56), (57)) для всех $a\in R^1$ справедливо

$$\Lambda(a)=\int_m^a\lambda(t)\,dt.\tag{58}$$

В силу (58) функция $\Lambda(a)$ может обращаться в ∞ только при $a\notin(a_-,a_+)$, причем $\Lambda(a)=\infty$ при $a>a_+$ тогда и только тогда, когда $\lambda_+=\infty$, $a_+<\infty$, т. е.

$$\mathbf{P}(\xi>a_+)=0.$$

Значение функции $\Lambda(a)$ в точках $a=a_\pm$ (когда эти точки являются точками разрывов) в силу полунепрерывности являются пределами значений $\Lambda(a)$ при $a\to a_\pm$ «изнутри» интервала (a_-,a_+). Пусть $a=a_+$ — точка разрыва $\Lambda(a)$. Непосредственно из первого соотношения в (55) следует, что

$$\Lambda(a_+)=-\ln p_+,$$

где

$$p_+=\mathbf{P}(\xi\geqslant a_+)=\mathbf{P}(\xi=a_+),$$

так что значение $\Lambda(a_+)$ конечно в точке разрыва a_+ тогда и только тогда, когда $p_+>0$.

При $a=a_-$ дело обстоит аналогичным образом.

Пусть $\xi,\xi_1,\xi_2,\ldots$ — независимые случайные величины с общим распределением F, $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$.

Лемма 7. *Для любого* $c\in R^1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}>c\right)=-\inf_{t<l}\Lambda_F(t).\tag{59}$$

При этом, если

$$\inf_{t>c} \Lambda(t) > 0, \tag{60}$$

то

$$\inf_{t>c} \Lambda(t) = \Lambda(c+0); \tag{61}$$

если

$$\infty > \inf_{t>c} \Lambda(t) > 0, \tag{62}$$

то

$$\Lambda(c) = \Lambda(c+0) = \sup_{\lambda \geqslant 0} \{c\lambda - A(\lambda)\}. \tag{63}$$

Доказательство. Если выполнено условие (60), то минимум функции $\Lambda(a)$ лежит вне множества (c, ∞) и, стало быть, на этом множестве $\Lambda(a)$ не убывает. Поэтому верно равенство (61). Дополнительное условие $\Lambda(c+0) < \infty$ означает, что точка c является точкой непрерывности функции $\Lambda(a)$, т. е. верно первое равенство в (63). Для доказательства второго равенства в (63) заметим, что в силу (60) и отмеченного ранее свойства неубывания Λ на (c, ∞) справедливо $\lambda(c) \equiv \Lambda'(c) \geqslant \geqslant 0$. Поэтому верно равенство

$$\Lambda(c) = c\lambda(c) - A(\lambda(c)) = \sup_{\lambda \geqslant 0} \{c\lambda - A(\lambda)\},$$

т. е. второе равенство в (63) также имеет место.

Докажем (59). При этом будем считать, что

$$\inf_{t>c} \Lambda(t) < \infty.$$

Если это условие не выполнено, то в силу перечисленных свойств функции $\Lambda(a)$ левая и правая части (59) равны $-\infty$, т. е. равенство (59) имеет место. Для получения оценки сверху в (59)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} > c\right) \leqslant -\inf_{t>c} \Lambda(t) \tag{64}$$

воспользуемся неравенством Чебышева: для $n = 1, 2, \ldots, \lambda \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} > c\right) \leqslant e^{-n(c\lambda - A(\lambda))}. \tag{65}$$

Если правая часть (64) равна 0, то неравенство (64) очевидным образом выполнено. Если правая часть (64) больше 0, то в силу уже доказанных соотношений (61) и (63) получаем для $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} > c\right) \leqslant -\inf_{t>c} \Lambda(t), \tag{66}$$

т. е. неравенство (64) (и даже более сильный вариант (66)) имеет место.

Докажем теперь оценку снизу в (59):

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} > c\right) \geqslant -\inf_{t>c} \Lambda(t).$$

Для этого достаточно доказать, что для любых $t \in R^1$, $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\right) \geqslant -\Lambda(t). \tag{67}$$

Возможны три случая: 1) $\lambda(t) = +\infty$, 2) $\lambda(t) = -\infty$, 3) $|\lambda(t)| < \infty$. В первом случае выделяются (в силу перечисленных выше свойств функции $\Lambda(a)$) два подслучая:

а) $\Lambda(t) = \infty$, $\mathbf{P}(\xi > t) = 0$;

б) $\Lambda(t) < \infty$, $\mathbf{P}(\xi > t) = 0$, $\mathbf{P}(\xi = t) = e^{-\Lambda(t)}$.

В случае а) правая часть (67) равна $-\infty$, так что (67) верно. В случае б) левая часть (67) не меньше, чем

$$\frac{1}{n}\ln \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}=t\right)=\ln \mathbf{P}(\xi_1=t)=-\Lambda(t),$$

что тоже приводит к неравенству (67). Таким образом, в случае 1) неравенство (67) установлено. Поэтому оно верно и в случае 2). Осталось рассмотреть случай 3).

Предположим сначала, что слагаемые ξ_i ограничены с вероятностью 1, т. е. для некоторого $N<\infty$

$$\mathbf{P}(|\xi_1|\leqslant N)=1. \tag{68}$$

Введем наряду с распределением F новое распределение $\tilde F=\tilde F^{(\lambda(t))}$, положив (см. (30))

$$\tilde F(U)=\mathbf{E}(e^{\lambda(t)\xi};\ \xi\in U)/\mathbf{E}e^{\lambda(t)\xi}.$$

Обозначая через $\tilde{\mathbf{P}}$ и $\tilde{\mathbf{E}}$ вероятность и усреднение по распределению $\tilde F$, можно записать для любых $0<\delta\leqslant\varepsilon$

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in(t-\varepsilon,t+\varepsilon)\right)\geqslant\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in(t-\delta,t+\delta)\right)=$$

$$=e^{-n\Lambda(t)}\tilde{\mathbf{E}}\left(e^{-\lambda(t)(S_n-nt)};\ |S_n-nt|<\delta n\right)\geqslant e^{-n\Lambda(t)-|\lambda(t)|\delta}\tilde{\mathbf{P}}(|S_n-nt|<\delta n).$$

Как отмечалось ранее (см. (32)),

$$\tilde{\mathbf{E}}\xi=t,$$

поэтому при $n\to\infty$ по закону больших чисел для любого $\delta>0$

$$\tilde{\mathbf{P}}(|S_n-nt|<\delta n)\to 1.$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in(t-\varepsilon,t+\varepsilon)\right)\geqslant-\Lambda(t)-\delta,$$

т. е. оценка снизу (67) имеет место.

Если условие (68) не выполнено, то для любого N введем распределение

$$F^{(N)}(U)=\mathbf{P}(\xi\in U/|\xi|\leqslant N). \tag{69}$$

Обозначим соответствующие распределению $F^{(N)}$ функции через $A^{(N)}\lambda$ и $\Lambda^{(N)}(a)$. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}>c\right)\geqslant\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}>c,|\xi_i|\leqslant N,\quad i=1,\ldots,n\right)=\mathbf{P}^N\left(\frac{S_n}{n}>c\right)\mathbf{P}^n(|\xi_1|\leqslant N),$$

$$\text{где }\ \mathbf{P}^{(N)}\left(\frac{S_n}{n}>c\right)\equiv\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}>c\,/|\xi_1|\leqslant N,\ldots,|\xi_n|\leqslant N\right).$$

Поэтому левая часть (67) не меньше, чем

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}^{(N)}\left(\frac{S_n}{n}\in(t-\varepsilon,t+\varepsilon)\right)+\ln\mathbf{P}(|\xi_1|\leqslant N). \tag{70}$$

В силу уже доказанного (70) не меньше, чем

$$-\Lambda^{(N)}(t)+\ln\mathbf{P}(|\xi_1|\leqslant N). \tag{71}$$

Воспользуемся далее следствием 1 из теоремы 1. Поскольку $|\lambda(t)|<\infty$, точка $a=t$ в силу (59) является точкой непрерывности функции $\Lambda(a)$ и, стало быть, при $N\to\infty$ сумма (71) сходится к величине $\Lambda(t)$. Поэтому нужное неравенство (67) доказано. Лемма 7 доказана.

Замечание. Просматривая доказательство леммы 7, можно заметить, что утверждение (59) верно и без условий Cr_0 и Cr_2. Действительно, если не выполнено условие Cr_0, т. е. $\mathbf{P}(\xi = m) = 1$, то соотношение (59), очевидно, выполнено. Если же не выполнено условие Cr_2, т. е. $A(\lambda) = \infty$ при $\lambda \neq 0$ и $\Lambda(a) = 0$ для всех $a \in R^1$, то в доказательстве нуждается только оценка снизу (67). Тут можно поступать, как и ранее, используя аппроксимацию распределения F распределениями $F^{(N)}$ (см. (69)). При этом нетрудно показать, что при $N \to \infty$

$$\Lambda^{(N)}(a) \to \Lambda(a) = \infty,$$

поэтому требуемая оценка снизу в этом случае имеет место тоже.

В заключение этого раздела рассмотрим несколько примеров.

1. Для распределения Бернулли с параметром p введенные характеристики имеют вид ($q = 1 - p$)

$$A(\lambda) = \ln(pe^{\lambda} + qe^{-\lambda}), \quad |\lambda_\pm| = \infty, \; a_\pm = \pm 1,$$

$$\lambda(a) = \frac{1}{2}\ln\frac{q(1+a)}{p(1-a)}, \; \Lambda(a) = \frac{a}{2}\ln\frac{q(1+a)}{p(1-a)} - \ln\left[\sqrt{pq}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)\right].$$

2. Для показательного распределения с параметром μ

$$A(\lambda) = \ln\mu - \ln(\mu - \lambda), \; \lambda_+ = \mu, \; \lambda_- = -\infty, \; a_+ = \infty, \; a_- = 0,$$

$$\lambda(a) = \mu - \frac{1}{a}, \; \Lambda(a) = \mu\left(a - \frac{1}{\mu}\right) - \ln a - \ln\mu.$$

3. Для распределения Пуассона с параметром μ

$$A(\lambda) = \mu(e^{\lambda} - 1), \; |\lambda_\pm| = \infty, \; a_+ = \infty, \; a_- = 0,$$

$$\lambda(a) = \ln\frac{a}{\mu}, \; \Lambda(a) = a(\ln a - 1) - a\ln\mu + \mu.$$

8. Доказательство свойства 3) функции уклонений (см. (5)). Для $\varepsilon > 0$, $a \in R^k$ введем обозначения

$$L^+(\varepsilon, a) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in U_\varepsilon(a)\right),$$

$$L^-(\varepsilon, a) = \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in U_\varepsilon(a)\right),$$

$$\Lambda(U) = \inf\{\Lambda(a): \; a \in U\}.$$

I. Докажем оценку сверху в (5):

$$L^+(a) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} L^+(\varepsilon, a) \leqslant -\Lambda(a). \tag{72}$$

Если $\Lambda(a) = 0$, то (72) имеет место. Пусть $\Lambda(a) > 0$. Для любых $\delta > 0$ и $M < \infty$ найдется $\varepsilon > 0$ и полупространство $L = \{b\colon \langle b, \mu\rangle > c\}$ такие, что а) $L \geqslant U_\varepsilon(a)$, б) $\Lambda(L) \geqslant \min(\Lambda(a) - \delta, M)$. Действительно, замкнутое множество

$$H(T) = \{b\colon \Lambda(b) \leqslant T\}; \; T = \min\{\Lambda(a) - \delta, M\},$$

не содержит точку a. В силу полунепрерывности $\Lambda(a)$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество $U_\varepsilon(a)$ целиком лежит вне $H(T)$. Значит, можно провести гиперплоскость, которая разделяла бы выпуклые множества $H(T)$ и $U_\varepsilon(a)$. Это значит, что построено полупространство L, удовлетворяющее а) и б). В силу формул (16) и (12) получаем

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in U_\varepsilon(a)\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in L\right) \leqslant e^{-\Lambda_{\frac{S_n}{n}}(L)} = e^{-n\Lambda_{\xi_1}(L)} \leqslant e^{-nT},$$

так что

$$L^+(\varepsilon, \; a) \leqslant -T = \min(\Lambda(a) - \delta, \; M). \tag{73}$$

Переходя в (73) к пределу по $\varepsilon \to 0$, $M \to \infty$, $\delta \to 0$, получаем (72).

II. Докажем оценку снизу в (5):

$$L^-(a) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} L^-(\varepsilon, a) \geqslant -\Lambda(a). \tag{74}$$

Если $\Lambda(a)=\infty$, то (74) очевидно. Поэтому пусть $\Lambda(a)<\infty$. Пусть a является точкой непрерывности функции $\Lambda(a)$. В этом случае, повторяя доказательство оценки снизу в лемме 7 (доказательство соотношения (67)) и не привлекая при этом дополнительных идей, можно показать, что для любого $\varepsilon>0$

$$L^-(\varepsilon, a)\geqslant -\Lambda(a),$$

так что

$$L^-(a)\geqslant -\Lambda(a).$$

Заметим далее, что множество конечности функции $\Lambda(a)$

$$\Gamma_\Lambda = \{b:\ \Lambda(b)<\infty\}$$

выпукло, имеет непустую внутренность (Γ_Λ), и все точки $\lambda\in(\Gamma_\Lambda)$ являются точками непрерывности функции Λ. Поэтому для любого $a\in\Gamma_\Lambda$ найдется последовательность $a_m\to a$, $a_m\in(\Gamma_\Lambda)$ такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} \Lambda(a_m) = \Lambda(a)$.

Поскольку для $a_m\in U_\varepsilon(a)$ справедливо

$$L^-(\varepsilon, a)\geqslant L^-(a_m),$$

получаем, что

$$L^-(\varepsilon, a)\geqslant \lim_{m\to\infty} L^-(a_m)\geqslant \lim_{m\to\infty} -\Lambda(a_m) = -\Lambda(a).$$

Из последнего следует (74). Формула (5) доказана.

§ 2. ГРУБЫЕ РАВНОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

1. Постановка задачи. Основные утверждения. В настоящем параграфе будут получены теоремы об асимптотическом поведении логарифмов вероятностей

$$L_n(U) = L_n(U, F) \equiv \frac{1}{n}\ln \mathbf{P}_F\left(\frac{S_n}{n}\in U\right) \tag{1}$$

(такие теоремы называют грубыми), *равномерные по некоторому классу пар* (F, U). При этом будут использоваться обозначения, введенные в § 1. Например, $\Lambda(a)=\Lambda_F(a)$ есть функция уклонений, соответствующая распределению F в R^k, $\Lambda_F(U)=\inf\{\Lambda_F(a):\ a\in U\}$. Для множеств $U\subseteq R^k$ из борелевской σ-алгебры $\mathscr{B}$ обозначим

$$L^+(U) = \limsup_{n\to\infty} L_n(U),\quad L^-(U) = \liminf_{n\to\infty} L_n(U).$$

Рассмотрим сначала асимптотику последовательности (1) в случае, когда распределение F и множество U фиксированы. При выполнении некоторых дополнительных условий, которые ниже мы не будем использовать, такие теоремы можно извлечь из [8, 10, 11].

Теорема 1. I. *Для открытого множества* $U\subseteq R^k$ *справедливо*

$$L^-(U) = -\Lambda_F(U). \tag{2}$$

II. *Для замкнутого ограниченного множества* $U\subseteq R^k$ *справедливо*

$$L^+(U)\leqslant -\Lambda_F(U). \tag{3}$$

Для фиксированного распределения F через $\mathscr{A}^F$ обозначим класс множеств $U \in \mathscr{B}$ таких, что

$$\Lambda_F(U) = \Lambda_F([U]),$$

где (U) и $[U]$ есть соответственно внутренность и замыкание множества U. Непосредственно из теоремы I получаем

Следствие 1. *Для ограниченного множества* $U \in \mathscr{A}^F$ *выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in U\right) = L^+(U) = L^-(U) = -\Lambda(U). \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1. Утверждение I теоремы 1 следует непосредственно из свойства 3) функции уклонений (см. (1.5)), в силу которого для любого открытого множества $U \subseteq R^k$ и любого $a \in U$ выполняется

$$L^-(U) \geqslant -\Lambda(a).$$

Отсюда, очевидно, и вытекает (2).

Для доказательства утверждения II нам понадобится неравенство, которое следует из свойств 5) и 7) функции уклонений (см. (1.12) и (1.16)): для любых $z \in R^k$, $c \in R^k$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\mathbf{P}_F\left(\frac{S_n}{n} \in L_{z,c}\right) \leqslant \exp\{-n\Lambda_F(L_{z,c})\}, \tag{5}$$

где

$$L_{z,c} = \{\lambda \in R^k\colon \langle\lambda, z\rangle > c\}.$$

Если $\Lambda_F(U) = 0$, то неравенство (3) выполнено. Если $\Lambda_F(U) > 0$, то для произвольного $\varepsilon \in (0, \Lambda_F(U))$ рассмотрим выпуклое замкнутое множество $H(\Lambda(U) - \varepsilon)$ (см. (1.29)). Поскольку множества U и $H(\Lambda(U) - \varepsilon)$ не пересекаются, то для любого $a \in U$ можно выбрать $z = z^a \in R^k$ и $c = c^a \in R^1$ такие, что

$$a \in L_{z,c},\quad H(\Lambda(a) - \varepsilon) \cap L_{z,c} = \varnothing.$$

Таким образом, мы построили открытое покрытие компакта U (U — замкнуто и ограничено). Выбирая конечное подпокрытие $L^{(1)}, \ldots, L^{(N)}$, получаем

$$U \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} L^{(i)},\ \Lambda\left(L^{(i)}\right) \geqslant \Lambda(U) - \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Поэтому

$$L^+(U) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max_{1\leqslant i\leqslant N} L_n\left(L^{(i)}\right),$$

и, в силу (5), имеем

$$L^+(U) \leqslant -\min_{1\leqslant i\leqslant N} \Lambda\left(L^{(i)}\right) \leqslant -\Lambda(U) + \varepsilon.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем утверждение II теоремы 1.

Замечание 1. Условие ограниченности U во втором утверждении теоремы 1 можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал многоугольник

$$M = \bigcap_{i=1}^{N} L_{z_i,c_i},$$

построенный по конечному числу $N = N(\varepsilon)$ полупространств L_{z_i,c_i} такой, что

$$H(\Lambda(U) - \varepsilon) \subseteq M \subseteq R^k \setminus U. \tag{6}$$

Доказательство замечания 1 повторяет доказательство второго утверждения теоремы 1.

Замечание 2. Если распределение F удовлетворяет условию Крамера Cr_3 (см. § 1), то условие (6) выполнено.

Действительно, в этом случае в силу леммы 1.1 функция уклонений $\Lambda(a)$ возрастает до ∞ при $|a| \to \infty$. Поэтому множества $H(t)$ для любого $t > 0$ являются *ограниченными выпуклыми множествами*, и соотношение (6) очевидно.

Авторам неизвестно доказательство утверждения пункта II теоремы 1 для произвольного замкнутого множества U.

Введем теперь класс $\mathscr{A}(c)$, $c \geqslant 1$, пар (F, U), для которого соотношение (4) выполняется равномерно.

Будем говорить, что пара (F, U) принадлежит классу $\mathscr{A}(c)$, если выполнено условие

$A(c)$.

1) $U \in \mathscr{B}$, $1/c \leqslant \Lambda(U) \leqslant c$; (7)

2) $\sup\limits_{a \in H(\Lambda(U))} \{|a|\} \leqslant c$, $\sup\limits_{a \in H(\Lambda(U))} \{|\lambda(a)|\} \leqslant c$; (8)

3) для любого $t \in (0, 1/c]$ найдется $a = a(t) \in U \cap H(\Lambda(U) + t)$ такое, что для $\varepsilon = t^c$ выполняется

$$U_\varepsilon(a) \subseteq U, \ |\lambda(a)| \leqslant c, \ \sigma^2(a) \leqslant c,$$

где

$$\sigma^2(a) = \mathbf{E}(e^{\langle\lambda(a),\xi\rangle}|\xi - a|^2)/\mathbf{E}e^{\langle\lambda(a),\xi\rangle}.$$

Ясно, что если для распределения F выполнено условие Cr_3 (см. § 1), $0 < \Lambda(a) < \infty$, то для достаточно больших $c < \infty$ и малых $\delta > 0$ пара $(F, U_\delta(a))$ принадлежит классу $\mathscr{A}(c)$.

Теорема 2. *Для любого* $c \in [1, \infty)$

$$L_n(U) = -n(\Lambda(U) + \varepsilon_n),$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(F,U)\in\mathscr{A}(c)} |\varepsilon_n| = 0.$$

Класс равномерности может быть выбран различными способами. Мы остановились на однопараметрическом семействе неравенств исключительно из соображений удобства записи. В то же время эти неравенства точно указывают на те характеристики пары (F, U), которые надо отделить от 0 или ∞, чтобы получить равномерные теоремы для $L_n(U)$.

Теорема 2 включает в себя схему серий, когда распределение $F = F^{(n)}$ и множество $U = U^{(n)}$ зависят от n. При этом в теореме 2 рассмотрены только «собственно» большие уклонения, когда $0 < 1/c \leqslant \Lambda_F(U) \leqslant c$. Для описания умеренно больших уклонений, когда

$$\Lambda_F(U) \to 0, \ n\Lambda_F(U) \to \infty,$$

введем в рассмотрение последовательность классов $\mathscr{A}^{(n)}(c)$, $n = 1, 2, \ldots$

Будем говорить, что пара (F, U) принадлежит классу $\mathscr{A}^{(n)}(c)$, $c \in [1, \infty)$, если выполнено условие

$A^{(n)}(c)$.

1) $U \in \mathscr{B}$, $\Lambda(U) \leqslant c$; (9)

2) $\sup\{|a|: a \in H(\Lambda(U))\} \leqslant c\Lambda(U)$, (10)

$\sup\{|\lambda(a)|\lambda(a)|: a \in H(\Lambda(U))\} \leqslant c$;

3) для любого $t \in (0, 1/c]$ найдется $a = a(t) \in U \cap H(\Lambda(U)(1 + t))$ такое, что для $\varepsilon = \sqrt{2}k\sigma(a)/\sqrt{n}$ выполняется

$$U_\varepsilon(a) \subseteq U, \ \sigma(a)|\lambda(a)| \leqslant t^{1/c}\sqrt{n}\Lambda(U).$$

Теорема 3. *Для любых $c \in [1, \infty)$ и последовательности $N_n \to \infty$, таких, что $N_n \leqslant nc$, справедливо*

$$L_n(U) = -n\Lambda(U)(1+\varepsilon_n),$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{(F,U)\in\mathscr{A}^{(n)}_{(c)},\\ n\Lambda(U)\geqslant N_n}} |\varepsilon_u| = 0.$$

Доказательству теорем 2, 3 предпошлем

2. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (7), (8). *Тогда для любого $t \in (0, 1/c]$ найдется $N = N(c, t)$ экземпляров $L_1, \ldots, L_N$ полупространств $L = L_{z,c}$ таких, что*

а) $\bigcup\limits_{i=1}^{N} L_i \supseteq U$,

б) $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \Lambda(L_i) \geqslant \Lambda(U) - t$.

Доказательство. Поскольку функция $\Lambda(a)$ выпукла и $\Lambda'(a) = \lambda(a)$ (см. § 1), для любого $b \in R^k$ выполнено

$$\Lambda(a+b) \geqslant \Lambda(a) + \langle b, \lambda(a)\rangle. \tag{11}$$

Пусть $a' = a + b \in \partial H(\Lambda(U)-t)$, $a \in \partial H(\Lambda(U))$, $t > 0$. Тогда в силу (11) справедливо

$$\Lambda(a+b) = \Lambda(a) - t \geqslant \Lambda(a) + \langle b, \lambda(a)\rangle.$$

Поэтому в силу условия (8)

$$|b| \geqslant \frac{|\langle b, \lambda(a)\rangle|}{|\lambda(a)|} \geqslant \frac{t}{|\lambda(a)|} \geqslant \frac{t}{c}. \tag{12}$$

Мы показали, что между любыми двумя точками $a \in \partial H(\Lambda(U))$ и $a' = a + b \in \partial H(\Lambda(U)-t)$ расстояние не меньше, чем t/c, т. е. поверхности $\partial H(\Lambda(U))$ и $\partial H(\Lambda(U)-t)$ не могут «слипаться». Каждую точку a из компакта $\partial H(\Lambda(U)-t)$ можно накрыть открытым полупространством $L^{(a)} = L_{z(a),\,c(a)}$ таким образом, что

$$\Lambda(L^{(a)}) \geqslant \Lambda(U) - t.$$

Поскольку множество $\partial H(\Lambda(U) - t/2)$ является границей выпуклого ограниченного множества $H(\Lambda(U) - t/2)$, любая точка из дополнения к множеству $H(\Lambda(U) - t/2)$ лежит в каком-нибудь из полупространств $L^{(a)}$. Из открытого покрытия компакта $\partial H(\Lambda(U) - t/2)$ можно выбрать конечное подпокрытие $L_1, \ldots, L_N$; при этом в силу условия (8) и соотношения (12) число N можно выбрать зависящим только от c и t (при фиксированном k). Лемма 1 доказана.

Следующая лемма позволяет рассмотреть случай $\Lambda(U) \to 0$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (9), (10). *Тогда для любого $t \in (0, 1/c]$ найдется $N = N(c, t) < \infty$ экземпляров полупространств $L_1, \ldots, L_N$ таких, что*

а) $\bigcup\limits_{i=1}^{N} L_i \supseteq U$,

б) $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \Lambda(L_i) \geqslant \Lambda(U)(1-t)$.

Доказательство. Пусть $m = [\Lambda^{-1}(U)] + 1$, где $[x]$ есть целая часть числа $x \geqslant 0$, так что

$$\Lambda^{-1}(U) \leqslant m \leqslant \Lambda^{-1}(U) + 1. \tag{13}$$

Обозначим $F^{(m)}$ распределение случайного вектора $\xi_1+\ldots+\xi_m$, где ξ_i независимы и имеют общее распределение F. Обозначим далее $\Lambda^{(m)}(a)$, $\lambda^{(m)}(a)$, $H^{(m)}(t)$ соответствующие $F^{(m)}$ функции и множество. Из свойства (1.12) функции уклонений следует, что

$$\Lambda^{(m)}(a)=m\Lambda(a/m),\ \lambda^{(m)}(a)=\lambda(a/m),$$
$$H^{(m)}(t)=mH(t/m). \tag{14}$$

Обозначим далее $U^{(m)}=mU$ и убедимся, что пара $(F^{(m)}, U^{(m)})$ удовлетворяет условиям леммы 1 с константой $1+c$. В силу (14) справедливо

$$\Lambda^{(m)}(U^{(m)})=m\Lambda(U), \tag{15}$$

поэтому в силу (13) получаем

$$1\leqslant\Lambda^{(m)}(U^{(m)})\leqslant 1+c.$$

Таким образом, условие (7) для пары $(F^{(m)}, U^{(m)})$ выполнено с константой $1+c$. Отметим далее, что в силу (14) справедливо

$$H^{(m)}(\Lambda^{(m)}(U^{(m)}))=mH(\Lambda(U)),$$

поэтому первое и второе соотношения в (8) для $(F^{(m)}, U^{(m)})$ следуют из первого и второго соотношений в (10) для (F, U). Применяя далее лемму 1 для пары $(F^{(m)}, U^{(m)})$, получаем, что найдутся $N=N(c, t)$ экземпляров полупространств $L_1, \ldots, L_N$ таких, что

а) $\bigcup\limits_{i=1}^{N} L_i\supseteq U^{(m)}$,

б) $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\Lambda^{(m)}(L_i)\geqslant\Lambda^{(m)}(U^{(m)})-t.$

Из последнего, переходя на „язык“ пары (F, U), получаем в силу (14) и (15):

а) $\bigcup\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{m}L_i\supseteq U$,

б) $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\Lambda\left(\frac{1}{m}L_i\right)\geqslant m^{-1}(m\Lambda(U)-t)\geqslant\Lambda(U)(1-t).$

Лемма 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 3. I. Оценка сверху

$$L_n(U)\leqslant-n(\Lambda(U)(1+\varepsilon_n) \tag{16}$$

следует непосредственно из леммы 2 и неравенства (5). Действительно, для любого $t\in(0, 1/c]$ найдется $N=N(c, t)<\infty$ экземпляров полупространств $L_1, \ldots, L_N$ таких, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in U\right)\leqslant\sum_{i=1}^{N}\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in L_i\right)\leqslant N\exp\left\{-n\min_{1\leqslant i\leqslant N}\Lambda(L_i)\right\}\leqslant$$
$$\leqslant N\exp\{-n\Lambda(U)(1-t)\}$$

(последнее неравенство следует из соотношения б) в лемме 2). Полагая

$$\varepsilon_n=\frac{\ln N(c, t)}{n\Lambda(U)}+t\leqslant\frac{\ln N(c, t)}{N_n}+t,$$

где последовательность $N_n\to\infty$ присутствует в условиях теоремы 3, мы получаем оценку сверху (16). Выбирая далее $t=t_n$ стремящимся к 0 достаточно медленно, получаем требуемую оценку сверху.

II. Оценка снизу. В силу условия 3) в определении класса $\mathscr{A}^{(n)}(c)$ для любого $t\in(0, 1/c]$ найдется $a=a(t)\in U\cap H(\Lambda(U)(1-t))$ такое, что для $\varepsilon=\sqrt{2k}\sigma(a)/\sqrt{n}$ выполняется

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in U\right)\geqslant\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n-na}{n}\right|<\varepsilon\right)=\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n-na}{\sigma(a)\sqrt{n}}\right|<\sqrt{2}\,k\right).$$

Переходя далее к распределению $\widetilde{F}^{(\lambda(a))}$ (см. (1.30)), получаем

$$\mathbf{P}_F\left(\frac{S_n}{n}\in U\right)\geqslant e^{-n\Lambda(a)}\,\mathbf{E}_{\widetilde{F}}\left(e^{-\langle\lambda(a),S_n-na\rangle};\ \left|\frac{S_n-na}{\sigma(a)\sqrt{n}}\right|\leqslant\sqrt{2}\,k\right)\geqslant$$

$$\geqslant e^{-n\left(\Lambda(a)+\frac{|\lambda(a)\sqrt{2}k\sigma(a)|}{\sqrt{n}}\right)}\,\mathbf{P}_{\widetilde{F}}\left(\frac{|S_n-na|}{\sigma(a)\sqrt{n}}\leqslant\sqrt{2}\,k\right).$$

Поэтому для любого $t\in(0,\ 1/c]$ справедливо

$$L_n(U)\geqslant-n\Lambda(U)\,(1+t+\sqrt{2}kt^{1/c}+\delta),$$

где

$$\delta=-\ln P_{\widetilde{F}}\left(\left|\frac{S_n-na}{\sigma(a)\sqrt{n}}\right|\leqslant\sqrt{2}\,k\right)\Big/n\Lambda(U)\leqslant-\ln\mathbf{P}_{\widetilde{F}}\left(\left|\frac{S_n-na}{\sigma(a)\sqrt{n}}\right|\leqslant\sqrt{2}\,k\right)\Big/N_n.$$

Заметим далее, что в силу неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}_{\widetilde{F}}\left(\left|\frac{S_n-na}{\sigma(a)\sqrt{n}}\right|\leqslant\sqrt{2}\,k\right)\geqslant1-\mathbf{P}_{\widetilde{F}}\left(\left|\frac{S_n-na}{\sigma(a)\sqrt{n}}\right|>\sqrt{2}\,k\right)\geqslant\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$|\delta|\leqslant|\ln(1/2)|/N_n\to0$$

при $n\to\infty$, и оценка снизу получена. Теорема 3 доказана. Теорема 2 доказывается совершенно аналогично.

§ 3. РАВНОМЕРНЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

1. Постановка задачи. Основные условия. Пусть ξ, ξ_1, ..., как и прежде, есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в k-мерном евклидовом пространстве R^k. Ниже мы сохраним и все другие обозначения, введенные в § 1, 2.

Предположим, что существует плотность $p^{(n)}(\alpha)=p_F^{(n)}(\alpha)$, $\alpha\in R^k$, распределения случайного вектора $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ (через F обозначим, как и ранее, распределение слагаемого ξ_1).

В настоящем параграфе будут приведены теоремы об асимптотическом поведении плотности $p_F^{(n)}(n\alpha)$, $\alpha\in R^k$, в области б. у., равномерные по некоторому классу пар (F,α). Для фиксированных F и α такие теоремы были получены в [8, 12].

В работе [13] получены равномерные локальные теоремы о б. у. случайных векторов в R^k в условиях, несколько отличных от наших.

Чтобы сформулировать основной результат, введем ряд условий на пару (F,α).

B_1. (Условие Крамера Cr_2 (см. § 1).) Функция $\varphi_F(\lambda)=\mathbf{E}_\lambda e^{\langle\lambda,\xi\rangle}$ аналитична в точке $\lambda=\lambda_F(\alpha)$.

Для равномерной предельной теоремы нам понадобится описать это условие количественно. Введем для этого класс $\mathcal{B}_1(c)$ (где $c\in[1,\infty)$) пар (F,α) таких, что выполнено условие

$B_1(c)$.

$$\Lambda_F(\alpha)\leqslant c,\ |\lambda_F(\alpha)|\leqslant c,$$

$$\sup_{|\lambda_F(\alpha)-\lambda|\leqslant1/c}e^{-\langle\alpha,\lambda\rangle}\varphi_F(\lambda)\leqslant c. \tag{1}$$

Очевидно, что соотношение $(F, \alpha) \in \mathscr{B}_1(c)$ при каком-нибудь $c \in [1, \infty)$ (т. е. $\left(F, \alpha\right) \in \bigcup_{c \geq 1} \mathscr{B}_1(c)\right)$ эквивалентно аналитичности функции $\varphi_F(\lambda)$ в точке $\lambda_F(\alpha)$. Число c в (1) характеризует равномерность (по F и α) в условии B_1.

B_2. (Условие существования плотности суммы S_N (при некотором $N \geq 1$) и справедливости для нее формулы обращения.) Найдется целое $N \geq 1$ такое, что характеристическая функция $f_F(t) \equiv \mathbf{E}_F e^{i\langle t, \xi\rangle} = \varphi_F(t)$ суммируема в степени N:

$$\int |f_F(t)|^N \, dt < \infty. \tag{2}$$

Из (2) следует, что сумма S_N имеет непрерывную ограниченную плотность

$$p^{(N)}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int e^{-i\langle t, \alpha\rangle} f^N(t) \, dt \leq \frac{1}{(2\pi)^k} \int |f(t)|^N \, dt, \quad \alpha \in R^k. \tag{3}$$

Равномерность в условии B_2 охарактеризуем классом $\mathscr{B}_2(c)$ $(c \in [1, \infty))$, пар (F, α) таких, что выполнено условие

$B_2(c)$:

$$\int |f_F(t)|^c \, dt \leq c.$$

Равномерное асимптотическое представление плотности $p_F^{(n)}(n\alpha)$ суммы $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ в точке $n\alpha$ будет установлена по классу $\mathscr{B}(c_1, c_2) = \mathscr{B}_1(c_1) \cap \mathscr{B}_2(c_2)$ при любых конечных $c_1 \geq 1$, $c_2 \geq 1$. Мы несколько упростим запись, если будем доказывать эквивалентные равномерные утверждения по классу

$$\mathscr{B}(c) = \mathscr{B}(c, c)$$

для любого $c \in [1, \infty)$. Под эквивалентностью мы понимаем возможность в последующем утверждении заменить классы $\mathscr{B}(c)$ на $\mathscr{B}(c_1, c_2)$ и наоборот (при соответствующем выборе констант c_1 и c_2 по c и константы c по c_1 и c_2). Эта возможность следует из монотонности классов $\mathscr{B}_1(c)$ и $\mathscr{B}_2(c)$, так что

$$\mathscr{B}(\underline{c}) \leq \mathscr{B}(c_1, c_2) \subseteq \mathscr{B}(\bar{c}),$$

где $\underline{c} = \min(c_1, c_2)$, $\bar{c} = \max(c_1, c_2)$.

Соотношение $(F, \alpha) \in \bigcup_{c \geq 1} \mathscr{B}(c)$ эквивалентно тому, что пара (F, α) удовлетворяет условиям B_1, B_2. Как и в § 2, характеризация классов эквивалентности здесь неоднозначна и мы выбираем наиболее простую, которая в то же время точно передает характер ограничений на параметры (F, α).

Теорема 1. *Для любого* $c \in [1, \infty)$ *справедливо*

$$p_F^{(n)}(n\alpha) = (2\pi n)^{-k/2} (\sigma_F(\alpha))^{-1} e^{-n\Lambda_F(\alpha)} (1 + \varepsilon_n),$$

где

$$\sigma_F(\alpha) = \left(\det \Lambda_F''(\alpha)\right)^{-1/2},$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{(F, \alpha) \in \mathscr{B}(c)} |\varepsilon_n| = 0.$$

При этом

$$0 < \inf_{(F, \alpha) \in \mathscr{B}(c)} \sigma_F(\alpha), \quad \sup_{(F, \alpha) \in \mathscr{B}(c)} \sigma_F(\alpha) < \infty.$$

2. Доказательство теоремы 1 следует традиционному пути доказательства локальных теорем о больших уклонениях и, упрощенно говоря, состоит из следующих двух частей: 1) равномерной локальной предельной теоремы в точке α области нормальных уклонений суммы S_n, когда $|\alpha - \mathbf{E}_F\xi| \leqslant c/\sqrt{n}$; 2) сведении задачи о больших уклонениях S_n к задаче о нормальных уклонениях с помощью преобразования Крамера (см. § 1).

Рассмотрим класс $\widetilde{\mathscr{B}}(c)$, $c \in [1, \infty)$ распределений в F таких, что

$$1.\ \mathbf{E}_F\xi = 0, \tag{4}$$

$$2.\ \mathbf{E}_F|\xi|^3 \leqslant c, \tag{5}$$

$$3.\ \int |f_F(t)|^c\, dt \leqslant c. \tag{6}$$

Лемма 1. *Для любого $c \in [1, \infty)$ справедливо соотношение*

$$p_F^{(n)}(0) = (2\pi n)^{-k/2}|\beta_F|^{1-/2}(1 + \varepsilon_n), \tag{7}$$

где

$$B_F = \mathrm{E}_F\xi^{\mathrm{T}}\xi,\ |B| = \det B,$$

$$0 < \inf_{F \in \widetilde{\mathscr{B}}(c)} |B_F|,\ \operatorname{snp}_{F \in \widetilde{\mathscr{B}}(c)} |B_F| < \infty, \tag{8}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{F \in \widetilde{\mathscr{B}}(c)} |e_n| = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Оценка (9) в соотношении (7) следует непосредственно из теоремы 1 в [14]. Поэтому нам остается доказать соотношение (8). Класс распределений $\widetilde{\mathscr{B}}(c)$ является компактом относительно топологии слабой сходимости распределений. Поэтому если (8) не выполнено, то найдется распределение $F \in \widetilde{\mathscr{B}}(c)$ такое, что $|B_F| = 0$ либо $|B_F| = \infty$. Это невозможно, так как первое противоречит (6), а второе — (5). Лемма 1 доказана.

Обозначим далее $\mathscr{B}^*(c)$ (для $c \in [1, \infty)$) класс распределений F таких, что выполнены условия (4), (5) и условие (вместо условия 3).

3*. Существует целое N, $1 \leqslant N \leqslant c$, такое, что

$$\int p_F^{(N)}(t)^{1+1/c}\, dt \leqslant c. \tag{10}$$

Лемма 2. *Для любого $c \in [1, \infty)$ найдется $c_1 \in [1, \infty)$ такое, что*

$$\mathscr{B}^*(c) \subseteq \widetilde{\mathscr{B}}(c_1).$$

Доказательство. Обозначим $p = 1 + 1/c$, $q = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$, так что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Соотношение (10) эквивалентно

$$\|p_F^{(N)}\|_{L_p}^p \leqslant c. \tag{11}$$

В силу известной теоремы «двойственности» (см., например, [15] с. 128) найдется число $c^* < \infty$, зависящее только от k и c, такое, что из (11) следует

$$\|f_F\|_{L_q} \leqslant c^*,$$

т. е. для некоторого $c_1 \in [1, \infty)$ соотношение (6) выполнено. Лемма 2 доказана.

Следствие 1. *Утверждение леммы 1 сохранится, если класс $\widetilde{\mathscr{B}}(c)$ заменить классом $\mathscr{B}^*(c)$.*

Для пары (F, α) в § 1 было определено распределение $F^{(\lambda)}$ — *преобразование Крамера над F*:

$$F^{(\lambda)}(U) = \mathbf{E}_F(e^{\langle\lambda,\xi\rangle};\ \xi \in U)/\varphi_F(\lambda).$$

Обозначим для $(F, \alpha)\in\mathscr{B}(c)$ через $F^{(\alpha)}$ распределение $\xi-\alpha$, где $\xi\in\in F^{(\lambda(\alpha))}$. Тогда

$$\varphi^{(\alpha)}(\lambda)\equiv\varphi_{F^{(\alpha)}}(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda(\alpha)+\lambda)}{\varphi(\lambda(\alpha))}e^{-(\lambda,\alpha)},$$

где $\varphi(\lambda)=\varphi_F(\lambda)$. Нетрудно убедиться далее, что

$$\varphi^{(\alpha)}(\lambda)=e^{\Lambda_{F^{(\alpha)}}}\varphi(\lambda(\alpha)+\lambda)e^{-(\lambda(\alpha)-\lambda,\alpha)}. \tag{12}$$

Лемма 3. *Для любого $c\in[1, \infty)$ найдется $c_1\in[1, \infty)$ такое, что если $(F, \alpha)\in\mathscr{B}(c)$, то $F^{(\alpha)}\in\mathscr{B}^*(c_1)$.*

Доказательство. В силу уже отмеченных свойств преобразования Крамера (см. (1.32)) справедливо $\mathbf{E}_{F^{(\alpha)}}\xi=0$, т. е. соотношение (4) имеет место. Для доказательства неравенства (5) достаточно проверить, что найдется $c_1\in[1, \infty)$, зависящее только от c и k, такое, что

$$\sup_{(F,\alpha)\in\mathscr{B}(c)}\ \sup_{|\lambda|\leqslant 1/c_1}\varphi^{(\alpha)}(\lambda)\leqslant c_1. \tag{13}$$

Неравенство (13) следует для $c_1=ce^c$ в силу (12) из того, что $(F, \alpha)\in\in\mathscr{B}_1(c)$.

Для проверки соотношения (11) возведем равенство (12) в степень N

$$\left(\varphi^{(\alpha)}(\lambda)\right)^N=e^{N\Lambda_{F^{(\alpha)}}}\varphi^N(\lambda(\alpha)+\lambda)e^{-(\lambda(\alpha)+\lambda,\alpha)N}$$

и перейдем к соответствующему равенству для плотностей:

$$p^{(N)}_{F^{(\alpha)}}(t)=e^{N\Lambda_{F^{(\alpha)}}+(\lambda(\alpha),t)}p^{(N)}_F(t+N\alpha). \tag{14}$$

Поскольку $(F, \alpha)\in\mathscr{B}_2(c)$, в силу соотношения (3) для всех $N\geqslant c$ выполняется

$$p^{(N)}_F(t)\leqslant\frac{c}{(2\pi)^k},\quad t\in R^k.$$

Поэтому для любого $p>1$

$$I\equiv\int\left[p^{(N)}_{F^{(\alpha)}}(t)\right]^p dt=\int\left[e^{N\Lambda(\alpha)}e^{(\lambda(\alpha),t)}p^{(N)}_F(t+N\alpha)\right]^p dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^{Np\Lambda(\alpha)}c^{p-1}}{(2\pi)^{k(p-1)}}\int e^{p(\lambda(\alpha),t)}p^{(N)}_F(t+N\alpha)\,dt=\frac{e^{Np\Lambda(\alpha)}c^{p-1}}{(2\pi)^{k(p-1)}}\mathbf{E}_F e^{p<\lambda(\alpha),S_N-N(\alpha)}=$$

$$=\frac{e^{Np\Lambda(\alpha)}c^{p-1}}{(2\pi)^{k(p-1)}}\left[\varphi_F(p\lambda(\alpha))e^{-(p\lambda(\alpha),\alpha)}\right]^N.$$

Используя далее неравенства (1), убеждаемся, что выбирая $p>1$ достаточно близким к 1, можно добиться, что

$$I\leqslant c_1<\infty.$$

Поэтому соотношение (11) для $p^{(N)}_{F^{(\alpha)}}$ доказано. Лемма 3 доказана.

Обратимся к доказательству теоремы 1. В силу (14) справедливо равенство

$$p^{(n)}_F(n\alpha)=e^{-n\Lambda_{F^{(\alpha)}}}p^{(n)}_{F^{(\alpha)}}(0).$$

Из леммы 3 следует, что $F^{(\alpha)}\in\mathscr{B}^*(c_1)$ для некоторого $c_1\in[1, \infty)$. Поэтому в силу следствия 1 имеет место утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

§ 4. РАВНОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

В настоящем параграфе будут получены так называемые точные теоремы (ср. с § 2) о поведении вероятностей

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \Omega\right), \ \xi_k \Subset F, \tag{1}$$

равномерные по некоторому классу пар (F, Ω).

1. Основные обозначения. Напомним ряд обозначений, введенных в § 1—3 и введем несколько новых. Ковариационную матрицу случайного вектора $\xi \Subset F$ обозначим

$$B_F = \mathbf{E}(\xi - E\xi)^{\mathrm{T}}(\xi - \mathbf{E}\xi). \tag{2}$$

Преобразование Лапласа распределения случайного вектора $\xi \Subset F$ обозначим $\varphi_F(\lambda) = \mathbf{E}e^{\langle\lambda,\xi\rangle}$, $\lambda \in R^k$. Напомним, что через $\bar{F}^{(\lambda)}$ мы обозначили преобразование Крамера над распределением F (см. (1.30)):

$$\bar{F}^{(\lambda)}(U) = \mathbf{E}(e^{\langle\lambda,\xi\rangle}; \ \xi \in U)/\varphi(\lambda). \tag{3}$$

Единичный вектор, коллинеарный вектору $\lambda \in R^k$, обозначим

$$e_\lambda = \frac{\lambda}{|\lambda|}.$$

Для единичного вектора e и симметричной $k \times k$-матрицы $D = \|D_{ij}\|$ рассмотрим в R^k множество

$$\left\{\alpha \in R^k\colon \ \alpha e^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\alpha D \alpha^{\mathrm{T}} > 0\right\}. \tag{4}$$

Граница этого множества есть, очевидно, поверхность второго порядка, проходящая через начало координат и касающаяся там гиперплоскости $\alpha e^{\mathrm{T}} = 0$. Предположим на время, что $e = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда в выражении $\alpha e^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\alpha D\alpha^{\mathrm{T}} = \alpha_1 + \frac{1}{2}\sum \alpha_i\alpha_j D_{ij}$ часть квадратичной формы, содержащая в качестве множителя переменную α_1, будет в окрестности точки $\alpha = 0$ давать слагаемое $o(\alpha_1)$. Следовательно, если эту часть из квадратичной формы удалить (т. е. заменить матрицу D матрицей D_1, в которой элементы D_{i1} первой строки и D_{1j} первого столбца заменены нулями), то множество

$$\Omega(e, D) = \left\{\alpha\colon \ \alpha e^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\alpha D_1 \alpha^{\mathrm{T}} > 0\right\}$$

будет иметь границу, которая в окрестности точки $\alpha = 0$ имеет тот же квадратичный характер поведения (касания гиперплоскости $\alpha e^{\mathrm{T}} = 0$), что и исходная поверхность (граница множества (4)). Для нас будет важна именно эта характеристика поведения в окрестности $\alpha = 0$, поэтому матрицы D и $\tilde{D}$, у которых матрицы D_1 и $\tilde{D}_1$ совпадают, мы различать не будем.

Возвращаясь к общему случаю (который путем преобразования поворота легко сводится к только что рассмотренному), введем в рассмотрение симметричную матрицу

$$\Pi = \Pi_e \equiv E - e^{\mathrm{T}}e.$$

Матрица Π проектирует пространство R^k на гиперплоскость $\alpha e^{\mathrm{T}} = 0$, поскольку для всех $\alpha \in R^k$ выполняется $\langle\alpha\Pi, e\rangle = \langle\alpha, e\rangle - \langle\alpha e^{\mathrm{T}}e, e\rangle = \alpha e^{\mathrm{T}} - \alpha e^{\mathrm{T}}ee^{\mathrm{T}} = 0$, $\alpha\Pi\Pi = \alpha(E - e^{\mathrm{T}}e)^2 = \alpha(E - e^{\mathrm{T}}e) = \alpha\Pi$. Матрицу D_1, рассмотренную выше, можно записать в виде

$$D_1 = \Pi D \Pi,$$

а множество $\Omega(e, D)$ — в форме

$$\Omega(e, D) = \left\{\alpha\colon\ \alpha e^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\alpha\Pi D\Pi\alpha^{\mathrm{T}} > 0\right\}$$

(оно зависит только от D_1).

Нам понадобится также множество $\Omega(e, D, \delta)$, определенное как пересечение $\Omega(e, D)$ с шаром $U_\delta(0) = \{\alpha\colon |\alpha| < \delta\}$ при заданном $\delta > 0$:

$$\Omega(e, D, \delta) = \left\{\alpha\colon\ \alpha e^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\alpha\Pi D\Pi\alpha^{\mathrm{T}} > 0, |\alpha| < \delta\right\}.$$

2. Предполагаемые условия. Основным с технической точки зрения утверждением настоящего параграфа является теорема об асимптотическом поведении вероятности

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \alpha + \Omega(e_{\lambda(\alpha)}, D, |\lambda(\alpha)|)\,\delta\right), \xi_1 \in F, \tag{5}$$

при достаточно малых $\delta > 0$ и при $|\lambda(\alpha)| > 0$ $(\alpha + \Omega = \{\beta\colon\ \beta - \alpha \in \Omega\}$. Граница множества $\alpha + \Omega(e_{\lambda(\alpha)}, D)$ есть, очевидно, поверхность, касающаяся в точке α поверхности уровня $\partial H(\Lambda(\alpha))$ ($e_{\lambda(\alpha)}$ есть единичная нормаль $\partial H(\Lambda(\alpha))$ в точке касания α).

Чтобы сформулировать названную теорему, введем следующие условия на тройку (F, α, D) (F — распределение, α — вектор, D — матрица, входящие в (5)).

Первые два условия относятся к F и α.

C_1. (Условие Крамера Cr_2 (см. § 1)). Функция $\varphi_F(\lambda)$ аналитична в точке $\lambda(\alpha)$. Так как мы собираемся доказывать равномерные теоремы, то нам, как и в § 2, 3, нужно охарактеризовать это условие количественно. Для $c \in [1, \infty)$ введем в рассмотрение класс $\mathscr{C}_1(c)$ пар (F, α), для которых выполнено условие

$C_1(c)$.

$$\Lambda(\alpha) \leqslant c,$$

$$\sup_{|\lambda - \lambda(\alpha)| \leqslant |\lambda(\alpha)|/c} \{\varphi(\lambda)\exp\{-\langle\alpha, \lambda\rangle\}\} \leqslant \exp\{|\lambda(\alpha)|^2 c\}.$$

Очевидно, что соотношение $(F, \alpha) \in \mathscr{C}_1(c)$ при $\lambda(\alpha) \neq 0$ и при каком-нибудь $c \geqslant 1$ эквивалентно аналитичности $\varphi(\lambda)$ в точке $\lambda(\alpha)$. Число c характеризует равномерность (по F и α) в условии C_1.

C_2. (Условие Крамера для характеристической функции, [16]).

$$\lim_{s \in R^1,\ |s| \to \infty} \sup \left|\mathbf{E}_F e^{is\langle\xi_1, e_{\lambda(\alpha)}\rangle}\right| < 1.$$

Это есть известное условие Крамера [16] на гладкость распределения одномерной случайной величины $\langle\xi_1, e_{\lambda(\alpha)}\rangle$ (проекции ξ_1 на $\lambda(\alpha)$). Хорошо известно, что если у распределения случайной величины $\xi \in R^1$ есть ненулевая абсолютно непрерывная компонента, то условие C_2 для ξ выполнено.

Равномерность в условии C_2 мы будем характеризовать с помощью класса $\mathscr{C}_2(c)$ $(c \in [1, \infty))$ пар (F, α) таких, что

$C_2(c)$.

$$\left|\mathbf{E} e^{is\langle\xi_1, e_{\lambda(\alpha)}\rangle}\right| \leqslant 1 - \frac{|\lambda(\alpha)|^2}{c} \text{ при } |s| \geqslant |\lambda(\alpha)|\,c.$$

В случае, когда F и α не зависят от n, в условиях C_1 и C_2 можно было бы $|\lambda(\alpha)|$ заменить на 1, что несколько упростило бы их вид. Однако введение $|\lambda(\alpha)|$ ослабляет эти условия при умеренно больших уклонениях, когда

$$|\lambda(\alpha)| \to 0.$$

Третье условие регламентирует характер касания поверхности уровней $\partial H(\Lambda(\alpha))$ и множества $\alpha+\Omega(e_{\lambda(\alpha)}, D)$ в точке α. Это касание должно быть строгим, т. е. иметь первый порядок касания по всем направлениям: для некоторых $\delta>0$ и $\varepsilon>0$

$$\Lambda(\beta)-\Lambda(\alpha)\leqslant -\varepsilon|\alpha-\beta|^2 \tag{6}$$

на множестве $\beta\in\alpha+\Omega(e_{\lambda(\alpha)}, D, \delta)$ или, что то же, на поверхности

$$\left\{(\beta-\alpha)e^{\mathrm{T}}_{\lambda(\alpha)}+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\Pi D\Pi(\beta-\alpha)^{\mathrm{T}}=0,\ |\beta-\alpha|<\delta\right\}.$$

Предположим сначала, что функция $\Lambda(\beta)$ конечна в некоторой окрестности точки α. Тогда в силу гладкости функции $\Lambda(\beta)$ поверхность $\partial H(\Lambda(\alpha))$ в окрестности точки α будет квадратически вести себя так же, как поверхность

$$\left\{\beta\in R^k\colon\ (\beta-\alpha)\lambda(\alpha)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\Lambda''(\alpha)(\beta-\alpha)^{\mathrm{T}}=0\right\},$$

или (мы выяснили это ранее) как поверхность

$$\left\{\beta\in R^k\colon\ (\beta-\alpha)\lambda(\alpha)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\Pi\Lambda''(\alpha)\Pi(\beta-\alpha)^{\mathrm{T}}=0\right\}. \tag{7}$$

Поэтому высказанное условие (6) можно записать также в виде (ср. (6) и (7)): для некоторого $\varepsilon>0$

$$\Pi(|\lambda(\alpha)|D-\Lambda''(\alpha))\Pi\leqslant-\varepsilon\Pi \tag{8}$$

(для симметричных матриц A и B будем писать $A>B$ $(A\geqslant B)$, если матрица $A-B$ положительно (неотрицательно) определена).

Матрица $\Lambda''(\alpha)$ положительно определена, поэтому для всех $\beta\neq 0$ на гиперплоскости $\beta e^{\mathrm{T}}_{\lambda(\alpha)}=0$ выполняется неравенство

$$-\beta\Pi\Lambda''(\alpha)\Pi\beta^{\mathrm{T}}<0.$$

С матрицей $\Pi\Lambda''(\alpha)\Pi$ можно ассоциировать нормальное распределение на гиперплоскости $\langle\beta, e_{\lambda(\alpha)}\rangle=0$. В силу леммы 10 и следствия 1 (сформулированных и доказанных в п. 11 настоящего параграфа) ковариационная матрица этого нормального вектора имеет вид

$$\widetilde{B}(\alpha)\equiv\Pi\left(B(\alpha)-\frac{B(\alpha)e^{\mathrm{T}}eB(\alpha)}{eB(\alpha)e^{\mathrm{T}}}\right)\Pi, \tag{9}$$

где матрица $B(\alpha)$ определена равенством

$$B(\alpha)=B_{\widetilde{F}},\ \widetilde{F}=\widetilde{F}^{(\lambda(\alpha))},$$

(см. (1) и (2)); $e=e_{\lambda(\alpha)}$. Поскольку при этом выполняется соотношение (которое проверяется непосредственно)

$$\widetilde{B}(\alpha)\Pi\Lambda''(\alpha)\Pi=\Pi\Lambda''(\alpha)\Pi\widetilde{B}(\alpha)=\Pi, \tag{10}$$

условие (8) можно переписать в эквивалентной форме: для некоторого $\varepsilon>0$

$$|\lambda(\alpha)|\Pi D\Pi\widetilde{B}(\alpha)-\Pi\leqslant-\varepsilon\Pi. \tag{11}$$

Обозначим

$$\chi(B, D, e)=Ee^{\eta\frac{D}{2}\eta^{\mathrm{T}}},\ \eta\in\Phi_{\Pi B\Pi},$$

где $\Phi_B=\Phi_{0,B}$ есть нормальное распределение в R^k с нулевым средним и ковариационной матрицей B. Так как это математическое ожидание конечно тогда и только тогда, когда для некоторого $\varepsilon>0$ выполняется

$$\Pi D\Pi B\Pi-\Pi\leqslant-\varepsilon\Pi,$$

то эквивалентные условия (6) и (11) можно переписать в форме

C_3.
$$\chi(\widetilde{B}(\alpha),\ |\lambda(\alpha)|D,\ e_{\lambda(\alpha)})<\infty, \tag{12}$$

где матрица $\widetilde{B}(\alpha)$ определена в (9).

Если же условие конечности $\Lambda(\beta)$ в окрестности точки α не выполнено, то можно выделить подпространство размерности $k'\in\{1,\ldots,k-1\}$, проходящее через α, на котором в некоторой окрестности точки α функция $\Lambda(\beta)$ будет конечна и вне которого она обратится в ∞. Повторяя далее на этом подпространстве предыдущие рассуждения, вновь приходим к эквивалентности условий (6), (11) и (12).

Итак, условия (6), (11) «строгого» касания в точке α множеств $\partial H(\Lambda(\alpha))$ и $\alpha+\Omega(e_{\lambda(\alpha)},\ D)$ запишем в форме C_3 (в другой форме это условие было введено Л. В. Осиповым в [17]).

Равномерность (по тройке $(F,\ \alpha,\ D)$) в условии C_3 мы будем характеризовать классом $\mathscr{C}_3(c)$ троек $(F,\ \alpha,\ D)$, для которых

$C_3(c)$.
$$\chi(\widetilde{B}(\alpha),\ |\lambda(\alpha)|D,\ e_{\lambda(\alpha)})\leqslant c,$$
$$|\lambda(\alpha)|\,\|D\|\leqslant c,$$

где $\|D\|=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant k}|D_{ij}|$.

Равномерность асимптотического представления вероятности (1) будет устанавливаться по классу $\mathscr{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)=\mathscr{C}_1(c_1)\cap\mathscr{C}_2(c_2)\cap\mathscr{C}_3(c_3)$ при любых конечных $c_i\in[1,\ \infty)$. Мы несколько упростим запись и обозначения, если будем доказывать эквивалентное утверждение о равномерности по классу
$$\mathscr{C}(c)=\mathscr{C}(c,\ c,\ c).$$

Эквивалентность следует из того, что классы $\mathscr{C}_1(c)$, $\mathscr{C}_2(c)$, $\mathscr{C}_3(c)$ являются монотонными по c и, следовательно,
$$\mathscr{C}(\underline{c})\subseteq\mathscr{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)\subseteq\mathscr{C}(\bar{c}),$$
где
$$\underline{c}=\min(c_1,\ c_2,\ c_3),\quad \bar{c}=\max(c_1,\ c_2,\ c_3).$$

3. Первое основное утверждение. Обозначим
$$\sigma^2(\alpha)=e_{\lambda(\alpha)}B(\alpha)\,e^{\mathrm{T}}_{\lambda(\alpha)},$$
где матрица $B(\alpha)$ определена равенством (10). В силу условия C_2 справедливо $\sigma^2(\alpha)>0$.

Теорема 1. *Для любого $c\in[1,\ \infty)$ найдется $\delta_0>0$ такое, что для любой фиксированной последовательности $N_n\to\infty$, $N_n\leqslant c\sqrt{n}$, выполняется*
$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in\alpha+\Omega(e_{\lambda(\alpha)},D,|\lambda(\alpha)|\delta)\right)=e^{-n\Lambda(\alpha)}\frac{\chi(\widetilde{B}(\alpha),|\lambda(\alpha)|D,e_{\lambda(\alpha)})}{\sqrt{2\pi n}\,|\lambda(\alpha)|\,\sigma(\alpha)}(1+\varepsilon_n), \tag{13}$$

где
$$\lim_{n\to\infty}\sup|\varepsilon_n|=0, \tag{14}$$

sup берется по $(F,\ \alpha,\ D)\in\mathscr{C}(c)$, α и δ таким, что $|\lambda(\alpha)|\in[N_n/\sqrt{n},\ c]$, $\delta\in[N_n\delta_0|\lambda(\alpha)|^{-1}n^{-1/2},\ \delta_0]$.

Замечание 1. Легко видеть, что для $D=0$
$$\chi(\widetilde{B}(\alpha),\ |\lambda(\alpha)|D,\ e_{\lambda(\alpha)})=1.$$

В этом случае $\Omega(e_{\lambda(\alpha)},\ D)$ есть полупространство $\{\beta:\ \langle\beta,\ e_{\lambda(\alpha)}\rangle 0\}$ и, стало быть, рассматривается задача о больших уклонениях сумм одномерных случайных величин. Таким образом, в теореме 1 рассмотрены такие тройки (F, α, D), для которых асимптотика вероятности (13) с точностью до константы такая же, что и в одномерном случае.

Замечание 2. Пусть $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}|\xi_1|^2 < \infty$ и ковариационная матрица $B = \mathbf{E}\xi_1^{\mathrm{T}}\xi_1$ не вырождена. Вероятность в левой части (13) можно представить в виде

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{x(n)} \in \alpha_1 + \Omega(e_1, D_1, \delta_1)\right), \tag{15}$$

где

$$x(n) = n\,|\lambda(\alpha)|, e_1 = e_{\lambda(\alpha)}, \alpha_1 = \frac{n}{x(n)}\alpha,$$
$$D_1 = |\lambda(\alpha)|D, \ \delta_1 = \delta.$$

При этом условия теоремы 1 позволяют выбирать вектор α_1 и матрицу D_1 в (15) не зависящими от n. В умеренно больших уклонениях, когда $x(n)/\sqrt{n} \to \infty$, $x(n)/n \to 0$, асимптотика (15) имеет вид

$$e^{-n\Lambda(\alpha)} \frac{\chi\left(\widetilde{B}(0), D_1, e_1\right)}{\sqrt{2\pi}\,\dfrac{x(n)}{\sqrt{n}}\,\sigma(0)} (1 + o(1)).$$

4. Второе основное утверждение. Обратимся теперь к вероятности (1), где множество Ω — произвольное. Каждой паре (F, Ω) поставим в соответствие вектор $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}(F, \Omega) \in R^k$ и симметричную $k \times k$ — матрицу $\widehat{D} = \widehat{D}(F, \Omega)$, характеризующие касание множества Ω с поверхностью уровня $\partial H(\Lambda(\Omega))$ (см. § 1.5). Точка $\widehat{\alpha}$ будет означать точку касания поверхности $\partial H(\Lambda(\Omega))$ и множества Ω, а $\widehat{D}$ — играть роль матрицы производных второго порядка границы Ω в точке $\widehat{\alpha}$. Точнее роль $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{D}$ сформулируем в следующих двух условиях.

C_4. Множество

$$\Omega_{\widehat{\alpha},\delta} \equiv \Omega \cap U_\delta(\widehat{\alpha})$$

при малых $\delta > 0$ незначительно отличается от множества $\widehat{\alpha} + \Omega\left(e_{\lambda(\widehat{\alpha})}, \widehat{D}, \delta\right)$. Точнее, для любого достаточно малого $t > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\widehat{\alpha} + \Omega\left(e_{\lambda(\widehat{\alpha})}, \widehat{D} - tE, |\lambda(\widehat{\alpha})|\,\delta\right) \subseteq \Omega_{\widehat{\alpha},|\lambda(\widehat{\alpha})|\delta} \subseteq$$
$$\subseteq \widehat{\alpha} + \Omega\left(e_{\lambda(\widehat{\alpha})}, \widehat{D} + tE, |\lambda(\widehat{\alpha})|\,\delta\right) \tag{16}$$

(из определения $\Omega(e, D, \delta)$ видно, что множества $\Omega(e, D + tE, \delta)$ расширяются с ростом t).

C_5. Вероятность события

$$\left\{\frac{S_n}{n} \in \Omega \setminus \Omega_{\widehat{\alpha},|\lambda(\widehat{\alpha})|\delta}\right\}$$

при любом фиксированном $\delta > 0$ пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью события

$$\left\{\frac{S_n}{n} \in \Omega_{\widehat{\alpha},|\lambda(\widehat{\alpha})|\delta}\right\}.$$

Более точно для любого $t > 0$ найдутся $\delta > 0$, $c \in [1, \infty)$ такие, что при всех n

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \Omega \setminus \Omega_{\widehat{\alpha},|\lambda(\widehat{\alpha})|t}\right) \leqslant c e^{-n\Lambda(\widehat{\alpha})(1+\delta)}. \tag{17}$$

Чтобы характеризовать *равномерность* в условии C_4, введем класс Δ непрерывных возрастающих функций $\delta(t)$; $0 \leqslant t \leqslant 1$, таких, что $\delta(0)=0$, $\delta(1)=1$. Рассмотрим класс $\mathscr{C}_4(\delta, c)$ пар (F, Ω) $(\delta \in \Delta,\ c \in [1, \infty))$, для которых соотношение (16) выполняется при $\delta=\delta(t)$ для всех $0<t\leqslant 1/c$.

Аналогично *равномерность* в условии C_5 мы будем связывать с классом $\mathscr{C}_5(\delta, c)$ пар (F, Ω) таких, что соотношение (17) выполнено при $\delta=\delta(t)$, $\delta \in \Delta$, $c \geqslant 1$ при всех $0<t\leqslant 1/c$.

Достаточным условием для принадлежности пары (F, Ω) классу $\mathscr{C}_5(\delta, c)$ является отделимость множества $\Omega \backslash U_\delta(\widehat{\alpha})$ от множества $H(\Lambda(\widehat{\alpha}))$ с помощью конечного числа гиперплоскостей. Рассмотрим класс $\mathscr{C}_5^*(\delta, c)$ пар (F, Ω) таких, что для всех $0<t\leqslant 1/c$ найдется конечное число $1\leqslant k(n, t)\leqslant n\Lambda(\widehat{\alpha})/\delta(t)$ полупространств $L_i=L_i(n, t)=\{\beta\colon \langle\beta, e_i(n, t)\rangle > c_i(n, t)\}$ таких, что для $n=1, 2, \ldots$

$$1)\ \Omega \diagdown \Omega_{\widehat{\alpha}, |\lambda(\widehat{\alpha})| t} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k(n,t)} L_i(n, t),$$

$$2)\ \min_{1\leqslant i\leqslant k(n,t)} \Lambda(L_i(n, t)) \geqslant (1+\delta(t))\,\Lambda(\widehat{\alpha}).$$

Используя неравенство Чебышева, легко показать, что для любых $\delta \in \Delta$, $c \in [1, \infty)$ найдутся $\delta_1 \in \Delta$ и $c_1 \in [1, \infty)$ такие, что

$$\mathscr{C}_5^*(\delta, c) \subseteq \mathscr{C}_5(\delta_1, c_1).$$

Заметим, далее, что классы $\mathscr{C}_i(\delta, c)$, $i=4, 5$, монотонны по δ и c (ср. с обсуждением при введении классов $\mathscr{C}(c)$), и введем в рассмотрение классы $\mathscr{C}(\delta, c)$ $(\delta \in \Delta,\ c \in [1, \infty))$ пар (F, Ω) таких, что они принадлежат пересечению $\mathscr{C}_4(\delta, c) \cap \mathscr{C}_5(\delta, c)$ и тройка $(F, \widehat{\alpha}, \widehat{D})$ принадлежит классу $\mathscr{C}(c)$.

Теорема 2. *Для любых* $\delta \in \Delta$, $c \in [1, \infty)$, *любой последовательности* $N_n \to \infty$, $N_n \leqslant c\sqrt{n}$ *справедливо*

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \Omega\right) = e^{-n\Lambda(\widehat{\alpha})} \frac{\chi\left(\widetilde{B}(\widehat{\alpha}), |\lambda(\widehat{\alpha})|\widehat{D}, e_{\lambda(\widehat{\alpha})}\right)}{\sqrt{2\pi n}\,|\lambda(\widehat{\alpha})|\,\sigma(\widehat{\alpha})}(1+\varepsilon_n),$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \sup |\varepsilon_n| = 0, \tag{18}$$

sup *берется по множеству* $(F, \Omega) \in \mathscr{C}(\delta, c)$, $|\lambda(\widehat{\alpha})| \in [N_n/\sqrt{n}, c]$.

Теорема 2 является непосредственным следствием теоремы 1. Действительно, в силу условия $C_5(\delta, c)$ для любого $0<\delta\leqslant 1/c$

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \Omega\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \Omega_{\widehat{\alpha}, |\lambda(\widehat{\alpha})|\delta}\right)(1+\varepsilon_n(\delta)), \tag{19}$$

где $\varepsilon_n(\delta)$ удовлетворяет (18). Очевидно, далее, что в (19) можно выбрать $\delta=\delta_n$ таким образом, что последовательность $\varepsilon_n=\varepsilon_n(\delta_n)$ будет удовлетворять (18) тоже. В силу условия $C_4(\delta, c)$ вероятность $\mathrm{P}\ (S_n/n \in \Omega_{\widehat{\alpha}, |\lambda(\widehat{\alpha})|\delta})$ можно оценить снизу и сверху вероятностями

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \widehat{\alpha} + \Omega\left(e_{\lambda(\widehat{\alpha})}, \widehat{D} \pm t_n E, |\lambda(\widehat{\alpha})|\delta\right)\right),$$

где $t_n \to 0$. Применяя к последним теорему 1 и убеждаясь, что асимптотики верхней и нижней оценок совпадают, получаем утверждение теоремы 2.

5. Схема доказательства теоремы 1. Основные леммы. Сделаем сначала несколько замечаний, поясняющих доказательство теоремы 1, которое нам предстоит провести. Оно основано на локальной предельной теореме. Чтобы ею воспользоваться, мы сглаживаем распределение суммы S_n. Определенную трудность при этом вызывает то обстоятельство, что слагаемые ξ_i могут иметь вырожденные в R^k распределения (условие C_2 гарантирует только невырожденность проекции вектора ξ_i на направление $e_{\lambda(\alpha)}$). Прибавляя к каждому слагаемому ξ_i гауссовский вектор ξ_i с распределением $\Phi_{b\Pi}$, $b>0$, сосредоточенным в гиперплоскости $R^k\Pi$, ортогональной к $e_{\lambda(\alpha)}$, мы тем самым исключаем трудности, связанные с вырождением. Оказалось при этом (лемма 8), что такое «грубое» сглаживание меняет только константу в асимптотике вероятности (13), причем, выбирая $b>0$ достаточно малым, удается свести на нет эту погрешность. По направлению $e_{\lambda(\alpha)}$ мы обычным образом сглаживаем распределение суммы S_n (а не каждого слагаемого ξ_i), прибавляя к S_n маленький вектор η, $|\eta|\to 0$; это не оказывает влияния на асимптотику в (13). В качестве η мы выберем вектор

$$\eta=\eta^{(n)}\equiv\frac{\eta_0}{n\,|\lambda_F(\alpha)|^3},\ \eta_0=\eta_1+\eta_2,$$

где вектора η_1 и η_2 независимы и имеют равномерное распределение в кубе $[-1,\ 1]^k\subset R^k$. Плотности векторов $\eta^{(n)}$ и η_0 обозначим соответственно $l^{(n)}(\beta)$ и $l_0(\beta)$, так что

$$l^{(n)}(\beta)=n|\lambda(\alpha)|^3 l_0(\beta n|\lambda(\alpha)|^3).$$

Распределения, отвечающие $\eta^{(n)}$ и η_0, обозначим $L^{(n)}$ и L_0. Для $n=1, 2, \ldots$, $\beta\in R^k$ через $p_n(F,\ \beta)$ обозначим плотность в точке β распределения случайного вектора

$$S_n+\eta=\xi_1+\ldots+\xi_n+\eta,\quad \xi_i\Subset F,\quad \eta\Subset L^{(n)},$$

где все слагаемые независимы. Введем также функцию

$$a_n(F,\ \beta)\equiv(2\pi n)^{-k/2}\,|\Lambda''_F(\beta/n)|^{1/2}\,e^{-n\Lambda_F(\beta/n)},$$

определенную для тех F и β, для которых

$$0<|\Lambda''_F(\beta/n)|<\infty\quad (|\Lambda''(\beta)|=\det\Lambda''(\beta)).$$

Лемма 1. *Для произвольного $c\in[1,\ \infty)$ найдется $\delta_0>0$ такое, что для любого $b>0$ и любой последовательности $N_n\to\infty$, $N_n\leqslant c\sqrt{n}$ выполняется*

$$p_n(F*\Phi_{b\Pi},\ n\alpha+\beta)=a_n(F*\Phi_{b\Pi},\ n\alpha+\beta)\,(1+\varepsilon_n),$$

где $\Pi=\Pi_e\equiv E-e^{\mathrm{T}}e$, $e=e_{\lambda(\alpha)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sup|\varepsilon_n|=0, \tag{20}$$

$\sup$ *берется по* $(F,\ \alpha)\in\mathscr{C}_1(c)\cap\mathscr{C}_2(c)$, $|\lambda(\alpha)|\in[N_n/\sqrt{n},\ c]$, $|\beta|\leqslant|\lambda(\alpha)|\delta_0 n$.

Лемму 1 докажем несколько позже; сейчас сформулируем утверждение, которое показывает, что прибавление к множеству $\Omega(e,\ D,\ \delta)$ маленького вектора $d\Pi$ длины не больше ν, лежащего в касательной к $\Omega(e,\ D,\ \delta)$ гиперплоскости $R^k\Pi$ можно «компенсировать» прибавлением вектора $\nu^2 e$ (e — нормаль к упомянутой гиперплоскости) и небольшим изменением матрицы D.

Лемма 2. *Пусть* $t>0$, $d\in R^k$, $|d|\leqslant\varepsilon$, $\varepsilon=t/(2|D|+4t)$, $\beta=t/\sqrt{n}+\varepsilon$, $n=1, 2, \ldots$. *Тогда*:

1) *для* $\delta>0$

$$\frac{d\Pi}{\sqrt{n}}+\Omega(e,\ D,\ \delta)\subseteq-\frac{t}{n}e+\Omega\left(e,\ D+tE,\ \delta+\frac{\beta}{\sqrt{n}}\right);$$

2) *для* $\delta>\beta/\sqrt{n}$

$$\frac{d\Pi}{\sqrt{n}}+\Omega(e,\ D,\ \delta)\supseteq\frac{t}{n}e+\Omega\left(e,\ D-tE,\ \delta-\frac{\beta}{\sqrt{n}}\right);$$

3) *для* $\delta > t$

$$te + \Omega(e, D, \delta - t) \subseteq \Omega(e, D, \delta) \subseteq -te + \Omega(e, D, \delta + t).$$

В лемме 1 мы приблизили плотность $p_n(G, \beta)$ функцией $a_n(G, \beta)$, $G = F * \Phi_{b\Pi}$. В следующей лемме 3 будет найдена асимптотика интеграла

$$R_n(\Lambda_G, \Omega) = (2\pi n)^{-k/2} \int_{\Omega} |\Lambda_G''(\beta/n)|^{1/2} e^{-n\Lambda_G(\beta/n)} d\beta = \int_{\Omega} a_n(G, \beta)\, d\beta.$$

Лемма 3. *Для любого* $c \in [1, \infty)$ *найдется* $\delta_0 > 0$ *такое, что для любого* $b \in (0, \delta_0)$ *для любой последовательности* $N_n \to \infty$, $N_n \leqslant c\sqrt{n}$ *выполняется*

$$R_n(\Lambda_G,\ n\alpha + ae + \Omega)(e, D, |\lambda_F(\alpha)|\delta) =$$

$$= e^{-n\Lambda_F(\alpha) + a|\lambda_F(\alpha)|} \frac{\chi\left(\widetilde{B}_F(\alpha) + b\Pi,\ |\lambda_F(\alpha)|D,\ e\right)}{\sqrt{2\pi n}\,|\lambda_F(\alpha)|\,\sigma_F(\alpha)} (1 + \varepsilon_n),$$

где $e = e_{\lambda_F(\alpha)}$, $G = F * \Phi_{b\Pi}$, $\Pi = E - e^{\mathrm{T}}e$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup |\varepsilon_n| = 0,$$

sup *берется по классу* $(F, \alpha) \in \mathscr{C}_3(c)$, $|a|\,|\lambda_F(\alpha)| \leqslant c$, $|\lambda_F(\alpha)| \in [N_n/\sqrt{n}, c]$, $\delta \in [\delta_0 N_n/(|\lambda_F(\alpha)|\sqrt{n}),\ \delta_0]$.

6. Доказательство теоремы 1. Можно считать, не умаляя общности что

$$e_{\lambda_F(\alpha)} = (1, 0, \ldots, 0).$$

I. Оценка сверху. Обозначим для $\xi_1 \in F$

$$P_n \equiv \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \alpha + \Omega(e_{\lambda(\alpha)}, D, |\lambda(\alpha)|\delta)\right).$$

Тогда для $\zeta \in \Phi_{b\Pi}$, $\eta^{(n)} \in L^{(n)}$, $b > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ справедливо

$$P_n \mathbf{P}(|\zeta| < \varepsilon/2) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} + \frac{\zeta}{\sqrt{n}} + \frac{\eta^{(n)}}{n} \in \frac{\eta^{(n)}}{n}\Pi^0 + \frac{\zeta + \frac{\eta^{(n)}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\Pi + \alpha + \Omega(e_{\lambda(\alpha)}, D, |\lambda(\alpha)|\delta),\right.$$
$$\left. |\zeta| < \varepsilon/2\right),$$

где $\Pi^0 = E - \Pi$. Правую часть последнего неравенства перепишем в виде

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} + \frac{\eta^{(n)}}{n} \in \frac{\eta^{(n)}}{n}\Pi^0 + \frac{\zeta + \frac{\eta^{(n)}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\Pi + \alpha + \Omega(e_{\lambda(\alpha)}, D, |\lambda(\alpha)|\delta)\right),$$

где $\xi_i \in F * \Phi_{b\Pi}$, $\eta^{(n)} \in L^{(n)}$. В силу утверждения 1) леммы 2 для любого $t > 0$, $\varepsilon(t) = t/(2|D| + 4t)$, $\beta = t/\sqrt{n} + \varepsilon(t)$ при $|\zeta| \leqslant \varepsilon(t)/2$, $|\eta^{(n)}| \leqslant \leqslant \sqrt{n}\varepsilon(t)/2$ выполняется

$$\frac{\eta^{(n)}}{n}\Pi^0 + \frac{\zeta + \frac{\eta^{(n)}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\Pi + \alpha + \Omega(e_{\lambda(\alpha)}, D, |\lambda(\alpha)|\delta) \subseteq$$

$$\subseteq \frac{\eta^{(n)}}{n}\Pi^0 - \frac{t}{n}e + \alpha + \Omega\left(e_{\lambda(\alpha)}, D + tE, |\lambda(\alpha)|\delta + \frac{\beta}{\sqrt{n}}\right).$$

Поскольку при $0 < t \leqslant 1/4$ выполняется $\beta \leqslant 1$, то

$$|\lambda(\alpha)|\delta+\beta/\sqrt{n}=|\lambda(\alpha)|\left(\delta+\frac{\beta}{\sqrt{n}\,|\lambda(\alpha)|}\right)\leqslant$$
$$\leqslant|\lambda(\alpha)|\left(\delta+\frac{1}{\sqrt{n}\,|\lambda(\alpha)|}\right)\leqslant|\lambda(\alpha)|(\delta+1/N_n).$$

Далее в силу того, что $|\eta^{(n)}|\leqslant\frac{2\sqrt{k}}{n|\lambda(\alpha)|^3}$, получаем с помощью утверждения 3) леммы 2, что

$$\frac{\eta^{(n)}}{n}\Pi^0+\frac{\zeta+\frac{\eta^{(n)}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\Pi+\alpha+\Omega(e,D,|\lambda(\alpha)|\delta)\subseteq$$
$$\subseteq-\frac{t}{n}e_{\lambda(\alpha)}+\alpha+\Omega\left(e,D+tE,|\lambda(\alpha)|\left(\delta+\frac{1}{N_n}+\frac{2\sqrt{k}}{n^2|\lambda(\alpha)|^4}\right)\right).$$

Таким образом,

$$P_n\leqslant r^{-1}\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}+\frac{\eta^{(n)}}{n}\in-\frac{t}{n}e+\alpha+\Omega(e,D+tE,|\lambda(\alpha)|\delta_1)\right),$$

где

$$r\equiv\mathbf{P}\left(|\zeta|\leqslant\frac{t}{4|D|+8t}\right),$$
$$\delta_1\equiv\delta+\frac{1}{N_n}+\frac{2\sqrt{k}}{n^2|\lambda(\alpha)|^4}\leqslant\delta+\frac{2\sqrt{k}+1}{N_n}\equiv\delta_2.$$

В силу леммы 1 для любого $c\in[1,\infty)$ найдется $\delta_0>0$ такое, что для любого $b\in(0,1]$ и для любого $\Omega\subseteq R^k$ $\sup\{|\beta|:\beta\in\Omega\}\leqslant|\lambda(\alpha)|\delta_0$, выполняется соотношение

$$P_n\leqslant r^{-1}R_n\left(\Lambda_{F*\Phi_{b\Pi}},n\alpha+n\Omega\right)(1+\varepsilon_n),$$

где $\xi_1\in F*\Phi_{b\Pi}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sup|\varepsilon_n|=0,\tag{21}$$

sup берется по классу $(F,\alpha)\in\mathscr{C}_1(c)\cap\mathscr{C}_2(c)$, $|\lambda_F(\alpha)|\in[N_n/\sqrt{n},c]$. Поскольку

$$\frac{|t|}{n}+|\lambda(\alpha)|\delta_2\leqslant|\lambda(\alpha)|(t/N_n+\delta_2),$$

при $\delta_2+t/N_n\leqslant\delta_0$ выполняется

$$P_n\leqslant r^{-1}R_n\left(\Lambda_{F*\Phi_{b\Pi}},n\alpha-\frac{t}{n}e_{\lambda(\alpha)}+n\Omega(e,D+tE,|\lambda(\alpha)|\delta_0)\right)(1+\varepsilon_n),$$

где ε_n удовлетворяет (21).

Заметим далее, что для любого $c\in[1,\infty)$ найдется $t_0>0$ такое, что если $(F,\alpha,D)\in\mathscr{C}(c)$, то $(F,\alpha,D+tE)\in\mathscr{C}(2c)$, если $6\leqslant t\leqslant t_0$. Поэтому в силу леммы 3 найдется b_0 такое, что для любого $b\in(0,b_0]$ выполняется

$$P_n\leqslant r^{-1}\frac{e^{-n\Lambda_F(\alpha)}\chi\left(\widetilde{B}_F(\alpha)+b\Pi,|\lambda(\alpha)|(D+tE),e\right)}{\sqrt{2\pi n}\,|\lambda_F(\alpha)|\,\sigma_F(\alpha)}(1+\varepsilon_n),\tag{22}$$

где ε_n удовлетворяет (21). Константу в правой части (22) представим в виде

$$\frac{\chi\left(\widetilde{B}_F(\alpha),|\lambda(\alpha)|D,e\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_F(\alpha)|\lambda_F(\alpha)|}K(F,\alpha,D,b,t),$$

где

$$K(F,\ \alpha,\ D,\ b,\ t)\equiv\frac{\chi\left(\widetilde{B}_F(\alpha)+b\Pi,\ |\lambda(\alpha)|(D+tE)\,e\right)}{\chi\left(\widetilde{B}_F(\alpha),\ |\lambda(\alpha)|D,\ e\right)\,r},\tag{23}$$

$(F,\ \alpha,\ D)\in\mathscr{C}(c)$. Положим $t=b^{1/4}$ и убедимся, что при $b\to 0$ выполняется

$$K(F,\ \alpha,\ D,\ b,\ b^{1/4})\to 1$$

равномерно по $(F,\ \alpha,\ D)\in\mathscr{C}(c)$. Для этого заметим, что

$$\chi(\widetilde{B}_F+b\Pi,\ |\lambda(\alpha)|(D+b^{1/4}E),\ e)=\chi(\widetilde{B}_F,\ |\lambda(\alpha)|(D+b^{1/4}E),\ e)\times$$
$$\times\chi(b\Pi,\ |\lambda(\alpha)|(D+b^{1/4}E),\ e),$$

и, очевидно, $\chi(b\Pi,\ |\lambda(\alpha)|(D+b^{1/4}E),\ e)\to 1$ равномерно по $(F,\ \alpha,\ D)\in\in\mathscr{C}(c)$. Далее, поскольку

$$\chi\left(\widetilde{B},\ |\lambda(\alpha)|\left(D+b^{1/4}\right),\ e\right)=$$
$$=\mathbf{E}\exp\left\{|\lambda(\alpha)|\,\eta\Pi\,\frac{D}{2}\,\Pi\eta^{\tau}+|\lambda(\alpha)|\,\frac{b^{1/4}}{2}\,|\eta\Pi|^2\right\},$$

в силу неравенства Гельдера для $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ справедливо

$$\chi(\widetilde{B},\ |\lambda(\alpha)|D,\ e)\leqslant\chi(\widetilde{B},\ |\lambda(\alpha)|(D+b^{1/4}E),\ e)\leqslant$$
$$\leqslant\chi(\widetilde{B},\ p|\lambda(\alpha)|D,\ e)^{1/p}\chi(\widetilde{B},\ q|\lambda(\alpha)|b^{1/4}E,\ e)^{1/q}.$$

Выбирая $p\sim 1+b^{1/8}$, $q\sim b^{1/8}$, убеждаемся, что равномерная сходимость (23) имеет место. Оценка (22) и соотношение (23) позволяют получить требуемую оценку сверху в теореме 1:

$$P_n\leqslant e^{-n\Lambda_F(\alpha)}\ \frac{\chi\left(\widetilde{B}_F(\alpha),\ |\lambda(\alpha)|D,\ e\right)}{\sqrt{2\pi n}\,|\lambda(\alpha)|\,\sigma(\alpha)}\,(1+\varepsilon_n),$$

где ε_n удовлетворяет (18). Оценка сверху установлена.

II. Оценка снизу. Обозначим для $\xi_1\in F$

$$P_n=\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in\alpha+\Omega\left(e_{\lambda(\alpha)},\ D,\ |\lambda(\alpha)|\,\delta\right)\right).$$

Для любых $\delta_0>0$, $\varepsilon>0$ справедливо

$$P_n\geqslant\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}+\frac{\zeta}{\sqrt{n}}+\frac{\eta^{(n)}}{n}\in\alpha+\frac{\zeta}{\sqrt{n}}+\frac{\eta^{(n)}}{n}+\Omega\left(e,\ D,\ \frac{\delta_0N_n}{\sqrt{n}}\right),\ |\zeta|\leqslant\varepsilon/2\right).$$

Воспользуемся далее утверждениями 2) и 3) леммы 2, в силу которых при $|\zeta|\leqslant\varepsilon(t)/2,\ \varepsilon(t)=\frac{t}{2|D|+4t},\ \frac{|\eta^{(n)}|}{\sqrt{n}}\leqslant\varepsilon(t)/2$ выполняется

$$\alpha+\frac{\zeta}{\sqrt{n}}+\frac{\eta^{(n)}}{n}+\Omega\left(e,\ D,\ \frac{\delta_0N_n}{\sqrt{n}}\right)\supseteq\alpha-\frac{2\sqrt{k}}{n^2\,|\lambda(\alpha)|^3}\,e+$$
$$+\Omega\left(e,\ D-tE,\ \frac{\delta_0N_n}{\sqrt{n}}-\frac{t}{n}-\frac{\varepsilon(t)}{n}-\frac{4\sqrt{k}}{n^2\,|\lambda(\alpha)|^3}\right).$$

Поскольку для $t\in(0,\ 1]$, $|\lambda(\alpha)|\in[N_n/\sqrt{n},\ c]$, выполняется

$$\frac{\delta_0N_n}{\sqrt{n}}-\frac{t}{n}-\frac{\varepsilon(t)}{n}-\frac{4\sqrt{k}}{n^2\,|\lambda(\alpha)|^3}\geqslant\frac{N_n}{\sqrt{n}}\left(\delta_0-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{4\sqrt{k}}{N_n^3}\right),$$

то получаем, что

$$P_n\geqslant\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}+\frac{\eta^{(n)}}{n}+\alpha-\frac{2\sqrt{k}}{n^2\,|\lambda(\alpha)|^3}\,e+\Omega\left(e,\ D-tE,\ \frac{\delta_0N_n}{2\sqrt{n}}\right),\ |\zeta|\leqslant\frac{\varepsilon(t)}{2}\right),\tag{24}$$

где $\xi \in F * \Phi_{b\Pi}$, $\zeta \in \Phi_{b\Pi}$. Правую часть (24) представим в виде

$$P_{n,1} - P_{n,2},$$

где

$$P_{n,1} \equiv \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} + \frac{\eta^{(n)}}{n} \in \alpha - \frac{2\sqrt{k}}{n^2 |\lambda(\alpha)|^3} e + \Omega\left(e, D - tE, \frac{\delta_0 N_n}{2\sqrt{n}}\right)\right),$$

$$P_{n,2} \equiv \mathbf{P}(\text{—»—};\ |\zeta| > \varepsilon(t)/2).$$

Последовательность $P_{n,1}$ изучается совершенно аналогично тому, как делается для оценки сверху. Это слагаемое дает «правильную» асимптотику, которая совпадает с оценкой сверху. Оценим сверху последовательность $P_{n,2}$.

Пусть вектора ζ' и $\eta^{(n)'}$ есть независимые копии векторов ζ и $\eta^{(n)}$. Рассуждая как при получении оценки сверху, можно получить

$$P_{n,2}\mathbf{P}(|\zeta'| \leqslant \varepsilon(t)/2) \leqslant P_{n,3},$$

где

$$P_{n,3} \equiv \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} + \frac{\zeta}{\sqrt{n}} + \frac{\zeta'}{\sqrt{n}} + \frac{\eta^{(n)}}{n} + \frac{\eta^{(n)'}}{n} \in \alpha + \Omega(e, D, |\lambda(\alpha)|\delta_0),\right.$$

$$\left. |\zeta| > \varepsilon(t)/2\right).$$

Для оценки $P_{n,3}$ нам понадобятся случайные вектора в пространстве R^{2k-1}. Пусть R_1 и R_2 — матрицы-проекторы, которые переводят R^{2k-1} в R^k и действуют так:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k-1})R_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k),$$

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k-1})R_2 = (0, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{2k-1}).$$

Пусть случайные величины ξ_1^*, $\eta^{(n)*}$, ζ^* из R^{2k-1} имеют распределение F^*, $L^{(n)*}$, $\Phi_{b\Pi^*}$ и определены как

$$\xi_1^* R_2 = 0,\ \xi_1^* R_1 = \xi_1,\ \eta^{(n)*}R_1 = \eta^{(n)},\ \eta^{(n)*}R_2 = \eta^{(n)'}\Pi,$$

$\zeta^* R_1 = \zeta'$, $\zeta^* R_2 = \zeta\Pi = \zeta$. Напомним, что

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\Pi = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_k).$$

Пусть вектор $\alpha^* \in R^{2k-1}$ таков, что $\alpha^* R_1 = \alpha$, $\alpha^* R_2 = 0$. Используя очевидные соотношения

$$\frac{S_n}{n} + \frac{\eta^{(n)} + \eta^{(n)'}}{n} + \frac{\zeta + \zeta'}{\sqrt{n}} - \alpha = \left(\frac{S_n^*}{n} + \frac{\eta^{(n)*}}{n} + \frac{\zeta^*}{\sqrt{n}} - \alpha^*\right)(R_1 + R_2),$$

получаем, что для $\xi^* \in F^*$

$$P_{n,3} = \mathbf{P}\left(\frac{S_n^*}{n} + \frac{\eta^{(n)*}}{n} + \frac{\zeta^*}{\sqrt{n}} - \alpha^* \in \Omega(e_{\lambda(\alpha^*)}, D^*, |\lambda(\alpha^*)|\delta_2), |\zeta^* R_2| > \frac{\varepsilon(t)}{2}\right), \tag{25}$$

где $(2k-1)\times(2k-1)$ — матрица D^* имеет вид

$$D^* = (R_1 + R_2)\Pi D \Pi (R_1 + R_2)^{\mathrm{T}}.$$

Заметим, что (25) можно переписать еще как

$$P_{n,3} = P\left(\frac{S_n^*}{n} + \frac{\eta^{(n)*}}{n} - \alpha^* \in \Omega(e_{\lambda(\alpha^*)}, D^*, |\lambda(\alpha^*)|\delta_2), \left|\frac{S_n^* R_2}{\sqrt{n}}\right| > \frac{\varepsilon(t)}{2}\right),$$

$$\xi_1^* \in F^* * \Phi_{b\Pi^*}.$$

Очевидно, если тройка (F, α, D) принадлежит классу $\mathscr{C}(c)$, то тройка (F^*, α^*, D^*) попадет в класс $\mathscr{C}^*(c)$, который связан с пространством

R^{2k-1}. Поэтому в силу леммы 1 $P_{n,3}$ оценивается сверху последовательностью $R_n(\Lambda_{F^{**}\Phi_{b\Pi^*}}, n\Omega^*)$, где

$$\Omega^* = \left\{\beta \in R^{2k-1}\colon |\beta R_2| > \frac{\varepsilon(t)}{2\sqrt{n}}\right\} \cap \{\alpha^* + \Omega(e_{\lambda(\alpha^*)}, D^*, |\lambda(\alpha^*)|\delta_2)\}.$$

Далее, повторяя почти дословно доказательство леммы 3, можно показать, что найдется $\delta_2 > 0$ такое, что для любого $\nu > 0$ найдется $b_0(\nu) > 0$ такое, что для любого $b \in (0, b_0(\nu))$ выполняется

$$\limsup_{n\to\infty} \sup R_n(\Lambda_{F^{**}\Phi_{b\Pi^*}}, n\Omega^*)\sqrt{n}\,|\lambda(\alpha^*)|\, e^{n\Lambda(\alpha)} \leqslant \nu,$$

и sup берется по $(F^*, \alpha^*, D^*) \in \mathscr{C}^*(c)$, $|\lambda(\alpha^*)| \in [N_n/\sqrt{n}, c]$. Таким образом, слагаемое $P_{n,2}$ мало по сравнению с $P_{n,1}$. Оценка снизу и вместе с ней теорема 1 доказаны.

7. Доказательство леммы 1 для случая

$$1/c \leqslant |\lambda(\alpha)| \leqslant c. \tag{26}$$

Класс пар (F, α), удовлетворяющих условиям $C_1(c)$ и (26), обозначим $\mathscr{C}_1^0(c)$ (напомним, что условия $C_1(c)$ и $C_2(c)$ относятся только к паре (F, α)). В настоящей лемме имеем дело с распределениями $G = F * \Phi_{b\Pi}$, где $(F, \alpha) \in \mathscr{C}_1^0(c) \cap \mathscr{C}_2(c)$.

Используем следующие обозначения. Если F — распределение в R^k, то через

$$\varphi_F(\lambda),\ f_F(s) = \varphi_F(is),\ p_F(\alpha);\ \lambda, s, \alpha \in R^k$$

обозначим соответственно преобразование Лапласа, характеристическую функцию и плотность, отвечающие F. Собственные числа матрицы $B = B_F = \mathbf{E}_F(\xi - \mathbf{E}\xi)^{\mathrm{T}}(\xi - \mathbf{E}\xi)$ обозначим соответственно $\sigma_1^2(F), \ldots, \sigma_k^2(F)$; при этом будем считать, что они не убывают, так что

$$0 \leqslant \sigma_1^2(F) \leqslant \ldots \leqslant \sigma_k^2(F).$$

Третий абсолютный момент ξ обозначим

$$c_3 = c_3(F) \equiv \mathbf{E}_F|\xi - \mathbf{E}_F\xi|^3.$$

Введем еще функцию аргумента $t \in R_+^1$

$$r_F(t) = \sup_{|s|\geqslant t} |f_F(s)|.$$

Один из вариантов условия Крамера на гладкость функции F состоит в неравенстве $r_F(t) < 1$ при $t > 0$ (ср. с условием $C_2(c)$ в определении класса $\mathscr{C}_2(c)$). В лемме 4, которую мы сформулируем ниже, нам понадобятся следующие обозначения. Пусть F_1, F_2 — заданные распределения,

$$B = B_{F_1},\quad r(t) = r_{F_1}(t),\quad \gamma = \sigma_1^2(F_1)/c_3(F_1),$$

$$a = \int |f_{F_2}(s)|\,ds,\quad b = \mathbf{E}_{F_2}|\xi|.$$

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{E}_{F_1}\xi = 0$. *Тогда для* $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int f_{F_1}^n(s/\sqrt{n})\, f_{F_2}(s/\sqrt{n})\,ds = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}}|B|^{-1/2} + \Delta_0, \tag{27}$$

где

$$|\Delta_0| \leqslant c_{\text{абс}}\left(\Phi_B(|\lambda| > \gamma\sqrt{n}) + n^{k/2} r^n(\gamma)\, a + \frac{(b+1)(a+1)}{\sqrt{n|B|}}\right).$$

Поскольку левая часть (27) есть (в силу формулы обращения) плотность в нуле распределения случайного вектора

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n + \zeta}{\sqrt{n}},\quad \xi_i \in F,\quad i = 1, \ldots, n,\quad \zeta \in F_2,$$

а константа $(2\pi)^{-k/2}|B|^{-1/2}$ есть плотность в нуле гауссовского распределения Φ_B, лемма 4 дает оценку для модуля разности значений этих плотностей в нуле.

Доказательство. Пусть $f_i = f_{F_i}$, $i = 1, 2$; обозначим

$$\Delta \equiv \left| f_1^n(s/\sqrt{n}) f_2(s/\sqrt{n}) - e^{-\frac{sBs^T}{2}} \right|,$$

$$\Delta_1 \equiv f_1^n(s/\sqrt{n}) - e^{-\frac{sBs^T}{2}}, \quad \Delta_2 \equiv 1 - f_2(s/\sqrt{n}),$$

так что

$$\Delta = \left| \left(\Delta_1 + e^{-\frac{sBs^T}{2}}\right)(\Delta_2 + 1) - e^{-\frac{sBs^T}{2}} \right| \leqslant |\Delta_1| + |\Delta_1|\,|\Delta_2| + |\Delta_1| e^{-\frac{sBs^T}{2}}.$$

Оценим $|\Delta_1|$ и $|\Delta_2|$. Легко видеть, что

$$|\Delta_2| \leqslant \frac{|s|}{\sqrt{n}} \mathbf{E}_{F_2}|\xi| \leqslant \frac{|s|}{\sqrt{n}} b.$$

В силу известных неравенств (см. [18], с. 621) при $|s| \leqslant \gamma\sqrt{n}$

$$|\Delta_1| \leqslant \frac{5}{12} \frac{c_3 |s|^3}{\sqrt{n}} e^{-\frac{sBs^T}{12}}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{|s|\leqslant\gamma\sqrt{n}} |\Delta|\, ds \leqslant c\left(\int\limits_{|s|\leqslant\gamma\sqrt{n}} |s|^3 \frac{c_3}{\sqrt{n}} e^{-\frac{sBs^T}{1\cdot 2}} ds + \int\limits_{|s|\leqslant\gamma\sqrt{n}} |s|^4 \frac{1}{n} bc_3 e^{-\frac{sBs^T}{12}} ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|s|\leqslant\gamma\sqrt{n}} |s| \frac{e^{-\frac{sBs^T}{12}}}{\sqrt{n}} ds \right) \leqslant c|B|^{-1/2} \frac{(b+1)(a+1)}{\sqrt{n}}.$$

Далее, легко видеть, что

$$\int\limits_{|s|>\gamma\sqrt{n}} |\Delta|\, ds \leqslant \int\limits_{|s|>\gamma\sqrt{n}} e^{-\frac{sBs^T}{12}} ds + \int\limits_{|s|>\gamma\sqrt{n}} |f_1^{(n)}(s/\sqrt{n})|\,|f_2(s/\sqrt{n})|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\Phi_B(\alpha\colon |\alpha| > \gamma\sqrt{n}) + r^n(\gamma) n^{k/2} a\right).$$

Лемма 4 доказана.

Обозначим $|\Lambda'''(\alpha)| = \max\limits_{1\leqslant i,j,l\leqslant k} \left| \frac{\partial^3 \Lambda(\alpha)}{\partial\alpha_i\, \partial\alpha_j\, \partial\alpha_l} \right|$, если эти производные существуют.

Лемма 5. *Для любого* $c \in [1, \infty)$ *найдется* $\delta_0 > 0$ *такое, что для любого* $b \in (0, 1]$ *имеют место следующие соотношения*: 1) $\sup|\lambda_G(\alpha+\beta)| < \infty$, 2) $\sup \Lambda_G(\alpha+\beta) < \infty$, 3) $\sup|\Lambda_G'''(\alpha+\beta)| < \infty$, 4) $\inf \sigma_1^2(\tilde{G}) > 0$, 5) $\sup c_3(\tilde{G}) < \infty$, 6) *для любого* $t > 0$ $\sup r_{\tilde{G}}(t) < 1$. *В этих соотношениях операции* sup *и* inf *берутся по классам* G *и* $\tilde{G}$, *где* $G = F * \Phi_{b\text{п}}$, $(F, \alpha) \in \mathscr{C}_1^0(c) \cap \mathscr{C}_2(c)$, $\tilde{G} = G^{(\lambda)}$, $\lambda = \lambda_G(\alpha+\beta)$, $|\beta| \leqslant \delta_0$, *где* $G^{(\lambda)}$ *есть преобразование Крамера над распределением* G (см. (1.30)).

Лемму 5 докажем несколько позже, а сейчас продолжим доказательство леммы 1.

Лемма 6. *Пусть для распределения* F_0 *в* R^k *и вектора* $\lambda_0 \in R^k$ *выполнены условия*

$$\varphi_{F_0}(\lambda_0) < \infty, \int |f_{\tilde{F}_0}(s)|\, ds < \infty, \tag{28}$$

где $\widetilde{F}_0=\widetilde{F}_0^{(\lambda_0)}$. *Тогда плотность* $p_{F_0}(t)$ *при* $t=0$ *представляется в виде*

$$p_{F_0}(0)=\frac{\varphi_{F_0}(\lambda_0)}{(2\pi)^k}\int f_{\widetilde{F}_0}(s)\,ds. \tag{29}$$

Доказательство. По определению преобразования Крамера (см. (1.30)) имеем

$$F_0(U)=\mathbf{E}_{F_0}\left(e^{\langle\lambda,\xi\rangle-\langle\lambda_0,\xi\rangle};\ \xi\in U\right)=\varphi_{\widetilde{F}_0}(\lambda_0)\,\mathbf{E}_{\widetilde{F}_0}\left(e^{-\langle\lambda_0,\xi\rangle};\ \xi\in U\right). \tag{30}$$

Тождество (30) для плотностей имеет вид

$$p_{F_0}(t)=\varphi_{F_0}(\lambda_0)\,e^{-\langle\lambda_0,t\rangle}p_{\widetilde{F}_0}(t).$$

Остается воспользоваться формулой обращения:

$$p_{\widetilde{F}_0}(0)=p_{\widetilde{F}_0}(t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{(2\pi)^k}\int f_{\widetilde{F}_0}(s)\,e^{-i(t,s)}\,ds\Big|_{t=0}=\frac{1}{(2\pi)^k}\int f_{\widetilde{F}_0}(s)\,ds.$$

Лемма 6 доказана.

Выберем в качестве F_0 в формуле (29) распределение вектора

$$\frac{S_n-n\alpha-\beta+\eta_n}{\sqrt{n}},\quad \xi_i\in G\equiv F*\Phi_{b\Pi},\quad \eta_n=\frac{\eta_0}{n\,|\lambda_F(\alpha)|^3},$$

где $(F,\alpha)\in\mathscr{C}_1^0(c)\cap\mathscr{C}_2(c)$, $|\beta|\leqslant n|\lambda_F(\alpha)|\delta_0$, $\eta_0\in L_0$, и число $\delta_0>0$ выбрано в соответствии с леммой 5. Тогда условия леммы 6 выполнены, и можно записать

$$n^{k/2}p_n(G,n\alpha+\beta)=e^{-n\Lambda_G(\alpha+\beta/n)}\varphi_{L_0}\left(\frac{\lambda_G(\alpha+\beta/n)}{n^{3/2}\,|\lambda_F(\alpha)|^3}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{(2\pi)^k}\int f_1^n\left(s/\sqrt{n}\right)f_2\left(s/(n^{3/2}\,|\lambda_F(\alpha)|^3)\right)ds, \tag{31}$$

где

$$f_1(s)=f_{\widetilde{G}}(s)\,e^{-i(s,\alpha+\beta/n)},\quad \widetilde{G}=\widetilde{G}^{(\lambda_1)},$$
$$f_2(s)=f_{\widetilde{L}}(s),\quad \widetilde{L}=\widetilde{L}^{(\lambda_1)},\quad \lambda_1=\lambda_G(\alpha+\beta/n).$$

Воспользуемся теперь леммой 5. В силу утверждения 1) этой леммы выполняется

$$\varphi_{L_0}\left(\frac{\lambda_1}{n^{3/2}\,|\lambda_F(\alpha)|^3}\right)=1+\varepsilon_n,$$

где

$$\lim_{n\to\infty}\sup|\varepsilon_n|=0, \tag{32}$$

sup берется по $G=F*\Phi_{b\Pi}$, $(F,\alpha)\in\mathscr{C}_1^0(c)\cap\mathscr{C}_2(c)$. Применяя далее к интегралу в (31) лемму 4 и используя лемму 5, получаем, что

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int f_1^n\left(s/\sqrt{n}\right)f_2\left(s/(n^{3/2}\,|\lambda_F(\alpha)|^3)\right)ds=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\,|B_{\widetilde{G}}|^{-1/2}(1+\varepsilon_n),$$

где ε_n удовлетворяет (32). Лемма 1 для случая $|\lambda_F(\alpha)|\in[1/c,\ c]$ доказана.

8. Доказательство леммы 1 в случае, когда

$$|\lambda_F(\alpha)|\to 0,\quad |\lambda_F(\alpha)|\geqslant N_n/\sqrt{n}. \tag{33}$$

Для этого обозначим через $\mathscr{F}$ класс всех вероятностных распределений F в R^k. Класс всех преобразований Лапласа $\varphi_F(\lambda)$, $F\in\mathscr{F}$, обозначим $\mathscr{L}$. Через $\mathscr{L}^*\supset\mathscr{L}$ обозначим класс всех функций $\varphi^*(\lambda)=\varphi_F^s(\lambda/\sqrt{s})$, где $s>0$, $F\in\mathscr{F}$. Каждой функции $\varphi^*(\lambda)=\varphi_F^s(s/\sqrt{n})$ поставим в соответствие «идеальный» элемент $F^*=F^*_{(s)}$. Класс таких элементов $F^*_{(s)}$ обозначим $\mathscr{F}^*$. Таким образом, мы построили такое расширение $\mathscr{F}^*$ класса $\mathscr{F}$, что преобразования Лапласа для элементов $F^*_{(s)}$ из $\mathscr{F}^*$ составляют класс $\mathscr{L}^*$:

$$\varphi_{F^*_{(s)}}(\lambda)=\varphi_F^s(\lambda/\sqrt{s}).$$

Все обозначения, которые были введены для $F\in\mathscr{F}$ с помощью функции $\varphi_F(\lambda)$, можно распространить на класс $\mathscr{F}^*$. Например, для $F^*\in\mathscr{F}^*$ можно ввести функции

$$A_{F^*}(\lambda)=\ln\varphi_{F^*}(\lambda),\quad \Lambda_{F^*}(a)=\sup_{\lambda}\{\langle a,\lambda\rangle-\Lambda_{F^*}(\lambda)\},\quad \lambda_{F^*}(a)=\Lambda'_{F^*}(a).$$

При этом для $F^*=F^*_{(s)}\in\mathscr{F}^*$ выполняется

$$\Lambda_{F^*}(a)=s\Lambda_F(a/\sqrt{s}),\quad \lambda_{F^*}(a)=\sqrt{s}\lambda_F(a/\sqrt{s}). \tag{34}$$

Очевидным образом можно ввести классы $\mathscr{C}^*_1(c)$, $\mathscr{C}^{0*}_1(c)$, $\mathscr{C}^*_2(c)$ пар (F^*,α), где $F^*\in\mathscr{F}^*$, $\alpha\in R^1$ (ведь в определениях этих классов заняты только функции $\varphi_F(\lambda)$). Естественным образом можно определить операцию свертки элемента $F^*_{(s)}\in\mathscr{F}^*$ с гауссовским распределением $\Phi_B=\Phi_{0,B}$:

$$F^*_{(s)}*\Phi_B=(F*\Phi_B)^*_{(s)}.$$

Функцию $a_n(G,\beta)$, введенную ранее (перед формулировкой леммы 1) для $G=F*\Phi_{b\Pi}$ и целых n, можно распространить на $G^*=F^**\Phi_{b\Pi}$, $F^*\in\mathscr{F}^*$ и неотрицательные t:

$$a_t(G^*,\beta)=(2\pi t)^{k/2}\left|\Lambda''_{G^*}(\beta/t)\right|^{\frac{1}{2}}e^{-t\Lambda_{G^*}(\beta/t)}. \tag{35}$$

Функцию $p_n(G,\beta)$ для $G=F*\Phi_{b\Pi}$ можно представить с помощью формулы обращения

$$p_n(G,\beta)=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\left(f_F(u)\,f_{\Phi_{b\Pi}}(u)^n f_{L_0}\left(\frac{u}{n\,|\,\lambda_F(\alpha)\,|^3}\right)\right)e^{-i(\beta,u)}\,du. \tag{36}$$

Если в (36) заменить функцию $f_F(u)$ функцией $f_{F^*}(u)=\varphi_{F^*}(iu)$, и вместо целых n использовать вещественные $t>0$, то получим определение функции $p_t(G^*,\beta)$, где $G^*=F^**\Phi_{b\Pi}$. Понятно, что $p_t(G^*,\beta)$ не всегда является плотностью распределения в R^k, однако если произведение ts есть целое число n и $F^*=F^*_{(s)}$, то $p_t(G^*,\beta)$ есть плотность распределения в R^k, вид которого можно установить с помощью формулы (36).

Можно заметить, что данное выше доказательство леммы 1 при дополнительном предположении $1/c\leqslant|\lambda_F(\alpha)|\leqslant c$ полностью сохранится для более общего утверждения, в котором классы $\mathscr{C}^0_1(c)$, $\mathscr{C}_2(c)$ заменены классами $\mathscr{C}^{0*}_1(c)$, $\mathscr{C}^*_2(c)$ и целое n заменено вещественным $t>0$.

Лемма 1*. *Для произвольного* $c\in[1,\infty)$ *найдется* $\delta_0>0$ *такое, что для любого* $b>0$ *выполняется*

$$p_t(F^**\Phi_{b\Pi},\ n\alpha+\beta)=a_t(F^**\Phi_{b\Pi},\ n\alpha+\beta)(1+\varepsilon_t), \tag{37}$$

где

$$\Pi=\Pi_e\equiv E-e^Te,\quad e=e_{\lambda_{F^*}}(\alpha),$$

$$\lim_{t\to\infty}\sup|\varepsilon_t|=0,$$

$\sup$ *берется по* $(F^*,\alpha)\in\mathscr{C}^{0*}_1(c)\cap\mathscr{C}^*_2(c)$, $|\beta|\leqslant\delta_0 t$.

Лемма 1* позволяет закончить доказательство леммы 1. Для пары $(F, \alpha) \in \mathscr{C}_1(c) \cap \mathscr{C}_2(c)$ положим

$$s = |\lambda_F(\alpha)|^{-2},$$

и рассмотрим новую пару

$$(F^*, \alpha^*) = \left(F^*_{(s)}, \sqrt{s}\alpha\right).$$

Очевидно, что

$$(F^*, \alpha^*) \in \mathscr{C}_1^*(c) \cap \mathscr{C}_2^*(c),$$

и при этом, в силу (34), справедливо

$$|\lambda_{F^*}(\alpha^*)| = \sqrt{s}\,|\lambda_F(\alpha)| = 1.$$

Поэтому

$$(F^*, \alpha^*) \in \mathscr{C}_1^{0*}(c) \cap \mathscr{C}_2^*(c),$$

и можно воспользоваться леммой 1*. «Переводя» далее соотношение (27) с «языка» F^*, α^*, t на «язык» F, α, n (где $n = ts$), получаем доказательство леммы 1 в случае (33).

9. Доказательство леммы 5. Покажем сначала, что для любого $c \in [1, \infty)$ найдутся $\delta_0 > 0$ и $c_1 \in [1, \infty)$ такие, что для любого $(F, \alpha) \in \mathscr{C}_1^0(c) \cap \mathscr{C}_2(c)$ найдутся e_1 и $e_2 \in R^k$ такие, что

$$\Lambda_F(\alpha + te_i) \leqslant c_1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \tag{38}$$

и

$$\langle e_1, e_{\lambda_F(\alpha)} \rangle \geqslant \delta_0, \quad \langle e_2, e_{\lambda_F(\alpha)} \rangle \leqslant -\delta_0. \tag{39}$$

Для этого обозначим F^* распределение вектора $\xi - \alpha$, $\xi \Subset F^{(\lambda)}$, $\lambda = \lambda_F(\alpha)$. Легко видеть, что

$$\Lambda_{F^*}(\beta) = \Lambda_F(\alpha + \beta) - \Lambda_F(\alpha) - \langle \beta, \lambda_F(\alpha) \rangle, \tag{40}$$

поэтому $\Lambda_{F^*}(0) = 0$, $\lambda_{F^*}(0) = 0$. В силу (40) для того, чтобы доказать (38) и (39), достаточно найти e_1 и e_2 такие, что для $0 \leqslant t \leqslant 1$, $e = e_{\lambda_F(\alpha)}$

$$\Lambda_{F^*}(te_i) \leqslant c_1, \quad i = 1, 2, \tag{41}$$
$$\langle e_1, e \rangle \geqslant \delta_0, \ \langle e_2, e \rangle \leqslant -\delta_0.$$

Для этого рассмотрим случайную величину

$$\eta = \langle \xi, \lambda_F(\alpha) \rangle, \quad \xi \Subset F^*;$$

распределение η обозначим F^0. По построению $\mathbf{E}\eta = 0$, $\eta \Subset F^0$, и поскольку $(F, \alpha) \in \mathscr{C}_1^0(c)$, найдется $c_1 = c_1(c)$ такое, что

$$\sup_{|\lambda| \leqslant 1/c_1} \varphi_{F^0}(\lambda) \leqslant 1 + c_1, \tag{42}$$

т. е. случайная величина η удовлетворяет равномерному варианту условия Крамера G_3 (см. § 1). Кроме того, найдется $\nu = \nu(c) > 0$ такое, что

$$\mathbf{E}_{F^0}\eta^2 \geqslant \nu > 0. \tag{43}$$

Последнее следует из того, что класс всех распределений F^0, для которых $(F, \alpha) \in \mathscr{C}_1^0(c) \cap \mathscr{C}_2(c)$, в силу (42) образует компакт в топологии слабой сходимости функций распределений. Поэтому если (43) не выполнено, то найдется пара $(F, \alpha) \in \mathscr{C}_1^0(c) \cap \mathscr{C}_2(c)$ такая, что соответствующее F^0 вырождено в точке $t = 0$. Последнее противоречит принадлежности (F, α) классу $\mathscr{C}_2(c)$.

Из (43) следует, что найдется $\delta_0>0$, зависящее только от c, такое, что для всех $(F, \alpha)\in \mathscr{C}_1^0(c)\cap \mathscr{C}_2(c)$ выполняется

$$\Lambda_{F^0}(\pm\delta_0)\leqslant 1. \tag{44}$$

Действительно, если это не так, то найдется F^0 такое, что $\Lambda_{F^0}(t)=\infty$ про $t\neq 0$. Это значит $\mathbf{E}_{F^0}(\eta)^2=0$, что противоречит (43).

Рассмотрим два полупространства $\left(e=e_{\lambda_F(\alpha)}\right)$:

$$L^{+c}=\{\alpha\in R^k\colon \langle\alpha, e\rangle>c\},$$
$$L^{-c}=\{\alpha\in R^k\colon \langle\alpha, e\rangle<-c\}.$$

В силу свойства (1.14) функции уклонений получаем

$$\Lambda_{F*}\left(L^{\pm c}\right)\equiv\inf\{\Lambda_{F*}(\alpha)\colon \alpha\in L^{\pm c}\}=\Lambda_{F*}(\pm c),$$

поэтому при $c=\delta_0$

$$\Lambda_{F*}\left(L^{\pm\delta_0}\right)\leqslant 1. \tag{45}$$

Очевидно, что из (45) следует (41). Таким образом, соотношения (38) и (39) доказаны.

Для любых распределений F и G, любых β_1 и $\beta_2\in R^k$ выполняется (см. свойство (1.11) функции уклонений)

$$\Lambda_{F*G}(\beta_1)\leqslant\Lambda_F(\beta_2)+\Lambda_G(\beta_1-\beta_2). \tag{46}$$

Представляя произвольный вектор $\beta\in R^k$ в виде $\beta=\beta\Pi+te^*$, где $t>0$, $e^*=e_1$ или e_2, и вектора e_1, e_2 из (39), и используя (46), получаем

$$\Lambda_{F*\Phi_{b\Pi}}(\alpha+\beta)\leqslant\Lambda_F(\alpha+te^*)+\Lambda_{\Phi_{b\Pi}}(\beta\Pi).$$

Поскольку $\Lambda_\Phi(\beta\Pi)=\frac{1}{2}b^2|\beta\Pi|^2$, соотношение 2) леммы 5 доказано.

Утверждение 1) леммы 5 следует из утверждения 2) и следующей леммы.

Лемма 7. *Пусть при* $|\beta|\leqslant\delta_0$ *выполнено условие* $\Lambda_F(\alpha+\beta)\leqslant c$. *Тогда*

$$\sup_{|\beta|\leqslant\delta/2}|\lambda_F(\alpha+\beta)|\leqslant\frac{2c}{\delta_0}.$$

Доказательство. Пусть $\beta_0\in R^k$, $|\beta_0|\leqslant\delta/2$, $e_0=e_{\lambda(\alpha+\beta_0)}$. Рассмотрим случайную величину $\eta=\langle e_0, \xi-\alpha-\beta_0\rangle$, и функцию уклонений $\Lambda_0(t)$, соответствующую η. Заметим, что в силу неубывания $\lambda_0(t)=\Lambda_0'(t)$ справедливо

$$\Lambda_0(t)=\Lambda_0(0)+\int_0^t\lambda_0(u)\,du\geqslant\Lambda_0(0)+\lambda_0(t)\,t\geqslant$$
$$\geqslant\Lambda_0(0)+t\,|\lambda(\alpha+\beta_0)|. \tag{47}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $\lambda_0(0)=|\lambda(\alpha+\beta_0)|$, что следует из определения η. Отсюда же вытекает, что

$$\Lambda_0(t)=\sup_u\{tu-\ln\varphi_F(e_0u)+u\langle e_0, \alpha+\beta_0\rangle\}=$$
$$=\sup_u\{u\langle e_0, \alpha+\beta_0+te_0\rangle-\ln\varphi_F(e_0u)\}\leqslant\Lambda_F(\alpha+\beta_0+te_0).$$

Поэтому получаем из (47) при $t=\delta_0/2$, что

$$\delta_0|\lambda_F(\alpha+\beta_0)|/2\leqslant c.$$

Лемма 7 доказана.

Отметим еще, что, доказав утверждения 1) и 2) леммы 5, мы попутно доказали, что для любых $c\in[1,\infty)$, $b\in(0,1]$ и $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(c,b,\varepsilon)>0$ такое, что при $|\beta|\leqslant\delta$ выполняется

$$|\Lambda_G(\alpha+\beta)-\Lambda_G(\alpha)|\leqslant\varepsilon,\ |\lambda_G(\alpha+\beta)-\lambda_G(\alpha)|\leqslant\varepsilon$$

для класса G, рассматриваемого в лемме 5. Иными словами, доказали равномерную по G непрерывность функций $\Lambda_G(\beta)$ и $\lambda_G(\beta)$ в точке $\beta=\alpha$.

Следующая лемма отвечает на такой вопрос. Пусть характеристическая функция $\mathbf{E}_F e^{is\xi}$ удовлетворяет при $s=s_0$ условию

$$|\mathbf{E}_F e^{is_0\xi}|<1.$$

Сохранится ли это неравенство для «сдвинутой» характеристической функции $\mathbf{E}_{\widetilde F}e^{is\xi}$, $\widetilde F=\widetilde F^{(\lambda_0)}$:

$$|\mathbf{E}_{\widetilde F}e^{is_0\xi}|<1?$$

Пусть X, Y — две случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве. Обозначим $a=q/(p+q)$, где $p>1$, $q>1$, $1/p+1/q=1$, $\Delta=a(1+\mathbf{E}e^{aY})\mathbf{E}(e^{aY}+1)|Y|$.

Лемма 8*. *Пусть* $\mathbf{E}e^{Y}<\infty$. *Тогда для* $t\in R^1$

$$\left(1-\left|\frac{\mathbf{E}e^{itX+Y}}{\mathbf{E}e^{Y}}\right|^2\right)^{1/p}\geqslant\frac{1-|\mathbf{E}e^{itX}|^2-2\Delta}{2^{\frac{p-1}{p}}(\mathbf{E}e^{Y})^{2/p}}.$$

Доказательство. Пусть (X',Y') — независимая копия вектора (X,Y),

$$P_a(U)\equiv\frac{\mathbf{E}(e^{aY};X\in U)}{\mathbf{E}e^{aY}},\quad f_a(t)\equiv\mathbf{E}_a e^{itX}.$$

Тогда

$$1-|f_a(t)|^2=1-\mathbf{E}_a e^{it(X-X')}=\mathbf{E}_a(1-\cos t(X-X'))=$$
$$=\mathbf{E}_a(1-\cos t(X-X'))e^{b(Y+Y')-b(Y+Y')}.$$

Воспользуемся неравенством Гельдера и очевидным неравенством

$$(1-\cos t)^p\leqslant2^{p-1}(1-\cos t).$$

Получим

$$1-|f_a(t)|^2\leqslant2^{\frac{p-1}{p}}\left[\mathbf{E}_a(1-\cos t(X-X'))e^{pb(Y+Y')}\right]^{1/p}\left[\mathbf{E}_a e^{-qb(Y+Y')}\right]^{1/q}.$$

Для $a=\dfrac{q}{p+q}$, $b=\dfrac{1}{p+q}$ из последнего получаем

$$1-|f_a(t)|^2\leqslant2^{\frac{p-1}{p}}\frac{[\mathbf{E}(1-\cos t(X-X'))e^{Y+Y'}]^{1/p}}{[\mathbf{E}e^{a(Y+Y')}]^{1/p}}\frac{(\mathbf{E}1)^{1/q}}{[\mathbf{E}e^{a(Y+Y')}]^{1/q}}=$$
$$=2^{\frac{p-1}{p}}\frac{(1-|f_1(t)|^2)^{1/p}(\mathbf{E}e^{Y})^{2/p}}{(\mathbf{E}e^{aY})^2}.\tag{48}$$

Поскольку

$$1-|f_a(t)|^2=\frac{(\mathbf{E}e^{aY})^2-|\mathbf{E}e^{aY+itX}|^2}{(\mathbf{E}e^{aY})^2},$$

из (48) следует, что

$$|(\mathbf{E}e^{aY})^2-|\mathbf{E}e^{aY+itX}|^2|\leqslant2^{\frac{p-1}{p}}(1-|f_1(t)|^2)^{1/p}(\mathbf{E}e^{Y})^{2/p}.\tag{49}$$

* Идею доказательства леммы сообщил авторам В. В. Юринский.

Легко видеть далее, что

$$1-|f_0(t)|^2 \leqslant |(\mathbf{E}e^{aY})^2 - |\mathbf{E}e^{aY+itX}|^2| + \Delta_1+\Delta_2, \qquad (50)$$

где

$$\Delta_1 = |1-(\mathbf{E}e^{aY})^2|,\ \Delta_2 = ||\mathbf{E}e^{aY+itX}|^2 - |\mathbf{E}e^{itX}|^2|.$$

Оценим далее Δ_1 и Δ_2:

$$\Delta_1 \leqslant (1+\mathbf{E}e^{aY})E|e^{aY}-1| \equiv \Delta_3;$$

$$\Delta_2 = |\mathbf{E}e^{aY+itX}\mathbf{E}e^{aY-itX} - \mathbf{E}e^{itX}\mathbf{E}e^{-itX}| =$$

$$= |\mathbf{E}(e^{aY+itX}-e^{itX})\mathbf{E}e^{aY-itX} + \mathbf{E}(e^{aY-itX}-e^{-itX})\mathbf{E}e^{itX}| \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E}|e^{aY}-1|\mathbf{E}e^{aY} + \mathbf{E}|e^{aY}-1| \equiv \Delta_3.$$

В силу очевидного неравенства

$$|e^{aY}-1| \leqslant a|Y|e^{aY} + a|Y|$$

получаем

$$\Delta_3 \leqslant (1+\mathbf{E}e^{aY})a\mathbf{E}(e^{aY}+1)Y \equiv \Delta.$$

Поэтому

$$\Delta_1 \leqslant \Delta,\ \Delta_2 \leqslant \Delta,$$

и в силу (49), (50) имеем неравенство

$$1-|f_0(t)|^2 \leqslant 2^{\frac{p-1}{p}}(1-|f_1(t)|^2)^{1/p}(\mathbf{E}e^{y})^{2/p} + \Delta,$$

эквивалентное утверждению леммы 8.

Из леммы 8 следует, что для любого $c \in [1,\infty)$ найдутся $\delta_0 > 0$ и $c_1 \in [1,\infty)$ такие, что для любого $0 < b \leqslant 1$

$$\sup \sup_{|t|\geqslant c_1} \left| \mathbf{E}_{\widetilde{G}} e^{it\langle \xi, e_{\lambda_F(\alpha)}\rangle} \right| \leqslant 1 - 1/c_1, \qquad (51)$$

где sup берется по всем $\widetilde{G} = \widetilde{G}^{(\lambda)}$, $\lambda = \lambda_G(\alpha+\beta)$, $G = F * \Phi_{b\Pi}$, $(F,\alpha) \in \mathscr{C}_1^0(c) \cap \mathscr{C}_2(c)$, $|\beta| \leqslant \delta_0$. Из последнего выведем более сильное утверждение

$$\sup \sup_{|\lambda|\geqslant c_1} \left| \mathbf{E}_{\widetilde{G}} e^{i(\xi,\lambda)} \right| \leqslant 1 - 1/c_1, \qquad (52)$$

где sup берется по тому же классу, что и в (51). Для доказательства (52) заметим, что $\widetilde{G} = \widetilde{F} * \widetilde{\Phi}_{b\Pi}$, где

$$\widetilde{F} = \widetilde{F}^{(\lambda)},\ \widetilde{\Phi}_{b\Pi} = (\widetilde{\Phi}_{b\Pi})^{(\lambda)},\ \lambda = \lambda_G(\alpha+\beta).$$

Заметим еще, что функция

$$\mathbf{E}_{\widetilde{F}} e^{i(\lambda,\xi)}$$

равномерно непрерывна по $\lambda \in R^k$ и $\widetilde{F}$ таким, что $\mathbf{E}_{\widetilde{F}}|\xi| \leqslant c_1$. Поэтому в силу (51) найдется $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\sup\left\{ \left| \mathbf{E}_{\widetilde{G}} e^{i(\lambda,\xi)} \right| :\ |\langle \lambda, e\rangle| \geqslant c_1, |\lambda\Pi| \leqslant \delta_0 \right\} \leqslant \sup\left\{ \left| \mathbf{E}_{\widetilde{F}} e^{i(\lambda,\xi)} \right| :\ |\langle \lambda, e\rangle| \geqslant c_1, |\lambda\Pi| \leqslant \delta_0 \right\} \leqslant 1 - 1/(2c_1).$$

Поскольку $\widetilde{\Phi}$ является гауссовским распределением на $R^k\Pi$, то для любого $\delta_0 > 0$ выполняется

$$\sup_{|\lambda\Pi|\geqslant\delta_0} \left| \mathbf{E}_{\widetilde{G}} e^{i(\lambda,\xi)} \right| \leqslant \sup_{|\lambda\Pi|\geqslant\delta_0} \left| \mathbf{E}_{\widetilde{\Phi}} e^{i(\lambda,\xi)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|\lambda\Pi|\geqslant\delta_0} e^{-\frac{b^2|\lambda\Pi|^2}{2}} = e^{-\frac{b^2}{2}\delta_0^2}.$$

Соотношение (52) доказано. Из (52), очевидно, вытекают утверждения 4) и 6) леммы 5. Действительно, если 4) (или 6)) не выполнено, то найдется $\tilde{G}$ такое, что для него $\sigma_1^2(\tilde{G}) = 0$ (или $r_{\tilde{G}}(t) = 1$), что противоречит (52). Утверждение 5) следует из того, что распределения $\tilde{G}$ (после центрирования) удовлетворяют равномерному варианту условия Крамера G_3 (ср. с (42)):

$$\sup_{|\lambda| \leqslant 1/c_1} \varphi_{\tilde{G}}(\lambda) e^{-(\lambda, \alpha+\beta)} \leqslant 1 + c_1 \tag{53}$$

для некоторого $c_1 = c_1(c) < \infty$. Поэтому у $\tilde{G}$ равномерно ограничены все центральные абсолютные моменты. Для доказательства утверждения 3) достаточно вычислить третьи производные функции $\Lambda_G(\alpha)$, дифференцируя дважды тождество

$$\varphi'_G(\lambda_G(\alpha)) = \varphi_G(\lambda_G(\alpha))\alpha.$$

При этом окажется, что третьи производные $\Lambda_G(\alpha)$ выражаются через производные функции $\varphi_G(\lambda)$ порядка не выше третьего и равномерно ограничены. Лемма 5 доказана.

10. Доказательство леммы 2. Пусть $\alpha \in \Omega(e, D)$, $|d| \leqslant \varepsilon_1 \equiv t/(2|D| + 2t)$. Докажем, что

$$\alpha + \frac{d\Pi}{\sqrt{n}} + \frac{t}{n} e \in \Omega(e, D + tE). \tag{54}$$

Для этого оценим величину

$$A \equiv \alpha e^{\mathrm{T}} + \frac{t}{n} + \left(\alpha\Pi + \frac{d\Pi}{\sqrt{n}}\right)\frac{D + tE}{2}\left(\alpha\Pi + \frac{d\Pi}{\sqrt{n}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Поскольку

$$A = \alpha e^{\mathrm{T}} + \frac{t}{n} + \alpha\Pi\frac{D}{2}\Pi\alpha^{\mathrm{T}} + \frac{\alpha\Pi D\Pi d^{\mathrm{T}}}{\sqrt{n}} + \frac{d\Pi D\Pi d^{\mathrm{T}}}{2n} + t\frac{|\alpha\Pi|^2}{2} +$$
$$+ t\frac{\alpha\Pi(d\Pi)^{\mathrm{T}}}{\sqrt{n}} + t\frac{|d\Pi|^2}{2n},$$

в силу неравенства ($\alpha \in \Omega(e, D)$)

$$\alpha e^{\mathrm{T}} + \alpha\Pi\frac{D}{2}\Pi\alpha^{\mathrm{T}} > 0$$

получаем

$$A \geqslant B \equiv \frac{t}{n} + \frac{ta^2}{2} - \frac{tab}{\sqrt{n}} - \frac{ab|D|}{\sqrt{n}} - \frac{b^2|D|}{n},$$

где $a = |\alpha\Pi|$, $b = |d\Pi|$. Квадратный трехчлен по переменной a

$$B = \frac{a^2 t}{2} + a\left(-\frac{tb}{\sqrt{n}} - \frac{b|D|}{\sqrt{n}}\right) + \frac{t}{n} - \frac{b^2|D|}{n}$$

будет больше 0 для всех $a \in R^1$, если его дискриминант

$$\Delta = \left(\frac{tb}{\sqrt{n}} + \frac{b|D|}{\sqrt{n}}\right)^2 - 4\frac{t}{2}\left(\frac{t}{n} - \frac{b^2|D|}{n}\right)$$

меньше нуля. Для этого достаточно, чтобы выполнялись два неравенства:

$$(tb + b|D|)^2 < t, \quad 2b^2|D| < t^2. \tag{55}$$

Очевидно, что при

$$|d| \leqslant \varepsilon_1$$

в силу того, что

$$b = |d\Pi| \leqslant |d| \leqslant \varepsilon_1,$$

неравенства (55) выполняются. Значит, $A > 0$ и соотношение (54) доказано.

Пусть, далее, $D^* = D - tE$, так что $D = D^* + tE$. В силу уже доказанного соотношения (54) получаем, что для $|d| \leqslant \varepsilon_1^* = t/(2t + 2|D^*|)$ справедливо

$$-\frac{d\Pi}{\sqrt{n}} + \Omega(e, D^*) \subseteq -\frac{t}{n} e + \Omega(e, D^* + tE).$$

Это соотношение эквивалентно утверждению 2) при $\delta = \infty$:

$$\frac{t}{n} e + \Omega(e, D - tE) \subseteq \frac{d\Pi}{\sqrt{n}} + \Omega(e, D).$$

Заметим еще, что $|D^*| \leqslant |D| + t$, так что число ε (см. формулировку леммы 2) не больше, чем ε_1 и ε_1^*. Для того чтобы закончить доказательство пунктов 1) и 2) леммы 2, достаточно показать, что:

1) для $\delta > 0$

$$\frac{d\Pi}{\sqrt{n}} + U_\delta(0) \subseteq -\frac{t}{n} e + U_{\delta+\beta/\sqrt{n}}(0); \tag{56}$$

2) для $\delta > \beta\sqrt{n}$

$$\frac{t}{n} e + U_{\delta-\beta/\sqrt{n}}(0) \subseteq \frac{d\Pi}{\sqrt{n}} + U_\delta(0), \tag{57}$$

где $|d| \leqslant \varepsilon$, $U_\delta(0) = \{\beta\colon |\beta| < \delta\}$. Соотношения (56) и (57) проверяются очевидным образом; утверждения 1) и 2) доказаны.

Поскольку утверждение 3) леммы 2 при $\delta = \infty$ имеет вид

$$te + \Omega(e, D) \subseteq \Omega(e, D) \subseteq -te + \Omega(e, D),$$

то достаточно проверить, что

$$te + U_{\delta-t}(0) \subseteq U_\delta(0) \subseteq -te + U_{\delta+t}(0)$$

для $\delta > t$. Это соотношение очевидно, поэтому утверждение 3) доказано. Лемма 2 доказана.

11. Доказательство леммы 3. Его достаточно провести для случая $|\lambda_F(\alpha)| \geqslant 1/c$, потому что случай $|\lambda_F(\alpha)| \to 0$ сводится к случаю $|\lambda_F(\alpha)| = 1$ с помощью рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 1.

Обозначим

$$\Lambda_G(\alpha, \pm\varepsilon) = \Lambda_G(\alpha, \pm\varepsilon, \beta) \equiv \Lambda_G(\alpha) + \langle \beta - \alpha, \lambda_G(\alpha)\rangle +$$
$$+ (\beta - \alpha)\frac{(\Lambda_G''(\alpha) \mp \varepsilon E)}{2}(\beta - \alpha)^{\mathrm{T}}.$$

В силу формулы Тейлора и леммы 5 для любых $c \in [1, \infty)$, $b \in (0, 1]$, $\varepsilon \in (0, 1]$ найдутся непрерывные функции $\delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, b, c)$ и $\Delta(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon, b, c)$, $\Delta(0) = 0$, $\Delta(\varepsilon)\uparrow$, такие, что при $|\beta - \alpha| \leqslant \delta(\varepsilon)$ выполняется

$$-\Lambda_G(\alpha, -\varepsilon, \beta) \leqslant -\Lambda_G(\beta) \leqslant -\Lambda_G(\alpha, +\varepsilon, \beta), \tag{58}$$

$$(1 - \Delta(\varepsilon))\,|\Lambda_G''(\alpha, \pm\varepsilon, \beta)^{1/2}| \leqslant |\Lambda_G''(\beta)|^{1/2} \leqslant (1 + \Delta(\varepsilon))\,|\Lambda_G''(\alpha, \pm\varepsilon, \beta)|^{1/2}$$

для всех $G = F * \Phi_{b\Pi}$, где пара (F, α) лежит в рассматриваемом в доказываемой лемме классе.

Для $0 < \delta_1 < \delta_2$ обозначим

$$\Omega^*(\delta_1, \delta_2) = \Omega(e, D, \delta_2) \setminus \Omega(e, D, \delta_1).$$

Тогда для любых $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливо

$$(1 - \Delta(\varepsilon))\, R_n\Big(\Lambda_G(\alpha, -\varepsilon), n\alpha + ae + n\Omega\Big(e, D, \delta(\varepsilon) - \frac{c}{n}\Big)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant R_n(\Lambda_G, n\alpha + ae + n\Omega)(e, D, \delta(\varepsilon_0)) \leqslant (1 + \Delta(\varepsilon)) R_n\Big(\Lambda_G(\alpha, +\varepsilon), n\alpha +$$

$$+ ae + n\Omega\Big(e, D, \delta(\varepsilon) + \frac{c}{n}\Big)\Big) + (1 + \Delta(\varepsilon_0)) R_n\Big(\Lambda_G(\alpha, +\varepsilon_0), n\alpha +$$

$$+ ae + n\Omega^*\Big(\delta(\varepsilon) + \frac{c}{n}, \delta(\varepsilon_0) + \frac{c}{n}\Big)\Big).$$

Поскольку введенные нами функции $\Lambda_G(\alpha, \pm\varepsilon, \beta)$ как функции аргумента β отличаются на константу от функций уклонения гауссовских случайных векторов, мы свели задачу к гауссовскому случаю. Лемма 3 будет следовать из утверждения леммы 9.

Лемма 9. *Для любого $c \in [1, \infty)$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $b \in (0, \delta_0]$ выполняется*

$$R_n\left(\Lambda_{\Phi * \Phi_{b\Pi}}, n\alpha + ae + n\Omega(e, D, \delta)\right) = e^{-n\Lambda_\Phi(\alpha) + a} \frac{\chi\left(\widetilde{B}_\Phi + b\Pi, D, e\right)}{\sqrt{2\pi n}\, \sigma_\Phi(\lambda)} (1 + \varepsilon_n),$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \sup |\varepsilon_n| = 0,$$

sup *берется по классу* $(\Phi, \alpha) \in \mathscr{C}(c)$, $|a| \leqslant c$, $|\lambda_\Phi(\alpha)| = 1$, Φ — *гауссовское распределение в* R^k.

Для доказательства леммы 9 нам понадобится

Лемма 10. *Пусть $B \geqslant 0$ — ковариационная матрица,*

$$e \in R^k,\ |e| = 1,\ \Pi = E - e^{\mathrm{T}} e,\ eBe^{\mathrm{T}} > 0,$$

$$\widetilde{B} = \Pi\left(B - \frac{Be^{\mathrm{T}}eB}{eBe^{\mathrm{T}}}\right)\Pi,$$

$\Lambda(\alpha) = \Lambda_{\Phi_B}(\alpha)$ и $\widetilde{\Lambda}(\alpha) = \Lambda_{\Phi_{\widetilde{B}}}$ — *функции уклонений, отвечающие гауссовским распределениям* Φ_B *и* $\Phi_{\widetilde{B}}$ *соответственно. Тогда для всех* $\alpha \in R^k\Pi$

$$\widetilde{\Lambda}(\alpha) = \Lambda(\alpha), \tag{59}$$

и для всех $\alpha \notin R^k\Pi$

$$\widetilde{\Lambda}(\alpha) = \infty. \tag{60}$$

Доказательство. Поскольку случайный вектор $\eta \in \Phi_{\widetilde{B}}$ сосредоточен на подпространстве $R^k\Pi$, то в силу перечисленных в § 1 свойств функции уклонений справедливо $\widetilde{\Lambda}(\alpha) = \infty$ при $\alpha \notin R^k\Pi$, т. е. (60) имеет место.

Для доказательства (59) предположим сначала, что матрица B не вырождена, т. е. существует обратная матрица $\Gamma = B^{-1}$ и, стало быть,

$$\Lambda(\alpha) = \frac{\alpha\Gamma\alpha^{\mathrm{T}}}{2}.$$

Проверяя непосредственно, что

$$\widetilde{B}\Pi\Gamma\Pi = \Pi\Gamma\Pi\widetilde{B} = \Pi,$$

убеждаемся, что в этом случае (59) имеет место. Если же $\det B = 0$, то рассмотрим невырожденную матрицу

$$B^{(\varepsilon)} = B + \varepsilon\Pi.$$

Пусть $\Lambda^{(\varepsilon)}(\alpha)$ и $\widetilde{\Lambda}^{(\varepsilon)}(\alpha)$ есть соответственно функции уклонений для гауссовских распределений со средними 0 и ковариационными матрицами $B^{(\varepsilon)}$ и $\widetilde{B}^{(\varepsilon)}$. Заметим еще, что по построению

$$\widetilde{B}^{(\varepsilon)} = \widetilde{B} + \varepsilon\Pi.$$

В силу уже доказанного для $\alpha \in R^k\Pi$ и любого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\widetilde{\Lambda}^{(\varepsilon)}(\alpha) = \Lambda^{(\varepsilon)}(\alpha).$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$ и используя лемму 1.6, получаем (59) в общем случае. Лемма 10 доказана.

Следствие 1. *Если $B > 0$, то для $\alpha \in R^k\Pi$*

$$\Lambda_{\Phi_{\widetilde{B}}}(\alpha) = \frac{\alpha\Pi\Gamma\Pi\alpha^{\mathrm{T}}}{2}, \tag{61}$$

где $\Gamma = B^{-1}$.

Доказательство очевидно.

Следствие 2. *Пусть $B > 0$, $\Gamma = B^{-1}$, $\lambda = |\lambda_{\Phi_B}(\alpha)| > 0$, $(\Phi_B, \alpha, D) \in \mathscr{C}(c)$. Тогда*

$$\frac{|\Gamma|^{1/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{\Omega(e,D)} e^{-\lambda\langle\beta,e\rangle - \frac{\beta\Pi\Gamma\Pi\beta^{\mathrm{T}}}{2}} d\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\lambda\sigma} \chi\left(\widetilde{B}(\alpha), \lambda D, e\right), \tag{62}$$

где $\sigma^2 = eBe^{\mathrm{T}}$.

Доказательство. Левую часть (62) можно представить в виде

$$I = \frac{|\Gamma|^{1/2}}{\sqrt{2\pi}\,|\Pi\Gamma\Pi|_0^{1/2}} \int\limits_{\left\{\langle e,\beta\delta\rangle > -\frac{\beta\Pi\Gamma\Pi\beta}{2}\right\}} e^{-\lambda\langle\beta,e\rangle} \int f(\beta\Pi)\, d(\beta\Pi)\, d(\beta\Pi_0), \tag{63}$$

где $\Pi_0 = E - \Pi$, $f(\beta\Pi) = (2\pi)^{-(k-1)/2} |\Pi\Gamma\Pi|_0^{-1/2} e^{-\frac{\beta\Pi\Gamma\Pi\beta^{\mathrm{T}}}{2}}$ — плотность на $R^k\Pi$ случайного вектора η, $\eta \in \Phi_{\widetilde{B}}$ (через $|\Pi\Gamma\Pi|_0$ мы обозначили произведение ненулевых собственных чисел матрицы $\Pi\Gamma\Pi$). Поэтому, выполняя интегрирование по частям в (63), получаем, что

$$I = \frac{1\,|\Gamma|^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}\,\lambda\,|\Pi\Gamma\Pi|_0^{1/2}} \chi\left(\widetilde{B}, \lambda D, e\right). \tag{64}$$

Нам осталось убедиться, что

$$\frac{|\Gamma|^{1/2}}{|\Pi\Gamma\Pi|_0^{1/2}} = \frac{1}{\sigma_1}, \tag{65}$$

где $\sigma_1^2 = eBe^{\mathrm{T}}$. С одной стороны, легко видеть, что $\chi(\widetilde{B}, 0, e) = 1$. Вычисляя при $D = 0$ интеграл I, получаем, что

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda\beta}\, d\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1\lambda}.$$

Поэтому в силу (64) равенство (65) доказано. Следствие 2 доказано.

Нам понадобится еще техническая

Лемма 11. *Для любого $c \in [1, \infty)$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $b \in (0, \delta_0]$ последовательность*

$$\varepsilon_n \equiv |\Gamma|^{1/2} (2\pi)^{-k/2} \int\limits_{\Omega(e,D) \setminus \Omega(e,D,\ln n)} e^{-\langle\beta,e\rangle(1\pm\delta_0) - \frac{\beta\Pi\Gamma\Pi\beta^{\mathrm{T}}}{2}} d\beta$$

удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \sup |\varepsilon_n| = 0,$$

где sup берется по классу $\Gamma = (B + b\Pi)^{-1}$, $|\lambda_{\Phi_B}(\alpha)| = 1$, $(\Phi_B, \alpha, D) \in \mathscr{C}(c)$

Доказательство. Легко видеть, что для $\eta \in \Phi_{B+b\Pi}$

$$\varepsilon_n \leqslant (2\pi)^{-1/2} \left(\sigma_1^2(1-\delta_0)\right)^{-1} \mathrm{E}\left(\left(e^{(1+\delta_0)\eta\Pi\frac{D}{2}\Pi\eta^{\mathrm{T}}} + e^{-(1+\delta_0)\eta\Pi\frac{D}{2}\Pi\eta^{\mathrm{T}}}\right);\ A_n\right), \tag{66}$$

где события A_n определяются как

$$\left\{|\eta\Pi| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\ln n\right\} \cup \left\{\left|\eta\Pi\frac{D}{2}\Pi\eta^{\mathrm{T}}\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\ln n\right\}.$$

Заметим, что для $(\Phi_B, \alpha, D) \in \mathscr{C}(c)$, $|\lambda_{\Phi_B}(\alpha)| = 1$ выполняется

$$\chi\left(\widetilde{B} + b\Pi, tD, e\right) = \frac{|\Pi((B + b\Pi)^{-1} - tD)\Pi|_0^{-1/2}}{|\widetilde{B} + b\Pi|_0^{1/2}};$$

с другой стороны,

$$\chi(\widetilde{B} + b\Pi, tD, e) = \chi(\widetilde{B}, tD, e)\chi(b\Pi, tD, e).$$

Поэтому для любого $c \in [1, \infty)$ найдутся $c_1 < \infty$ и $\delta_0 > 0$ такие, что при $|b| \leqslant \delta_0$ выполняется

$$|\Pi(B + b\Pi - tD)\Pi|_0^{1/2} \leqslant |\widetilde{B} + b\Pi|_0^{1/2} c_1.$$

Для любого $0 < b \leqslant \delta_0$ найдется $c_2 < \infty$, зависящее только от b и c_1, такое, что

$$|\widetilde{B} + b\Pi|_0^{-1/2} c_1 \leqslant c_2.$$

Стало быть, найдется $\delta_1 > 0$, зависящее только от c и b, такое, что

$$\Pi((\widetilde{B} + b\Pi)^{-1} - D)\Pi \geqslant \delta_1\Pi.$$

Из последнего, очевидно, следует, что найдется $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, зависящее только от c и b, такое, что для $|t - 1| \leqslant \delta_2$ выполняется

$$\Pi((\widetilde{B} + b\Pi)^{-1} - tD) \geqslant \delta_2\Pi.$$

Из последнего, в силу (66), и следует доказательство леммы 11.

Доказательство леммы 9. Пусть $G = \Phi_B * \Phi_{b\Pi}$, $\Lambda''_G(0) \equiv \Gamma$. Поскольку $\lambda_{\Phi_B}(\alpha) = e$, то (тут играет роль то обстоятельство, что проектор Π строится по вектору e)

$$\lambda_G(\alpha) = \lambda_{\Phi_B}(\alpha) = e, \Lambda_G(\alpha) = \Lambda_{\Phi_B}(\alpha).$$

Обозначим

$$R \equiv R_n(\Lambda_G, n\alpha + ae + n\Omega(e, D, \delta)) = (2\pi n)^{-k/2}|\Gamma|^{1/2} \times$$

$$\times \int\limits_{n\alpha + ae + \Omega(e, D, \delta)} e^{-n\Lambda_G(\beta/n)}\, d\beta.$$

Замена $\beta' = n\alpha + ae + \sqrt{n}\,\beta$ позволяет написать

$$R_n = (2\pi)^{-k/2} e^{-\Lambda_G(\alpha)}|\Gamma|^{1/2} \times$$

$$\times \int\limits_{\sqrt{n}\,\Omega(e, D, \delta)} e^{-n\left[\Lambda_G\left(\alpha - \frac{a}{n}e + \frac{\beta}{n}\right) - \Lambda_G(\alpha)\right]} d\beta \equiv e^{-n\Lambda_G(\alpha)} I_n.$$

Поскольку

$$\Lambda_G(\alpha + \beta) - \Lambda_G(\alpha) = \langle e, \beta\rangle + \frac{\beta\Gamma\beta^{\mathrm{T}}}{2},$$

то

$$I_n = e^{-a}\frac{|\Gamma|^{1/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{\sqrt{n}\,\Omega(e, D, \delta)} e^{-\sqrt{n}(\beta, e) - \beta\frac{\Gamma}{2}\beta^{\mathrm{T}}} d\beta \equiv e^{-\alpha} J_n.$$

В интеграле J_n замена

$$\sqrt{n}\,\beta\Pi_0 = \beta'\Pi_0, \quad \beta\Pi = \beta'\Pi$$

(где $\Pi_0 = E - \Pi$) позволяет получить

$$J_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{|\Gamma|^{1/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{\Omega(e,D)\cap\{|\beta\Pi_0|^2+|\beta\Pi|^2 n\leqslant n^2\delta\}} e^{-(\beta,e)-\beta\Pi\frac{\Gamma}{2}\Pi\beta^{\mathrm{T}}-a(\beta)}\,d\beta \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} K_n,$$

где

$$a_n(\beta) \equiv -\frac{\beta\Pi_0\Gamma\Pi_0\beta^{\mathrm{T}}}{2} - \frac{\beta\Pi_0\Gamma\Pi\beta^{\mathrm{T}}}{\sqrt{n}}.$$

Обозначим

$$K(T) = \frac{|\Gamma|^{1/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{\Omega(e,D,T)} e^{-(\beta,e)-\frac{\beta\Pi\Gamma\Pi\beta^{\mathrm{T}}}{2}}\,d\beta.$$

Поскольку при $|\beta| \leqslant \ln n$ выполняется

$$|a_n(\beta)| \leqslant c_1 \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}},$$

где $\hat{c}_1 = c_1(c, b)$ зависит только от c и b, для K_n можно предложить такую оценку снизу:

$$K_n \geqslant e^{-c_1\frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}} K(\ln n). \tag{67}$$

На множестве $\{|\beta\Pi| \leqslant \sqrt{n}\,\delta_0\}$ выполняется

$$|a_n(\beta)| \leqslant c_1(c, b)\,|\beta\Pi_0|\,\delta_0,$$

поэтому справедлива следующая оценка сверху для K_n:

$$K_n \leqslant K(\ln n)\, e^{c_1\frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}} + \frac{|\Gamma|^{1/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{\Omega(e,D)\setminus\Omega(e,D,\sqrt{n}\,\delta_0)} e^{-(\beta,e)+c_1\delta_0|\beta e^{\mathrm{T}}|-\beta\Pi\frac{\Gamma}{2}\Pi\beta^{\mathrm{T}}}\,d\beta. \tag{68}$$

Применение леммы 11 к оценкам (67) и (68) позволяет закончить доказательство: последовательность $K(\ln n)$ в (67) и (68) сходится при $n\to\infty$ к $K(\infty)$ равномерно по рассматриваемому классу, а интеграл в правой части (68) равномерно мал. Лемма 9 доказана.

ГЛАВА II

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ТОЧКИ МАКСИМУМА СУММ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ И СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ S и I

§ 5. БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

1. Постановка задачи. Обозначим $C(\Theta)$ линейное пространство непрерывных вещественных функций $f = f(\theta)$, $\theta\in\Theta$, где $\Theta\subseteq R^k$ — непустое замкнутое ограниченное подмножество k-мерного евклидова пространства R^k. Множество Θ назовем параметрическим. Введем в $C(\Theta)$ норму $\|f\| = \max\limits_{\theta\in\Theta}|f(\theta)|$ и обозначим $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{C(\Theta)}$ борелевскую σ-алгебру

В интеграле J_n замена

$$\sqrt{n}\,\beta\Pi_0 = \beta'\Pi_0,\quad \beta\Pi = \beta'\Pi$$

(где $\Pi_0 = E - \Pi$) позволяет получить

$$J_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{|\Gamma|^{1/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{\Omega(e,D)\cap\{|\beta\Pi_0|^2+|\beta\Pi|^2 n\leqslant n^2\delta\}} e^{-(\beta,e)-\beta\Pi\frac{\Gamma}{2}\Pi\beta^{\mathrm{T}}-a(\beta)}\,d\beta \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}K_n,$$

где

$$a_n(\beta) \equiv -\frac{\beta\Pi_0\Gamma\Pi_0\beta^{\mathrm{T}}}{2} - \frac{\beta\Pi_0\Gamma\Pi\beta^{\mathrm{T}}}{\sqrt{n}}.$$

Обозначим

$$K(T) = \frac{|\Gamma|^{1/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{\Omega(e,D,T)} e^{-(\beta,e)-\frac{\beta\Pi\Gamma\Pi\beta^{\mathrm{T}}}{2}}\,d\beta.$$

Поскольку при $|\beta| \leqslant \ln n$ выполняется

$$|a_n(\beta)| \leqslant c_1\frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}},$$

где $c_1 = c_1(c, b)$ зависит только от c и b, для K_n можно предложить такую оценку снизу:

$$K_n \geqslant e^{-c_1\frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}} K(\ln n). \tag{67}$$

На множестве $\{|\beta\Pi| \leqslant \sqrt{n}\,\delta_0\}$ выполняется

$$|a_n(\beta)| \leqslant c_1(c, b)\,|\beta\Pi_0|\,\delta_0,$$

поэтому справедлива следующая оценка сверху для K_n:

$$K_n \leqslant K(\ln n)\,e^{c_1\frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}} + \frac{|\Gamma|^{1/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{\Omega(e,D)\setminus\Omega(e,D,\sqrt{n}\,\delta_0)} e^{-(\beta,e)+c_1\delta_0|\beta e^{\mathrm{T}}|-\beta\Pi\frac{\Gamma}{2}\Pi\beta^{\mathrm{T}}}\,d\beta. \tag{68}$$

Применение леммы 11 к оценкам (67) и (68) позволяет закончить доказательство: последовательность $K(\ln n)$ в (67) и (68) сходится при $n \to \infty$ к $K(\infty)$ равномерно по рассматриваемому классу, а интеграл в правой части (68) равномерно мал. Лемма 9 доказана.

ГЛАВА II

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ТОЧКИ МАКСИМУМА СУММ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ И СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ S и I

§ 5. БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

1. Постановка задачи. Обозначим $C(\Theta)$ линейное пространство непрерывных вещественных функций $f = f(\theta)$, $\theta \in \Theta$, где $\Theta \subseteq R^k$ — непустое замкнутое ограниченное подмножество k-мерного евклидова пространства R^k. Множество Θ назовем параметрическим. Введем в $C(\Theta)$ норму $\|f\| = \max\limits_{\theta\in\Theta}|f(\theta)|$ и обозначим $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{C(\Theta)}$ борелевскую σ-алгебру подмножеств $A \subseteq C(\Theta)$. Пусть $a(\theta)$, $a_1(\theta)$, $a_2(\theta)$, …— независимые случайные элементы (случайные поля) с общим распределением $\Pi = \Pi(A)$ в измеримом пространстве $(C(\Theta), \mathscr{B})$. Обозначим

$$A_n(\theta) = a_1(\theta) + \ldots + a_n(\theta), \ \theta \in \Theta.$$

Точкой максимума поля $A_n(\theta)$ назовем такой вектор $\theta_n^+ \in \Theta$, на котором достигается максимум $A_n(\theta)$:

$$A_n(\theta_n^+) = \max_{\theta \in \Theta} A_n(\theta). \tag{1}$$

В задачах математической статистики (а именно на них ориентирована настоящая работа) поля $A_n(\theta)$ могут возникать следующим образом. Пусть задано семейство вероятностных распределений $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ и пусть $X_n = x_1 + \ldots + x_n$ — выборка объема n из генеральной совокупности $\mathbf{P}_\theta$. Предположим, что распределение $\mathbf{P}_\theta$ абсолютно непрерывно относительно фиксированной σ — конечной меры μ,

$$f_\theta(x) = \frac{d\mathbf{P}_\theta}{d\mu}(x).$$

Положив

$$a_i(\theta) = \ln f_\theta(x_i), \ 1 \leqslant i \leqslant n, \ \theta \in \Theta, \tag{2}$$

имеем

$$A_n(\theta) = a_1(\theta) + \ldots + a_n(\theta) = \ln \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

— логарифмическую функцию правдоподобия, изучение которой играет важную роль для широкого класса задач математической статистики. В частности, оценка максимального правдоподобия θ_n^* будет точкой максимума θ_n^+ функции $A_n(\theta)$, если в качестве $A_n(\theta)$ взять логарифмическую функцию правдоподобия.

Вернемся к суммам произвольных полей $a_i(\theta)$. В тех случаях, когда max в (1) достигается более чем в одной точке, вектор θ_n^+ определен неоднозначно. Это обстоятельство, однако, не мешает задать «верхние» и «нижние» распределения вектора θ_n^+ формулами

$$\mathbf{P}_+(\theta_n^+ \in B) \equiv \mathbf{P}\left(\max_{\theta \in B} A_n(\theta) \geqslant \max_{\theta \in \Theta \setminus B} A_n(\theta)\right), \tag{3}$$

$$\mathbf{P}_-(\theta_n^+ \in B) \equiv \mathbf{P}\left(\max_{\theta \in B} A_n(\theta) > \max_{\theta \in \Theta \setminus B} A_n(\theta)\right).$$

Введем в рассмотрение случайное множество

$$\Theta_n^+ = \left\{\theta \in \Theta: \ A_n(\theta) = \max_{\theta \in \Theta} A_n(\theta)\right\}$$

— совокупность всех точек максимума поля $A_n(\theta)$. Поскольку поле $A_n(\theta)$ непрерывно на Θ, справедливо

$$\mathbf{P}_+(B) \equiv \mathbf{P}_+(\theta_n^+ \in B) = \mathbf{P}(\Theta_n^+ \cap [B] \neq \varnothing),$$

$$\mathbf{P}_-(B) \equiv \mathbf{P}_-(\theta_n^+ \in B) = \mathbf{P}(\Theta_n^+ \subseteq (B)), \tag{4}$$

где $[B]$ и (B) есть замыкание и внутренность множества B соответственно. Из (4) следует, что справедливо неравенство

$$\mathbf{P}_-(B) \leqslant \mathbf{P}_+(B).$$

Легко видеть, что функции множеств $\mathbf{P}_\pm(B)$ не являются, вообще говоря, вероятностными мерами, так как отсутствует свойство аддитивности. Нетрудно убедиться, что функции $\mathbf{P}_\pm(B)$ удовлетворяют следующему свойству полуаддитивности: для любого набора непересекающихся борелевских множеств $B_1, \ldots, B_N \subseteq \Theta$ выполняется

$$\mathbf{P}_+\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \leqslant \mathbf{P}_+(B_1) + \ldots + \mathbf{P}_+(B_N),$$

$$\mathbf{P}_-\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \geqslant \mathbf{P}_-(B_1) + \ldots + \mathbf{P}_-(B_N).$$

Тем не менее мы сохраним за функциями $\mathbf{P}_\pm$ название вероятность, а вектор θ_n^+ (на самом деле это может быть множество Θ_n^+) будем называть *точкой максимума* (ТМ) случайного поля $A_n(\theta)$. Все последующие утверждения, относящиеся к асимптотическому поведению $\mathbf{P}_\pm(\theta_n^+ \in B)$ выглядят одинаково для $\mathbf{P}_+$ и P_- (это означает, что эффектом неоднозначности θ_n^+ можно пренебречь). Поэтому мы иногда будем опускать нижние индексы $\pm$, используя одно обозначение $\mathbf{P}(\theta_n^+ \in B)$

2. Содержание главы II. В § 6 настоящей главы будет изучена грубая асимптотика вероятностей б. у. случайного вектора θ_n^+, т. е. асимптотическое поведение при $n \to \infty$ последовательности

$$\ln \mathbf{P}_\pm(\theta_n^+ \in B),\ B \subseteq \Theta, \tag{5}$$

в тех случаях, когда вероятности $\mathbf{P}_\pm(\theta_n^+ \in B)$ стремятся к 0. В широких предположениях поведение последовательности (5) описывается соотношением

$$\ln \mathbf{P}_\pm(\theta_n^+ \in B) \sim -nR(B), \tag{6}$$

где

$$R(B) = \inf_{\theta \in B} B(\theta) \tag{7}$$

и функция $R(\theta)$: $\Theta \to [0, \infty]$ определяется следующим образом. Обозначим $\mathscr{P}$ класс всех конечных мер μ на борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}_\Theta$ множества Θ. Тогда

$$R(\theta) = -\inf_{\mu \in \mathscr{P}} \ln \mathbf{E} \exp\left\{\int_\Theta (a(\theta) - a(t))\, \mu(dt)\right\}. \tag{8}$$

Таким образом, в силу (6), (7) грубая асимптотика для последовательности θ_n^+ выглядит примерно так же (по крайней мере, внешне), как для последовательности сумм $S_n|n$ случайных векторов (см. гл. I, § 2). Заметим, что линейное (по n) убывание последовательности (6) вытекает и из общих теорем о больших уклонениях сумм A_n/n случайных векторов из линейного нормированного пространства $C(\Theta)$ (см., например, [19, 20]). Действительно, $\mathbf{P}_\pm$ — вероятности события $\{\theta_n^+ \in B\}$ в силу (3) можно представить в виде

$$\mathbf{P}\left(\frac{A_n}{n} \in G_\pm(B)\right),$$

где множество $G_+(B) \subseteq C(\Theta)$ определяется равенством

$$G_+(B) = \left\{f \in C(\Theta)\colon \sup_{\theta \in B} f(\theta) \geqslant \sup_{\theta \in \Theta \setminus B} f(\theta)\right\}. \tag{9}$$

Аналогично задается $G_-(B)$ путем замены в (9) символа $\geqslant$ на $>$. Поэтому формальное применение теорем из [19] дает соотношение

$$\ln \mathbf{P}_\pm(\theta_n^+ \in B) = \ln \mathbf{P}\left(\frac{A_n}{n} \in G_\pm(B)\right) \sim -n \inf_{f \in G_\pm(B)} \Lambda(f), \tag{10}$$

где $\Lambda(f)$; $f \in C(\Theta)$ — есть функция уклонений банаховозначной случайной величины $a(\theta)$. Однако функция $\Lambda(f)$ определена в $C(\Theta)$, в то время как функция $R(\theta)$ из (6) — на множестве Θ. Так что соотношение (6) проще, удобнее и обозримее, чем (10) (в частности, класс множеств B, для которых верно (6), допускает более «конструктивное» описание, чем в (10)).

Общность формы грубых теорем о больших уклонениях точки максимума θ_n^+ и суммы S_n/n наводит на предположение, что и точные теоремы о больших уклонениях θ_n^+ (интегральные и локальные) удастся свести к аналогичным теоремам для специально подобранных сумм случайных векторов. Эта гипотеза не верна, так как функция $R(\theta)$ не обязана быть выпуклой в отличие от функции уклонений случайного вектора. Однако в широких предположениях (включающих ограничения на порядок больших уклонений) точные локальные и интегральные теоремы о больших уклонениях точки максимума θ_n^+ имеют такой же вид, что и для сумм S_n/n. (Об этом свидетельствуют и результаты работ [21—24], где получены варианты грубых и точных теорем об умеренно больших уклонениях оценки максимального правдоподобия θ_n^* векторного параметра θ). К сожалению, запланированный объем не позволяет включить эти теоремы в настоящую работу, и мы планируем посвятить им отдельную работу.

В § 7 получена точная интегральная теорема о больших уклонениях функционалов $S(A_n)$ и $I(A_n)$. Эти функционалы играют важную роль в задачах статистики, рассмотренных в гл. III.

Ранее в [25] для частного случая экспоненциальных семейств получены оценки вероятностей больших уклонений функционала S, правильные с точностью до степенного множителя.

§ 6. ГРУБЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ТОЧКИ МАКСИМУМА СУММ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

1. Основной результат. В настоящем параграфе будет изучена асимптотика последовательности

$$\ln \mathbf{P}_{\pm}\left(\theta_n^+ \in B\right),$$

где «вероятности» $\mathbf{P}_{\pm}$ и точка максимума θ_n^+ суммы случайных полей определены в § 5. Через $\omega(\varepsilon)$ обозначим модуль непрерывности случайного поля $a(\theta) \in C(\Theta)$:

$$\omega(\varepsilon) = \sup\{|a(\theta_1) - a(\theta_2)|:\ |\theta_1 - \theta_2| < \varepsilon,\ \theta_1,\ \theta_2 \in \Theta\}.$$

Это непрерывная случайная функция, неубывающая по ε, $\omega(0) = 0$. Рассмотрим следующее условие:

K. Для любого $N < \infty$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mathbf{E}\exp(N\omega(\varepsilon)) < \infty.$$

Легко видеть, что если для некоторого $\delta > 0$ выполняется

$$\mathbf{E}\exp(\delta\|a'\|) < \infty, \tag{1}$$

где

$$\|a'\| = \sup_{\theta \in \Theta} |a'(\theta)|,$$

то условие K выполнено. Разумеется, условие K шире, чем (1).

Наряду с функцией $(a^\theta = a^\theta(t) \equiv a(\theta) - a(t))$

$$R(\theta) = -\inf_{\mu \in \mathscr{P}} \ln \mathbf{E} e^{\langle a^\theta, \mu \rangle}, \tag{2}$$

введенной в § 5 (см. (8)), определим функцию

$$R_+(\theta) = -\lim_{\nu\downarrow 0} \inf_{\mu\in\mathscr{P}} \ln \mathbf{E} e^{\langle a^\theta,\mu\rangle - \nu(1,\mu)},$$

где $\langle a^\theta, \mu\rangle = \int\limits_\Theta a^\theta(t)\,\mu(dt)$. Очевидно, что $R_+(\theta) \geqslant R(\theta)$; можно построить пример, когда $R_+(\theta) = \infty$ в некоторой точке $\theta = \theta_0$, в то время, когда $R(\theta_0) < \infty$. Это возможно в том случае, когда в точке $\theta_0 \in \Theta$ inf в (2) достигается на мере $\mu_0 \in \mathscr{P}$, так что

$$R(\theta_0) = -\ln \mathbf{E} e^{\langle a^{\theta_0},\mu_0\rangle} = -\inf_{t>0} \mathbf{E} e^{t\langle a^{\theta_0},\mu_0\rangle},$$

при этом случайная величина $\xi = \left\langle a^{\theta_0}, \mu_0\right\rangle$ удовлетворяет соотношениям

$$p = \mathbf{P}(\xi = 0) > \theta,\quad \mathbf{P}(\xi > 0) = 0. \tag{3}$$

Тогда функция $R(\theta_0)$ совпадает с $\Lambda(0)$, в то время, когда функция $R_+(\theta_0)$ не меньше, чем $\Lambda(0+0)$, где $\Lambda(\alpha)$ есть функция уклонений случайной величины ξ. В силу известных свойств функции уклонений (см. § 1) получаем, что

$$R(\theta_0) = \Lambda(0) = -\ln p < \infty,$$
$$R_+(\theta_0) \geqslant \lim_{\nu\downarrow 0} \Lambda(\nu) = \infty.$$

Теорема 1 [26]. *Пусть выполнено условие K. Тогда*

1) *для любого замкнутого подмножества* $U \subseteq \Theta$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_+\left(\theta_n^+ \in U\right) \leqslant -R(U);$$

2) *для любого открытого подмножества* $U \subseteq \Theta$

$$\liminf_{n\to\theta} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_-\left(\theta_n^- \in U\right) \geqslant -R_+(U),$$

где $R_+(U) = \inf\{R_+(\theta) : \theta \in U\}$;

3) *функция* $R(\theta)$ *полунепрерывна на* Θ, *т. е. для любого* $\theta \in \Theta$

$$\lim_{\theta_1\to\theta,\,\theta_1\in\Theta} \inf R(\theta_1) \geqslant R(\theta).$$

Следствие 1. *Пусть выполнено условие K и измеримое множество* $\Omega \subseteq \Theta$ *удовлетворяет условиям*

$$0 < R([\Omega]) = R_+((\Omega)) < \infty,$$

где (Ω) *и* $[\Omega]$ — *внутренность и замыкание множества* Ω *соответственно. Тогда*

$$\ln \mathbf{P}_\pm\left(\theta_n^+ \in \Omega\right) \sim -nR(\Omega). \tag{4}$$

2. **Доказательство теоремы 1.** Оно основано на нескольких леммах, в которых предполагается выполненным условие K.

Лемма 1. *Для любого* $N < \infty$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E} e^{N\omega(\varepsilon)} = 1.$$

Доказательство следует из того, что с вероятностью 1 при $\varepsilon \to 0$ выполняется $N\omega(\varepsilon) \to 0$. Остается воспользоваться теоремой Лебега о сходимости под знаком математического ожидания.

Следующая лемма эквивалентна утверждению 3) теоремы 1.

Лемма 2. *Для любого* $\theta \in \Theta$

$$\limsup_{\theta_1\to\theta,\theta_1\in\Theta} e^{-R(\theta_1)} \leqslant e^{-R(\theta)}.$$

Доказательство. Легко видеть, что для любых $\mu \in \mathscr{P}$, $\theta_1 \in \Theta$

$$e^{-R(\theta)} \leqslant \mathbf{E} e^{\langle a^{\theta_1}, \mu \rangle} = \mathbf{E} e^{\langle a^{\theta}, \mu\rangle + \langle a^{\theta_1} - a^{\theta}, \mu \rangle},$$

поэтому для любых $p > 1$, $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, в силу неравенства Гельдера, получаем

$$e^{-R(\theta_1)} \leqslant \left(\mathbf{E} e^{p\langle a^{\theta}, \mu\rangle}\right)^{1/p} \left(\mathbf{E} e^{q\langle a^{\theta_1} - a^{\theta}, \mu\rangle}\right)^{1/q}.$$

В силу леммы 1 при $\theta_1 \to \theta$

$$\mathbf{E} e^{q\langle a^{\theta_1} - a^{\theta}, \mu\rangle} \to 1,$$

поэтому

$$\limsup_{\theta_1 \to \theta, \theta_1 \in \Theta} e^{-R(\theta_1)} \leqslant \left(\mathbf{E} e^{p\langle a^{\theta}, \mu\rangle}\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Поскольку в правой части (5) число $p > 1$ и мера $\mu \in \mathscr{P}$ произвольны, то, минимизируя правую часть (5) по мере $\mu \in \mathscr{P}$ и устремляя затем $p \to 1$, получаем требуемое.

Обозначим ε — окрестность точки θ в множестве Θ через

$$U_\varepsilon^\Theta(\theta) = \{\theta_1 \in \Theta, |\theta_1 - \theta| < \varepsilon\},$$

так что

$$U_\varepsilon^\Theta(\theta) = U_\varepsilon(\theta) \cap \Theta \subseteq U_\varepsilon(\theta) = \{\theta_1\colon |\theta_1 - \theta| < \varepsilon\}.$$

Лемма 3. *Для любого* $\theta \in \Theta$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_+ \left(\theta_n^+ \in U_\varepsilon^\Theta(\theta)\right) \leqslant -R(\theta).$$

Доказательство. Обозначим

$$A_n^\theta(t) \equiv a_1^\theta(t) + \ldots + a_n^\theta(t) = A_n(\theta) - A_n(t).$$

Поскольку для любых $\mu \in \mathscr{P}$ справедливо

$$\left\langle A_n^{\theta_n^+}, \mu \right\rangle \geqslant 0,$$

то

$$\mathbf{P}_+ \left(\theta_n^+ \in U_\varepsilon^\Theta(\theta)\right) \leqslant \mathbf{E}\left(e^{\left\langle A_n^{\theta_n^+}, \mu\right\rangle}; \ \theta_n^+ \in U_\varepsilon^\Theta(\theta)\right) \leqslant \mathbf{E} \exp\left(\langle A_n^\theta, \mu\rangle + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n \omega_i(\varepsilon) \langle 1, \mu\rangle\right) = \left[\mathbf{E} \exp\left(\langle a^\theta, \mu\rangle + \omega_1(\varepsilon)\langle 1, \mu\rangle\right)\right]^n,$$

где $\omega_i(\varepsilon)$ — модуль непрерывности функции a_i. В силу неравенства Гельдера для $N = \langle 1, \mu\rangle$

$$\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_+ \left(\theta_n^+ \in U_\varepsilon^\Theta(\theta)\right) \leqslant \frac{1}{p} \ln \mathbf{E}\, e^{p\langle a^\theta, \mu\rangle} + \frac{1}{q} \ln \mathbf{E}\, e^{qN\omega(\varepsilon)}.$$

В силу леммы 1 получаем

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_+ \left(\theta_n^+ \in U_\varepsilon^\Theta(\theta)\right) \leqslant \frac{1}{p} \ln \mathbf{E}\, e^{p\langle a^\theta, \mu\rangle}. \tag{6}$$

Минимизируя правую часть (6) по $p > 1$, $\mu \in \mathscr{P}$, получаем утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Справедливо утверждение* 1) *теоремы* 1.

Доказательство. В силу леммы 3 для любого $\theta \in U$ и любого $\delta > 0$ найдется число $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \theta)$ такое, что

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_+ \left(\theta_n^+ \in U_\varepsilon^\Theta(\theta)\right) \leqslant -R(\theta) + \delta. \tag{7}$$

Совокупность множеств

$$U_\varepsilon(\theta)=\{\theta_1\in R^k:\ |\theta_1-\theta|<\varepsilon\},\ \theta\in U,\ \varepsilon=\varepsilon(\delta,\theta)$$

образует открытое покрытие множества U. Поскольку U ограничено и замкнуто, можно выбрать конечное подпокрытие $U_{\varepsilon_i}(\theta_i)$; $i=1,\ldots,N$. Очевидно, далее, что набор $U^{\Theta}_{\varepsilon_i}(\theta_i)$ тоже является покрытием множества U, так что

$$U\subseteq\bigcup_{i=1}^{N}U^{\Theta}_{\varepsilon_i}(\theta_i),\ \ \varepsilon_i=\varepsilon(\delta,\theta_i), \tag{8}$$

В силу (7) и (8)

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}_+\left(\theta_n^+\in U\right)\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N+$$
$$+\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\max_{1\leqslant i\leqslant N}\mathbf{P}_+\left(\theta_n^+\in U^{\Theta}_{\varepsilon_i}(\theta_i)\right)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant N}\{-R(\theta_i)\}+\delta\leqslant-R(U)+\delta.$$

Устремляя δ к нулю, получаем требуемое утверждение.

Прежде чем доказать оценку снизу 2) в теореме 1, приведем некоторое вспомогательное утверждение. Пусть $\xi,\xi_1,\xi_2,\ldots$— последовательность независимых случайных векторов в R^N с общим распределением F,

$$S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n.$$

Функцию уклонений, соответствующую слагаемому ξ_i, обозначим $\Lambda(\alpha)=\Lambda_F(\alpha)$, $\alpha\in R^k$. Нам понадобится оценка снизу для вероятности попадания нормированной суммы S_n/n в открытый положительный октант

$$R^N_+=\{\alpha\in R^N:\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N),\alpha_1>0,\ \ldots,\alpha_N>0\}.$$

Лемма 5.

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in R^N_+\right)\geqslant-\Lambda_+, \tag{9}$$

где

$$\Lambda_+=\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{\lambda\in\left[R^N_+\right]}\{\delta|\lambda|-\ln\mathbf{E}e^{(\lambda,\xi)}\}. \tag{10}$$

Замечание. В (9) нельзя заменить число Λ_+ числом

$$\Lambda\left(\left[R^N_+\right]\right)=\sup_{\lambda\in\left[R^N_+\right]}\{-\ln\mathbf{E}e^{(\lambda,\xi)}\}.$$

Действительно, пусть $N=1$, $\xi_i=0$ с вероятностью 1. Тогда левая часть (9) равна $-\infty$, в то время, как $\Lambda\left(\left[R^N_+\right]\right)=0$.

Приведем сначала не строгие рассуждения, приводящие к формуле (9).

В силу теоремы 1.1 справедливо

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in R^N_+\right)\geqslant-\Lambda\left(R^N_+\right). \tag{11}$$

Если $\Lambda\left(R^N_+\right)=0$, то в силу того, что $\Lambda_+\geqslant 0$, соотношение (9) следует из (11). Пусть теперь $\Lambda\left(R^N_+\right)>0$. Предположим, что *существует такой вектор* $\alpha_0\in\left[R^N_+\right]$, что

$$\Lambda(\alpha_0)=\Lambda\left(R^N_+\right). \tag{12}$$

Точка α_0 есть первая точка касания выпуклого множества $\left[R^N_+\right]$ семейством $\partial H(b)$, где семейство выпуклых множеств $H(b)$ определено формулой (1.29). Рассмотрим гиперплоскость

$$L=\{\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_N)\colon \langle\beta, \lambda(\alpha_0)\rangle=\langle\alpha_0, \lambda(\alpha_0)\rangle\},$$

которая проходит через точку α_0 и касается множества $H(\Lambda(\alpha_0))$ в точке α_0. Эта гиперплоскость разделяет множества R_+^N и $H(\Lambda(\alpha_0))$. В силу (12) справедливо

$$\Lambda(R_+^N)=\langle\alpha_0, \lambda(\alpha_0)\rangle-\ln\varphi(\lambda(\alpha_0)). \tag{13}$$

Так как точка α_0 лежит на границе множества R_+^N и гиперплоскость L касается множества R_+^N, то всегда $\langle\alpha_0, \lambda(\alpha_0)\rangle=0$. Поэтому в силу (13)

$$\Lambda(R_+^N)=-\ln\varphi(\lambda(\alpha_0)),$$

и поскольку

$$\Lambda_+\geqslant-\ln\varphi(\lambda(\alpha_0)),$$

соотношение (9) имеет место. Нестрогость наших рассуждений заключалась в предположении существования вектора α_0, удовлетворяющего (12) (такого вектора может не быть).

Доказательство леммы 5. В силу (11) достаточно убедиться, что

$$\Lambda(R_+^N)\leqslant\Lambda_+. \tag{14}$$

При этом, как и прежде, нам достаточно рассмотреть случай $\Lambda(R_+^N)>0$.

Пусть в соответствии с принятыми обозначениями

$$H\left(\Lambda-\frac{1}{n}\right)=\left\{\alpha\in R^N\colon \Lambda(\alpha)\leqslant\Lambda-\frac{1}{n}\right\},$$

где $\Lambda\equiv\Lambda(R_+^N)$. Пусть

$$\Lambda<\infty. \tag{15}$$

Поскольку выпуклые множества $H\left(\Lambda-\frac{1}{n}\right)$ и R_+^N не пересекаются, найдется полупространство

$$L_n=L_{\lambda_n, c_n}\equiv\{\alpha\colon \langle\alpha, \lambda_n\rangle>c_n\} \tag{16}$$

такое, что

$$L_n\supseteq R_+^N, \quad \Lambda(L_n)\geqslant\Lambda-\frac{1}{n}. \tag{17}$$

Из включения $L_n\supseteq R_+^N$ следует, что константа c_n и вектор λ_n удовлетворяют соотношениям

$$c_n\leqslant 0, \quad \lambda_n\in[R_+^N].$$

Рассмотрим полупространство

$$L_n^0=L_{\lambda_n, 0}=\{\alpha\colon \langle\alpha, \lambda_n\rangle>0\},$$

которое, очевидно, удовлетворяет соотношению

$$L_n\supseteq L_n^0. \tag{18}$$

По определению функция $\Lambda(B)$ монотонна по B ($\Lambda(B_1)\geqslant\Lambda(B_2)$, если $B_2\supseteq B_1$), поэтому из (18) следует, что

$$\Lambda(L_n^0)\geqslant\Lambda(L_n),$$

так что в силу (17)

$$\Lambda(L_n^0)\geqslant\Lambda-\frac{1}{n}. \tag{19}$$

При этом для достаточно больших n выполняется $\Lambda(L^0) > 0$ и непосредственно из свойств функции уклонений (см. (1.14) и лемму 1.6) выводим, что

$$\Lambda\left(L_n^0\right) = \sup_{t\geqslant 0}\{-\ln \mathbf{E}e^{t\langle\lambda_n,\xi\rangle}\}. \tag{20}$$

Остается заметить, что Λ_+ не меньше, чем правая часть (20), поэтому в силу (19) получаем (14).

Пусть теперь (15) не выполнено, т. е. $\Lambda = \infty$. Тогда для любого $n = 1, 2, \ldots$ найдется полупространство $L_n = L_{\lambda_n, c_n}$ (см. (16)) такое, что

$$L_n \supseteq \frac{1}{n}e + R_+^N, \quad \Lambda([L_n]) = \infty,$$

где $e = (1, \ldots, 1) \in R_+^N$. Поскольку полупространство $L_n = l_n - \frac{1}{n}e$ представимо в виде

$$L_n' = L_{\lambda_n, c_n'} = \{\alpha\colon \langle\alpha, \lambda_n\rangle > c_n'\},$$

где $c_n' = c_n - \frac{1}{n}\langle e, \lambda_n\rangle$, и содержит R_+^N, то $c_n' \leqslant 0$, $\lambda_n \in [R_+^N]$. Поэтому выполняется неравенство

$$c_n \leqslant \frac{1}{n}\langle e, \lambda_n\rangle \leqslant \frac{k}{n}|\lambda_n|. \tag{21}$$

Из того что $\Lambda\left([L_n']\right) = \infty$, следует

$$0 = \mathbf{P}(\langle\xi, \lambda_n\rangle \geqslant c_n) \geqslant \mathbf{P}\left(\langle\xi, \lambda_n\rangle \geqslant \frac{1}{n}|\lambda_n|\right),$$

и, стало быть,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\geqslant 0}\left\{\frac{tk}{n}|\lambda_n| - \ln \mathbf{E}e^{t\langle\xi,\lambda_n\rangle}\right\} = \infty.$$

Поскольку Λ_+ не меньше, чем левая часть последнего равенства, то $\Lambda_+ = \infty$, и соотношение (9) верно. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для любых $M < \infty$, $\delta > 0$ найдется $\Delta = \Delta(M, \delta) > 0$ такое, что*

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i(\Delta) > n\delta\right) \leqslant e^{-Mn}.$$

Доказательство. По экспоненциальному неравенству

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i(\Delta) > n\delta\right) \leqslant e^{-n\Lambda(\Delta,\delta)},$$

где функция (аргумента δ)

$$\Lambda(\Delta, \delta) = \sup_{t\in R^1}\{\delta t - \ln \mathbf{E}e^{t\omega_1(\Delta)}\}$$

есть функция уклонений случайной величины $\omega_1(\Delta)$. Лемма 6 будет следовать из соотношения: для любого $\delta > 0$

$$\lim_{\Delta\to\infty}\Lambda(\Delta, \delta) = \infty. \tag{22}$$

Для доказательства (22) заметим, что в силу леммы 1 для любого $N < \infty$ найдется $\varepsilon = \varepsilon(N) > 0$ такое, что при $0 < \Delta \leqslant \varepsilon$ выполняется $\mathbf{E}\exp(N\omega(\Delta)) \leqslant 2$. Для этих Δ справедливо

$$\Lambda(\Delta, \delta) \geqslant \delta N - \ln 2,$$

так что

$$\lim_{\Delta\to 0} \Lambda(\Delta, \delta) \geqslant \delta N - \ln 2.$$

Поскольку N можно выбрать сколь угодно большим, (22) доказано. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Справедливо утверждение* 2) *теоремы* 1.

Доказательство. Пусть θ — внутренняя точка множества Θ, $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon(\theta) \subseteq \Theta$. Поскольку Θ — компакт, то $V_\varepsilon^\Theta(\theta) \equiv \Theta \setminus U_\varepsilon(\theta)$ — тоже компакт, и для любого $\Delta > 0$ существует конечная Δ-сеть

$$T_\varepsilon^\Delta(\theta) = \{\theta_1, \ldots, \theta_N\}$$

такая, что $\bigcup_{i=1}^{N} U_\Delta(\theta_i) \supseteq V_\varepsilon^\Theta(\theta)$. Для любых $\Delta > 0$ и $\delta > 0$ справедливо

$$\mathbf{P}_-\left(\theta_n^+ \in U_\varepsilon(\theta)\right) \geqslant \mathbf{P}\left(A_n(\theta) > \sup_{t \in V_\varepsilon^\Theta(\theta)} A_n(t)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{P}\left(A_n(\theta) > \max_{t \in T_\varepsilon^\Delta(\theta)} A_n(t) + n\delta,\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\Delta) \leqslant n\delta\right) \geqslant \tag{23}$$

$$\geqslant \mathbf{P}\left(A_n(\theta) > \max_{t \in T_\varepsilon^\Delta(\theta)} A_n(t) + n\delta\right) - \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i(\Delta) > n\delta\right) \equiv P_1 = P_2.$$

Для $\delta > 0$ введем функцию

$$R(\theta, \delta) = \sup_{\mu \in \mathscr{P}} \{-\ln \mathbf{E} e^{\langle a^\theta, \mu\rangle - \delta\langle 1, \mu\rangle}\},$$

так что

$$R_+(\theta) = \lim_{\delta \downarrow 0} R(\theta, \delta).$$

Если $R_+(\theta) = \infty$, то, очевидно, выполняется

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_-\left(\theta_n^+ \in U_\varepsilon(\theta)\right) \geqslant -R_+(\theta).$$

Пусть $R_+(\theta) < \infty$, тогда найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $0 < \delta \leqslant \delta_0$ выполняется

$$R_+(\theta) \leqslant R(\theta, \delta) \leqslant 2R_+(\theta).$$

Для любого $0 < \delta \leqslant \delta_0$ в силу леммы 6 найдется $\Delta = \Delta(\delta, 2R_+(\theta)) > 0$ такое, что

$$P_2 = o\left(e^{-nR_+(\theta)}\right). \tag{24}$$

При фиксированных $\delta \in (0, \delta_0)$ и $\Delta = \Delta(\delta, 2R_+(\theta))$ рассмотрим конечное множество

$$T_\varepsilon^\Delta(\theta) = \{\theta_1, \ldots, \theta_N\},$$

и введем N-мерные случайные вектора

$$\xi_i = (\xi_{1,i}, \ldots, \xi_{N,i}),\quad \xi_{j,i} = a_i(\theta) - a_i(\theta_j) - \delta.$$

Заметим, что

$$P_1 = \mathbf{P}\left(S_n/n \in R_+^N\right),$$

где $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, и в силу леммы 5 получим

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_1 \geqslant -\Lambda_+,$$

где Λ_+ определяется для вектора ξ в лемме 5. Поскольку

$$R(\theta, \delta) \geqslant \Lambda_+,$$

то

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_1 \geqslant -R(\theta, \delta). \tag{25}$$

Собирая (24), (25) и (23), получаем

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_-\left(\theta_n^+ \in U_\varepsilon(\theta)\right) \geqslant -R(\theta, \delta).$$

Устремляя далее $\delta \to 0$, находим

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_-\left(\theta_n^+ \in U_\varepsilon(\theta)\right) \geqslant -R_+(\theta).$$

Из последнего следует, что для любого открытого подмножества $U \subseteq \Theta$ и любого $\theta \in U$ выполняется

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_-\left(\theta_n^+ \in U\right) \geqslant -R_+(\theta); \tag{26}$$

максимизируя правую часть (26) по $\theta \in U$, получаем требуемое утверждение 2 теоремы 1.

Лемма 7 доказана. Леммы 2, 4, 7 доказывают теорему 1.

§ 7. РАВНОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ФУНКЦИОНАЛОВ S и I

1. Постановка задач. Статистики байесовского типа и отношения правдоподобия. Как и в § 5, 6, будем рассматривать последовательность $a, a_1, a_2, \ldots$ — независимых случайных полей с общим распределением Π в измеримом пространстве $(C(\Theta), \mathscr{B})$. Будем считать, что множество Θ содержит объединение двух непересекающихся непустых ограниченных замкнутых подмножеств Θ_1 и Θ_2 евклидова пространства R^k. Введем две точки максимума (ТМ) $\theta_{1,n}^+$ и $\theta_{2,n}^+$ на множествах Θ_1 и Θ_2 соответственно: для $i=1, 2$ случайный вектор $\theta_{i,n}^+$ (вообще говоря, не единственный) определяется из соотношения

$$A_n\left(\theta_{i,n}^+\right) = \sup_{\theta\in\Theta_i} A_n(\theta), \quad A_n(\theta) = a_1(\theta) + \ldots + a_n(\theta). \tag{1}$$

В настоящем параграфе будут получены теоремы о больших уклонениях для двух функционалов $S(A_n)$ и $I(A_n)$:

$$S(A_n) = A_n\left(\theta_{2,n}^+\right) - A_n\left(\theta_{1,n}^+\right) = \sup_{\theta\in\Theta_2} A_n(\theta) - \sup_{\theta\in\Theta_1} A_n(\theta),$$

$$I(A_n) = \ln \int_{\Theta_2} e^{A_n(\theta)}\, d\theta - \ln \int_{\Theta_1} e^{A_n(\theta)}\, d\theta.$$

Более точно мы получим теоремы об асимптотическом поведении вероятностей

$$\mathbf{P}(S(A_n) > n\alpha), \quad \mathbf{P}(I(A_n) > n\alpha) \tag{2}$$

в области больших уклонений, когда указанные вероятности стремятся к 0 при $n \to \infty$. Асимптотические представления вероятностей (2) будут получены равномерными по некоторым классам четверток

$$Y = (\Theta_1, \Theta_2, \Pi, \alpha), \tag{3}$$

где, напомним, Θ_1 и Θ_2 — непустые непересекающиеся ограниченные замкнутые подмножества $\Theta \subseteq R^k$, $\Pi = \Pi(A)$ — распределение случайного поля $a(\theta)\colon \Theta \to R^1$, α — вещественное число.

Теоремы об асимптотике вероятностей (2) понадобятся нам в гл. III. В этом случае, когда поле $A_n(\theta)$ является логарифмической функцией правдоподобия, функционалы $S(A_n)$ и $I(A_n)$ имеют естественную статистическую интерпретацию: первый соответствует *критерию отношения* (максимального) *правдоподобия*, второй — *критерию байесовского типа.*

Изучим случай, когда основной вклад в вероятности (2) будут давать окрестности двух точек $\widehat{\theta}_1=\widehat{\theta}_1(\alpha)$ и $\widehat{\theta}_2=\widehat{\theta}_2(\alpha)$. При этом на «редких» событиях $\{S(A_n)>n\alpha\}$ и $\{I(A_n)>\alpha\}$ точки максимумов $\theta^+_{1,n}$ и $\theta^+_{2,n}$ лежат в окрестностях точек $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$, а функции $A_n(\theta_i)-A_n(\widehat{\theta}_i)$ при $\theta_i\in U_\varepsilon(\widehat{\theta}_i)$ ведут себя как

$$A'_n(\widehat{\theta}_i)(\theta_i-\widehat{\theta}_i)^{\mathrm{T}}-(\theta_i-\widehat{\theta}_i)\frac{nC_i}{2}(\theta_i-\widehat{\theta}_i)^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

где положительно определенные неслучайные матрицы C_i найдены явно. Находя максимум функции (4), получаем, что $A_n(\theta^+_{i,n})$ ведет себя как

$$A_n(\widehat{\theta}_i)+\frac{A'_n(\widehat{\theta}_i)D_i(A'_n(\widehat{\theta}_i))^{\mathrm{T}}}{2n}, \tag{5}$$

где $D_i=C_i^{-1}$, $i=1, 2$. Таким образом, задача изучения асимптотики вероятности события

$$\{S(A_n)>n\alpha\}$$

редуцируется к задаче о поведении вероятности события

$$\left\{A_n(\widehat{\theta}_2)-A_n(\widehat{\theta}_1)+\frac{A'_n(\widehat{\theta}_2)D_2(A'_n(\widehat{\theta}_2))^{\mathrm{T}}}{2n}-\frac{A'_n(\widehat{\theta}_1)D_1(A'_n(\widehat{\theta}_1))^{\mathrm{T}}}{2n}>n\alpha\right\}. \tag{6}$$

Рассмотрим далее последовательность ξ, ξ_1, ξ_2, ... — независимых одинаково распределенных случайных векторов в евклидовом пространстве R^{2k+1}, где

$$\xi_i=\left(a_i(\widehat{\theta}_2)-a_i(\widehat{\theta}_1),\quad a'_i(\widehat{\theta}_1),\ a'_i(\widehat{\theta}_2)\right). \tag{7}$$

Тогда событие (6) можно представить в виде

$$\left\{\frac{S_n}{n}\in\alpha e+\Omega(e, D)\right\}, \tag{8}$$

где $e=(1, 0, \ldots, 0)\in R^{2k+1}$, D — симметричная матрица порядка $2k+1$, множество $\Omega(e, D)\subseteq R^{2k+1}$ определено как (см. (4.4))

$$\left\{\beta\in R^{2k+1}\colon\ \langle\beta, e\rangle+\frac{\beta D\beta^{\mathrm{T}}}{2}>0\right\}.$$

Для нахождения асимптотики события (8) остается воспользоваться теоремой 4.1

Поясним, как изучается асимптотика больших уклонений функционала $I(A_n)$. Функционал $I(A_n)$ можно выразить через $S(A_n)$ следующим образом:

$$I(A_n)=S(A_n)+\ln\int\limits_{\Theta_2}e^{A_n(\theta)-A_n\left(\theta^+_{2,n}\right)}d\theta-\ln\int\limits_{\Theta_1}e^{A_n(\theta)-A_n\left(\theta^+_{1,n}\right)}d\theta. \tag{9}$$

Будем рассматривать случай, когда точки $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ являются внутренними точками множеств Θ_1 и Θ_2 соответственно и, кроме того, «существенно» удалены от границы. Тогда в силу (4), (5) интегралы в (9) ведут себя как

$$\frac{|D_i|^{1/2}}{(2\pi)^{k/2}\,n^{k/2}},\quad i=1, 2,$$

так что на редких событиях $\{I(A_n)>n\alpha\}$ функционал $I(A_n)$ отличается от $S(A_n)$ на константу

$$I(A_n)=S(A_n)+\ln\frac{|D_2|^{1/2}}{|D_1|^{1/2}}+o(1).$$

Случай, когда точки $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$ лежат на границах $\partial\Theta_1$ и $\partial\Theta_2$ своих множеств Θ_1 и Θ_2 и границы являются гладкими поверхностями в окрестностях этих точек, можно свести к уже рассмотренному случаю внутренних точек, если ограничиться рассмотрением границ $\partial\Theta_1$, $\partial\Theta_2$ (внутренние точки множеств Θ_1 и Θ_2 оказываются «несущественными» для асимптотики функционалов $S(A_n)$ и $I(A_n)$).

Отметим еще, что можно в решении поставленной задачи (отыскание асимптотики вероятностей (2)) идти от локальной теоремы. Более точно, можно сначала доказать локальную теорему для совместного распределения двух точек максимума $\theta^+_{1,n}$, $\theta^+_{2,n}$ и разности $A_n(\theta^+_{2,n})-A_n(\theta^+_{1,n})$, а затем из локальной теоремы получить интегральную. Однако локальный подход оказался технически более сложным, чем «интегральный», которому мы будем следовать.

2. Основные обозначения. Пусть $(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2$. Через $\varphi(\lambda;\theta_1,\theta_2)$ обозначим преобразование Лапласа распределения случайной величины $\xi(\theta_1,\theta_2)=a(\theta_2)-a(\theta_1)$:

$$\varphi(\lambda;\theta_1,\theta_2)=\mathbf{E}e^{\lambda\xi(\theta_1,\theta_2)}.$$

Соответствующую функцию уклонений (см. § 1) обозначим

$$\Lambda(\alpha;\theta_1,\theta_2)=\sup_{\lambda}\{\alpha\lambda-\ln\varphi(\lambda;\theta_1,\theta_2)\}. \tag{10}$$

Введем далее функцию

$$\Lambda_+(\alpha;\theta_1,\theta_2)=\inf_{t>\alpha}\Lambda(t;\theta_1,\theta_2);$$

в силу свойств функции уклонений (см. § 1) функция $\Lambda_+(\alpha;\theta_1,\theta_2)$ представляется в виде

$$\Lambda_+(\alpha;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\Lambda(\alpha;\theta_1,\theta_2), & \text{если } \mathbf{E}\xi(\theta_1,\theta_2)\leqslant\alpha,\\ 0, & \text{если } \mathbf{E}\xi(\theta_1,\theta_2)>\alpha.\end{cases} \tag{11}$$

При этом (см. лемму (1.6)) выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(A_n(\theta_2)-A_n(\theta_1)>n\alpha)=-\Lambda_+(\alpha;\theta_1,\theta_2).$$

Обозначим далее

$$\lambda_+(\alpha,\theta_1,\theta_2)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\Lambda_+(\alpha;\theta_1,\theta_2),$$

$$\sigma^2_+(\alpha;\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\lambda_+(\alpha;\theta_1,\theta_2)\right)^{-1};$$

из свойств функции уклонений и (11) следует, что

$$\Lambda_+(\alpha;\theta_1,\theta_2)=\alpha\lambda_+(\alpha;\theta_1,\theta_2)-\ln\varphi(\lambda_+(\alpha;\theta_1,\theta_2);\theta_1,\theta_2). \tag{12}$$

Введем новую вероятностную меру в пространстве $(C(\Theta),\mathscr{B})$: для события $U\in\mathscr{B}$

$$\widehat{\Pi}_{\theta_1,\theta_2,\alpha}(U)\equiv\frac{\mathbf{E}\left(e^{\lambda_+(\alpha;\theta_1,\theta_2)\xi(\theta_1,\theta_2)};\,U\right)}{\varphi(\lambda_+(\alpha;\theta_1,\theta_2);\theta_1,\theta_2)}. \tag{13}$$

3. Основные условия. Теоремы о больших уклонениях функционалов $S(A_n)$ и $I(A_n)$ будут доказаны равномерными по классам четверток

$Y=(\Theta_1, \Theta_2, \Pi, \alpha)$ (см. (3)). Основным «качественным» условием на четверку Y будет следующее условие.

A_1. Найдется пара точек $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)\in\Theta_1\times\Theta_2$ такая, что функция $\widehat{a}(\theta)\equiv\mathbf{E}_{\widehat{\theta}_1,\widehat{\theta}_2,\alpha}a(\theta)$ на множествах Θ_1 и Θ_2 имеет единственные максимумы в точках $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$, т. е.

$$\widehat{a}(\widehat{\theta}_i)-\widehat{a}(\theta_i)>0 \text{ при } \theta_i\in\Theta_i,\ \theta_i\neq\widehat{\theta}_i,\ i=1,\ 2.$$

В гл. III показано, что в ряде случаев задачу проверки условия A_1 (задачу доказательства существования точек $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$, удовлетворяющих условию A_1) можно свести к задаче отыскания двух ближайших точек $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$ в множествах Θ_1 и Θ_2 в смысле некоторой метрики $\rho(\theta_1, \theta_2)$:

$$\rho\left(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2\right)=\min_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2}\rho(\theta_1, \theta_2).$$

Обозначим для краткости

$$\widehat{\Pi}=\widehat{\Pi}(U)\equiv\widehat{\Pi}_{\widehat{\theta}_1,\widehat{\theta}_2,\alpha}(U).$$

Равномерный вариант условия A_1 введем с помощью класса $\mathscr{A}_1(c)$ четверток Y, удовлетворяющих условию ($c\geqslant 1$)

$A_1(c)$.

1) $\widehat{\mathbf{E}}\left(a(\widehat{\theta}_i)-a(\theta_i)\right)\geqslant\dfrac{\lambda_+\left(\alpha;\widehat{\theta}_1,\widehat{\theta}_2\right)}{c}|\theta_i-\widehat{\theta}_i|^2,\quad \theta_i\in\Theta_i;$

2) $\Lambda_+(\alpha-t;\ \widehat{\theta}_1,\ \theta_2)-\Lambda_+(\alpha;\ \widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2)\geqslant\lambda_+\left(\alpha;\widehat{\theta}_1,\widehat{\theta}_2\right)\left(\dfrac{|\widehat{\theta}_2-\theta_2|^2}{c}-\right.$

$$\left.-t-\frac{ct^2}{2}\right),\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{c},\ \theta_2\in\Theta_2;$$

3) $U_{1/c}(\widehat{\theta}_i)\subseteq\Theta_i,\ i=1,\ 2;$

4) $\inf\limits_{\theta\in\Theta_1} m(U_\delta(\theta)\cap\Theta_1)\geqslant\dfrac{\delta^k}{c},\quad 0\leqslant\delta\leqslant 1/c,$

где $m(U)$ — мера Лебега в R^k.

Условие 1) является равномерным вариантом условия A_1. Условие 3) означает, что точки $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$ — внутренние точки множеств Θ_1 и Θ_2 и удалены от границ этих множеств на расстояние $1/c$. Условие 4) есть условие на границу множества Θ_1 и исключает воронкообразные участки границы. Более точно смысл условия 2) прояснится в доказательстве леммы 1.

Четверке $Y=(\Theta_1, \Theta_2, \Pi, \alpha)$ из класса $\mathscr{A}_1(c)$ поставим в соответствие пару точек $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)\in\Theta_1\times\Theta_2$, функции

$$\Lambda(t)\equiv\Lambda_+(t;\ \widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2),$$

$$\lambda(t)\equiv\lambda_+\left(t;\widehat{\theta}_1,\widehat{\theta}_2\right),\quad \sigma^2(t)\equiv\sigma_+^2\left(t;\widehat{\theta}_1,\widehat{\theta}_2\right). \tag{14}$$

Следующая группа условий дает моментные ограничения на поля $a(\theta)$, $a'(\theta)$, $a''(\theta)$, $a'''(\theta)$, где

$$a'(\theta)=\operatorname{grad}a(\theta),\ a''(\theta)=\left\|\frac{\partial^2 a(\theta)}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\right\|,\quad a'''(\theta)=\left\|\frac{\partial^3 a(\theta)}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j\,\partial\theta_s}\right\|.$$

Через $|a(\theta)|$ и $|a'(\theta)|$ обозначаем модуль числа $a(\theta)$ и евклидову норму вектора $a'(\theta)$; через $\|a''(\theta)\|$ и $\|a'''(\theta)\|$

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant k}\left|\frac{\partial^2 a(\theta)}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\right|,\quad \max_{1\leqslant i,j,s\leqslant k}\left|\frac{\partial^3 a(\theta)}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j\,\partial\theta_s}\right|.$$

Пусть

$$\Theta_i^\delta=\Theta_i\cap U_\delta\left(\widehat{\theta}_i\right),\quad i=1,\ 2.$$

Будем говорить, что четверка Y принадлежит классу $\mathscr{A}_2(c)$, если выполнено условие $(c \geqslant 1)$.

$A_2(c)$.

1) $\mathrm{E}\exp\left(\frac{\lambda(a)}{c}\|a'\|\right) \leqslant c$, где $\|a\| = \sup\limits_{\theta\in\Theta_1\cup\Theta_2} |a'(\theta)|$;

2) $\widehat{\mathrm{E}}\left[\|a''(\widehat{\theta}_1)\|^{2\lambda(\alpha)k+2+1/c} + \|a''(\widehat{\theta}_2)\|^{2\lambda(\alpha)k+2+1/c}\right] \leqslant c$;

3) $\sup\limits_{\theta\in\Theta_1^{1/c}\cup\Theta_2^{1/c}} \widehat{\mathrm{E}}\|a'''(\theta)\|^{\max(2\lambda(\alpha)k+1,k)+1/c} \leqslant c$.

В главе III рассмотрим ситуацию, когда $\lambda(\alpha)$ не прввосходит 1; это соответствует тому, что показатели степени в условиях 2) и 3) не будут превосходить соответственно $2k+2+1/c$ и $2k+1+1/c$.

Обозначим преобразование Лапласа над распределением случайной величины $a(\widehat{\theta}_2) - a(\widehat{\theta}_1)$ и ее характеристическую функцию соответственно

$$\varphi_0(\lambda) \equiv \mathrm{E}e^{\lambda(a(\widehat{\theta}_2)-a(\widehat{\theta}_1))}, \quad f_0(s) = \varphi_0(is), \quad \lambda,\ s\in R^1.$$

Будем говорить, что четверка Y принадлежит классу $\mathscr{A}_3(c)$, если выполнено условие $(c \geqslant 1)$

$A_3(c)$.

1) $\sup\limits_{|\lambda(\alpha)-\lambda|\leqslant|\lambda(\alpha)|/c} \varphi_0(\lambda)\,e^{-\lambda\alpha} \leqslant e^{\lambda^2(\alpha)/c}, \quad 0<\lambda(\alpha)\leqslant c,\ \Lambda(\alpha)\leqslant c$;

2) $|f_0(s)| \leqslant 1 - |\lambda(\alpha)|^2/c$ при $|s| \geqslant |\lambda(\alpha)|/c$.

Легко видеть, что условие $A_3(c)$ есть в точности равномерные условия Крамера $I.C_1(c)$ и $I.C_2(c)$ для пары $(F^{(0)}, \alpha)$ (см. § 4), где $F^{(0)}$ — распределение случайной величины $a(\widehat{\theta}_2) - a(\widehat{\theta}_1)$, $\alpha\in R^1$. Ниже докажем (см. лемму 1), что для четверки Y из класса $\mathscr{A}_1(c)\cap\mathscr{A}_2(c)\cap\mathscr{A}_3(c)$ пара $(F, \alpha e)$ тоже удовлетворяет условиям $I.C_{1'}(c_1)$ и $I.C_2(c_1)$ из § 4 для некоторого $c_1\in[1,\infty)$, где F есть распределение в R^{2k+1} вектора (7), $e = (1, 0, \ldots, 0)\in R^{2k+1}$, $\alpha\in R^1$.

Для чисел $c_1, c_2, c_3 \in [1, \infty)$ введем класс $\mathscr{A}(c_1, c_2, c_3)$ четверок $Y = (\Theta_1, \Theta_2, \Pi, \alpha)$, положив

$$\mathscr{A}_{1'}(c_1)\cap\mathscr{A}_2(c_2)\cap\mathscr{A}_3(c_3) = \mathscr{A}(c_1, c_2, c_3).$$

Это и есть класс равномерности в основной теореме настоящего параграфа. Для упрощения записи будем использовать класс

$$\mathscr{A}(c) \equiv \mathscr{A}(c, c, c).$$

Поскольку классы $\mathscr{A}_i(c)$ монотонны по c, это не приведет к потере общности (см. гл. 1, § 2—4).

Для четверки $Y = (\Theta_1, \Theta_2, \Pi, \alpha)\in\mathscr{A}(c)$ через $F = F_Y$ обозначим распределение в R^{2k+1} случайного вектора ξ, определенного (7). Введем далее две квадратные матрицы порядка k:

$$K_i = -\widehat{\mathrm{E}}a''(\widehat{\theta}_i), \quad i = 1, 2.$$

В силу условий $A_1(c)$ и $A_2(c)$ найдется число $c_1\in[1,\infty)$, зависящее только от c, и k такое, что

$$\frac{1}{c_1}E \leqslant K_i \leqslant c_1 E, \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

где $E = E_k$ — единичная матрица порядка k. Обозначим далее

$$D_i = K_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \tag{16}$$

и введем квадратную матрицу $D=\|D_{ij}\|$ порядка $2k+1$, положив

$$D_{ij}=\begin{cases}-D^{(1)}_{i'j'}, & i'=i-1,\ j'=j-1,\ 1\leqslant i',\ j'\leqslant k;\\ D^{(2)}_{i''j''}, & i''=i-k-1,\ j''=j-k-1,\ 1\leqslant i',\ j'\leqslant k;\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}\tag{17}$$

где $\|D^{(1)}_{ij}\|=D_1$, $\|D^{(2)}_{ij}\|=D_2$. Таким образом, четверке $Y\in\mathscr{A}(c)$ мы поставили в соответствие тройку

$$(F,\ \alpha e,\ D),$$

где $e=(1,0,\ldots,0)\in R^{2k+1}$.

4. **Проверка условий § 4.** Ниже нам понадобится теорема 4.1. Напомним, что классы $I.\mathscr{C}(c)$ троек (F,α,D), а также матрицы $B_F(\beta)$, $\widetilde{B}_F(\beta)$, функции $\chi(B,D,e)$, $\sigma^2_F(\beta)$ были определены в § 4.

Лемма 1. *Для любого $c\in[1,\infty)$ найдется $c_1\in[1,\infty)$, зависящее только от c, и k такое, что если $Y=(\Theta_1,\Theta_2,\Pi,\alpha)\in\mathscr{A}(c)$, то $(F,\alpha,D)\in I.\mathscr{C}(c_1)$.*

Доказательство. Для распределения F в R^{2k+1} и вектора $\beta\in R^{2k+1}$ через $\Lambda_F(\beta)$ и $\lambda_F(\beta)$ обозначим функцию уклонений и ее производную (см. § 4). Убедимся сначала, что

$$\Lambda_F(\alpha e)=\Lambda(\alpha),\quad \lambda_F(\alpha e)=\alpha e,\tag{18}$$

где функция $\Lambda(\alpha)$ была введена формулой (14). Обозначим

$$\varphi_F(\lambda)=\mathbf{E}e^{\langle\lambda,\xi\rangle},\quad \lambda\in R^{2k+1},\quad \xi \Subset F;$$

убедимся, что

$$\frac{\varphi'_F(\lambda(\alpha)e)}{\varphi_F(\lambda(\alpha)e)}=\alpha e,\tag{19}$$

где функция $\lambda(\alpha)$ определена формулой (14). Соотношение (19) эквивалентно равенству

$$\widehat{\mathbf{E}}\xi=\alpha e,\quad \xi\Subset F,$$

которое можно покоординатно расписать так:

$$\widehat{\mathbf{E}}(a(\widehat{\theta}_2)-a(\widehat{\theta}_1))=\alpha,\quad \widehat{\mathbf{E}}a'(\widehat{\theta}_1)=\widehat{\mathbf{E}}a'(\widehat{\theta}_2)=0.\tag{20}$$

Первое равенство в 20) следует из определения меры $\widehat{\Pi}$; второе и третье — из условия 1) в $\mathscr{A}_1(c)$. Таким образом, (19) имеет место. В силу свойств функции уклонений из (19) следует, что

$$\Lambda_F(\alpha e)=\langle\alpha e,\ \lambda(\alpha)e\rangle-\ln\varphi_F(\lambda(\alpha)e).\tag{21}$$

С другой стороны, в силу того, что все координаты вектора e, кроме первой, равны 0, получаем

$$\Lambda_F(\alpha e)=\alpha\lambda(\alpha)-\ln\varphi_F(\lambda(\alpha)e),$$

так что в силу (12) и (14) первое равенство в (18) доказано. Поскольку второе равенство в (18) вытекает из (19), (18) доказано.

В силу соотношений (18) условия $I.C_1(c)$ и $I.C_2(c)$ в определении класса $I.\mathscr{C}(c)$ следуют из условий $A_1(c)$, $A_2(c)$ и $A_3(c)$ четверки $Y\in\mathscr{A}(c)$. Поэтому нам осталось доказать, что условие $I.C_3(c)$ (§ 4) в определении класса $I.\mathscr{C}(c)$ выполнено для некоторого $c=c_1\in[1,\infty)$. Напомним это условие (в обозначениях настоящего раздела):

$$\mathbf{E}e^{\eta|\lambda(\alpha)|\frac{D}{2}\eta^{\mathrm{T}}}\leqslant c_1,\quad \eta\Subset\Phi_{0,\,\Pi\widetilde{B}_F(\alpha)\Pi},\tag{22}$$

$$|\lambda(\alpha)|\,\|D\|\leqslant c_1,\tag{23}$$

где $\Pi = E - e^{\mathrm{T}}e$, $E = E_{2k+1}$. Неравенство (23) следует из того, что $|\lambda(\alpha)| \leqslant c$ (см. условие $A_3(c)$) и $\|D\| \leqslant c$ (см. (15) и (16)). Для доказательства (22) введем две прямоугольные матрицы Π_1 и Π_2 с помощью соотношений:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k+1})\Pi_1 = (\alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}),$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k+1})\Pi_2 = (\alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_{2k+1}).$$

Учитывая далее структуру матрицы D (см. (17)), можно переписать неравенство (22):

$$\mathbf{E}e^{-|\lambda(\alpha)|\eta\frac{\Pi_1 D_1 \Pi_1^{\mathrm{T}}}{2}\eta^{\mathrm{T}} + |\lambda(\alpha)|\eta\frac{\Pi_2 D_2 \Pi_2^{\mathrm{T}}}{2}\eta^{\mathrm{T}}} \leqslant c_1, \tag{24}$$
$$\eta \in \Phi_{0, \Pi\widetilde{B}_F(\alpha e)\Pi^*}.$$

Поскольку матрицы D_1 и D_2 положительно определены, (24) следует из неравенства

$$\mathbf{E}e^{|\lambda(\alpha)|\eta\frac{\Pi_2 D_2 \Pi_2^{\mathrm{T}}}{2}\eta^{\mathrm{T}}} \leqslant c_1, \tag{25}$$
$$\eta \in \Phi_{0, \Pi\widetilde{B}_F(\alpha e)\Pi^*}.$$

Введем далее квадратную матрицу $\widetilde{B}_2$ порядка k с помощью соотношения

$$\widetilde{B}_2 = \Pi_2^{\mathrm{T}}\widetilde{B}_F(\alpha e)\Pi_2.$$

Тогда (25) можно переписать в виде

$$\mathbf{E}e^{|\lambda(\alpha)|\eta\frac{D_2}{2}\eta^{\mathrm{T}}} \leqslant c_1, \quad \eta \in \Phi_{0, \widetilde{B}_2}. \tag{26}$$

Соотношение (26) эквивалентно

$$|\lambda(\alpha)|\, D_2\widetilde{B}_2 - E_k \leqslant -\frac{1}{c_2}E_k$$

для некоторого $c_2 < \infty$. Последнее, в свою очередь, эквивалентно соотношению

$$|\lambda(\alpha)|\,\widetilde{B}_2 - D_2^{-1} \leqslant -\frac{1}{c_3}E_k \tag{27}$$

для некоторого $c_3 < \infty$. Итак, нам достаточно для доказательства леммы 1 доказать (27).

Обратимся к неравенству 2) в условии $A_1(c)$ на четверку Y. Из него следует, что матрица

$$R \equiv \left\| \frac{\partial^2 \Lambda_+(\alpha; \widehat{\theta}_1, \theta)}{\partial\theta_i\, \partial\theta_j} \right\| \Bigg|_{\theta = \widehat{\theta}_2}$$

удовлетворяет условию

$$R \geqslant \frac{\lambda^2(\alpha)}{c_4}E_k \tag{28}$$

для некоторого $c_4 < \infty$. Вычисляя далее матрицу R, убеждаемся, что

$$R = \lambda(\alpha)D_2^{-1} - \lambda^2(\alpha)\widetilde{B}_2,$$

так что (27) следует из (28). Лемма 1 доказана.

Следствие 1. Для любого $c \in [1, \infty)$ найдется $c_1 \in [1, \infty)$, зависящее только от c, и k такое, что для любого $|\nu| \leqslant 1/c_1$ и любой четверки $Y \in \mathscr{A}(c)$ выполняется $(F, \alpha e, D + \nu E) \in I.\mathscr{C}(c_1)$.

Доказательство следствия 1 состоит в проверке условия $I.C_3(c_1)$ (§ 4) и дословно повторяет соответствующую часть доказательства леммы 1 с заменой матрицы D на матрицу $D+\nu E$.

Замечания. 1. Можно показать, что из условия 2) в $A_1(c)$ следует одно из неравенств 1) (для $i=2$) в $A_1(c)$. Таким образом, в условии $A_1(c)$ есть некоторая «избыточность», от которой можно избавиться. Мы не стали этого делать, так как это усложнило бы вид «качественного» условия A (т. е. введение точек $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$). С другой стороны, результат настоящего параграфа мы рассматриваем в первую очередь как «полуфабрикат» для гл. III, в которой такой «избыточности» не будет.

2. Наряду с классом четверок $\mathscr{A}(c)$ можно рассмотреть более широкий класс $\mathscr{A}^{(n)}(c)$, зависящий от n, и отличающийся только в пункте 1) условия $A_1(c)$:

$$1)\ \widehat{E}\left(a(\theta_i^1)-a(\theta_i)\right)\geqslant\frac{1}{c\sqrt{n}}|\theta_i-\widehat{\theta}_i|^2,\quad \theta_i\in\Theta_i,\quad i=1,2.$$

Основное утверждение настоящего параграфа (теорема 1) сохранится, если класс $\mathscr{A}(c)$ заменить на классы $\mathscr{A}^{(n)}_{(c)}$.

5. **Формулировки основных утверждений.** Итак, в силу леммы 1 каждой четверке $Y=(\Theta_1,\Theta_2,\Pi,\alpha)\in\mathscr{A}(c)$ можно поставить в соответствие тройку $(F,\alpha e,D)\in I.\mathscr{C}(c_1)$ (все обозначения, относящиеся к тройке $(F,\alpha e,D)$, можно найти в § 4). Пусть

$$S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n,\quad \xi_i\in F,$$

множество $\Omega(e,D,\delta)$ в R^{2k+1} имеет вид

$$\Omega(e,D,\delta)=\left\{\beta\in R^{2k+1}\colon\ \langle\beta,e\rangle+\frac{\beta D\beta^{\mathrm{T}}}{2}>0,\ |\beta|<\delta\right\}.$$

Тогда для больших уклонений, когда $\lambda(\alpha)\sqrt{n}\to\infty$, выполняется соотношение (теорема 4.1)

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in\alpha e+\Omega(e,D,\lambda(\alpha)\delta)\right)=\frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}\chi\left(\widetilde{B}_F(\alpha e),\lambda(\alpha)D,e\right)}{\sqrt{2\pi n}\lambda(\alpha)\sigma_F(\alpha e)}(1+o(1)).$$

Теорема 1. *Для произвольных константы $c\in[1,\infty)$ и последовательности $N_n\to\infty$, $N_n\leqslant c\sqrt{n}$ справедливо*

$$\mathbf{P}(S(A_n)>n\alpha)=\frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}\chi\left(\widetilde{B}_F(\alpha e),\lambda(\alpha)D,e\right)}{\sqrt{2\pi n}\lambda(\alpha)\sigma_F(\alpha e)}(1+\varepsilon_n^{(1)}),\tag{29}$$

$$\mathbf{P}(I(A_n)>n\alpha)=\frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}\chi\left(\widetilde{B}_F(\alpha e),\lambda(\alpha)D,e\right)}{\sqrt{2\pi n}\lambda(\alpha)\sigma_F(\alpha e)}\left(\frac{|D_1|}{|D_2|}\right)^{\frac{\lambda(\alpha)}{2}}(1+\varepsilon_n^{(2)}),\tag{30}$$

где последовательности $\varepsilon_n^{(i)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\limsup_{n\to\infty}|\varepsilon_n^{(i)}|=0,\tag{31}$$

sup *берется по классу $Y\in\mathscr{A}(c)$, $\lambda(\alpha)\sqrt{n}\geqslant N_n$.*

6. **Доказательство теоремы 1** приведем в дополнительном предположении, что

$$\lambda(\alpha)\geqslant 1/c.\tag{32}$$

Переход от случая (32) к случаю

$$\lambda(\alpha)\geqslant\sqrt{n}N_n$$

можно осуществить точно так же, как это сделано в § 4 (см. доказательство теоремы 4.1). Таким образом, в леммах 2—5, сформулированных ниже, будут выполнены все условия теоремы 1 и дополнительно условие (32).

Для $N<\infty$, $n=1, 2, \ldots$ введем событие

$$A_n^{(1)}(N)=\left\{\sup_{\theta\in\Theta_1\cup\Theta_2}\left|\frac{A_n'(\theta)}{n}\right|\leqslant N\right\}.$$

Лемма 2. *Для любого $M<\infty$ существует $N=N(M)<\infty$, зависящее только от M, c, k такое, что*

$$\mathbf{P}\left(\overline{A_n^{(1)}(N)}\right)\leqslant e^{-nM}.$$

В соответствии с утверждением леммы 2 можно выбрать такое $N_0<\infty$, что для всех $n=1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}\left(\overline{A_n^{(1)}(N_0)}\right)\leqslant\frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{n}}\varepsilon_n,$$

где последовательность ε_n удовлетворяет (31). Обозначим для краткости

$$A_n^{(1)}\equiv A_n^{(1)}(N_0).$$

Лемма 3. *Существует $0<R_0<\infty$, зависящее только от c, и k такое, что*

$$A_n^{(1)}\cap\{I(A_n)>n\alpha\}\subseteq\{S(A_n)-k\ln n-R_0\}.$$

Для $n=1, 2, \ldots$, чисел $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ введем события

$$A_n(\delta_1, \delta_2)=A_n^{(1)}\cap A_n^{(2)}(\delta_2)\cap A_n^{(3)}(\delta_1, \delta_2)\cap A_n^{(4)}(\delta_2)\cap A_n^{(5)}(\delta_2),$$

где

$$A_n^{(2)}(\delta_2)\equiv\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\alpha e\right|\leqslant\frac{\delta_2}{T}\right\},\quad T=T(c, k)<\infty,$$

$$A_n^{(3)}(\delta_1, \delta_2)\equiv\bigcap_{i=1}^{2}\left\{\sup_{\theta\in\Theta_i\cap\overline{U}_{\delta_2}(\widehat{\theta}_i)}\left\|\frac{A_n''(\theta)}{n}-K_i\right\|\leqslant\delta_1\right\},$$

$$A_n^{(4)}(\delta_2)\equiv\bigcap_{i=1}^{2}\left\{A_n(\widehat{\theta}_i)-\sup_{\theta\in\Theta_i\setminus U_{\delta_2}(\widehat{\theta}_i)}A_n(\theta)\geqslant\frac{k+1}{2}\ln n\right\},$$

$$A_n^{(5)}(\delta_2)\equiv\left\{\left|\frac{S(A_n)}{n}-\alpha\right|\leqslant\delta_2\right\}.$$

Лемма 4. *Для любых $\nu>0$ и $\delta_2\in[N_n/\sqrt{n}, 1]$ найдется $\delta_1=\delta_1(\nu)>0$, зависящее только от ν, c, k, такое, что*

1) $A_n(\delta_1, \delta_2)\cap\left\{\frac{S_n}{n}\in\alpha e+\Omega(e, D-\nu E, \delta_2)\right\}\subseteq A_n(\delta_1, \delta_2)\cap\{S(A_n)>$ $>n\alpha\}\subseteq\left\{\frac{S_n}{n}\in\alpha e+\Omega(e, D+\nu E, \delta_2)\right\}$;

2) *на событии $A_n(\delta_1, \delta_2)$ справедливо неравенство*

$$\left|I(A_n)-S(A_n)-\ln\left(\frac{|D_1|}{|D_2|}\right)^{1/2}\right|\leqslant\varepsilon_n,$$

где неслучайная функция ε_n удовлетворяет соотношению

$$\limsup_{n\to\infty}\sup|\varepsilon_n|\leqslant\nu, \tag{33}$$

sup *берется по классу $Y\in\mathscr{A}(c)$, $\lambda(\alpha)\sqrt{n}\geqslant 1/c$.*

Лемма 5. *Найдется $\nu_0>0$, зависящее только от c и k, такое, что для любого $\nu\in(0, \nu_0]$ найдется $\delta_2=\delta_2(\nu)>0$ такое, что для $\delta_1=\delta_1(\nu)$ из леммы 4*

1) $\mathbf{P}(S(A_n) > \alpha e - k\ln n - R_0,\ \overline{A}_n(\delta_1, \delta_2)) \leqslant \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{n}}\,\varepsilon_n;$ (34)

2) $\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \alpha e + \Omega(e, D+\nu E, \delta_2),\ \overline{A}_n(\delta_1, \delta_2)\right) \leqslant \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{n}}\,\varepsilon_n,$ (35)

где последовательность ε_n *удовлетворяет соотношению* (31).

Леммы 2—5 докажем несколько позже, а сейчас с их помощью докажем теорему 1.

1. Оценка сверху в (29). Для любых $\delta_1, \delta_2 > 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(S(A_n) > n\alpha) \leqslant \mathbf{P}(S(A_n) > n\alpha,\ A_n(\delta_1, \delta_2)) + \\ + \mathbf{P}(S(A_n) > n\alpha,\ \overline{A}_n(\delta_1, \delta_2)) \equiv P_1 + P_2.$$

В силу лемм 4 и 5 для любого $\nu \in (0, \nu_0]$ найдутся $\delta_1(\nu)$ и $\delta_2(\nu)$ такие, что вероятность P_2 мала в нужной степени:

$$P_2 \leqslant \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{n}}\,\varepsilon_n,$$

а вероятность P_1 допускает оценку

$$P_1 \leqslant \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \alpha e + \Omega(e, D+\nu E, \delta_2(\nu))\right). \tag{36}$$

В силу леммы 1 и следствия 1 из леммы 1 существует $\nu_1 \in (0, \nu_0]$ такое, что для всех $\nu \in (0, \nu_1]$ тройка $(F, \alpha e, D+\nu E)$ принадлежит классу $I.\mathscr{C}(c_1)$. Поэтому в силу теоремы 4.1 правая часть (36) представляется в виде

$$\frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}\chi\left(\widetilde{B}_F(\alpha e),\ \lambda(\alpha)(D+\nu E),\ e\right)}{\sqrt{2\pi n}\,\lambda(\alpha)\,\sigma_F(\alpha e)}(1+\varepsilon_n), \tag{37}$$

где ε_n удовлетворяет (31). Последовательность (37) только в константе

$$\chi(\nu) \equiv \chi(\widetilde{B}_F(\alpha e),\ \lambda(\alpha)(D+\nu E),\ e)$$

отличается от правой части (29). Поскольку (см. доказательство теоремы 4.1) константа $\chi(\nu)$ стремится к $\chi(0)$ при $\nu \downarrow 0$ равномерно по классу $(F, \alpha e, D) \in I.\mathscr{C}(c)$, то оценка сверху в (29) доказана.

Оценка снизу в (29) и оценки сверху и снизу в (30) доказываются с помощью лемм 1—5 совершенно аналогичным образом. Поэтому теорема 1 доказана.

7. Доказательство лемм 2—5. Доказательство леммы 2. Поскольку

$$\overline{A}_n^{(1)}(N) \subseteq \left\{\sum_{i=1}^{n} \|a_i'\| > nN\right\},$$

где $\|a'\| = \sup_{\theta \in \Theta_1 \cup \Theta_2} |a'(\theta)|$, то в силу неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}(\overline{A}_n^{(1)}(N)) \leqslant e^{-n\Lambda_1(N)},$$

где функция $\Lambda_1(N)$ есть функция уклонений, отвечающая случайной величине $\|a'\|$. В силу условия $A_3(c)$ случайная величина $\|a'\|$ удовлетворяет равномерному варианту условия Крамера Cr_3 (см. § 1). Поэтому в силу леммы 1.1 для любого $M < \infty$ найдется $N < \infty$ такое, что

$$\Lambda_1(N) \geqslant M.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Легко видеть, что

$$I(A_n) = S(A_n) + \ln \int\limits_{\Theta_2} e^{A_n(\theta) - A_n\left(\theta_{2,n}^+\right)} d\theta - \ln \int\limits_{\Theta_1} e^{A_n(\theta) - A_n\left(\theta_{1,n}^+\right)} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant S(A_n) + \ln (2c)^k - \ln \int\limits_{\Theta_1} e^{A_n(\theta) - A_n\left(\theta_{1,n}^+\right)} d\theta.$$

Поэтому утверждение леммы будет доказано, если найдется $R_0 < \infty$ такое, что на событии

$$A_n^{(1)} = A_n^{(1)}(N_0)$$

выполняется

$$\ln (2c)^k - \ln \int\limits_{\Theta_1} e^{A_n(\theta) - A_n\left(\theta_{1,n}^+\right)} d\theta \leqslant k \ln n + R_0,$$

где $R_0 \in (0, \infty)$ зависит только от c, k. Для этого, в свою очередь, достаточно убедиться, что существует $a \in (0, 1]$, зависящее только от c и k, такое, что

$$\int\limits_{\Theta} e^{A_n(\theta) - A_n\left(\theta_{1,n}^+\right)} d\theta \geqslant \frac{a}{n^k}. \tag{38}$$

Функция $\exp\left(A_n(\theta) - A_n\left(\theta_{1,n}^+\right)\right)$ равна 1 при $\theta = \theta_{1,n}^+$, поэтому на событии $A_n^{(1)}$ при $\theta \in U_{1/n}\left(\theta_{1,n}^+\right)$ выполняется

$$e^{A_n(\theta) - A_n\left(\theta_{1,n}^+\right)} \geqslant e^{-\left|\theta_1 - \theta_{1,n}^+\right| n N_0} \geqslant e^{-N_0}.$$

Стало быть, неравенство (38) следует из пункта 4) в условии $A_1(c)$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 4. На элементарных исходных из события $A_n(\delta_1, \delta_2)$ точки максимумов $\theta_{1,n}^+$ и $\theta_{2,n}^+$ лежат соответственно в множествах $\Theta_1 \cap U_{\delta_2}(\widehat{\theta}_1)$ и $\Theta_2 \cap U_{\delta_2}(\widehat{\theta}_2)$. На этих множествах матрицы $A_n''(\theta)/n$ мало отличаются от матриц K_1 и K_2 соответственно, поэтому функция $A_n(\theta)$ на множестве $\Theta_i \cap U_{\delta_2}(\widehat{\theta}_i)$ ведет себя «почти» как функция

$$A(\widehat{\theta}_i) + A_n'(\widehat{\theta}_i)(\theta - \widehat{\theta}_i) + (\theta - \widehat{\theta}_i)\frac{nK_i}{2}(\theta - \widehat{\theta}_i). \tag{39}$$

Находя максимум функции (39), получаем, что

$$S(A_n) = A_n\left(\theta_{2,n}^+\right) - A_n\left(\theta_{1,n}^+\right)$$

ведет себя почти как

$$L_n \equiv A_n(\widehat{\theta}_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) + \frac{A_n'(\widehat{\theta}_2) D_2 A_n'(\widehat{\theta}_2)^{\mathrm{T}}}{2n} - \frac{A_n'(\widehat{\theta}_1) D_1 A_n'(\widehat{\theta}_1)^{\mathrm{T}}}{2n}. \tag{40}$$

Более точно, если к матрице D_1 прибавить матрицу νE, а от матрицы D_2 отнять νE, то выражение (40) превратится в оценку сверху L_n^+ для $S(A_n)$ на множестве $A_n(\delta_1, \delta_2)$, если $\delta_1 = \delta_1(\nu) > 0$ достаточно мало. Оценка снизу L_n^- для $S(A_n)$ получается, если в (40) матрицу D_2 заменить на $D_2 - \nu E$, а матрицу D_1 — на $D_1 + \nu E$. Таким образом, для любого $\nu > 0$ найдется $\delta_1 = \delta_1(\nu) > 0$ такое, что на событии $A_n(\delta_1, \delta_2)$

$$L_n^- \leqslant S(A_n) \leqslant L_n^+,$$

так что справедливы включения

$$A \cap \{L_n^- > n\alpha\} \subseteq A \cap \{S(A_n) > n\alpha\} \subseteq A \cap \{L_n^+ > n\alpha\},$$
$$A = A_n(\delta_1, \delta_2).$$

Поскольку

$$\{L_n^{\pm} > n\alpha\} \cap A_n(\delta_1, \delta_2) = \left\{\frac{S_n}{n} \in \alpha e + \Omega(e, D \pm \nu E, \delta_2)\right\} \cap A_n(\delta_1, \delta_2),$$

первое утверждение леммы 4 доказано.

Докажем второе утверждение леммы 4. Для любого $\nu > 0$ найдется $\delta_1 = \delta_1(\nu)$ такое, что на событии $A_n(\delta_1, \delta_2)$ $(\delta_2 \in (N_n/\sqrt{n}, 1))$ выполняется

$$\int_{\Theta_i} e^{A_n(\theta) - A_n\left(\theta_{i,n}^{+}\right)} d\theta = \frac{|D_i|^{1/2}}{(2\pi n)^{k/2}} (1 + \varepsilon_n),$$

и последовательность ε_n удовлетворяет (33). Поэтому утверждение 2) леммы 4 имеет место. Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. Обозначим

$$A_n^* = A_n^*(\delta_1, \delta_2) \equiv A_n^{(2)}(\delta_1) \cap A_n^{(3)}(\delta_1, \delta_2) \cap A_n^{(4)}(\delta_2) \cap A_n^{(5)}(\delta_2).$$

Поскольку в силу леммы 2 вероятность $\mathbf{P}(\bar{A}_n^{(1)})$ мала в нужной степени, достаточно оценить вероятность

$$P_n \equiv \mathbf{P}\left(S(A_n) > n\alpha - k \ln n - R_0, \quad A_n^{(1)} \cap A_n^*(\delta_1, \delta_2)\right).$$

Для $r = r_n \equiv \dfrac{\sqrt{(2k+1) c \ln n}}{\sqrt{n}}$ справедливо

$$P_n \leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{\theta \in \Theta_2 \setminus U_r(\widehat{\theta}_2)} A_n(\theta) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha - k \ln n - R_0, A_n^{(1)}\right) +$$
$$+ \mathbf{P}\left(\sup_{\theta \in \Theta_2 \cap U_r(\widehat{\theta}_2)} A_n(\theta) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha - k \ln n - R_0, A_n^{(1)} \cap \bar{A}_n^*\right) \equiv$$
$$\equiv P_n^{(1)} + P_n^{(2)}. \qquad (41)$$

Лемма 6. *Справедливо соотношение*

$$P_n^{(1)} \leqslant \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{n}} \varepsilon_n,$$

где последовательность ε_n удовлетворяет (31).

Доказательство. Для любого $\theta_2 \in \Theta_2$ на событии $A_n^{(1)}$ выполняется

$$\sup_{\theta \in U_{1/n}(\theta)} A_n(\theta) \leqslant A_n(\theta_2) + N_0,$$

где константа N_0 из определения события $A_n^{(1)}$. Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\sup_{\theta \in U_{1/n}(\theta_2)} A_n(\theta) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha - k \ln n - R_0, A_n^{(1)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(A_n(\theta_2) - A_n(\theta_1) > n\alpha - k \ln n - \widetilde{R}_0), \qquad (42)$$

где $\widetilde{R}_0 = R_0 + N_0$. Найдется далее конечное множество $\{\theta_1, \ldots, \theta_{Tn^k}\} \in \Theta_2$, где число $T < \infty$ зависит только от k и c, такое, что

$$\Theta_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{Tn^k} U_{1/n}(\theta_i).$$

Поэтому

$$P_n^{(1)} \leqslant Tn^k \max_{\theta_2 \in \Theta_2 \setminus U_r(\widehat{\theta}_2)} \mathbf{P}(A_n(\theta_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha - k \ln n - R_0). \qquad (43)$$

Правая часть (43) в силу неравенства Чебышева не больше, чем

$$Tn^k \exp\left(-n \inf_{\theta_2\in\Theta_2\setminus U_r(\widehat{\theta}_2)} \left\{\Lambda_+\left(\alpha - \frac{k\ln n}{n} - \frac{\widetilde{R}_0}{n}\widehat{\theta}_1,\ \theta_2\right)\right\}\right);$$

в силу условия $A_1(c)$ получаем, что

$$P_n^{(1)} \leqslant Tn^k e^{-n\Lambda(\alpha)} \exp\left(-n\left(\frac{1}{c}\left(\frac{r^2}{c} - \frac{k\ln n}{n} - \frac{\widetilde{R}_0}{n} - c\frac{(k\ln n+\widetilde{R}_0)^2}{n^2}\right)\right)\right) =$$

$$= \exp(-n\Lambda(\alpha))\,\varepsilon_n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Лемма 6 доказана.

Для оценки $P_n^{(2)}$ заметим, что найдется конечное множество $\{\theta_1, \ldots, \theta_{T_n}\}$ точек из $\Theta_2 \cap U_{r_m}(\widehat{\theta}_2)$ таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{T_n} U_{1/n}(\theta_i) \supseteq U_{r_n}(\widehat{\theta}_2),$$

где $T_n = T(n\ln n)^{k/2}$, число $T<\infty$ зависит только от c и k. Поэтому

$$P_n^{(2)} \leqslant T_n \max_{\theta_2\in U_{r_n}(\widehat{\theta}_2)} \mathbf{P}\left(A_n(\theta_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha + k\ln n - \widetilde{R}_0,\ A_n^{(1)},\ \overline{A}_n^*\right).$$

Воспользуемся далее абсолютно непрерывным преобразованием (13):

$$\mathbf{P}\left(A_n(\theta_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha - k\ln n - \widetilde{R}_0,\ A_n^{(1)},\ \overline{A}_n^*\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-n\Lambda_+\left(\alpha - \frac{k\ln n}{n} - \frac{\widetilde{R}_0}{n};\ \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2\right)} \widehat{\mathbf{P}}_{\widehat{\theta}_1, \theta_2, \alpha - \frac{k\ln n}{n} - \frac{\widetilde{R}_0}{n}}\left(A_n^{(1)} \cap \overline{A}_n^*\right).$$

Получаем в силу условия $A_1(c)$

$$P_n^{(2)} \leqslant e^{-n\Lambda(\alpha)} n^{k/2 + \frac{\lambda(\alpha)}{2}k} (\ln n)^{k/2} R_n,$$

где

$$R_n = \sup_{\theta_2\in U_{r_n}(\widehat{\theta}_2)} \widehat{\mathbf{P}}_{\widehat{\theta}_1, \theta_2, \alpha - \frac{k\ln n}{n} - \frac{\widetilde{R}_0}{n}}\left(A_n^{(1)} \cap \overline{A}_n^*\right).$$

Непосредственно из леммы п. 3 (см. приложение) следует, что последовательность

$$\varepsilon_n \equiv n^{\frac{k+1}{2} + \frac{\lambda(\alpha)k}{2} + \delta} R_n \tag{44}$$

для некоторого $\delta > 0$, зависящего только от k и c, удовлетворяет (31). Из (44) получаем нужное неравенство

$$P_n^{(2)} \leqslant \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{n}} \varepsilon_n,$$

где ε_n удовлетворяет (31). Первое утверждение леммы 5 доказано.

Для доказательства второго утверждения леммы 5 заметим, что событие

$$\left\{\frac{S_n}{n} \in \alpha e + \Omega(e,\ D + \nu E,\ \delta)\right\}$$

содержится в событии

$$\left\{\sup_{\theta\in\Theta_2\cap U_\delta(\widehat{\theta}_2)} \widetilde{A}_n(\theta) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha\right\},$$

где

$$\widetilde{A}_n(\theta) = A_n(\widehat{\theta}_2) + A_n'(\widehat{\theta}_2)(\theta - \widehat{\theta}_2)^{\mathrm{T}} - \frac{(\theta_2 - \widehat{\theta}_2)\, nK_2(\theta - \widehat{\theta}_2)^{\mathrm{T}}}{2}.$$

Повторяя далее все этапы доказательства утверждения 1), получим доказательство утверждения 2). Лемма 5 доказана. Теорема 1 доказана.

ГЛАВА III

КЛАССЫ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕСТОВ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ДВУХ СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗ

§ 8. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КЛАССЫ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕСТОВ

1. Постановка задачи. Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$ — измеримое пространство, Θ — произвольное (параметрическое) множество. Рассмотрим семейство вероятностных мер

$$\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\},$$

заданных на σ-алгебре $\mathscr{B}$ и зависящих от параметра $\theta \in \Theta$. Пусть заданы два непустых непересекающихся подмножества Θ_1 и Θ_2 множества Θ. Наблюдая выборку

$$X_n = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbf{P}_\theta,$$

нужно различить две гипотезы

$$H_1 = \{\theta \in \Theta_1\} \quad \text{и} \quad H_2 = \{\theta \in \Theta_2\}.$$

Набор

$$\mathrm{E}_n = (\Theta_1, \Theta_2, \mathscr{P}, X_n),$$

который мы назовем *статистическим экспериментом* в задаче о проверке двух сложных параметрических гипотез (или просто *экспериментом*), полностью определяет сформулированную выше задачу.

Решающее правило (тест) T_n в задаче о проверке гипотез H_1 и H_2 — это измеримое отображение $T_n = T_n(X_n)$: $\mathscr{X}^n \to [0, 1]$. Значение $T_n(X_n)$ функции T_n в точке X_n есть вероятность принятия гипотезы H_2 в некотором эксперименте, не зависящем от более полной информации о распределении X_n; значение $1 - T_n$ есть вероятность принятия H_1.

Тест T_n характеризуется вероятностями ошибок первого рода

$$\varepsilon_\theta(T_n) = \mathbf{E}_\theta T_n(X_n), \quad \theta \in \Theta_1,$$

и второго рода

$$\delta_\theta(T_n) = \mathbf{E}_\theta(1 - T_n(X_n)), \quad \theta \in \Theta_2.$$

Эти характеристики, являясь функциями на Θ_1 и Θ_2, не совсем удобны для сравнения тестов. Поэтому обычно рассматривают собирательные характеристики, соответствующие *байесовской* и *минимаксной* постановкам задачи. В первом случае вводятся средние вероятности ошибок первого и второго рода

$$\varepsilon^Q(T_n) = \int\limits_{\Theta_1} \varepsilon_\theta(T_n)\, Q_1(d\theta), \quad \delta^Q(T_n) = \int\limits_{\Theta_2} \delta_\theta(T_n)\, Q_2(d\theta)$$

относительно пары распределений $Q = (Q_1, Q_2)$ на Θ_1 и Θ_2 (их называют априорными распределениями); отметим, что $\varepsilon^Q(T_n)$ зависит только

где

$$\tilde{A}_n(\theta) = A_n(\hat{\theta}_2) + A_n'(\hat{\theta}_2)(\theta - \hat{\theta}_2)^{\mathrm{T}} - \frac{(\theta_2 - \hat{\theta}_2)\, nK_2(\theta - \hat{\theta}_2)^{\mathrm{T}}}{2}.$$

Повторяя далее все этапы доказательства утверждения 1), получим доказательство утверждения 2). Лемма 5 доказана. Теорема 1 доказана.

ГЛАВА III

КЛАССЫ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕСТОВ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ДВУХ СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗ

§ 8. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КЛАССЫ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕСТОВ

1. Постановка задачи. Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$ — измеримое пространство, Θ — произвольное (параметрическое) множество. Рассмотрим семейство вероятностных мер

$$\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\},$$

заданных на σ-алгебре $\mathscr{B}$ и зависящих от параметра $\theta \in \Theta$. Пусть заданы два непустых непересекающихся подмножества Θ_1 и Θ_2 множества Θ. Наблюдая выборку

$$X_n = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbf{P}_\theta,$$

нужно различить две гипотезы

$$H_1 = \{\theta \in \Theta_1\} \quad \text{и} \quad H_2 = \{\theta \in \Theta_2\}.$$

Набор

$$\mathrm{E}_n = (\Theta_1,\ \Theta_2,\ \mathscr{P},\ X_n),$$

который мы назовем *статистическим экспериментом* в задаче о проверке двух сложных параметрических гипотез (или просто *экспериментом*), полностью определяет сформулированную выше задачу.

Решающее правило (тест) T_n в задаче о проверке гипотез H_1 и H_2 — это измеримое отображение $T_n = T_n(X_n)$: $\mathscr{X}^n \to [0,\ 1]$. Значение $T_n(X_n)$ функции T_n в точке X_n есть вероятность принятия гипотезы H_2 в некотором эксперименте, не зависящем от более полной информации о распределении X_n; значение $1 - T_n$ есть вероятность принятия H_1.

Тест T_n характеризуется вероятностями ошибок первого рода

$$\varepsilon_\theta(T_n) = \mathbf{E}_\theta T_n(X_n), \quad \theta \in \Theta_1,$$

и второго рода

$$\delta_\theta(T_n) = \mathbf{E}_\theta(1 - T_n(X_n)), \quad \theta \in \Theta_2.$$

Эти характеристики, являясь функциями на Θ_1 и Θ_2, не совсем удобны для сравнения тестов. Поэтому обычно рассматривают собирательные характеристики, соответствующие *байесовской* и *минимаксной* постановкам задачи. В первом случае вводятся средние вероятности ошибок первого и второго рода

$$\varepsilon^Q(T_n) = \int\limits_{\Theta_1} \varepsilon_\theta(T_n)\, Q_1(d\theta), \quad \delta^Q(T_n) = \int\limits_{\Theta_2} \delta_\theta(T_n)\, Q_2(d\theta)$$

относительно пары распределений $Q = (Q_1,\ Q_2)$ на Θ_1 и Θ_2 (их называют априорными распределениями); отметим, что $\varepsilon^Q(T_n)$ зависит только от Q_1, $\delta^Q(T_n)$ — только от Q_2. Во втором случае вводятся максимальные вероятности ошибок первого и второго рода

$$\varepsilon^*(T_n) = \max_{\theta\in\Theta_1} \varepsilon_\theta(T_n), \quad \delta^*(T_n) = \max_{\theta\in\Theta_2} \delta_\theta(T_n). \tag{1}$$

Для числовых последовательностей ε_n, δ_n будем писать

$$\varepsilon_n \lessapprox \delta_n, \quad \varepsilon_n \gtrapprox \delta_n, \quad \varepsilon_n \sim \delta_n,$$

если соответственно

$$\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n/\delta_n \leqslant 1, \quad \liminf_{n\to\infty} \varepsilon_n/\delta_n \geqslant 1, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n/\delta_n = 1.$$

2. Критерии отношения максимального правдоподобия и критерии байесовского типа. Пусть в измеримом пространстве $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ задана σ-конечная мера μ и для любого значения параметра $\theta\in\Theta$ вероятностная мера $\mathbf{P}_\theta$ абсолютно непрерывна относительно μ с плотностью

$$p(\theta, x) = \frac{d\mathbf{P}_\theta}{d\mu}(x), \quad \theta\in\Theta, \quad x\in\mathscr{X}.$$

Обозначим для $\theta\in\Theta$, $i, n = 1, 2, \ldots$

$$a_i(\theta) = \ln p(\theta, x_i), \quad A_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\theta). \tag{2}$$

Ясно, что $A_n(\theta)$ есть логарифмическая функция правдоподобия выборки X_n.

Для вещественного α определим однопараметрическое семейство тестов

$$T^*_{n,\alpha} = \mathbf{1}\left\{\sup_{\theta\in\Theta_2} A_n(\theta) - \sup_{\theta\in\Theta_1} A_n(\theta) > n\alpha\right\}, \tag{3}$$

Тесты $T^*_{n,\alpha}$ называют обычно *критериями отношения максимального правдоподобия* и просто *критериями отношения правдоподобия.*

Пусть задана пара $G=(G_1, G_2)$ распределений на множествах Θ_1 и Θ_2, которые мы будем понимать как априорные распределения соответственно на Θ_1 и Θ_2. Для вещественного α рассмотрим семейство тестов

$$T^G_{n,\alpha} = \mathbf{1}\left\{\ln \int_{\Theta_2} e^{A_n(\theta)} Q_2(d\theta) - \ln \int_{\Theta_1} e^{A_n(\theta)} Q_1(d\theta) > n\alpha\right\}. \tag{4}$$

Каждому α можно поставить в сответствие такое распределение $pG_1 + (1-p)G_2$ на множестве $\Theta_1 \cup \Theta_2$, что относительно него тест $T^G_{n,\alpha}$ окажется байесовским (т. е. таким, что средняя ошибка для него относительно распределения $pG_1+(1-p)G_2$ будет минимальной). Поэтому тесты $T^G_{n,\alpha}$ назовем *критериями байесовского типа.*

Для того чтобы ввести понятие *асимптотической* оптимальности, будем использовать два подхода: *частично байесовский* и *частично минимаксный.*

В настоящей работе значительно шире используется частично байесовский подход. Частично минимаксный подход используется меньше по следующим причинам: 1) в некоторых случаях (например, когда рассматриваются соприкасающиеся гипотезы) этот подход просто не применим; 2) там, где он применим, доказательства для него более сложные, а результаты слабые.

3. Частично байесовский подход. Пусть $Q=(Q_1, Q_2)$ — фиксированная пара априорных распределений. Для двух последовательностей ε_n^-, ε_n^+; $0\leqslant\varepsilon_n^-\leqslant\varepsilon_n^+\leqslant 1$, введем класс $\mathscr{K}^Q(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$тестов T_n таких, что

$$\varepsilon_n^- \leqslant \varepsilon^Q(T_n) \leqslant \varepsilon^+.$$

В настоящем пункте для краткости положим

$$\varepsilon^Q(T_n)=\varepsilon(T_n),\quad \delta^Q(T_n)=\delta(T_n).$$

Определение 1°. *Класс тестов $\mathcal{K}$ назовем $(Q,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$ полным минимальным классом $((Q,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-ПМ классом), если*

a°) для любого теста $T_n'\in\mathcal{K}^Q(\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$ найдется тест $T_n\in\mathcal{K}$ такой, что

$$\varepsilon(T_n)\leqslant\varepsilon(T_n'),\quad \delta(T_n)\leqslant\delta(T_n')$$

(*свойство полноты*);

b) для любого теста $T_n\in\mathcal{K}\cap\mathcal{K}^Q(\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$ и любого теста T_n' такого, что

$$\varepsilon(T_n)\geqslant\varepsilon(T_n'),$$

справедливо

$$\delta(T_n)\leqslant\delta(T_n')$$

(*свойство минимальности*).

Хорошо известно (лемма Неймана — Пирсона), что семейство рандомизированных тестов байесовского типа

$$\{T_{n,\alpha,p}^Q,\quad \alpha\in R^1,\quad 0\leqslant p\leqslant 1\},\tag{5}$$

где

$$T_{n,\alpha,p}^Q=1\left\{\ln\int\limits_{\Theta_2}e^{A_n(\theta)}Q_2(d\theta)-\ln\int\limits_{\Theta_1}e^{A_n(\theta)}Q_1(d\theta)>\right.$$
$$\left.>n\alpha\right\}+p1\left\{\ln\int\limits_{\Theta_2}e^{A_n(\theta)}Q_2(d\theta)-\ln\int\limits_{\Theta_1}e^{A_n(\theta)}Q_1(d\theta)=n\alpha\right\}$$

является $(Q,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-ПМ классом для любых $0\leqslant\varepsilon_n^-\leqslant\varepsilon_n^+\leqslant 1$. Заменив в определении 1° все точные неравенства $\leqslant$, $\geqslant$ на «асимптотические» $\lessapprox$, $\gtrapprox$, получим понятие класса асимптотически оптимальных критериев (на самом деле речь будет идти о последовательности критериев, для которой выполнены заданные асимптотические свойства):

Определение 1. *Класс $\mathcal{K}$ назовем $(Q,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$ — асимптотически полным минимальным классом $((Q,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-АПМ классом), если*

a) для любого теста $T_n'\in\mathcal{K}^Q(\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^-)$ найдется тест $T_n\in\mathcal{K}$ такой, что

$$\varepsilon(T_n)\lessapprox\varepsilon(T_n'),\ \delta(T_n)\lessapprox\delta(T_n')$$

(*свойство полноты*);

b) для любого теста $T_n\in\mathcal{K}\cap\mathcal{K}^Q(\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$ и любого теста T_n' такого, что

$$\varepsilon(T_n)\lessapprox\varepsilon(T_n'),\tag{6}$$

справедливо

$$\delta(T_n)\lessapprox\delta(T_n')$$

(*свойство минимальности*).

Пусть класс $\mathcal{K}$ является $(Q,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-АПМ классом. С точки зрения частично байесовского подхода каждый тест T_n из класса $\mathcal{K}\cap\cap\mathcal{K}^Q(\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$ является асимптотически оптимальным, т. е. обладает асимптотически минимальной средней вероятностью ошибки второго рода в подклассе всех тестов T_n', удовлетворяющих неравенству (6).

Ниже мы докажем, что в широких предположениях однопараметрические семейства тестов (см. (3) и (4))

$$\{T_{n,\alpha}^*,\ \alpha\in R^1\},\quad \{T_{n,\alpha}^G,\ \alpha\in R^1\}$$

(где $G=(G_1, G_2)$ — пара априорных распределений, необязательно совпадающих с $Q=(Q_1, Q_2)$) являются $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классами для подходящих Q, ε_n^-, ε_n^+.

К сожалению, в ряде задач возникает ситуация, когда не для всех ε_n^-, ε_n^+, сходящихся к нулю, существует $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ класс. Рассмотрим пример такой ситуации.

Пусть для эксперимента $\varepsilon_n=(\Theta_1, \Theta_2, \mathscr{P}, X_n)$ множества $\Theta_1=\{0\}$ и $\Theta_2=\{1\}$ одноточечны (гипотезы H_1 и H_2 простые), а семейство $\mathscr{P}$ состоит из двух нормальных распределений $\Phi_{0,1}$ и $\Phi_{1,1}$ с параметрами $(0, 1)$ и $(1. 1)$. В этом примере частично байесовский и частично минимаксный подходы совпадают. Априорные распределения Q_1, Q_2 вырождены и сосредоточены в точках 0 и 1 соответственно. Нетрудно убедиться, что класс тестов байесовского типа имеет вид

$$\left\{U_{n,y}^{\bar{x}},\ y\in R^1\right\},\tag{7}$$

где

$$U_{n,y}^{\bar{x}}=\mathbf{1}\{\bar{x}>y\},\quad \bar{x}=\bar{x}_n=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}.$$

Очевидно, что класс (7) является $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-ПМ классом для любых $0\leqslant\varepsilon_n^-\leqslant\varepsilon_n^+\leqslant 1$. Вероятности ошибок первого и второго рода теста $U_{n,y}^{\bar{x}}$ равны соответственно

$$\varepsilon_0\left(U_{n,y}^{\bar{x}}\right)=\overline{\Phi}\left(\sqrt{n}y\right),\quad \delta_1\left(U_{n,y}^{\bar{x}}\right)=\Phi\left(\sqrt{n}(y-1)\right),\tag{8}$$

где

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad \overline{\Phi}(u)=1-\Phi(u).$$

Выберем теперь последовательности

$$\varepsilon_n^-=\overline{\Phi}(2n^{1/4}),\quad \varepsilon_n^+=\overline{\Phi}(n^{1/4})$$

и убедимся, что не существует $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ класса. Доказательство проведем от противного.

Предположим, что некоторый класс $\mathscr{K}$ является $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классом. Пусть $T_n\in\mathscr{K}\cap\mathscr{K}^Q(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$, выберем тест $U_{n,y}^{x}$ из класса (7) такой, что

$$\varepsilon_0(T_n)=\varepsilon_0\left(U_{n,y}^{\bar{x}}\right).$$

Очевидно, что

$$n^{-1/4}\leqslant y\leqslant 2n^{-1/4}.$$

В силу того, что класс (7) является $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-ПМ классом,

$$\delta_1(T_n)\geqslant\delta_1\left(U_{n,y}^{\bar{x}}\right).\tag{9}$$

Рассмотрим далее тест $U_{n,y'}^{\bar{x}}$, где $y'=y-n^{-4/5}$. Легко показать, используя (8), что

$$\varepsilon_0\left(U_{n,y'}^{\bar{x}}\right)\sim\varepsilon_0\left(U_{n,y}^{\bar{x}}\right)=\varepsilon_0(T_n),\tag{10}$$

$$\delta_1\left(U_{n,y'}^{\bar{x}}\right)=o\left(\delta_1\left(U_{n,y}^{\bar{x}}\right)\right).\tag{11}$$

Из (9) и (11) получаем, что выполнено соотношение

$$\delta_1\left(U_{n,y'}^{\bar{x}}\right)=o(\delta_1(T_n)).\tag{12}$$

Таким образом, соотношения (10) и (12) противоречат условию в) в определении 1. Полученное противоречие заканчивает построение примера.

Подчеркнем, что эффект, который мы рассмотрели в примере, *связан только с тем, что для тестов* T_n *из рассмотренного класса* $\mathcal{K}^Q(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ *вероятности ошибок первого и второго рода имеют существенно разный порядок убывания* (скажем, $e^{-\sqrt{n}}$ и e^{-n} соответственно), и небольшое изменение первой вероятности приводит к большому изменению второй.

Для того чтобы обойти эти затруднения, рассмотрим вместо свойства в) в определении 1 следующее ослабленное свойство:

в′) для любого теста $T_n \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^Q(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ *и любого теста* T_n', *удовлетворяющих точному неравенству*

$$\varepsilon(T_n) \geqslant \varepsilon(T_n'),$$

справедливо

$$\delta(T_n) \leqslant \delta(T_n')$$

(*ослабленное свойство минимальности*).

Определение 1′. *Класс тестов* $\mathcal{K}$, *удовлетворяющий условию* а) *из определения* 1 *и условию в′), назовем* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$*-расширенным* АПМ *классом* ($(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-РАПМ *классом*).

Очевидно, что $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-РАПМ класс существует всегда, потому что построенный выше $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-ПМ класс является и $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-РАПМ классом для любых Q, $\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+$.

4. Частично минимаксный подход. Для двух последовательностей $\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+$, $0 \leqslant \varepsilon_n^- \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1$, введем класс $\mathcal{K}^*(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ тестов T_n таких, что

$$\varepsilon_n^- \leqslant \varepsilon^*(T_n) \leqslant \varepsilon_n^+,$$

где $\varepsilon^*(T_n)$ — максимальная ошибка первого рода (определяется формулой (1)).

В настоящем пункте для краткости положим

$$\varepsilon^*(T_n) = \varepsilon(T_n), \quad \delta^*(T_n) = \delta(T_n).$$

Определение 2⁰. *Класс тестов* $\mathcal{K}$ *назовем* $(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$*-полным минимальным классом* ($(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-ПМ *классом*), *если*

а°) для любого теста $T_n' \in \mathcal{K}^*(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ *найдется тест* $T_n \in \mathcal{K}$ *такой, что*

$$\varepsilon(T_n) \leqslant \varepsilon(T_n'), \quad \delta(T_n) \leqslant \delta(T_n')$$

(*свойство полноты*);

в⁰) для любого теста $T_0 \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^*(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ *и любого теста* T_n' *такого, что*

$$\varepsilon(T_n) \geqslant \varepsilon(T_n'),$$

справедливо

$$\delta(T_n) \leqslant \delta(T_n')$$

(*свойство минимальности*).

Хорошо известно (лемма Неймана — Пирсона), что если множества Θ_i — одноточечные (гипотезы H_1 и H_2 — простые), то семейство тестов (ср. с (5))

$$\{T^*_{n,\alpha,p},\ \alpha \in R^1,\ p \in [0, 1]\},$$

где

$$T^*_{n,\alpha,p} = \mathbf{1}\left\{\max_{\theta\in\Theta_2} A_n(\theta) - \max_{\theta\in\Theta_1} A_n(\theta) > n\alpha\right\} + \\ + p\mathbf{1}\left\{\max_{\theta\in\Theta_2} A_n(\theta) - \max_{\theta\in\Theta_1} A_n(\theta) = n\alpha\right\}$$

является $(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-ПМ классом для любых $0 \leqslant \varepsilon_n^- \leqslant \varepsilon_n^+ \leqslant 1$.

Если же гипотезы H_1 и H_2 не являются простыми, то для существования $(*, \varepsilon^-, \varepsilon^+)$-ПМ классов приходится накладывать очень жесткие ограничения на семейство вероятностных распределений $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$ типа монотонного отношения правдоподобия (см. [1]).

Рассмотрим теперь асимптотическую постановку задачи в рамках частично минимаксного подхода. Если заменить в условиях a^0) и $б^0$) определения 2^0 все точные неравенства $\geqslant$, $\leqslant$ на асимптотические $\gtrsim$, $\lesssim$, то получим условия, которые мы обозначим а) и в) соответственно.

Определение 2. *Класс* $\mathscr{K}$ *назовем* $(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$- *асимптотически полным минимальным классом* ($(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом*), *если выполнены введенные выше условия* а), в).

Пусть класс $\mathscr{K}$ является $(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классом. С точки зрения частично минимаксного подхода каждый тест T_n из класса $\mathscr{K} \cap \mathscr{K}^*(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ асимптотически оптимальный, т. е. обладает асимптотически минимальной максимальной вероятностью ошибки второго рода в классе всех тестов T'_n, удовлетворяющих неравенству

$$\varepsilon(T_n) \gtrsim \varepsilon(T'_n).$$

Пример, приведенный в п. 3, показывает, что в ряде задач не существует $(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классов для некоторых последовательностей ε_n^-, ε_n^+.

Как и в п. 3, для обхода этой трудности рассмотрим вместо свойства в) в определении 2 следующее ослабленное свойство:

в′) для любого теста $T_n \in \mathscr{K} \cap \mathscr{K}^*(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ *и любого теста* T'_n, *удовлетворяющих точному неравенству*

$$\varepsilon(T_n) \geqslant \varepsilon(T'_n),$$

справедливо

$$\delta(T_n) \lesssim \delta(T'_n)$$

(*ослабленное свойство минимальности*).

Определение 2′. *Класс тестов* $\mathscr{K}$, *удовлетворяющих условию* а) *из определения 2 и условию* в′), *назовем* $(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-*расширенным* АПМ *классом* ($(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-РАПМ *классом*).

В следующем параграфе докажем, что если множества Θ_1 и Θ_2 состоят из конечного числа точек, то в широких предположениях классы

$$\{T^*_{n,\alpha},\ \alpha \in R^1\}, \quad \{T^G_{n,\alpha},\ \alpha \in R^1\} \tag{13}$$

являются $(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классами или $(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-РАПМ классами для подходящих последовательностей $(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$.

К сожалению, в случае, когда параметрические множества Θ_1 и Θ_2 являются замкнутыми непересекающимися «телесными» подмножествами из R^k, нам не удается доказать асимптотическую оптимальность в смысле определений 2 и 2′ классов (13). В связи с этим понадобится еще одно ослабление понятия асимптотически оптимального класса.

Пусть $p \in (0, 1]$ — фиксированное число. Введем следующие условия на класс $\mathscr{K}$.

a_p) *для любого теста* $T'_n \in \mathcal{K}^*(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ *найдется тест* $T_n \in \mathcal{K}$ *такой, что*

$$p\varepsilon(T_n) \leqslant \varepsilon(T'_n), \quad p\delta(T_n) \leqslant \delta(T'_n);$$

b_p) *для любого теста* $T_n \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^*(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ *и любого теста* T'_n *такого, что*

$$p\varepsilon(T_n) \geqslant \varepsilon(T'_n),$$

справедливо

$$p\delta(T_n) \leqslant \delta(T'_n).$$

Очевидно, что условия a_p) и b_p) являются ослаблениями условий а) и в).

Определение 2_p. *Будем говорить, что класс* $\mathcal{K}$ *является* $(p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом, если для него выполнены условия* a_p) и b_p).

Заметим, что определение $(p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ класса при $p = 1$ совпадает с определением $(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ класса. Кроме того, при $p < 1$ не целесообразно наряду с $(p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классами рассматривать понятие расширенного $(p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^-)$-АПМ класса. Дело в том, что если по аналогии с предыдущим ввести понятие $(p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-РАПМ класса, то легко убедиться, что любой $(p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-РАПМ класс $\mathcal{K}$ является $(p', \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классом при $p' < p$.

В § 10 найдены достаточные условия, при которых классы (13) при подходящих $p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+$ будут $(p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классами в задаче о проверке сложных далеких гипотез, где множества Θ_i являются невырожденными телесными подмножествами R^k.

5. Основные понятия, связанные с характеризацией асимптотики оптимальных тестов в задаче о проверке двух сложных далеких гипотез. Рассмотрим эксперимент

$$E_n = (\Theta_1, \Theta_2, \mathcal{P}, X_n), \tag{14}$$

где $\mathcal{P}$ — семейство вероятностных мер

$$\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}, \ \Theta_1 \cup \Theta_2 \subseteq \Theta.$$

Пусть, как и ранее,

$$a(\theta) \equiv \ln \frac{d\mathbf{P}_\theta}{d\mu}(x), \quad \theta \in \Theta, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Для вещественного λ и пары $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2$ введем функции

$$\varphi_i(\lambda; \theta_1, \theta_2) \equiv \mathbf{E}_{\theta_i} e^{\lambda(a(\theta_2) - a(\theta_1))}, \ i = 1, 2.$$

Функции φ_1 и φ_2 связаны соотношением

$$\varphi_2(\lambda; \theta_1, \theta_2) = \varphi_1(1 + \lambda; \theta_1, \theta_2). \tag{15}$$

Функция $\varphi(\lambda; \theta_1, \theta_2) = \varphi_1(\lambda; \theta_1, \theta_2)$ по аргументу λ является преобразованием Лапласа над $\mathbf{P}_{\theta_1}$-распределением случайной величины

$$\xi(\theta_1, \theta_2) = a(\theta_2) - a(\theta_1),$$

где x имеет распределение $\mathbf{P}_{\theta_1}$. Поэтому она выпукла вниз. Поскольку

$$\varphi(0; \theta_1, \theta_2) = \mathbf{E}_{\theta_1} 1 = 1, \quad \varphi(1, \theta_1, \theta_2) = \mathbf{E}_{\theta_2} 1 = 1,$$

эта функция конечна на отрезке $\lambda \in [0, 1]$.

Предположим выполненным условие

$$A_0. \quad \mathbf{P}_{\theta_1} \neq \mathbf{P}_{\theta_2} \quad \text{при} \quad (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2.$$

Это условие естественно в рассматриваемой задаче проверки двух гипотез (иначе гипотезы могут быть неразличимы), и мы *всегда будем предполагать, что оно выполнено.* Из этого условия следует, что при любых $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2$ функция $\varphi(\lambda, \theta_1, \theta_2)$ не равна тождественно 1. Обозначим для $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2$

$$\begin{aligned} d^-(\theta_1, \theta_2) &\equiv \mathbf{E}_{\theta_2}(a(\theta_2) - a(\theta_1)), \\ d^+(\theta_1, \theta_2) &\equiv \mathbf{E}_{\theta_1}(a(\theta_2) - a(\theta_1)). \end{aligned} \tag{16}$$

Эти числа, очевидно, можно представить в виде

$$\begin{aligned} d^-(\theta_1, \theta_2) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\lambda;\ \theta_1, \theta_2)\Big|_{\lambda=0} < 0, \\ d^+(\theta_1, \theta_2) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\lambda;\ \theta_1, \theta_2)\Big|_{\lambda=1} > 0, \end{aligned} \tag{17}$$

так что они всегда определены (хотя могут быть и бесконечными). Если обозначить

$$d^- \equiv \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2} d^-(\theta_1, \theta_2),\quad d^+ \equiv \inf_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2} d^+(\theta_1, \theta_2), \tag{18}$$

то в силу (17) отрезок

$$A = [d^-,\ d^+]$$

всегда содержит точку $\alpha = 0$ (множество A может вырождаться в точку 0, если, например, множества Θ_1 и Θ_2 соприкасаются). Введем далее функции аргумента

$$\Lambda_i(\alpha;\ \theta_1, \theta_2) = \sup_\lambda \{\alpha\lambda - \ln \varphi_i(\lambda; \theta_1, \theta_2)\}, \tag{19}$$

$$\lambda_i(\alpha; \theta_1, \theta_2) = \frac{\partial \Lambda_i(\alpha; \theta_1, \theta_2)}{\partial\alpha}, \tag{20}$$

$$\sigma_i^2(\alpha; \theta_1, \theta_2) = \left[\frac{\partial^2 \Lambda_i(\alpha; \theta_1, \theta_2)}{\partial\alpha^2}\right]^{-1}. \tag{21}$$

Функция $\Lambda_i(\alpha;\ \theta_1, \theta_2)$ по аргументу α есть функция уклонений случайной величины $a(\theta_2) - a(\theta_1)$ для $\mathbf{P}_{\theta_i}$-распределения x_1. Поэтому (см. свойства функции уклонений) производная (20) всегда существует и число $\lambda_i = \lambda_i(\alpha,\ \theta_1,\ \theta_2)$ есть точка, в которой достигается sup в определении (19) функции $\Lambda_i(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2)$. Функция $\sigma^2(\alpha; \theta_1, \theta_2)$ играет роль дисперсии случайной величины $a(\theta_2) - a(\theta_1)$ относительно распределения

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{i,\alpha}(A) = \frac{\mathbf{E}_{\theta_i}\left(e^{\lambda_i(\alpha;\theta_1,\theta_2)(a(\theta_2)-a(\theta_1))};\ A\right)}{\varphi_i(\lambda_i(\alpha; \theta_1, \theta_2); \theta_1, \theta_2)}.$$

Поскольку функции φ_1 и φ_2 связаны соотношением (15), справедливы равенства

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2) &= \Lambda_1(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2) - \alpha, \\ \lambda_2(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2) &= \lambda_1(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2) - 1, \\ \sigma_1^2(\alpha; \theta_1, \theta_2) &= \sigma_2^2(\alpha; \theta_1, \theta_2). \end{aligned} \tag{22}$$

Для $\alpha \in [d^-,\ d^+]$ справедливо (см. (16) и (18))

$$\mathbf{E}_{\theta_1}(a(\theta_2) - a(\theta_1)) \geqslant d^+ \geqslant \alpha,$$

$$\mathbf{E}_{\theta_2}(a(\theta_2) - a(\theta_1)) \leqslant d^- \leqslant \alpha.$$

Поэтому (см. свойства функций уклонений в гл. I)

$$\lambda_1(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2)\geqslant 0,\ \lambda_2(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2)\leqslant 0.$$

Из последнего в силу (22) получаем, что для $(\theta_1,\ \theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2$, $\alpha\in$ $\in[d^-,\ d^+]$ выполняется

$$0\leqslant\lambda_1(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2)\leqslant 1,\ -1\leqslant\lambda_2(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2)\leqslant 0. \tag{23}$$

Для $\alpha\in[d^-,\ d^+]$ определим функцию

$$\Lambda(\alpha)=\inf_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2}\Lambda(\alpha;\theta_1,\theta_2). \tag{24}$$

В тех случаях, когда inf в (24) достигается на единственной паре $(\widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2)=(\widehat{\theta}_1(\alpha),\ \widehat{\theta}_2(\alpha))\in\Theta_1\times\Theta_2$, можно определить функции

$$\lambda(\alpha)=\lambda(\alpha;\ \widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2),\ \sigma^2(\alpha)=\sigma^2(\alpha;\ \widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2).$$

Забегая вперед, скажем, что функции $\Lambda(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$, $\sigma^2(\alpha)$ позволяют вычислить асимптотику больших уклонений функционалов $S(A_n)$ и $I(A_n)$ (см. гл. II). Например, в широких предположениях

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}(S(A_n)>n\alpha)\sim\frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{n}\ \lambda(\alpha)\,\sigma(\alpha)}\chi_1(\alpha),$$

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}(S(A_n)\leqslant n\alpha)\sim\frac{e^{-n(\Lambda(\alpha)-\alpha)}}{\sqrt{n}\,(1-\lambda(\alpha))\,\sigma(\alpha)}\chi_2(\alpha),$$

где функции $\chi_1(\alpha)$, $\chi_2(\alpha)$, не зависящие от n, найдены явно.

Заметим, что при $\alpha=0$ функции Λ_1 и Λ_2 совпадают (см. 22)). Поэтому можно ввести симметричное «расстояние»

$$\rho(\theta_1,\theta_2)=\Lambda_1^{1/2}(0;\theta_1,\theta_2)=\Lambda_2^{1/2}(0;\theta_1,\theta_2) \tag{25}$$

между точками $\theta_1\in\Theta_1$ и $\theta_2\in\Theta_2$. Если в эксперименте E_n семейство $\mathscr{P}=$ $=\{\mathbf{P}_\theta;\ \theta\in\Theta\}$ является гауссовским вида $\Phi_{\theta,B}$, где невырожденная ковариационная матрица B не зависит от θ, то «расстояние» (25) превращается в настоящее метрическое расстояние

$$\rho_0(\theta_1,\theta_2)=\left[\frac{(\theta_1-\theta_2)\,B^{-1}(\theta_1-\theta_2)^{\mathrm{T}}}{2}\right]^{1/2}. \tag{26}$$

Можно показать, что и в общем случае в широких предположениях «расстояние» (25) асимптотически эквивалентно расстоянию (26): при $\theta_1-\theta_1\to 0$ выполняется

$$\rho(\theta_1,\ \theta_2)\sim\rho_0(\theta_1,\ \theta_2).$$

Поэтому «расстояние» между множествами Θ_1 и Θ_2, которое мы определим как

$$\sigma(\Theta_1,\Theta_2)\equiv\inf_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2}\rho(\theta_1,\theta_2)=\Lambda(0), \tag{27}$$

поможет нам различать случаи так называемых *далеких*, *близких* и *соприкасающихся гипотез*.

Мы будем употреблять термин далекие гипотезы в ситуации, когда объем n выборки X_n велик, а множества Θ_1 и Θ_2 отделены друг от друга на расстояние, существенно больше, чем $1/\sqrt{n}$ (это соответствует случаю, когда «расстояние» (27) удовлетворяет соотношению $\sqrt{n}\,\rho(\Theta_1,$ $\Theta_2)\to\infty$ при $n\to\infty$). Ясно, что при этом можно построить тесты, для которых обе вероятности ошибок (максимальные или усредненные) неограниченно убывают при $n\to\infty$. В классе таких тестов и будет выполняться построение асимптотически оптимальных критериев. Случаю далеких гипотез посвящены § 9—11. Как уже отмечалось во введении, такой подход является альтернативным к концепции *близких гипотез*, когда расстояние между множествами Θ_1 и Θ_2 сравнимо с $1/\sqrt{n}$ (это соответствует случаю, когда $0 < c_1 \leqslant \sqrt{n}\rho(\Theta_1, \Theta_2) \leqslant c_2 < \infty$), а вероятности ошибок отделены от 0 при $n \to \infty$.

В § 12 будут рассмотрены асимптотически оптимальные тесты для случая *соприкасающихся гипотез* (когда расстояние между множествами Θ_1 и Θ_2 равно 0). Если эти множества фиксированы и на них заданы фиксированные априорные распределения, то нетрудно видеть, что при этом усредненные вероятности ошибок первого и второго рода также будут стремиться к нулю. Следовательно, мы вновь можем рассматривать задачу построения классов асимптотически оптимальных тестов в смысле определений, данных в настоящем параграфе.

§ 9. КЛАССЫ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕСТОВ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ДВУХ СЛОЖНЫХ ДАЛЕКИХ КОНЕЧНОТОЧЕЧНЫХ ГИПОТЕЗ

1. Постановка задачи. Основные условия. Рассмотрим эксперимент

$$E_n = (\Theta_1, \Theta_2, \mathscr{P}, X_n). \tag{1}$$

В настоящем параграфе мы будем считать, что множества Θ_1 и Θ_2 состоят из конечного числа точек в задаче проверки двух сложных «далеких» (см. § 8) параметрических гипотез

$$H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}, \ H_2 = \{\theta \in \Theta_2\}.$$

Основные утверждения настоящего параграфа посвящены нахождению условий, при которых классы тестов

$$T^*_{n,\alpha} = \mathbf{1}\left\{\max_{\theta\in\Theta_2} A_n(\theta) - \max_{\theta\in\Theta_1} A_n(\theta) > n\alpha\right\}, \tag{2}$$

$$T^G_{n,\alpha} = \mathbf{1}\left\{\ln \int_{\Theta_2} e^{A_n(\theta)} G_2(d\theta) - \ln \int_{\Theta_1} e^{A_n(\theta)} G_1(d\theta) > n\alpha\right\}, \tag{3}$$

где функции $A_n(\theta)$ и распределения G_1, G_2 определены в § 8, будут асимптотически оптимальными (см. § 8). В настоящем пункте введем классы $\mathscr{A}(c)$ троек

$$(\mathrm{E}_n, \alpha^-, \alpha^+), \tag{4}$$

для которых и сформулируем основные теоремы об асимптотической оптимальности классов (2) и (3).

В соответствии с определениями, введенными в § 8, каждому статистическому эксперименту E_n можно поставить в соответствие числа d^-, d^+, и для $\alpha \in [d^-, d^+]$, $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2$ ввести функции (см. (8.22))

$$\Lambda(\alpha;\ \theta_1, \theta_2) = \Lambda_1(\alpha;\ \theta_1, \theta_2),$$

$$\lambda(\alpha;\ \theta_1, \theta_2) = \lambda_1(\alpha;\ \theta_1, \theta_2),$$

$$\sigma^2(\alpha; \theta_1, \theta_2) = \sigma_1^2(\alpha; \theta_1, \theta_2).$$

Считаем условие A_0 выполненным (см. § 8).

Будем говорить, что тройка (4) принадлежит классу $\mathscr{A}_1(c)$, $c \in [1, \infty)$, если выполнено условие

$A_1(c)$.

1) $|\Theta_1| \leqslant c$, $|\Theta_2| \leqslant c$, $[\alpha^-, \alpha^+] \subseteq [d^-, d^+]$, где $|\Theta|$ — число точек, входящих в множество Θ;

2) существует пара $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2$ такая, что для всех $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$ выполняется

$$\Lambda(\alpha; \theta_1, \theta_2) - \Lambda(\alpha; \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2) \geqslant \frac{1}{c}\left[\delta(|\theta_1 - \widehat{\theta}_1|) + \delta(|\theta_2 - \widehat{\theta}_2|)\right],$$

где $\delta(t) = 1$ при $t > 0$, $\delta(0) = 0$;

Условие 2) означает, что минимум

$$\Lambda(\alpha)=\min\{\Lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2):(\theta_1,\ \theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2\}$$

достигается на паре $(\widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2)$:

$$\Lambda(\alpha)=\Lambda(\alpha;\ \widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2),$$

и эта пара единственна и одна для всех $\alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$.

Для тройки $(\mathrm{E}_n,\ \alpha^-,\ \alpha^+)$ из класса $\mathscr{A}_1(c)$ определим, следуя § 8, функции

$$\lambda(\alpha)=\lambda(\alpha;\ \widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2),\ \sigma^2(\alpha)=\sigma^2(\alpha;\ \widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2).$$

Введем далее последовательности функций

$$\varepsilon_n(\alpha)=\frac{e^{-n(\alpha)}}{\sqrt{2\pi n}\,\lambda(\alpha)\,\sigma(\alpha)}, \tag{5}$$

$$\delta_n(\alpha)=\frac{e^{-n(\Lambda(\alpha)-\alpha)}}{\sqrt{2\pi n}\,(1-\lambda(\alpha))\,\sigma(\alpha)},$$

(они будут определять асимптотику максимальных ошибок тестов $T^*_{n,\alpha}$ и $T^G_{n,\alpha}$) и обозначим

$$\varphi(\lambda)=\mathbf{E}_{\widehat{\theta}_1}e^{\lambda(a(\widehat{\theta}_2)-a(\widehat{\theta}_1))},$$

$$f(s)=\varphi(is),\ \lambda,\ s\in R^1.$$

Будем говорить, что тройка $(\mathrm{E}_n,\ \alpha^-,\ \alpha^+)$ принадлежит классу $\mathscr{A}_2(c)$, где $c\in[1,\ \infty)$, если выполнено условие $A_2(c)$. Для любого $\alpha\in\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$ выполняется

1) $\varphi(\lambda(\alpha)\,(1\pm 1/c))\,e^{-\alpha\lambda(\alpha)(1\pm 1/c)}\leqslant 1+c\lambda^2(\alpha)$,
2) $\varphi((1-\lambda(\alpha))\,(1\pm 1/c))\,e^{-\alpha(1-\lambda(\alpha))(1\pm 1/c)}\leqslant 1+c(1-\lambda(\alpha))^2$,
3) $|f(s)|\leqslant 1-\lambda^2(\alpha)/c$ при $|s|\geqslant c\lambda(\alpha)$,
4) $|f(s)|\leqslant 1-(1-\lambda(\alpha))^2/c$ при $|s|\geqslant c(1-\lambda(\alpha))$,
5) $\Lambda(\alpha)\leqslant c,\ \Lambda(\alpha)-\alpha\leqslant\alpha$.

В силу условия $A_1(c)$ при $\alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$ выполнено $\alpha\in[d^-,\ d^+]$, поэтому (см. (8.23)) $\lambda(\alpha)\in[0,\ 1]$. Таким образом, $A_2(c)$ будет следовать из условия

$A_2^0(c)$.
1) $\varphi(1+1/c)\leqslant 1+c,\ \varphi(-1/c)\leqslant 1+c$,
2) $|f(s)|\leqslant 1-1/c$ при $|s|\geqslant c$,
3) $\Lambda(\alpha^\pm)\leqslant c,\ |\alpha^\pm|\leqslant c$.

Группа условий $A_2(c)$ обеспечит равномерное выполнение соотношений

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(A_n(\widehat{\theta}_2)-A_n(\widehat{\theta}_1)>n\alpha\right)\sim\varepsilon_n(\alpha),$$

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}\left(A_n(\widehat{\theta}_2)-A_n(\widehat{\theta}_1)\leqslant n\alpha\right)\sim\delta_n(\alpha),$$

при $\alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$, $\sqrt{n}\lambda(\alpha)\to\infty$ $\sqrt{n}(1-\lambda(\alpha))\to\infty$ при $n\to\infty$.

Будем говорить, что тройка $(E_n,\ \alpha^-,\ \alpha^+)$ принадлежит классу $\mathscr{A}(c)$, если она принадлежит одновременно классам $\mathscr{A}_1(c)$ и $\mathscr{A}_2(c)$.

2. Формулировки основных утверждений. Для $c\in[1,\ \infty)$ и тройки (E_n,α^-,α^+) через $\mathscr{G}(c)$ обозначим класс пар $Q=(Q_1,Q_2)$ априорных распределений Q_1 на Θ_1 и Q_2 на Θ_2 таких, что

$$Q_i(\widehat{\theta}_i)\geqslant 1/c,\ i=1,\ 2;$$

через $\mathscr{G}_0(c)$ обозначим подкласс $\mathscr{G}(c)$ такой, что

$$\inf_{\theta\in\Theta_i} Q_i(\theta)\geqslant 1/c, \quad i=1,2.$$

В теоремах 1, 2, сформулированных ниже, используются условия

$$(\varepsilon_n,\ \alpha^-,\ \alpha_+)\in\mathscr{A}(c),$$
$$Q=(Q_1,\ Q_2)\in g(c).$$

При этом будет подразумеваться «схема серий», т. е. все координаты эксперимента E_n (см. (1)), числа α^-, α^+, меры Q_1, Q_2 могут зависеть от n; от параметра n могут зависеть и функции $\Lambda(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$, $\sigma^2(\alpha)$, и вектора $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$.

Обозначим

$$\mathscr{K}_n^{(1)}=\{T^*_{n,\alpha},\alpha\in R^1\},$$
$$\mathscr{K}_n^{(2)}(G)=\{T^G_{n,\alpha},\alpha\in R^1\},$$

где тесты $T^*_{n,\alpha}$ и $T^G_{n,\alpha}$ определены формулами (2), (3). Пусть для $\alpha\in\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$, $G=(G_1,\ G_2)\in\mathscr{G}(c)$

$$\alpha'=\alpha+r/n,\ r=\ln G_1(\widehat{\theta}_1)-\ln G_2(\widehat{\theta}_2). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть* $c\in[1,\ \infty)$, $N_n\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Пусть* $(E_n,\ \alpha^-,\ \alpha^+)\in\in\mathscr{A}(c)$, $G=(G_1,\ G_2)\in\mathscr{G}^0(c)$. *Пусть* $\lambda(\alpha)$, $\alpha^\pm$, N_n *таковы, что выполнены условия*

$$\lambda(\alpha^-)\geqslant N_n/\sqrt{n},\ \ (1-\lambda(\alpha^+))\geqslant N_n/\sqrt{n}.$$

Тогда:

I. *Можно выбрать последовательности*

$$\varepsilon_n^-\sim\varepsilon_n(\alpha^-),\ \varepsilon_n^+\sim\varepsilon_n(\alpha^+) \tag{7}$$

(*где функция* $\varepsilon_n(\alpha)$ *определена в* (5)) *такие, что класс* $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(*,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-РАПМ *классом.*

II. *Для* $\alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$ *выполнено*

$$\varepsilon^*(T^*_{n,\alpha})\sim\varepsilon_n(\alpha), \tag{8}$$
$$\varepsilon^*(T^G_{n,\alpha})\sim\varepsilon_n(\alpha'), \tag{9}$$
$$\delta^*(T^*_{n,\alpha})\sim\delta_n(\alpha), \tag{10}$$
$$\delta^*(T^G_{n,\alpha})\sim\delta_n(\alpha').$$

III. *Если, кроме того,*

$$\lambda(\alpha^-)\geqslant 1/c,$$

то класс $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(*,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-АПМ *классом.*

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *и дополнительно* $Q=(Q_1,\ Q_2)\in\mathscr{G}(c)$. Тогда:

I. *Можно выбрать последовательности*

$$\varepsilon_n^-\sim Q_1(\widehat{\theta}_1)\,\varepsilon_n(\alpha^+),\ \varepsilon_n^+\sim Q_1(\widehat{\theta}_1)\,\varepsilon_n(\alpha^-),$$

такие, что класс $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(Q,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-РАПМ *классом.*

II. *Для* $\alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$

$$\varepsilon^Q(T^*_{n,\alpha})\sim Q_1(\widehat{\theta}_1)\,\varepsilon_n(\alpha),$$
$$\delta^Q(T^*_{n,\alpha})\sim Q_2(\widehat{\theta}_2)\,\delta_n(\alpha),$$
$$\varepsilon^Q(T^G_{n,\alpha})\sim Q_1(\widehat{\theta}_1)\,\varepsilon_n(\alpha'),$$
$$\delta^Q(T^G_{n,\alpha})\sim Q_2(\widehat{\theta}_2)\,\delta_n(\alpha').$$

III. *Если, кроме того,*

$$\lambda(\alpha^-) \geqslant 1/c,$$

то класс $\mathcal{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathcal{K}_n^{(2)}(G)$) *является* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом.*

3. Доказательство теоремы 1 для класса $\mathcal{K}_n^{(1)}$ основано на леммах 1, 2. В этих леммах предполагаются выполненными условия теоремы 1.

Нам понадобятся следующие обозначения. Наряду с тестами $T_{n,\alpha}^*$, определенными в (2), введем тесты

$$T_{n,\alpha}^{*-} = 1\left\{\max_{\theta\in\Theta_2} A_n(\theta) - \max_{\theta\in\Theta_1} A_n(\theta) \geqslant n\alpha\right\},$$

$$T_{n,\alpha}^0 = 1\{A_n(\widehat{\theta}_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha\},$$

где вектора $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ определены в условии $A_1(c)$,

$$T_{n,\alpha}^{0-} = 1\{A_n(\widehat{\theta}_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) \geqslant n\alpha\},$$

$$T_{n,\alpha,p}^* = pT_{n,\alpha}^* + (1-p)\, T_{n,\alpha}^{*-}.$$

Наряду с максимальными вероятностями ошибок $\varepsilon^*(T_n)$, $\delta^*(T_n)$ введем вероятности

$$\varepsilon_0^*(T_n) = \varepsilon_{\widehat{\theta}_1}(T_n),\ \delta_0^*(T_n) = \delta_{\widehat{\theta}_2}(T_n).$$

Докажем части I и III теоремы 1 для последовательностей

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^- &\equiv \max\left(\varepsilon^*\left(T_{n,\alpha+}^{*-}\right), \varepsilon^*\left(T_{n,\alpha+}^{0-}\right)\right), \\ \varepsilon_n^+ &\equiv \min\left(\varepsilon_0^*\left(T_{n,\alpha-}^{*-}\right), \varepsilon_0^*\left(T_{n,\alpha-}^{0}\right)\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Лемма 1. *Пусть тест* T_n *и последовательность* $\alpha' = \alpha_n'$ *таковы, что выполнены соотношения*

$$\varepsilon^*(T_n) \leqslant \varepsilon_0^*(T_{n,\alpha'}^0), \tag{12}$$

$$\delta^*(T_n) \sim \delta_0^*(T_{n,\alpha'}^0). \tag{13}$$

Тогда тест T_n *обладает свойством*

в) *для любого теста* T_n' *из неравенства*

$$\varepsilon^*(T_n') \leqslant \varepsilon^*(T_n)$$

следует неравенство

$$\delta^*(T_n') \gtrsim \delta^*(T_n).$$

II. *Пусть для любого* ε_n, *удовлетворяющего неравенству*

$$\varepsilon_n \lesssim \varepsilon^*(T_n), \tag{14}$$

найдется α' *такое, что*

$$\varepsilon_n \leqslant \varepsilon_0^*(T_{n,\alpha'}^0), \tag{15}$$

$$\delta^*(T_n) \sim \delta_0^*(T_{n,\alpha'}^0). \tag{16}$$

Тогда тест T_n *удовлетворяет свойству*

в′) *для любого теста* T_n' *из неравенства*

$$\varepsilon^*(T_n') \lesssim \varepsilon^*(T_n) \tag{17}$$

следует неравенство

$$\delta^*(T_n') \gtrsim \delta^*(T_n).$$

Лемма 2. *Пусть* $\alpha = \alpha_n \in \left[\alpha_n^- - \frac{c}{n}, \alpha_n^+ + \frac{c}{n}\right]$. *Тогда*

I.
$$\varepsilon_0^*\left(T_{n,\alpha}^0\right) \sim \varepsilon_0^*\left(T_{n,\alpha}^{0-}\right) \sim \varepsilon_n(\alpha),$$
$$\delta_0^*\left(T_{n,\alpha}^0\right) \sim \delta_0^*\left(T_{n,\alpha}^{0-}\right) \sim \delta_n(\alpha);$$

II. *Для* $\nu = \nu_n$, $|\nu| \leqslant 1/c$
$$\varepsilon_n\left(\alpha + \frac{1}{n}\nu\right) \sim \varepsilon_n(\alpha)\, e^{-\lambda(\alpha)\nu},$$
$$\delta_n\left(\alpha + \frac{1}{n}\nu\right) \sim \delta_n(\alpha)\, e^{-(1-\lambda(\alpha))\nu};$$

III. *Для* $\alpha' = \alpha_n' \equiv \alpha - \frac{1}{n}\nu,\ 0 \leqslant \nu \leqslant 1/c$
$$\varepsilon_0^*\left(T_{n,\alpha'}^0\right) \geqslant \varepsilon_0^*\left(T_{n,\alpha}^0\right) + \varepsilon_n(\alpha)\,\lambda(\alpha)\,\nu/c_1,$$
где $c_1 \in [1, \infty]$ *зависит только от* c;

IV.
$$\left|\varepsilon^*\left(T_{n,\alpha}^*\right) - \varepsilon_0^*\left(T_{n,\alpha}^0\right)\right| = \varepsilon_n(\alpha)\,\lambda(\alpha)\,o(1), \tag{18}$$
$$\left|\delta^*\left(T_{n,\alpha}^*\right) - \delta_0\left(T_{n,\alpha}^0\right)\right| = \delta_n(\alpha)\,(1 - \lambda(\alpha))\,o(1).$$

Леммы 1, 2 докажем несколько позже, а сейчас с помощью этих лемм докажем теорему 1 для класса $\mathcal{K}_n^{(1)}$.

Соотношения (8) и (10) следуют из утверждений I и IV леммы 2. Из утверждений I и IV леммы 2 получаем также, что последовательности $\varepsilon_n^\pm$, определенные формулой (11), удовлетворяют соотношениям (7).

Пусть $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$. Убедимся, что тест $T_{n,\alpha}^*$ удовлетворяет условию I леммы 1. В силу утверждений III и IV леммы 2 найдется последовательность $\nu = \nu_n \in (0, 1/c)$, $\nu \to 0$, такая, что для $\alpha' = \alpha - \frac{1}{n}\nu$ и для всех достаточно больших n выполнено неравенство
$$\varepsilon^*\left(T_{n,\alpha}^*\right) \leqslant \varepsilon_0^*\left(T_{n,\alpha'}^0\right).$$
При этом в силу утверждений I, II и IV леммы 2 справедливо
$$\delta^*\left(T_{n,\alpha}^*\right) \sim \delta_0^*\left(T_{n,\alpha'}^0\right),$$
т. е. выполнено условие I леммы 1. В силу леммы 1 тест $T_{n,\alpha}^*$ удовлетворяет свойству в). Поскольку в силу выбора $\varepsilon_n^\pm$ (см. (11)) справедливо
$$T_{n,\alpha}^* \in \mathcal{K}^*\left(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+\right),$$
если $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$, то любой тест T_n из класса $\mathcal{K}_n^{(1)} \cap \mathcal{K}^*\left(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+\right)$ удовлетворяет в).

Докажем теперь, что класс $\mathcal{K}_n^{(1)}$ удовлетворяет свойству полноты для класса $\mathcal{K}\left(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+\right)$. Пусть тест T_n' лежит в классе $\mathcal{K}^*\left(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^\pm\right)$, т. е.
$$\varepsilon_n^- \leqslant \varepsilon_n \leqslant \varepsilon_n^+, \text{ где } \varepsilon_n = \varepsilon^*\left(T_n'\right).$$
Для этого ε_n построим тест
$$T_{n,\alpha,p}^0 = pT_{n,\alpha}^0 + (1-p)\,T_{n,\alpha}^{0-} \tag{19}$$
такой, что
$$\varepsilon_n = \varepsilon_0^*\left(T_{n,\alpha,p}^0\right).$$
В силу выбора $\varepsilon_n^\pm$ (см. (11)) получаем, что
$$\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]; \tag{20}$$

поскольку тест $T^0_{n,\alpha,p}$ является наиболее мощным тестом уровня $1-\varepsilon_n$ в задаче о проверке двух простых гипотез

$$H_1^{(0)} = \{\theta = \widehat{\theta}_1\}, H_2^{(0)} = \{\theta = \widehat{\theta}_2\} \tag{21}$$

и

$$\varepsilon_0^*(T_n') \leqslant \varepsilon_0^*(T^0_{n,\alpha,p}) = \varepsilon_n,$$

получаем, что

$$\delta_0^*(T_n') \geqslant \delta_0^*(T_n') \geqslant \delta^*(T^0_{n,\alpha,p}).$$

В силу (23) из утверждений леммы 2 получаем, что

$$\varepsilon^*(T^*_{n,\alpha}) \sim \varepsilon_0^*(T^0_{n,\alpha,p}), \delta^*(T^*_{n,\alpha}) \sim \delta_0^*(T^0_{n,\alpha,p}),$$

поэтому справедливо требуемое:

$$\varepsilon^*(T_n') \gtrsim \varepsilon^*(T'_{n,\alpha}), \delta^*(T_n') \gtrsim \delta^*(T^*_{n,\alpha}),$$

Часть I теоремы 1 для класса $\mathcal{K}_n^{(1)}$ доказана.

Для доказательства части III теоремы 1, относящейся к классу $\mathcal{K}_n^{(1)}$, достаточно убедиться, что каждый тест T_n из $\mathcal{K}_n^{(1)} \cap \mathcal{K}^*(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ удовлетворяет свойству в$'$). Для этого, в свою очередь, достаточно убедиться, что каждый тест $T^*_{n,\alpha}$, $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$, удовлетворяет условиям второй части леммы 1. Поскольку эта проверка очевидным образом осуществляется с помощью утверждений леммы 2, часть III теоремы 1 для класса $\mathcal{K}_n^{(1)}$ доказана.

Часть теоремы 1, относящаяся к классу $\mathcal{K}_n^{(1)}$, доказана.

4. Доказательство теоремы 1 для класса $\mathcal{K}_n^{(2)}(G)$ основывается на леммах 3, 4. В этих леммах выполнены условия теоремы 1.

Лемма 3. *Для любых $c \in [1, \infty)$ и $M \in (0, \infty)$ найдется $c_1 \in [1, \infty)$ такое, что если для $n = 1, 2, \ldots$*

$$(E_n, \alpha^-, \alpha^+) \in \mathcal{A}(c),$$

то для $n \geqslant c_1$ выполняется

$$\left(E_n, \alpha^- - \frac{M}{n}, \alpha^+ + \frac{M}{n}\right) \in \mathcal{A}(c_1).$$

Лемма 4.

I. *Для любых $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$*

$$\begin{aligned} &\varepsilon^*(T^G_{n\,\alpha}) \sim \varepsilon_n(\alpha'), \\ &\delta^*(T^G_{n,\alpha}) \sim \delta_n(\alpha'), \end{aligned} \tag{22}$$

где последовательность α' определена формулой (6).

II. *Найдется $N < \infty$ и для любого $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$ найдется $\widetilde{\alpha}$ такое, что*

$$|\alpha - \widetilde{\alpha}| \leqslant N/c,$$

и для всех достаточно больших n справедливо

$$\begin{aligned} &\varepsilon^*(T^G_{n,\alpha}) \leqslant \varepsilon_0^*(T^0_{n,\widetilde{\alpha}}), \\ &\delta^*(T^G_{n,\alpha}) \sim \delta_0^*(T^0_{n,\widetilde{\alpha}}). \end{aligned}$$

Леммы 3, 4 докажем позже, а сейчас с помощью этих лемм проведем доказательство части теоремы 1, относящейся к классу $\mathcal{A}_n^{(2)}(G)$.

Пусть

$$r = r_n \equiv \ln G_1(\widehat{\theta}_1) - \ln G_2(\widehat{\theta}_2),$$
$$\bar{r} = \max_{n\geqslant 1}\{|r_n|\},\ M = \max\{\bar{r}, N\},$$

где $N < \infty$ из леммы 4. Для выбранного M в силу леммы 3 найдется $c_1 \in [1, \infty)$ такое, что для $n \geqslant c_1$ тройка $\left(E_n, \alpha^- - \frac{M}{n}, \alpha^+ + \frac{M}{n}\right)$ принадлежит классу $\mathscr{A}(c_1)$. В силу уже доказанной части теоремы 1 верны все утверждения этой теоремы для класса $\mathscr{K}_n^{(1)}$ и отрезка

$$\left[\alpha^- - \frac{r_n}{n}, \alpha^+ + \frac{r_n}{n}\right]. \tag{23}$$

В частности, для любого теста $T_n' \in \mathscr{K}^*(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ (где последовательности $\varepsilon_n^\pm$ строятся в соответствии с формулами (11) по отрезку (23)) найдется тест $T_{n,\alpha}^* \in \mathscr{K}_n^{(1)}$ такой, что для $\alpha' = \alpha + \frac{1}{n} r_n$

$$\varepsilon^*(T_{n,\alpha'}^*) \leqslant \varepsilon^*(T_n'),$$
$$\delta^*(T_{n,\alpha'}^*) \leqslant \delta^*(T_n').$$

При этом (см. доказательство части теоремы 1, относящейся к $\mathscr{K}_n^{(1)}$) последовательность α' принадлежит интервалу (23). В силу части I леммы 4 и соотношений (8) и (10) получаем для $\alpha' = \alpha + \frac{1}{n} r_n$ соотношения

$$\varepsilon^*(T_{n,\alpha}^G) \sim \varepsilon^*(T_{n,\alpha'}^*) \leqslant \varepsilon^*(T_n'),$$
$$\delta^*(T_{n,\alpha}^G) \sim \delta^*(T_{n,\alpha'}^*) \leqslant \delta^*(T_n'),$$

т. е. класс $\mathscr{K}^{(2)}(G)$ удовлетворяет свойству а) для класса $\mathscr{K}^*(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$. Аналогично проверяется свойство в) (свойство в$'$)). Теорема 1 для класса $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$ доказана.

Нам осталось провести доказательства лемм 1—4.

5. Доказательство леммы 1. I. Пусть тест T_n' удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon^*(T_n') \leqslant \varepsilon^*(T_n).$$

Тогда в силу (12) и неравенства

$$\varepsilon_0^*(T_n') \leqslant \varepsilon^*(T_n') \tag{24}$$

получаем

$$\varepsilon_0^*(T_n') \leqslant \varepsilon_0^*(T_{n,\alpha'}^0). \tag{25}$$

Поскольку тест $T_{n,\alpha'}^0$ является наболее мощным в задаче о проверке двух простых гипотез (21), из (25) следует, что

$$\delta_0^*(T_n') \geqslant \delta_0^*(T_{n,\alpha'}^0).$$

Поскольку

$$\delta^*(T_n') \geqslant \delta_0^*(T_n'),$$

то в силу (13) имеем

$$\delta^*(T_n') \gtrsim \delta^*(T_n).$$

Часть I леммы 1 доказана.

II. Пусть тест T_n' удовлетворяет неравенству (17). В силу неравенств (25) и (14) для $\varepsilon_n = \varepsilon_0^*(T_n')$ справедливо

$$\varepsilon_n \lesssim \varepsilon^*(T_n).$$

Поэтому в силу (15) и (16) получаем, что найдется α' такое, что

$$\varepsilon_0^*(T_n') \leqslant \varepsilon_0^*(T_{n,\alpha'}^0), \tag{26}$$

$$\delta_0^*(T_n) \sim \delta_0^*(T_{n,\alpha'}^0). \tag{27}$$

Поскольку тест $T_{n,\alpha'}^0$ является наиболее мощным в задаче о проверке двух простых гипотез (21), из (26) следует

$$\delta_0^*(T_n') \geqslant \delta_0^*(T_{n,\alpha'}^0).$$

Из последнего получаем неравенство

$$\delta^*(T_n') \geqslant \delta_0^*(T_{n,\alpha'}^0).$$

что, вместе с (27), дает соотношение

$$\delta^*(T_n') \gtrsim \delta^*(T_n).$$

Свойство в$'$) для теста T_n установлено. Лемма 1 доказана.

6. Вспомогательные леммы. Непосредственно из экспоненциального неравенства Чебышева вытекает

Лемма 5. *Для* $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2$, $\alpha = \alpha_n \in [d^-(\theta_1, \theta_2), d^+(\theta_1, \theta_2)]$ *справедливы неравенства*

$$\mathbf{P}_{\theta_1}(A_n(\theta_2) - A_n(\theta_1) > n\alpha) \leqslant e^{-n\Lambda(\alpha;\theta_1,\theta_2)},$$

$$\mathbf{P}_{\theta_2}(A_n(\theta_2) - A_n(\theta_1) \leqslant n\alpha) \leqslant e^{-n(\Lambda(\alpha;\theta_1,\theta_2)-\alpha)}.$$

Пусть далее задана функция $\Phi(\lambda, \alpha)$, отображающая квадрат

$$I_{\widehat{\lambda}} \times I_{\widehat{\alpha}} \equiv [\widehat{\lambda} - 1/c, \widehat{\lambda} + 1/c] \times [\widehat{\alpha} - 1/c, \widehat{\alpha} + 1/c]$$

в R^1. Обозначим

$$\Phi'(\lambda, \alpha) = \frac{\partial \Phi(\lambda, \alpha)}{\partial \alpha}; \ \dot{\Phi}(\lambda, \alpha) = \frac{\partial \Phi(\lambda, \alpha)}{\partial \lambda}.$$

Следующая лемма является частным случаем леммы 5 (приложение).

Лемма 6. *Пусть для некоторого* $c \in [1, \infty)$ *выполнены условия*

1) $\Phi(\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha}) = 0$,
2) $\dot{\Phi}(\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha}) \geqslant 1/c$,
3) $|\dot{\Phi}(\lambda_1, \alpha_1) - \dot{\Phi}(\lambda_2, \alpha_2)| \leqslant c[|\lambda_1 - \lambda_2|^{1/c} + |\alpha_1 - \alpha_2|^{1/c}]$

для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in I_{\widehat{\lambda}}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in I_{\widehat{\alpha}}$,

4) $|\Phi'(\lambda, \alpha)| \leqslant c$ *для* $(\lambda, \alpha) \in I_{\widehat{\lambda}} \times I_{\widehat{\alpha}}$.

Тогда существуют $c_1 \in [1, \infty)$, *зависящее только от* c, *и функция* $\lambda(\alpha)$, $\alpha \in [\widehat{\alpha} - 1/c_1, \widehat{\alpha} + 1/c_1]$, *такие, что*

5) $\Phi(\lambda(\alpha), \alpha) = 0$ *при* $\alpha \in [\widehat{\alpha} - 1/c_1, \widehat{\alpha} + 1/c_1]$,
6) $\lambda(\widehat{\alpha}) = \widehat{\lambda}$,
7) $|\lambda'(\alpha)| \leqslant c_1$ *при* $\alpha \in [\widehat{\alpha} - 1/c_1, \widehat{\alpha} + 1/c_1]$.

Выберем для тройки

$$(E_n, \alpha^-, \alpha^+) \in \mathscr{A}(c) \tag{28}$$

и для числа $t \in [\alpha^-, \alpha^+]$ функцию

$$\Phi(\lambda, \alpha) = \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} - \alpha,$$

где

$$\varphi(\lambda) \equiv \mathbf{E}_{\widehat{\theta}_1} e^{\lambda a(\widehat{\theta}_2)},$$

числа $\widehat{\lambda}=\lambda(t)$, $\widehat{\alpha}=t$. Можно убедиться, что для набора

$$(\Phi(\lambda, \alpha), \widehat{\lambda}, \widehat{\alpha})$$

найдется число $c_1 \in [1, \infty)$, зависящее только от c, такое, что для этого c_1 выполнены условия 1) — 4) леммы 6. Поэтому в силу леммы 6 для некоторого $c_2 \in [1, \infty)$ выполняется неравенство

$$|\lambda'(\alpha)| \leqslant c_2, \ \alpha \in [t - 1/c_2, \ t + 1/c_2].$$

Тем самым мы доказали, что найдется $c_3 \in [1, \infty)$, зависящее только от c, такое, что из соотношения (28) следует неравенство

$$|\lambda'(\alpha)| \leqslant c_3 \text{ при } \alpha \in [\alpha^- - 1/c_3, \ \alpha^+ + 1/c_3]. \qquad (29)$$

С помощью соотношения (29) проведем

7. Доказательство леммы 3. Пусть

$$(\varepsilon_n, \ \alpha^-, \ \alpha^+) \in \mathscr{A}(c), \quad n = 1, \ 2, \ \ldots,$$

число $M < \infty$. Нужно доказать, что найдется $c_1 \in [1, \infty)$ такое, что для всех $n \geqslant c_1$ «расширенная» тройка

$$\left(E_n, \alpha^- - \frac{M}{n}, \alpha^+ + \frac{M}{n}\right) \qquad (30)$$

принадлежит классу $\mathscr{A}(c_1)$. Рассмотрим условие $A_1(c)$; в этом условии в проверке нуждается только пункт 2). Выполним эту проверку.

В силу свойства выпуклости функция уклонений удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(\alpha + \nu) \geqslant \Lambda(\alpha) + \nu\Lambda'(\alpha) = \Lambda(\alpha) + \nu\lambda(\alpha). \qquad (31)$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = \alpha + \delta, |\delta| \leqslant \frac{M}{n}$, $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$. В силу (31) и $A_1(c)$ справедливо

$$\Lambda(\widetilde{\alpha}; \ \theta_1, \ \theta_2) - \Lambda(\widetilde{\alpha}; \ \widehat{\theta}_1, \ \widehat{\theta}_2) \geqslant 1/c - D_n,$$

где

$$D_n = \delta\lambda(\alpha; \ \theta_1, \ \theta_2) - \delta\lambda(\alpha + \varepsilon\delta, \ \widehat{\theta}_1, \ \widehat{\theta}_2).$$

Поскольку $0 \leqslant \lambda(\alpha; \ \theta_1, \ \theta_2) \leqslant 1$ при $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$, и в силу (29) для $|\delta| \leqslant$ $\leqslant 1/c_3$ выполняется

$$|\lambda(\alpha + \varepsilon\delta; \ \widehat{\theta}_1, \ \widehat{\theta}_2)| \leqslant 1 + \delta c_3,$$

получаем

$$|D_n| \leqslant \delta + \delta(1 + \delta c_3) \leqslant \frac{M}{n}(2 + c_3).$$

Поэтому для достаточно больших $n (\geqslant c_1)$ нужное неравенство

$$\Lambda(\widetilde{\alpha}; \ \theta_1, \ \theta_2) - \Lambda(\widetilde{\alpha}; \ \widehat{\theta}_1, \ \widehat{\theta}_2) \geqslant 1/c_1$$

имеет место. Тройка (30) удовлетворяет условию $A_1(c_1)$. Поскольку условие $A_2(c)$ с помощью неравенства (29) проверяется очевидным образом, лемма 3 доказана.

8. Доказательство леммы 2. В силу леммы 3 достаточно доказать все утверждения леммы 2 для последовательности $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$, где $(E_n, \ \alpha^-, \ \alpha^+) \in \mathscr{A}(c)$.

Утверждение I леммы 2 относится к вероятностям

$$\mathbf{P}_F(S_n > n\alpha), \ \mathbf{P}_F(S_n \geqslant n\alpha), \qquad (32)$$

где $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ — сумма независимых случайных величин с общим распределением F, и пара $(F, \ \alpha)$ имеет вид $(F, \ \alpha)$ или $(F^*, \ -\alpha)$, где

F есть $\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}$ — распределение случайной величины в $a(\widehat{\theta}_2)-a(\widehat{\theta}_1)$, F^* — $\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}$ — распределение случайной величины $a(\widehat{\theta}_2)-a(\widehat{\theta}_1)$. Из наших условий следует, что пары (F, α) и $(F^*, -\alpha)$ удовлетворяют условиям $I.C_1(c)$ и $I.C_2(c)$ для некоторого $c\in[1, \infty)$ (в одномерном случае условие $\mathrm{I}.C_3(c)$, которое присутствует в общем случае, исчезает). Поэтому в силу теоремы 4.1 утверждение I леммы 2 имеет место. Утверждения II и III леммы 2 тоже относятся к вероятностям (32), и они довольно просто доказываются с помощью техники, развитой в § 4, и с помощью неравенства (29).

Проведем доказательство части VI леммы 2. Для этого введем для $i=1, 2$, $n=1, 2, \ldots$ события

$$B_i^{(n)}=\left\{\sup_{\theta\in\Theta_i,\theta\neq\widehat{\theta}_i} A_n(\theta)-A_n(\widehat{\theta}_i)\geqslant -n^{-1/4}\right\}.$$

Лемма 7. *Для любого* $\alpha\in[\alpha^-, \alpha^+]$ *справедливы неравенства*

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(A_n(\widehat{\theta}_2)-A_n(\widehat{\theta}_1)\geqslant n\alpha, B_1^{(n)}\right)\leqslant o(1)\,\varepsilon_n(\alpha)\,\lambda(\alpha), \tag{33}$$

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}\left(A_n(\widehat{\theta}_2)-A_n(\widehat{\theta}_1)\leqslant n\alpha, B_2^{(n)}\right)\leqslant o(1)\,\delta_n(\alpha)\,(1-\lambda(\alpha)). \tag{34}$$

Лемму 7 докажем несколько позже, а сейчас с ее помощью проведем доказательство части VI леммы 2. Для $\theta_1\in\Theta_1$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}_{\theta_1}\equiv\mathbf{P}_{\theta_1}\left(\max_{\theta_2\in\Theta_2}A_n(\theta_2)-\max_{\theta_1\in\Theta_1}A_n(\theta_1)>n\alpha\right)\leqslant\mathbf{P}_{\theta_1}\left(\max_{\theta_2\in\Theta_2}A_n(\theta_2)-\right.$$
$$\left.-A_n(\theta_1)>n\alpha\right)\leqslant\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\mathbf{P}_{\theta_1}(A_n(\theta_2)-A_n(\theta_1)>n\alpha). \tag{35}$$

В силу леммы 5 и условия $A_1(c)$ для $\theta_1\in\Theta_1$, $\theta_1\neq\widehat{\theta}_1$ справедливо

$$\mathbf{P}_{\theta_1}\leqslant\sum_{\theta_2\in\Theta_2}e^{-n\Lambda(\alpha;\theta_1,\theta_2)}\leqslant ce^{-n(\Lambda(\alpha)+1/c)}. \tag{36}$$

Поскольку правая часть последнего неравенства есть $o(1)\lambda(\alpha)\varepsilon_n(\alpha)$, мы доказали, что

$$\left|\varepsilon^*(T^*_{n,\alpha})-\varepsilon_0^*(T^*_{n,\alpha})\right|\leqslant o(1)\,\lambda(\alpha)\,\varepsilon_n(\alpha).$$

Покажем теперь, что

$$\left|\varepsilon_0^*(T^{*-}_{n,\alpha})-\varepsilon_0^*(T^{*-}_{n,\alpha})\right|\leqslant o(1)\,\lambda(\alpha)\,\varepsilon_n(\alpha). \tag{37}$$

Неравенство (37) представим в виде двух неравенств

$$\varepsilon_0^*(T^{*-}_{n,\alpha})\leqslant\varepsilon_0^*(T^{0-}_{n,\alpha})+o(1)\,\lambda(\alpha)\,\varepsilon_n(\alpha), \tag{38}$$

$$\varepsilon_0^*(T^{0-}_{n,\alpha})\leqslant\varepsilon_0^*(T^{*-}_{n,\alpha})+o(1)\,\lambda(\alpha)\,\varepsilon_n(\alpha). \tag{39}$$

Докажем (38); в силу (35) для $\theta_1=\widehat{\theta}_1$ получаем

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\equiv\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(\max_{\theta_2\in\Theta_2}A_n(\theta_2)-\max_{\theta_1\in\Theta_1}A_n(\theta_1)>n\alpha\right)\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(A_n(\widehat{\theta}_2)-A_n(\widehat{\theta}_1)>n\alpha\right)+\Sigma_n,$$

где

$$\Sigma_n\equiv\sum_{\substack{\delta_2\in\Theta_2\\ \theta_2\neq\widehat{\theta}_2}}\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(A_n(\theta_2)-A_n(\widehat{\theta}_1)>n\alpha\right).$$

Σ_n допускает в силу леммы 5 и условия $A_1(c)$ нужную оценку, так что неравенство (38) доказано.

Для вывода (39) рассмотрим цепочку неравенств

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1} \equiv \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(\max_{\theta_2\in\Theta_2} A_n(\theta_2) - \max_{\theta_1\in\Theta_1} A_n(\theta_1) > n\alpha\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(A_n(\widehat{\theta}_2) - \max_{\theta_1\in\Theta_1} A_n(\theta_1) > n\alpha\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(A_n(\widehat{\theta}_2) - \max_{\theta_1\in\Theta_1} A_n(\theta_1) > n\alpha, \overline{B}_1^{(n)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left(A_n(\widehat{\theta}_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha, \overline{B}_1^{(n)}\right);$$

в последнем неравенстве мы воспользовались тем, что на событии $B_1^{(n)}$ справедливо

$$\max_{\theta_1\in\Theta_1} A_n(\theta_1) = A_n(\widehat{\theta}_1).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1} \geqslant \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2,$$

где

$$\mathbf{P}_1 \equiv \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(A_n(\widehat{\theta}_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha\right),$$

$$\mathbf{P}_2 \equiv \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(A_n(\widehat{\theta}_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha, B_1^{(n)}\right).$$

В силу леммы 7 вероятность P_2 допускает нужную оценку, поэтому неравенства (38) и (39) доказаны. Неравенство (18) доказано. Поскольку неравенство (19) доказывается аналогично, то лемма 2 доказана.

9. **Доказательство леммы 7.** Для любого $0 < \nu < \infty$ справедливо

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}\left(S_n < n\alpha, B_2^{(n)}\right) \leqslant \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}(S_n \leqslant n\alpha - \nu) +$$

$$+ \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}\left(S_n \in [n\alpha - \nu, n\alpha], B_2^{(n)}\right) \equiv \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2, \tag{40}$$

где $S_n = A_n(\widehat{\theta}_2) - A_n(\widehat{\theta}_1)$. В силу леммы 5 справедливо

$$\mathbf{P}_1 \leqslant e^{-n\left(\Lambda\left(\alpha - \frac{\nu}{n}\right) - \left(\alpha - \frac{\nu}{n}\right)\right)}.$$

Далее, в силу неравенства (32), которое можно применить к функции $\Lambda(\alpha) - \alpha$, получаем

$$\mathbf{P}_1 \leqslant e^{-n(\Lambda(\alpha)-\alpha)-\nu(1-\lambda(\alpha))}.$$

Выбираем далее

$$\nu = \nu_n \equiv \frac{\sqrt{n}}{N_n} \ln n\,(1/2 + \delta),$$

где $\delta > 0$, последовательность N_n из формулировки теоремы 1. Тогда получаем, что

$$\mathbf{P}_1 \leqslant \frac{e^{-n(\Lambda(\alpha)-\alpha)}}{\sqrt{n}\, n^{\delta}} = \delta_n(\alpha)(1 - \lambda(\alpha))\, O\left(n^{-\delta}\right).$$

Чтобы оценить $\mathbf{P}_2$ в (40), воспользуемся абсолютно непрерывным преобразованием меры $\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}$:

$$\widetilde{\mathbf{P}}(S_n - n\alpha \in U) \equiv \frac{\mathbf{E}_{\widehat{\theta}_2}\left(e^{-(1-\lambda(\alpha))S_n};\ S_n - n\alpha \in U\right)}{\mathbf{E}_{\widehat{\theta}_2} e^{-(1-\lambda(\alpha))S_n}}.$$

Получаем

$$\mathbf{P}_2 \leqslant e^{-n(\Lambda(\alpha)-\alpha)} \widetilde{\mathbf{E}} (\exp(-(1-\lambda(\alpha))(S_n - n\alpha));$$
$$S_n - n\alpha \in [-\nu, 0],\ B_2^{(n)}) \leqslant e^{-n(\Lambda(\alpha)-\alpha)} \widetilde{\mathbf{P}}_2,$$

где

$$\widetilde{\mathbf{P}}_2 \equiv \widetilde{\mathbf{P}}\left(S_n - n\alpha \in [-\nu, 0],\ B_2^{(n)}\right).$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}\left(S_n \leqslant n\alpha,\ B_2^{(n)}\right) \leqslant \delta_n(\alpha)(1-\lambda(\alpha))\left[0(1) + \sqrt{n}\widetilde{\mathbf{P}}_2\right],$$

поэтому для получения неравенства (34) достаточно убедиться, что

$$\widetilde{\mathbf{P}}_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}(o)\,1. \tag{41}$$

Для этого оценим вероятность

$$\mathbf{P}_3 \equiv \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(S_n \geqslant n\alpha - \nu,\ B_2^{(n)}\right).$$

Поскольку справедливо включение

$$\left\{A_n\left(\widehat{\theta}_2\right) - A_n\left(\widehat{\theta}_1\right) \geqslant n\alpha - \nu\right\} \cap B_2^{(n)} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{\max_{\substack{\theta_2 \in \Theta_2 \\ \theta_2 \neq \widehat{\theta}_2}} A_n(\theta_2) - A_n\left(\widehat{\theta}_1\right) \geqslant n\alpha - \nu - \frac{n^{1/4}}{c}\right\},$$

верно неравенство

$$\mathbf{P}_3 \leqslant \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(\max_{\substack{\theta_2 \in \Theta_2 \\ \theta_2 \neq \widehat{\theta}_2}} A_n(\theta_2) - A_n\left(\widehat{\theta}_1\right) \geqslant n\alpha - \nu - \frac{n^{1/4}}{c}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\substack{\theta_2 \in \Theta_2 \\ \theta_2 \neq \widehat{\theta}_2}} \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(A_n(\theta_2) - A_n\left(\widehat{\theta}_1\right) \geqslant n\alpha - \nu - \frac{n^{1/4}}{c}\right).$$

В силу леммы 5 получаем

$$\mathbf{P}_3 \leqslant c \max_{\substack{\theta_2 \in \Theta_2 \\ \theta_2 \neq \widehat{\theta}_2}} e^{-n\Lambda\left(\alpha - \frac{\nu}{n} - \frac{n^{1/4-1}}{c};\widehat{\theta}_1,\theta_2\right)},$$

и в силу неравенства (31)

$$\mathbf{P}_3 \leqslant c \max_{\substack{\theta_2 \in \Theta_2 \\ \theta_2 \neq \widehat{\theta}_2}} e^{-n\left[\Lambda\left(\alpha;\widehat{\theta}_1,\theta_2\right) - \left(\frac{\nu}{n} + \frac{1}{cn^{3/4}}\right)\lambda\left(\alpha,\widehat{\theta}_1,\theta_2\right)\right]}.$$

Поскольку при $\alpha \in [d^-, d^+]$ выполняется

$$\lambda(\alpha, \theta_1, \theta_2) \in [0, 1],$$

то

$$\mathbf{P}_3 \leqslant c \max_{\substack{\theta_2 \in \Theta_2 \\ \theta_2 \neq \widehat{\theta}_2}} \exp\left\{-n\left[\Lambda\left(\alpha;\widehat{\theta}_1,\theta_2\right) - \left(\frac{\nu}{n} + \frac{1}{cn^{3/4}}\right)\right]\right\}.$$

Воспользуемся далее условием $A_1(c)$, в силу которого

$$\min_{\substack{\theta_2 \in \Theta_2 \\ \theta_2 \neq \widehat{\theta}_2}} \Lambda\left(\alpha;\widehat{\theta}_1,\theta_2\right) \geqslant \Lambda(\alpha) + 1/c.$$

Получаем

$$\mathbf{P}_3 \leqslant ce^{-n\left[\Lambda(\alpha)+1/c-\frac{\nu}{n}-\frac{1}{cn^{3/4}}\right]},$$

так что в силу выбора ν справедливо

$$\mathbf{P}_3 \leqslant ce^{-n\Lambda(\alpha)-\frac{n}{c}+\frac{\sqrt{n}}{N_n}\ln n\left(\frac{1}{2}+\delta\right)+\frac{n^{1/4}}{c}}. \tag{42}$$

Оценим далее снизу вероятность

$$\mathbf{P}_4 \equiv \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(S_n - n\alpha \in [-\nu, 0],\ B_2^{(n)}\right).$$

Для этого заметим, что введенная нами мера $\widetilde{\mathbf{P}}$ связана с мерой $\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}$ соотношением

$$\widetilde{\mathbf{P}}(S_n - n\alpha \in U) = \mathbf{E}_{\widehat{\theta}_1}\left(e^{\lambda(\alpha)(S_n-n\alpha)};\ S_n - n\alpha \in U\right)e^{n\Lambda(\alpha)}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}_4 = e^{-n\Lambda(\alpha)}\widetilde{\mathbf{E}}\left(e^{-\lambda(\alpha)(S_n-n\alpha)};\quad S_n - n\alpha \in [-\nu, 0],\ B_2^{(n)}\right) \geqslant$$
$$\geqslant e^{-n\Lambda(\alpha)}\widetilde{\mathbf{P}}\left(S_n - n\alpha \in [-\nu, 0],\ B_2^{(n)}\right).$$

Из последнего, в силу определения вероятности $\widetilde{\mathbf{P}}$, получаем, что

$$\mathbf{P}_4 \geqslant e^{-n\Lambda(\alpha)}\widetilde{\mathbf{P}}_2. \tag{43}$$

Легко видеть, что $\mathbf{P}_3 \geqslant \mathbf{P}_4$, так что из неравенств (43) и (42) следует (41). Утверждение (34) доказано. Поскольку утверждение (33) доказывается аналогично, то лемма 7 доказана.

10. Доказательство леммы 4. Для $i = 1, 2$ справедливо

$$\ln \int_{\Theta_i} e^{A_n(\theta)} G_i(d\theta) = \max_{\theta \in \Theta_i} A_n(\theta) + D_i,$$

где

$$D_i = \ln \int_{\Theta_i} e^{A_n(\theta) - A_n\left(\overset{+}{\theta}_{i,n}\right)} G_i(d\theta). \tag{44}$$

Поскольку функция, стоящая под знаком интеграла в (44), не превосходит 1, то

$$D_i \leqslant 0.$$

С другой стороны, для $G \in \mathscr{G}(c)$ справедливо

$$D_i \geqslant \ln \min_{\theta \in \Theta_i} G(\theta) \geqslant \ln 1/c = -\ln c.$$

Поэтому для $\theta_1 \in \Theta_1$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}_{\theta_1} \equiv \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\ln \int_{\Theta_2} e^{A_n(\theta)} G_2(d\theta) - \ln \int_{\Theta_1} e^{A_n(\theta)} G_1(d\theta) > n\alpha\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\max_{\theta \in \Theta_2} A_n(\theta) - \max_{\theta \in \Theta_1} A_n(\theta) \geqslant n\alpha + D_1 - D_2\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\max_{\theta \in \Theta_2} A_n(\theta) - A_n(\theta_1) \geqslant n\alpha - \ln c\right).$$

Из последнего получаем для $\theta_1 \neq \widehat{\theta}_1$ соотношение (см. (36))

$$\mathbf{P}_{\theta_1} = o(1)\,\varepsilon_n(\alpha). \tag{45}$$

Оценим теперь сверху вероятность $\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}$:

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1} \equiv \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(\ln \int\limits_{\Theta_2} e^{A_n(\theta)} G_2(d\theta) - \ln \int\limits_{\Theta_1} e^{A_n(\theta)} G_1(d\theta) > n\alpha\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(\ln \int\limits_{\Theta_2} e^{A_n(\theta)} G_2(d\theta) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha + \ln G_1(\widehat{\theta}_1)\right) =$$

$$= \mathbf{P}_{\theta_1}(\text{— » —};\ B_2^{(n)}) + \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}(\text{— » —};\ \overline{B}_2^{(n)}) \equiv \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2,$$

где событие $B_2^{(n)}$ введено перед леммой 7. Слагаемое $\mathbf{P}_1$ не больше, чем

$$\sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}(A_n(\theta_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) > n\alpha - \ln c,\ B_2^{(n)}),$$

поэтому в силу лемм 3, 7

$$\mathbf{P}_1 = o(1)\,\varepsilon_n(\alpha). \tag{46}$$

Для оценки слагаемого $\mathbf{P}_2$ заметим, что на событии $\overline{B}_2^{(n)}$ выполняется соотношение

$$A_n(\widehat{\theta}_2) \geqslant \max_{\substack{\theta_2 \in \Theta_2 \\ \theta_2 \neq \widehat{\theta}_2}} A_n(\theta_2) + \frac{n^{1/4}}{c},$$

поэтому

$$\int\limits_{\Theta_2} e^{A_n(\theta)} G_2(d\theta) \leqslant e^{A_n(\widehat{\theta}_2)} G_2(\widehat{\theta}_2) +$$

$$+ \max_{\substack{\theta_2 \in \Theta_2 \\ \theta_2 \neq \widehat{\theta}_2}} e^{A_n(\theta)} \leqslant e^{A_n(\widehat{\theta}_2)} G(\widehat{\theta}_2)\left(1 - ce^{-\frac{n^{1/4}}{c}}\right).$$

Получили

$$\mathbf{P}_2 \leqslant \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}\left(A_n(\widehat{\theta}_2) - A_n(\theta_1) > n\alpha - r - \ln\left(1 + ce^{-\frac{n^{1/4}}{c}}\right)\right).$$

Таким образом, в силу леммы 2,

$$\mathbf{P}_2 \leqslant \varepsilon_n(\widetilde{\alpha}). \tag{47}$$

Из соотношений (45)—(47) получаем, что

$$\varepsilon^*(T_{n,\alpha}^G) \leqslant \varepsilon_n(\widetilde{\alpha}),$$

т. е. оценка сверху в (22) доказана. Поскольку оценка снизу в (22) доказывается аналогичным способом, то (22) доказано. Другое соотношение в части 1 леммы 4 доказывается совершенно аналогично, поэтому часть I леммы 4 доказана. Поскольку доказательство части II леммы 4 повторяет в общих чертах доказательство части теоремы 1, относящейся к классу $\mathscr{K}_n^{(1)}$, лемма 4 доказана.

Тем самым мы доказали все утверждения, которые использовались в доказательстве теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 в целом подготовлено доказательством теоремы 1 и следует из лемм 1—4. Поэтому мы не будем на нем останавливаться.

§ 10. АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ПРОСТОЙ И СЛОЖНОЙ КОНТИНУАЛЬНОЙ ДАЛЕКИХ ГИПОТЕЗ

1. Постановка задачи. В настоящем параграфе рассмотрим задачу проверки простой гипотезы $H_1 = \{\theta = \theta_1\}$ против сложной гипотезы $H_2 = \{\theta = \Theta_2\}$, где Θ_2 является ограниченным замкнутым «телесным» подмножеством R^k. При этом гипотезы H_1 и H_2 являются далекими, т. е. расстояние между точкой θ_1 и множеством Θ_2 много больше $c/\sqrt{n}$. Выделим два основных случая: 1) пара ближайших точек (см. § 8) $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)=(\theta_1, \widehat{\theta}_2)$ — единственна; 2) пара $(\theta_1, \widehat{\theta}_2)$ не единственна и множество Θ_2 окружает точку θ_1. В свою очередь, случай 1) разбивается на два подслучая: 1_a) точка $\widehat{\theta}_2$ лежит внутри множества Θ_2; 1_b) точка $\widehat{\theta}_2$ лежит на границе множества Θ_2.

Основное содержание настоящего параграфа состоит в отыскании условий, при которых классы тестов

$$\mathscr{K}_n^{(1)}=\{T^*_{n,\alpha},\ \alpha\in R^1\},\quad \mathscr{K}_n^{(2)}(G)=\{T^G_{n,\alpha},\ \alpha\in R^1\}$$

асимптотически оптимальны в смысле определений, данных в § 8. Напомним определения тестов $T^*_{n,\alpha}$ и $T^G_{n,\alpha}$ в случае, когда множество Θ_1 одноточечно:

$$T^*_{n,\alpha}=1\left\{\max_{\theta_2\in\Theta_2}A_n(\theta_2)-A_n(\theta_1)>n\alpha\right\},\tag{1}$$

$$T^G_{n,\alpha}=1\left\{\ln\int\limits_{\Theta_2}e^{A_n(\theta)}G_2(d\theta)-A_n(\theta_1)>n\alpha\right\},\tag{2}$$

где $A_n(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln p(\theta, x_i)$ — логарифмическая функция правдоподобия. $G=(G_1^0, G_2)$ — пара априорных распределений, (G_1^0 — распределение, вырожденное в θ_1).

2. Основные условия в случае, когда пара $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)=(\theta_1, \widehat{\theta}_2)$ единственна. В гл. I, II был развит математический аппарат, позволяющий вычислять асимптотику вероятностей больших уклонений ошибок тестов (1) и (2). При этом получены равномерные теоремы о больших уклонениях соответствующих функционалов, позволяющие изучать, в частности, схему серий, когда в эксперименте

$$\mathrm{E}_n=(\{\theta_1\},\ \Theta_2,\ \mathscr{P},\ X_n)$$

все элементы зависят от параметра n (такая ситуация рассматривалась в § 9 для случая двух сложных конечномерных гипотез). Однако рассмотрение задачи в максимальной общности приводит к весьма сложным условиям и увеличению объема работы. Поэтому в п. 2, 3 ограничимся случаем, когда первые три элемента $\{\theta_1\}$, Θ_2, $\mathscr{P}$ эксперимента E_n не зависят от n.

Основные утверждения будут сформулированы для классов $\mathscr{B}^{(1)}(c)$ ($\mathscr{B}^{(2)}(c)$) троек $(\varepsilon_n, \alpha^-, \alpha^+)$, которые определяются условиями $B_1^{(1)}(c)$ ($B_1^{(2)}(c)$), $B_2(c)$, $B_3(c)$, где верхний индекс 1 соответствует случаю, когда $\widehat{\theta}_2$ лежит внутри Θ_2, 2 — когда $\widehat{\theta}_2$ лежит на границе Θ_2. Приведем условия $B_1^{(1)}(c)$, $B_1^{(2)}(c)$, $B_2(c)$, $B_3(c)$.

В последнем пункте § 8 определены числа d^-, d^+ и функции

$$\Lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2),\ \lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2),\ \sigma^2(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2).\tag{3}$$

Условие $B_1^{(1)}(c)$.

1) $\max\limits_{\theta\in\Theta_2}|\theta|\leqslant c,\ \inf\limits_{\theta\in\Theta_2} m_k(U_\delta(\theta)\cap\Theta_2)\geqslant\frac{\delta^{kc}}{c},\ 0\leqslant\delta\leqslant 1/c,$

где $m_k(A)$ — мера Лебега в R^k;

2) $[\alpha^-, \alpha^+]\subseteq[d^-, d^+]$;

$3^{(1)}$) для любого $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$ существует точка $\widehat{\theta}_2 = \widehat{\theta}_2(\alpha) \in \Theta_2$ такая, что

$$\Lambda(\alpha; \theta_1, \theta_2) - \Lambda(\alpha; \theta_1, \widehat{\theta}_2) \geqslant \frac{\lambda(\alpha; \theta_1, \widehat{\theta}_2)}{c} |\theta_2 - \widehat{\theta}_2|^2, \quad \theta_2 \in \Theta_2,$$

$$U_{1/c}(\widehat{\theta}_2) \subseteq \Theta_2.$$

Пункт 1) означает, что «радиус» множества Θ_2 не превосходит c и на его границе нет воронкообразных участков (см. условие II. $A_1(c)$). Пункт $3^{(1)}$) соответствует тому, что для любого $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$ ближайшая к θ_1 точка $\widehat{\theta}_2$ единственна и лежит внутри Θ_2.

Для того чтобы ввести условие $B_1^{(2)}(c)$, когда точка $\widehat{\theta}_2$ лежит на границе Θ_2, нам необходимо научиться описывать множества с параболическими участками границы. Для единичного вектора e, квадратной матрицы V и числа $t > 0$ обозначим

$$\Omega(e, V, t) = \left\{\theta \in R^k:\ \theta e^{\text{т}} + \frac{1}{2}\theta\Pi V\Pi\theta^{\text{т}} \geqslant 0,\quad |\theta| \leqslant t\right\},$$

где $\Pi = \Pi_e \equiv E - e^{\text{т}}e$ — проектор в R^k на гиперплоскость $\theta e^{\text{т}} = 0$ (напомним, что проектор Π и множество $\Omega(e, V, t)$ были введены в § 4).

Множество $\Theta \subseteq R^k$ принадлежит классу $\mathscr{L}(e, V, \widehat{\theta}, c)$, если выполняется условие

$L(e, V, \widehat{\theta}, c)$:

$$\widehat{\theta} + \Omega(e,\ V + t^{1/c}E,\ t) \subseteq U_t(\theta) \cap \Theta \subseteq \widehat{\theta} + \Omega(e,\ V - t^{1/c}E,\ t),$$

$$0 < t \leqslant 1/c. \tag{4}$$

Условие (4) означает, что в окрестности точки $\widehat{\theta}$ граница Γ множества Θ ведет себя как параболоид

$$\widehat{\theta} + \left\{\theta:\ \theta e^{\text{т}} = -\frac{1}{2}\theta\Pi V\Pi\theta^{\text{т}}\right\}, \tag{5}$$

и, в частности, точка $\widehat{\theta}$ лежит на границе Γ, вектор e является единичной нормалью к границе Γ в точке $\widehat{\theta}$. Если в окрестности точки $\widehat{\theta}$ граница Γ представляется в виде поверхности $\{\theta: h(\theta) = 0\}$, то выполняются соотношения

$$e = \frac{h'(\widehat{\theta})}{|h'(\widehat{\theta})|}, \quad \Pi V\Pi = \Pi\,\frac{h''(\widehat{\theta})}{|h'(\widehat{\theta})|}\,\Pi,$$

и можно считать, что в точке $\widehat{\theta}$ граница Γ имеет нормаль e и «кривизну» $\Pi V\Pi$.

Будем говорить, что для тройки $(\mathrm{E}_n, \alpha^-, \alpha^+)$ выполнено условие $B_1^{(2)}(c)$, если выполнены пункты 1), 2) условия $B_1^{(1)}(c)$ и следующий пункт:

$3^{(2)}$) для любого $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$ существует точка $\widehat{\theta}_2 = \widehat{\theta}_2(\alpha) \in \Theta_2$, единичный вектор $e = e(\alpha)$ и квадратная матрица $V = V(\alpha)$ такие, что

$$\Lambda(\alpha; \theta_1, \theta_2) - \Lambda(\alpha; \theta_1, \widehat{\theta}_2) \geqslant \frac{\lambda(\alpha; \theta_1, \widehat{\theta}_2)}{c}\left[|(\theta_2 - \widehat{\theta}_2)e^{\text{т}}| + \frac{|\Pi(\theta_2 - \widehat{\theta}_2)|^2}{c}\right],$$

$$\theta_2 \in \Theta_2,$$

$$\Theta_2 \in \mathscr{L}(e,\ V,\ \widehat{\theta}_2,\ c), \qquad \|V\| \leqslant c.$$

Таким образом, если выполнено условие $B_1^{(2)}(c)$, то ближайшая к θ_1 точка $\widehat{\theta}_2$ единственна, лежит на границе Γ_2 множества Θ_2, и граница Γ_2 в окрестности $\widehat{\theta}_2$ ведет себя как параболоид (5).

Если для тройки $(\mathrm{E}_n, \alpha^-, \alpha^+)$ выполнено условие $B_1^{(1)}(c)\ (B_2^{(1)}(c))$, то можно определить функции (см. § 8)

$$\Lambda(\alpha)=\Lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \widehat{\theta}_2),\quad \lambda(\alpha)=\lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \widehat{\theta}_2),$$
$$\sigma^2(\alpha)=\sigma^2(\alpha;\ \theta_1,\ \widehat{\theta}_2),\quad \alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+].$$

Определим еще функции

$$\varphi_0(\lambda)=\mathbf{E}_{\widehat{\theta}_1}e^{\lambda(a(\widehat{\theta}_2)-a(\theta_1))},\quad f_0(s)=\varphi_0(is),\ \lambda,\ s\in R^1$$

и новую вероятностную меру (абсолютно непрерывное преобразование определено в § 1)

$$\widetilde{\mathbf{P}}(A)=\widetilde{\mathbf{P}}^{\lambda(\alpha)}(A)\equiv\mathbf{E}_{\theta_1}\left(e^{\lambda(\alpha)(a(\widehat{\theta}_2)-a(\theta_1))};\ A\right)/\varphi_0(\lambda(\alpha)).\tag{6}$$

Заметим, что распределение $\widetilde{\mathbf{P}}$ зависит от α, поскольку от α зависят число $\lambda(\alpha)$ и вектор $\widehat{\theta}_2=\widehat{\theta}_2(\alpha)$; индекс α опустим, чтобы не загромождать обозначения. Особую роль будет играть распределение $\widetilde{\mathbf{P}}$ при $\alpha=0$; это распределение мы обозначим $\widehat{\mathbf{P}}$.

Условие $B_2(c)$ для тройки $(\varepsilon_n, \alpha^-, \alpha^+)$ совпадает с условием $A_2(c)$ из § 9.

Условие $B_3(c)$.

1) $\mathbf{E}_{\theta_1}e^{\frac{\|a'\|}{c}}\leqslant c$, где $\|a'\|=\sup\limits_{\theta\in\Theta_2}|a'(\theta)|$;

2) $\widehat{\mathbf{E}}\|a''(\widehat{\theta}_2)\|^{2k+2+1/c}\leqslant c$;

3) $\sup\limits_{\theta\in U_{1/c}(\widehat{\theta}_2)\cap\Theta_2}\widehat{\mathbf{E}}\|a'''(\theta)\|^{2k+1+1/c}\leqslant c.$

Таким образом, группа условий $B_3(c)$ — это моментные условия на производные поля $a(\theta)$; большая часть ограничений относится к поведению $a(\theta)$ в окрестности точки $\widehat{\theta}_2$.

3. Формулировки теорем для класса $\mathscr{B}^{(1)}(c)$ Для дальнейшего нам понадобится ряд обозначений. При этом мы сформулируем ряд лемм, которые докажем позже. В настоящем пункте предположим, что

$$(\mathrm{E}_n,\ \alpha^-,\ \alpha^+)\in\mathscr{B}^{(1)}(c),\quad \alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+].$$

Введем следующие матрицы порядка k:

$$K=-\widetilde{\mathbf{E}}a''(\widetilde{\theta}_2),\quad B=\widetilde{\mathbf{E}}a'(\widehat{\theta}_2)^{\mathrm{T}}a'(\widetilde{\theta}_2),$$
$$C=\left(\widetilde{\mathbf{E}}\xi a'(\widehat{\theta}_2)\right)^{\mathrm{T}}\left(\widetilde{\mathbf{E}}\xi a'(\widehat{\theta}_2)\right),\quad \widetilde{B}=B-\frac{1}{\widetilde{\mathbf{D}}\xi}C,\tag{7}$$

где символам $\widetilde{\mathbf{E}}$, $\widetilde{\mathbf{D}}$ отвечает распределение $\widetilde{\mathbf{P}}$ (см. (6)), $\xi=(a(\widehat{\theta}_2)-a(\theta_1))$. Введенным матрицам можно придать следующий вероятностный смысл. Из условия $B_1^{(1)}(c)$ следует, что $\widetilde{\mathbf{E}}a'(\widehat{\theta}_2)=0$, поэтому в окрестности точки $\widehat{\theta}_2$ поле $\frac{1}{n}A_n(\theta)$ ведет себя как функция $\frac{1}{n}A_n(\widehat{\theta}_2)-(\theta-\widehat{\theta}_2)\frac{K}{2}(\theta-\widehat{\theta}_2)^{\mathrm{T}}$ с $\widetilde{\mathbf{P}}$-вероятностью, близкой к 1. Стало быть, точка максимума $\theta_2^+=\theta_{2,n}^+$ поля $A_n(\theta)$ сходится к точке $\widehat{\theta}_2$ по $\widetilde{\mathbf{P}}$-вероятности. Матрица B является ковариационной матрицей вектора $a'(\widehat{\theta}_2)$ (относительно меры $\widetilde{\mathbf{P}}$); в силу леммы 4.10 матрица $\widetilde{B}$ тоже является ковариационной матрицей некоторого случайного вектора в R^k.

Лемма 1.

$$K\geqslant\frac{1}{c}E.$$

В силу леммы 1 можно определить обратную к K матрицу

$$D = K^{-1}.$$

Лемма 2. *Существует константа* $c_1 \in [1, \infty)$, *зависящая только от* c, *такая, что*

$$\chi = \chi(\alpha) \equiv \mathbf{E} e^{\lambda(\alpha)\eta \frac{D}{2} \eta^{\mathrm{T}}} \leqslant c_1,$$

$$\chi^* = \chi^*(\alpha) \equiv \mathbf{E} e^{-(1-\lambda(\alpha))\eta \frac{D}{2} \eta^{\mathrm{T}}} \leqslant c_1,$$

где $\eta \in \Phi_{0, \widetilde{B}}$.

В доказательстве леммы 2 существенную роль будет играть

Лемма 3.

$$-\widetilde{B} + \frac{1}{\lambda(\alpha)} K \geqslant \frac{1}{c\lambda(\alpha)} E.$$

Введем теперь две последовательности функций, которые будут определять максимальные вероятности ошибок критерия отношения правдоподобия $T^*_{n,\alpha}$ (см. (1)):

$$\varepsilon_n(\alpha) = \frac{\chi(\alpha)}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\lambda(\alpha)\sigma(\alpha)},$$

$$\delta_n(\alpha) = \frac{\chi^*(\alpha)}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{-n(\Lambda(\alpha)-\alpha)}}{(1-\lambda(\alpha))\sigma(\alpha)}. \tag{8}$$

Для вычисления усредненной ошибки $\delta^Q\left(T^*_{n,\alpha}\right) = \int\limits_{\Theta_2} \delta_\theta\left(T^*_{n,\alpha}\right) Q_2(d\theta)$ нам понадобится следующая квадратная матрица:

$$U = -\widetilde{B} + K + \widetilde{B}\left(\widetilde{B} + \frac{1}{\lambda(\alpha)} K\right)^{-1} \widetilde{B}. \tag{9}$$

Лемма 4.

$$U \geqslant \frac{1}{c} \lambda(\alpha) E.$$

Ниже установлено, что в некоторой окрестности точки $\widehat{\theta_2}$ ошибка второго рода теста $T^*_{n,\alpha}$ ведет себя, как

$$\delta_\theta\left(T^*_{n,\alpha}\right) \sim \frac{\chi^*_\theta(\alpha)\, e^{-n(\Lambda_\theta(\alpha)-\alpha)}}{\sqrt{2\pi n}(1-\lambda_\theta(\alpha))\, \sigma_\theta(\alpha)},$$

где функции $\chi^*_\theta(\alpha)$, $\lambda_\theta(\alpha)$, $\sigma_\theta(\alpha)$, $\Lambda_\theta(\alpha)$ удовлетворяют условиям:

$$\chi^*_\theta(\alpha) \sim \chi^*(\alpha), \quad \lambda_\theta(\alpha) \sim \lambda(\alpha), \quad \sigma_\theta(\alpha) \sim \sigma(\alpha),$$

$$\Lambda_\theta(\alpha) - \Lambda(\alpha) \sim \left(\theta - \widehat{\theta_2}\right) \frac{U}{2} \left(\theta - \widehat{\theta_2}\right) \text{ при } \theta - \widehat{\theta_2} \to 0.$$

Поэтому в силу леммы 4 усредненную ошибку $\delta^Q\left(T^*_{n,\alpha}\right)$ будет определять функция

$$\widetilde{\delta}_n(\alpha) = \delta_n(\alpha) \frac{(2\pi)^{k/2}}{n^{k/2}\, |U|^{1/2}}, \tag{10}$$

которая дает главный вклад в интеграл

$$\int\limits_{\Theta_2} \delta_\theta\left(T^*_{n,\alpha}\right) d\theta.$$

Число $|U|$ (определитель матрицы U) в силу леммы 4 допускает оценку $|U| \geqslant \lambda^k(\alpha) | c^k$.

В рамках частично байесовского подхода (см. § 8) будем рассматривать пары $G=(G_1^0, G_2)$ априорных распределений на Θ_1 и Θ_2 соответственно, где G_1^0 есть вырожденное в точке θ_1 распределение, а G_2 имеет плотность $g_2(\theta)$, удовлетворяющую условиям:

1) $g_2(\theta)$ непрерывно на $U_{1/c}(\widehat{\theta}_2)$,

2) $\inf\limits_{\theta\in U_{1/c}(\widehat{\theta}_2)} g_2(\theta)\geqslant 1/c, \qquad \sup\limits_{\theta\in U_{1/c}(\widehat{\theta}_2)} g_2(\theta)\leqslant c.$

Класс пар $G=(G_1^0, G_2)$, удовлетворяющих 1), 2), обозначим $\mathscr{G}(c)$. Через $\mathscr{G}_0(c)$ обозначим подкласс $\mathscr{G}(c)$, определяемый дополнительным условием

3) $\inf\limits_{\theta\in\Theta_2} g_2(\theta)\geqslant 1/c.$

Теорема 1. *Пусть* $c\in[1,\infty)$, $N_n\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Пусть* $(\mathrm{E}_n, \alpha^-, \alpha^+)\in\mathscr{B}^{(1)}(c)$ *при* $n=1, 2, \dots$ *и* $Q=(Q_1^0, Q_2)\in\mathscr{G}(c)$, $G=(G_1^0, G_2)\in\mathscr{G}_0(c)$. *Пусть* $\lambda(\alpha)$, α^-, α^+, N_n *таковы, что выполнено условие*

$$\lambda(\alpha^-)\geqslant\frac{N_n}{\sqrt{n}},\quad 1-\lambda(\alpha)\geqslant\frac{N_n}{\sqrt{n}}.$$

Тогда:

I. *Можно выбрать последовательности*

$$\varepsilon_n^{\pm}\sim\varepsilon_n(\alpha^{\mp}),$$

где функция $\varepsilon_n(\alpha)$ *определена формулой* (8), *такие, что класс* $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-РАПМ *классом.*

II. *Для* $\alpha=\alpha_n\in[\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^Q(T_{n,\alpha}^*)=\varepsilon_{\theta_1}(T_{n,\alpha}^*)\sim\varepsilon_n(\alpha),$$

$$\delta^Q(T_{n,\alpha}^*)\sim\widetilde{\delta}_n(\alpha)q_2(\widehat{\theta}_2),$$

где $q_2(\theta)$ — *плотность меры* Q_2;

для $\alpha'=\alpha_n'=-\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{g_2(\widehat{\theta}_2)(2\pi)^{k/2}}{n^{k/2}|K|^{1/2}}\right)+\alpha,\quad \alpha'\in[\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^Q(T_{n,\alpha}^G)=\varepsilon_{\theta_1}(T_{n,\alpha}^G)\sim\varepsilon_n(\alpha'),$$

$$\delta^Q(T_{n,\alpha}^G)\sim\widetilde{\delta}_n(\alpha')q_2(\widehat{\theta}_2).$$

III. *Если дополнительно выполнено условие*

$$\lambda(\alpha^-)\geqslant 1/c,$$

то класс $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом для*

$$\varepsilon_n^{\pm}=\varepsilon_n(\alpha^{\mp}).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда*:

I. *Можно выбрать числа* $p\in(0, 1]$, $b_+\geqslant 1$, $b_-\leqslant 1$ *такие, что для*

$$\varepsilon_n^{\pm}=b_{\mp}\varepsilon_n(\alpha^{\mp})$$

класс $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом.*

II. *Для* $\alpha\in[\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^*(T_{n,\alpha}^*)=\varepsilon_{\theta_1}(T_{n,\alpha}^*)\sim\varepsilon_n(\alpha),$$

$$\delta^*(T_{n,\alpha}^*)\sim\delta_n(\alpha);$$

для $\alpha'=\alpha_n'=\alpha-\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{g_2(\widehat{\theta}_2)(2\pi)^{k/2}}{n^{k/2}|K|^{1/2}}\right),\quad \alpha'\in[\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^*\left(T_{n,\alpha}^G\right) = \varepsilon_{\theta_1}\left(T_{n,\alpha}^G\right) \sim \varepsilon_n(\alpha'),$$

$$\delta^*\left(T_{n,\alpha}^G\right) \sim \delta_n(\alpha').$$

Из доказательства теоремы 2 следует, что в качестве p можно выбрать константу

$$p < p^* \equiv \inf \min(\chi(\alpha),\ \chi^*(\alpha)), \tag{11}$$

где операция inf берется по классу $(\mathbf{E}_n,\ \alpha^-,\ \alpha^+) \in \mathscr{B}^{(1)}(c)$, $\alpha \in [\alpha^-,\ \alpha^+]$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$

4. Формулировка теорем для класса $\mathscr{B}^{(2)}(c)$. В настоящем пункте будем считать выполненным условие

$$(\mathbf{E}_n,\ \alpha^-,\ \alpha^+) \in \mathscr{B}^{(2)}(c), \quad \alpha \in [\alpha^-,\ \alpha^+].$$

Наряду с обозначениями, которые мы ввели в п. 3, используем следующие. Напомним, что единичный вектор $e = e(\alpha)$ и квадратная матрица $V = V(\alpha)$ присутствуют в условии $B_1^{(2)}(c)$ и определяют поведение границы Γ_2 множества Θ_2 около точки $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}_2(\alpha)$; матрица $\Pi = \Pi_e = E - e^{\mathrm{T}}e$ проектирует R^k на гиперплоскость $\{\theta\colon\ \theta e^{\mathrm{T}} = 0\}$.

Обозначим

$$m = \widetilde{\mathbf{E}}a'(\widehat{\theta}_2)\, e^{\mathrm{T}};$$

наряду с матрицами K и $\widetilde{B}$, введенными формулами (7), введем матрицы

$$K' = \Pi K \Pi - m \Pi V \Pi, \qquad \widetilde{B}' = \Pi \widetilde{B} \Pi.$$

Лемма 5.

$$m \geqslant \frac{1}{c}, \quad K' \geqslant \frac{1}{c}\Pi.$$

В силу леммы 5 существует единственная матрица D', удовлетворяющая условию

$$D'K' = K'D' = \Pi, \qquad \Pi D' \Pi = D'.$$

Поскольку матрица $\widetilde{B}'$ неотрицательно определена, то можно рассматривать гауссовский вектор η с нулевым средним и ковариационной матрицей $\widetilde{B}'$.

Лемма 6. *Существует константа $c_1 \in [1,\ \infty)$, зависящая только от c, такая, что*

$$\chi = \chi(\alpha) \equiv \mathbf{E}e^{\lambda(\alpha)\eta \frac{D'}{2} \eta^{\mathrm{T}}} \leqslant c_1,$$

$$\chi^* = \chi^*(\alpha) \equiv \mathbf{E}e^{-(1-\lambda(\alpha))\eta \frac{D'}{2} \eta^{\mathrm{T}}} \leqslant c_1,$$

где $\eta \in \Phi_{0,\widetilde{B}'}$.

Для доказательства леммы 6 нам понадобится

Лемма 7.

$$-\widetilde{B}' + \frac{1}{\lambda(\alpha)} K' \geqslant \frac{1}{\lambda(\alpha)} \Pi.$$

Следующие две функции определяют максимальные вероятности ошибок критерия отношения правдоподобия $T_{n,\alpha}^*$:

$$\varepsilon_n(\alpha) = \frac{\chi^*(\pi)}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\lambda(\alpha)\,\sigma(\alpha)},$$

$$\delta_n(\alpha) = \frac{\chi^*(\alpha)}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{-n(\Lambda(\alpha)-\alpha)}}{(1-\lambda(\alpha))\,\sigma(\alpha)},$$

где функции $\chi(\alpha)$ и $\chi^*(\alpha)$ определены в лемме 6.

Для вычисления асимптотики усредненной вероятности ошибки второго рода тестов $T^*_{n,\alpha}$ и $T^G_{n,\alpha}$ нам понадобятся дополнительные обозначения. Введем квадратную матрицу

$$U' = -\widetilde{B}' + K' + \widetilde{B}'\left(\widetilde{B}' + \frac{1}{\lambda(\alpha)}K'\right)\widetilde{B}'.$$

Лемма 8.

$$U' \geqslant \frac{\lambda(\alpha)}{c}\Pi.$$

В силу леммы 8 существует единственная (неотрицательно определенная) матрица B^*, удовлетворяющая условиям

$$U'B^* = B^*U' = \Pi, \qquad \Pi B^*\Pi = B^*.$$

Лемма 9. *Существует константа* $c_1 \in [1, \infty)$, *зависящая только от* c, *такая, что*

$$\chi' = \chi'(\alpha) \equiv \mathbf{E}e^{m\eta\frac{V}{2}\eta^{\mathrm{T}}} \leqslant c_1, \quad \eta \in \Phi_{0,B^*}.$$

При доказательстве теорем 3, 4 показано, что в некоторой окрестности точки $\widehat{\theta_2}$ (для $\theta \in U_{1/c}(\widehat{\theta_2}) \cap \Theta_2$) ошибка второго рода теста $T^*_{n,\alpha}$ удовлетворяет соотношению

$$\delta_\theta\left(T^*_{n,\alpha}\right) \sim \frac{\chi^*_\theta(\alpha)}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{-n(\Lambda_\theta(\alpha)-\alpha)}}{(1-\lambda_\theta(\alpha))\,\sigma_\theta(\alpha)},$$

где при $\theta \to \widehat{\theta_2}$

$$\chi^*_\theta(\alpha) \sim \chi^*(\alpha), \quad \lambda_\theta(\alpha) \sim \lambda(\alpha),$$

$$\sigma_\theta(\alpha) \sim \sigma(\alpha), \quad \Lambda_\theta(\alpha) - \Lambda(\alpha) \sim m(\theta - \widehat{\theta}_2)e^{\mathrm{T}} +$$

$$+ (\theta - \widehat{\theta}_2)\,\Pi\frac{U'}{2}\Pi\,(\theta - \widehat{\theta}_2)^{\mathrm{T}}.$$

При этом в силу наших условий множество $U_{1/c}(\widehat{\theta_2}) \cap \Theta_2$ «мало» отличается от множества $\widehat{\theta_2} + \Omega(e, V, 1/c)$. Поэтому, используя лемму 9, можно показать, что усредненную ошибку $\delta^Q\left(T^*_{n,\alpha}\right)$ будет определять функция

$$\widetilde{\delta}_n(\alpha) = \delta_n(\alpha)\frac{(2\pi)^{k/2}}{n^{\frac{k+1}{2}}}\chi'(\alpha).$$

Сохраним определения классов $\mathscr{G}(c)$ и $\mathscr{G}_0(c)$ пар $G = \left(G_1^0, G_2\right)$ априорных распределений, введенных перед теоремами 1, 2.

Теорема 3. *Пусть* $c \in [1, \infty)$, $N_n \to \infty$. *Пусть* $(\mathrm{E}_n, \alpha^-, \alpha^+) \in \mathscr{B}^{(2)}(c)$ *при* $n = 1, 2, \ldots$ *и* $Q = \left(Q_1^0, Q_2\right) \in \mathscr{G}(c)$, $G = \left(G_1^0, G_2\right) \in \mathscr{G}_0(c)$. *Пусть* $\lambda(\alpha)$, α^-, α^+, N^n *таковы, что*

$$\chi(\alpha^-) \geqslant \frac{N_n}{\sqrt{n}}, \quad (1 - \lambda(\alpha^+)) \geqslant \frac{N_n}{\sqrt{n}}.$$

Тогда:

I. *Можно выбрать последовательности*

$$\varepsilon_n^{\pm} \sim \varepsilon_n(\alpha^{\pm}),$$

где функция $\varepsilon_n(\alpha)$ *определена формулой* (8), *такие, что класс* $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $\left(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+\right)$-*РАПМ классом.*

II. *Для* $\alpha = \alpha_n \in [\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^Q\left(T^*_{n,\alpha}\right) = \varepsilon_{\theta_1}\left(T^*_{n,\alpha}\right) \sim \varepsilon_n(\alpha),$$

$$\delta^Q\left(T^*_{n,\alpha}\right) \sim \tilde{\delta}_n(\alpha)\, q_2\left(\widehat{\theta}_2\right),$$

где $q_2(\theta)$ — *плотность меры* Q_2;

для $\alpha' = \alpha_n' = \alpha - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{g_2\left(\widehat{\theta}_2\right)(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}{n^{\frac{k-1}{2}}\,|K'|^{1/2}}\right) \in [\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^Q\left(T^G_{n,\alpha}\right) = \varepsilon_{\theta_1}\left(T^G_{n,\alpha}\right) \sim \varepsilon_n(\alpha'),$$

$$\delta^Q\left(T^G_{n,\alpha}\right) \sim \tilde{\delta}_n(\alpha')\, q_2\left(\widehat{\theta}_2\right),$$

где $g_2(\theta)$, $q_2(\theta)$ — *плотности мер* G_2, Q_2 *соответственно.*

III. *Если дополнительно выполнено условие*

$$\lambda(\alpha^-) \geqslant 1/c,$$

то класс $\mathcal{K}_n^{(1)}\left(\mathcal{K}_n^{(2)}(G)\right)$ *будет* $\left(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+\right)$-*АПМ классом для* $\varepsilon_n^{\pm} = \varepsilon_n(\alpha^{\mp})$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда*:

I. *Можно выбрать числа* $p \in (0, 1]$, $b_+ \geqslant 1$, $b_- \leqslant 1$, *такие, что для*

$$\varepsilon_n^{\pm} = b_{\mp}\varepsilon_n(\alpha^{\mp})$$

класс $\mathcal{K}_n^{(1)}$ $\left(\text{*класс* } \mathcal{K}_n^{(2)}(G)\right)$ *является* $\left(p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+\right)$-*АПМ классом.*

II. *Для* $\alpha = \alpha_n \in [\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^*\left(T^*_{n,\alpha}\right) = \varepsilon_{\theta_1}\left(T^*_{n,\alpha}\right) \sim \varepsilon_n(\alpha),$$

$$\delta^*\left(T^*_{n,\alpha}\right) \sim \delta_n(\alpha);$$

для $\alpha' = \alpha_n' \equiv \alpha - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{g_2\left(\widehat{\theta}_2\right)(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}{n^{\frac{k-1}{2}}\,|K'|^{1/2}}\right) \in [\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^*\left(T^G_{n,\alpha}\right) = \varepsilon_{\theta_1}\left(T^G_{n,\alpha}\right) \sim \varepsilon_n(\alpha'),$$

$$\delta^*\left(T^G_{n,\alpha}\right) \sim \delta_n(\alpha').$$

5. Случай, когда сложная гипотеза «окружает» простую. В настоящем разделе будем считать, что в эксперименте

$$\mathrm{E}_n = (\Theta_1, \Theta_2, \mathcal{P}, X_n)$$

семейство распределений $\mathcal{P}$ имеет вид

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta,\ \theta \in \overline{\Theta}\}, \qquad \overline{\Theta} = \{\theta\colon\ |\theta| \leqslant \nu\} \subseteq R^k, \tag{12}$$

и множества Θ_1 и Θ_2 соответственно равны

$$\Theta_1 = \{0\}, \qquad \Theta_2 = \{\theta \in R^k\colon\ \Lambda(0;\ 0,\ \theta) \geqslant u,\ |\theta| \leqslant \nu\},$$

где $u = u_n \to 0$, $\sqrt{n}u \to \infty$, $\nu > 0$. Таким образом, функция

$$\Lambda(\alpha) \equiv \inf_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2} \Lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2)$$

в нашем случае при $\alpha = 0$ имеет вид

$$\Lambda(0) = \inf_{\theta_2 \in \Theta_2} \Lambda(0;\ 0,\ \theta_2) = u. \tag{13}$$

Совокупность точек $\widehat{\theta}_2 \subset \Theta_2$, равноудаленных от $\theta_1 = 0$ (для которых достигается inf в (13)), образует поверхность уровня и функции $\Lambda(0;\ 0,\ \theta)$:

$$\Gamma_2 = \{\theta \in R^k : \Lambda\ (0;\ 0,\ \theta) = u\}.$$

Эта поверхность является той частью границы множества Θ_2, все точки которой удалены от 0 на одинаковое расстояние.

Ниже приведем рассуждения, показывающие, что функция $\Lambda(\alpha;\ 0,\ \theta_2)$ в широких предположениях имеет вид

$$\Lambda(\alpha;\ 0,\ \theta_2) = \frac{\left(\alpha + \frac{\theta_2 B \theta_2^{\mathrm{T}}}{2}\right)^2}{2\,|\,\theta_2 B \theta_2^{\mathrm{T}}\,|} + O(|\,\theta_2\,|^3), \tag{14}$$

где

$$B = -\mathbf{E}_0 a''(0).$$

Поэтому при $u \to 0$ поверхность Γ_2 «мало отличается» от эллипсоида

$$\Gamma_2^0 = \left\{\theta_2 \in R^k:\ \frac{\theta_2 B \theta_2^{\mathrm{T}}}{8} = u\right\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать

$$B = E;$$

тогда эллипсоид Γ_2^0 превратится в сферу радиуса $r = \sqrt{8u}$.

В теореме 5, которую мы приведем ниже, будут рассматриваться «не очень» большие уклонения, когда

$$u = o(n^{-1/3});$$

для этих уклонений различие между поверхностями Γ_2 и Γ_2^0 оказывается пренебрежимо малым. Поэтому вместо множества Θ_2 можно рассматривать множество

$$\Theta_2^0 = \left\{\theta \in R^k:\ \frac{|\,\theta\,|^2}{8} \geqslant u,\quad |\,\theta\,| \leqslant v\right\},$$

т. е. вместо эксперимента E_n — эксперимент

$$E_n^0 = (\Theta_1,\ \Theta_2^0,\ \mathscr{P},\ X_n).$$

Для уклонений $u = u_n \geqslant n^{-1/3}$ различие между множествами Θ_2 и Θ_2^0 становится значимым (например, будут различаться асимптотика вероятностей ошибок тестов $T^*_{n,\alpha}$ для E_n и E_n^0); однако в широких предположениях классы $\mathscr{K}_n^{(1)}$ и $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$ будут асимптотически оптимальными как для эксперимента E_n, так и для эксперимента E_n^0.

Прежде чем переходить к формулированию условий и утверждений, покажем на физическом уровне строгости вывод формулы (14). Для этого выпишем первые три члена разложений в ряд Тейлора при $\theta_2 \to 0$ функции

$$\psi(\lambda;\ 0,\ \theta_2) \equiv \ln \mathbf{E}_0 e^{\lambda(a(\theta_2) - a(0))}:$$

$$\psi(\lambda;\ 0,\ \theta_2) = \psi(\lambda;\ 0,\ 0) + \theta_2 \psi'(\lambda;\ \ 0,\ 0) + \frac{\theta_2 \psi''(\lambda;\ 0,\ 0)\theta_2^{\mathrm{T}}}{2} + O(|\,\theta_2\,|^3),$$

где верхний индекс $'$ обозначает производные по θ_2. Очевидные вычисления приводят к формуле

$$\psi(\lambda;\ 0,\ \theta_2) = (\lambda^2 - \lambda)\,\frac{\theta_2 B \theta_2^{\mathrm{T}}}{2} + O(|\,\theta_2\,|^3). \tag{15}$$

Вычисляя далее функцию

$$\Lambda(\alpha;\ 0,\ \theta_2) = \sup_{\lambda}\{\alpha\lambda - \psi(\lambda;\ 0,\ \theta_2)\},$$

в силу (15) получаем (14).

Обратимся теперь к основным условиям. Будем говорить, что эксперимент $E_n(E_n^\circ)$ принадлежит классу $\mathscr{C}(c)$, где $c \in [1, \infty]$, если выполнено условие

$C(c)$.

1) $B \equiv -\mathbf{E}_0 a''(0) = E$, $\quad \mathbf{E}_0\Big(-a''(\theta)\Big) \geqslant \frac{1}{c} E$ при $|\theta| \leqslant \frac{1}{c}$,

$$\mathbf{E}_0 \omega''(t) \leqslant ct \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1/c;$$

2) $\mathbf{E}_0 \exp\left\{\frac{1}{c}\left(|a'(0)| + \|a''(0)\| + \omega''(1/c)\right)\right\} \leqslant c$,

где, как и ранее, $\omega''(t)$ — модуль непрерывности матрицы $a''(\theta)$ при $\theta \in \bar{\Theta} = \{\theta: |\theta| \leqslant \nu\}$.

Обозначим через $\mathscr{G}$ класс пар $G = (G_1^0, G_2)$ априорных распределений на Θ_1 и Θ_2 соответственно, где распределение G_1^0 вырождено в точке $\theta_1 = 0$, распределение G_2 имеет плотность $g_2(\theta)$ относительно меры Лебега в R^k, которая представляется в виде

$$g_2 = \frac{g(\theta)}{\int\limits_{\Theta_2} g(\theta)\, d\theta},$$

где функция $g(\theta)$ непрерывна и ограничена на $\bar{\Theta}$ и отделена от 0 в некоторой окрестности $\theta_1 = 0$.

Из доказательства теорем видно, что можно рассматривать более широкий класс $\mathscr{G}_n$, когда плотность $g_2(\theta)$ зависит от n более замысловатым образом. Например, можно рассматривать такие плотности $g_2 = g_2(n, \theta)$, для которых

$$\sup_{|\theta| \leqslant \nu} g_2(n, \theta) \leqslant c, \quad g_2(n, 0) \geqslant 1/c,$$

$$g_2(n, \theta) = g_2(0, n)(1 + \nu_n(\theta)),$$

$$\sup_{u \leqslant |\theta| \leqslant u + c\sqrt{n}} |\nu_n(\theta)| = 0(1).$$

Однако для простоты изложения ограничимся рассмотрением класса $\mathscr{G}$.

Напомним, что в эксперименте

$$E_n^0 = (\Theta_1, \Theta_2^0, \mathscr{P}, X_n)$$

множество Θ_2^0 определяется как

$$\Theta_2^0 = \left\{\theta \in R^k: \frac{|\theta|^2}{8} \in [u, \nu]\right\}.$$

Обозначим $t = t_n = 8u\sqrt{n}$, так что

$$t \to \infty, \quad t/\sqrt{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 5. *Пусть* $c \in [1, \infty)$, $N_n \to \infty$, $E_n^0 \in \mathscr{C}(c)$, Q, $G \in \mathscr{C}(c)$. *Пусть* $t = t_n \to \infty$, $t = o(n^{1/6})$ *при* $n \to \infty$.

Тогда:

I. *Класс* $\mathscr{K}_n^{(1}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-РАПМ *классом, где*

$$\varepsilon_n^- = \frac{t^{k-2} e^{-\frac{t^2}{2}}}{N_n}, \quad \varepsilon_n^+ = \frac{1}{N_n}. \tag{16}$$

II. *Для* $|\alpha| \leqslant \frac{t^2}{2n}$, $\left|\frac{t}{2} \pm \frac{n\alpha}{t}\right| \to \infty$, $T = \frac{t}{2} + \frac{\alpha n}{t}$, $\alpha' = \alpha - \frac{k}{n^2}\ln n +$

$$+ \frac{1}{n}\ln \frac{(2\pi)^{k/2} t^{\frac{k-3}{2}} g_2(0)}{T^{\frac{k-1}{2}}\left(1 - \frac{T}{t}\right)}$$

справедливо

$$\varepsilon_0\left(T^*_{n,\alpha}\right) \sim \varepsilon_0\left(T^G_{n,\alpha'}\right) \sim (2\pi)^{-k/2} b_k T^{k-2} e^{-\frac{T^2}{2}}, \tag{17}$$

$$\delta^Q\left(T^*_{n,\alpha}\right) \sim \delta^Q\left(T^G_{n,\alpha'}\right) \sim \frac{q_2(0)\, b_k t^{k-1}}{\sqrt{2\pi}\, n^{k/2} (T - t)^2}\, e^{-\frac{(T-t)^2}{2}}, \tag{18}$$

где b_k *есть площадь единичной сферы в* R^k.

III. *Класс* $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом для*

$$\varepsilon_n^- = \frac{t^{k-2}}{N_n} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \varepsilon_n^+ = e^{-\frac{t^2}{2}(1-\beta)} \tag{19}$$

для любого $\beta > 0$.

Замечание 1. В диапазоне уклонений $t = o(n^{1/6})$ множества Θ_2 и Θ_2^0 различаются несущественно. Поэтому теорема 5 сохранится, если в ней E_n^0 заменить на E_n.

Замечание 2. Из формул (17), (18) следует, что убывание вероятностей ошибок рассматриваемых тестов, определяемое *эффектом больших уклонений*, имеет место, когда $\left(t/2 \pm \frac{n\alpha}{t}\right)^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому интервал $[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+]$, (см. (16)) — это максимально широкий интервал (речь, разумеется, идет о левом конце интервала ε_n^-), при котором ошибка $\delta^Q\left(T^*_{n,\alpha}\right)$ убывает в силу *эффектов больших уклонений.*

Замечание 3. Интервал $[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+]$, определяемый (19) — это наиболее широкий интервал, обладающий следущим свойством: для любых двух последовательностей α_n, α_n' из соотношений

$$\varepsilon_0\left(T^*_{n,\alpha}\right) \sim \varepsilon_0\left(T^*_{n,\alpha'}\right) \in [\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+]$$

следует соотношение

$$\delta^Q\left(T^*_{n,\alpha}\right) \sim \delta^Q\left(T^*_{n,\alpha'}\right).$$

Таким образом, в интервале (19) «малому» изменению ошибки первого рода рассматриваемых тестов соответствует «малое» изменение ошибок второго рода.

Для случая, когда гипотезы H_1 и H_2 сближаются медленней, чем $o(n^{-1/3})$ (т. е. $t \gg n^{1/6}$), различие множеств Θ_2 и Θ_2^0 будет уже значимо. При этом, как нетрудно видеть, функция

$$\Lambda_0(\alpha;\, 0,\, \theta_2) \equiv \frac{\alpha + \left(\frac{\theta_2 B \theta_2^{\mathrm{T}}}{2}\right)^2}{2\theta_2 B \theta_2^{\mathrm{T}}}$$

будет недостаточно хорошо приближать функцию $\Lambda(\alpha;\, 0,\, \theta_2)$, и поверхности уровней

$$\Gamma_{2,\alpha} \equiv \{\theta_2 \in R^k\colon\ \Lambda(\alpha;\ 0,\ \theta_2) = u\}$$

будут «существенно» зависеть от α. Все это весьма усложняет задачу вычисления асимптотики вероятностей ошибок тестов $T^*_{n,\alpha}$ и $T^G_{n,\alpha}$ (особенно трудно найти асимптотику вероятностей

$$\varepsilon_0\left(T^*_{n,\alpha}\right) \quad \text{и} \quad \varepsilon_0\left(T^G_{n,\alpha}\right)).$$

Однако основной результат теоремы 5 об асимптотической оптимальности классов $\mathscr{K}_n^{(1)}$ и $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$ верен и в этом случае, о чем свидетельствует

Теорема 6. *Пусть* $c\in[1, \infty)$, $p\in\left(0, \frac{1}{2}\right]\varepsilon_n(\varepsilon_n^0)\in\mathscr{C}(c)$, Q, $G\in\mathscr{G}(c)$. *Пусть* $t=t_n\to\infty$, $t=o(\sqrt{n})$. *Тогда класс* $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *является* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом, где*

$$\varepsilon_n^- = e^{-\frac{t^2}{2}(1-p)},\quad \varepsilon_n^+ = e^{-\frac{t^2}{2}p}.$$

Замечание 4. В теореме 6 мы рассмотрели только такой интервал $[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+]$, при котором «малому» изменению ошибки первого рода отвечает «малое» изменение ошибки второго рода. Разумеется, можно рассматривать и более широкий интервал $[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+]$, когда классы $\mathscr{K}^{(1)}$ и $\mathscr{K}^{(2)}$ перестанут быть АПМ классами, но будут РАПМ классами. Из-за сложности задачи мы это делать не будем.

6. Доказательства теорем 1, 2 основаны на ряде лемм. Введем прежде ряд обозначений. Будем считать, что выполнены условия теорем 1, 2.

Для $\lambda\in R^1$, $(\theta, \theta_1, \theta_2)\in\Theta\times\Theta_1\times\Theta_2$, где $\Theta=\Theta_1\times\Theta_2$, определим функцию

$$\varphi(\lambda; \theta, \theta_1, \theta_2) = \mathbf{E}_\theta e^{\lambda(a(\theta_2)-a(\theta_1))}.$$

Соответствующую функции $\varphi(\lambda; \theta, \theta_1, \theta_2)$ функцию уклонений и ее производные обозначим соответственно

$$\Lambda(\alpha; \theta, \theta_1, \theta_2) = \sup_\lambda\{\alpha\lambda - \varphi(\lambda; \theta, \theta_1, \theta_2)\},$$

$$\lambda(\alpha; \theta, \theta_1, \theta_2) = \frac{\partial\Lambda(\alpha; \theta, \theta_1, \theta_2)}{\partial\alpha}, \tag{20}$$

$$\sigma^2(\alpha; \theta, \theta_1, \theta_2) = \left[\frac{\partial\lambda(\alpha; \theta, \theta_1, \theta_2)}{\partial\alpha}\right]^{-1}.$$

Отметим, что если положить $\theta=\theta_1$, то функции (20) перейдут в функции (3):

$$\Lambda(\alpha; \theta_1, \theta_1, \theta_2)=\Lambda(\alpha; \theta_1, \theta_2).$$

Для фиксированных $\alpha\in[d^-, d^+]$ и $\theta\in\Theta$ определим пару

$$(\tilde\theta_1, \tilde\theta_2)=(\theta_1, \tilde\theta_2(\theta))\in\Theta_1\times\Theta_2,$$

где $\tilde\theta_2(\theta)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial\Lambda(\alpha; \theta, \theta_1, \theta_2)}{\partial\theta_2}=0. \tag{21}$$

Лемма 10. *Существует* $c_1\in[1, \infty)$, *зависящее только от* c *такое, что для всех* $\theta\in U_{\delta_2}(\hat\theta_2)$, $\delta_2=\sqrt{\lambda(\alpha)}/c_1$, *уравнение* (21) *имеет непрерывное по* $\theta\in U_{\delta_2}(\hat\theta_2)$ *решение* $\tilde\theta_2(\theta)$, *удовлетворяющее условиям*:

1) $\tilde\theta_2(\theta_1)=\tilde\theta_2(\hat\theta_2)=\hat\theta_2$,

2) $|\tilde\theta_2(\theta)-\hat\theta_2|\leqslant\dfrac{1}{c_1\sqrt{\lambda(\alpha)}}|\theta-\hat\theta_2|$ при $\theta\in U_{\delta_2}(\hat\theta_2)$.

Лемму 10 докажем несколько позже, а сейчас введем функции

$$\Lambda(\alpha; \theta)=\Lambda(\alpha; \theta, \theta_1, \tilde\theta_2(\theta)),$$

$$\lambda(\alpha; \theta)=\lambda(\alpha; \theta, \theta_1, \tilde\theta_2(\theta)), \tag{22}$$

$$\sigma^2(\alpha; \theta)=\sigma^2(\alpha; \theta, \theta_1, \tilde\theta_2(\theta)),\quad \theta\in\Theta.$$

Повторяя далее все определения, приведенные в п. 2, и снабжая их параметром θ, придем к определению матриц

$$K(\theta), \quad \tilde{B}(\theta), \quad D(\theta)=K^{-1}(\theta),$$

а также функций

$$\chi(\alpha;\theta)\equiv \mathbf{E}e^{\lambda(\alpha,\theta)\eta\frac{D}{2}\eta^{\mathrm{T}}}$$

$$\chi^*(\alpha;\theta)\equiv \mathbf{E}e^{-(1-\lambda(\alpha;\theta))\eta\frac{D}{2}\eta^{\mathrm{T}}}, \; \eta\in\Phi_{0,\tilde{B}(\theta)}.$$

Теперь мы в состоянии задать последовательность

$$\delta_n(\alpha,\theta)=\frac{\chi^*(\alpha,\theta)}{\sqrt{2\pi n}}\frac{e^{-n(\Lambda\alpha;\theta)-\alpha)}}{(1-\lambda(\alpha;\theta))\,\sigma(\alpha;\theta)},$$

которая будет определять асимптотику вероятностей ошибок

$$\delta_\theta^*(T^*_{n,\alpha}), \; \theta\in U_{\delta_2}(\hat{\theta}_2).$$

Условимся производные функции $\Lambda(\alpha;\theta)$ по вектору θ обозначать штрихами.

Лемма 11. *Имеют место следующие соотношения*:

$$\Lambda'(\alpha;\hat{\theta}_2)=0, \qquad \Lambda''(\alpha;\hat{\theta}_2)=U,$$

где матрица U определена формулой (9).

Лемма 12. *Пусть $\alpha=\alpha_n\in[\alpha^-,\alpha^+]$. Тогда существует $c_1\in[1,\infty)$ такое, что для* $\alpha'=\alpha'_n\equiv\alpha+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{g_2(\hat{\theta}_2)(2\pi)^{k/2}}{n^{k/2}|K|^{1/2}}\right)$

$$\varepsilon_{\theta_1}(T^*_{n,\alpha})=\varepsilon_{\theta_1}(T^G_{n,\alpha'})(1+\varepsilon_n^{(1)})=\varepsilon_n(\alpha)(1+\varepsilon_n^{(2)}), \tag{23}$$

$$\delta_0(T^*_{n,\alpha})=\delta_0(T^G_{n,\alpha'})(1+\delta_n^{(1)}(\theta))=\delta_n(\alpha,\theta)(1+\delta_n^{(2)}(\theta)), \tag{24}$$

где

$$\lim_{n\to\infty}|\varepsilon_n^{(i)}|=0, \; i=1,2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\theta\in U_r(\hat{\theta}_2)}|\delta_n^{(i)}(\theta)|=0, \; i=1,2, \; r=\frac{\sqrt{\lambda(\alpha)}}{c_1},$$

$$\sup_{\theta\in\Theta_2\setminus U_2(\hat{\theta}_2)}\left[\delta_\theta(T^*_{n,\alpha})+\delta_\theta(T^G_{n,\alpha})\right]=\delta_n(\alpha)\frac{o(1)}{n^{\frac{k+1}{2}}|U|^{1/2}(1-\lambda(\alpha))}. \tag{25}$$

Из леммы 12 без труда выводим асимптотику Q-средних вероятностей ошибок тестов $T^*_{n,\alpha}$ и $T^G_{n,\alpha'}$:

$$\varepsilon^Q(T^*_{n,\alpha})=\varepsilon_{\theta_1}(T^*_{n,\alpha})\sim\varepsilon^Q(T^G_{n,\alpha'})=\varepsilon_{\theta_1}(T^G_{n,\alpha})\sim\varepsilon_n(\alpha), \tag{26}$$

$$\delta^Q(T^*_{n,\alpha})\sim\delta^Q(T^G_{n,\alpha})\sim\tilde{\delta}_n(\alpha)\,q_2(\hat{\theta}_2), \tag{27}$$

где $Q=(Q_1^0,Q_2)$, $q_2(\theta)$ есть плотность Q_2, функция $\tilde{\delta}_n(\theta)$ определена формулой (10).

Доказательство теоремы 1 с помощью соотношений (26) и (27) практически не отличается от доказательства теорем 1, 2 в § 9. Поэтому теорема 1 доказана.

Обратимся к доказательству теоремы 2. В доказательстве нуждается только часть I теоремы 2. Пусть $T'_n\in\mathcal{K}^*(\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$, где $\varepsilon_n^\pm$ из теоремы 2. Выберем последовательность $\alpha=\alpha_n\in[\alpha^-,\alpha^+]$ и числа $r=r_n\in$ $\in[0,1]$ такие, что

$$\varepsilon^*(T'_n)=\varepsilon_{\theta_1}(T^*_{n,\alpha,r}). \tag{28}$$

В силу выбора константы p (см. (11)) получаем при этом, что

$$\varepsilon^*(T'_n) \geqslant p\varepsilon^*(T^*_{n,\alpha}).$$

Далее, в силу (28) можно утверждать, что

$$\delta^*(T'_n) \geqslant \delta_{\widehat{\theta}_2}(T'_n) \geqslant \delta_{\widehat{\theta}_2}(T^*_{n,\alpha,r}), \tag{29}$$

поэтому, в силу выбора p имеем

$$\delta^*(T'_n) \geqslant p\delta^*(T^*_{n,\alpha}). \tag{30}$$

Неравенства (29) и (30) доказывают условие α_p в определении 2_p (§ 8).

Пусть теперь тест $T^*_{n,\alpha} \in \mathscr{K}^{(1)}_n \cap \mathscr{K}^*(\varepsilon^-_n, \varepsilon^+_n)$, и для теста T'_n выполнено

$$p\varepsilon^*(T^*_{n,\alpha}) \geqslant \varepsilon^*(T'_n).$$

Тогда, очевидно, справедливо

$$\varepsilon_{\theta_1}(T^0_{n,\alpha}) \geqslant \varepsilon_{\theta_1}(T'_n),$$

в силу чего

$$\delta_{\widehat{\theta}_2}(T^0_{n,\alpha}) \leqslant \delta_{\widehat{\theta}_2}(T'_n) \leqslant \delta^*(T'_n).$$

Из последнего имеем

$$p\delta^*(T^{*\,r}_{n,\alpha}) \leqslant \delta_{\widehat{\theta}_2}(T_{n,\alpha}) \leqslant \delta^*(T'_n),$$

т. е. условие b_p в определении 2_p тоже выполнено (см. § 8). Теорема 2 доказана.

7. Доказательство лемм 1—4, 10—12. Поскольку матрица $\widetilde{B}$ является неотрицательно определенной, утверждение леммы 1 следует из леммы 3.

Обратимся к лемме 2. Матрица $D = K^{-1}$ в силу леммы 1 положительно определена:

$$-(1 - \lambda(\alpha))\eta \frac{D}{2}\eta^{\mathrm{T}} \leqslant 0,$$

и, стало быть,

$$\chi^* \leqslant 1.$$

Поэтому нам остается доказать, что

$$\chi \leqslant c_1 \tag{31}$$

для некоторого $c_1 \in [1, \infty)$. Очевидно, что справедливо равенство

$$\chi \equiv \mathbf{E}^{\lambda(\alpha)\eta\frac{D}{2}\eta^{\mathrm{T}}} = \frac{|K|^{1/2}}{\lambda(\alpha)^{k/2}\left|-\widetilde{B} + \dfrac{1}{\lambda(\alpha)}K\right|^{1/2}}.$$

В силу наших условий (см. условие $B_3(c)$) выполняется

$$|K| \leqslant c,$$

поэтому для (31) достаточно доказать, что

$$-\widetilde{B} + \frac{1}{\lambda(\alpha)}K \geqslant \frac{1}{c\lambda(\alpha)}E.$$

Таким образом, (31) следует из леммы 3. Лемма 2 доказана.

Для доказательства лемм 3 и 4 нам понадобится рассмотреть следующую общую конструкцию (она пригодится и в дальнейшем). Пусть распределение некоторой случайной величины $\xi = \xi(\mu)$, зависящей от векторного параметра $\mu \in R^m$ тоже зависит от этого параметра, так что

$\mathbf{P}_\mu(\xi(\mu)\in G)=\mathbf{E}_0(e^{\eta(\mu)};\ \xi(\mu)\in G)$, где $e^{\eta(\mu)}$ — плотность распределения $\mathbf{P}_\mu$. Тогда преобразование Лапласа над распределением ξ можно записать в виде

$$\varphi(\lambda;\ \mu)=\mathbf{E}_0(e^{\lambda\xi(\mu)+\eta(\mu)}),\qquad \lambda\in R^1,\quad \mu\in R^m.$$

Функция уклонений, соответствующая ξ, представляется в виде

$$\overline{\Lambda}(\alpha;\mu)=\sup_\lambda\{\alpha\lambda-\ln\varphi(\lambda;\mu)\}=\alpha\overline{\lambda}(\alpha;\mu)-\ln\varphi(\overline{\lambda}(\alpha;\mu);\mu),\tag{32}$$

где функция $\overline{\lambda}(\alpha;\ \mu)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial\ln\varphi(\lambda;\mu)}{\partial\lambda}=\frac{\dot{\varphi}(\lambda;\mu)}{\varphi(\lambda;\mu)}=\alpha.\tag{33}$$

Условимся производные по $\lambda\in R^1$ обозначать точкой, в то время как производные по $\mu\in R^m$ — штрихом. Цель настоящих рассмотрений — получить формулы для вектора

$$\Lambda'(\alpha;\ 0)$$

и матрицы

$$\Lambda''(\alpha;\ 0).\tag{34}$$

Эти формулы позволят получить следующие приближенные соотношения для функции $\overline{\Lambda}(\alpha;\ \mu)$ в окрестности $\mu=0$:

$$\overline{\Lambda}(\alpha;\mu)\cong\overline{\Lambda}(\alpha;0)+\mu\frac{\overline{\Lambda}''(\alpha;0)}{2}\mu^{\mathrm{T}},$$

если $\overline{\Lambda}'(\alpha;\ 0)\equiv0$;

$$\overline{\Lambda}(\alpha;\mu)\simeq\overline{\Lambda}(\alpha;0)+\overline{\Lambda}'(\alpha;0)\mu^{\mathrm{T}}+\mu\Pi\frac{\overline{\Lambda}''(\alpha;0)}{2}\Pi\mu^{\mathrm{T}},$$

если $\overline{\Lambda}'(\alpha;0)\neq0\left(e=\dfrac{\overline{\Lambda}'(\alpha;0)}{|\Lambda'(\alpha;0)|},\ \Pi=E-e^{\mathrm{T}}e\right)$.

Из (33) имеем

$$\overline{\lambda}'=\frac{\dot{\varphi}\varphi'-\dot{\varphi}'\varphi}{\ddot{\varphi}\varphi-\dot{\varphi}^2}.$$

Дифференцируя равенство (32) по μ, получаем

$$\overline{\Lambda}'(\alpha;\mu)=\frac{\varphi'}{\varphi},\tag{35}$$

$$\overline{\Lambda}''(\alpha;\mu)=-\frac{\varphi''}{\varphi}+\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)+\frac{\left(\dfrac{\dot{\varphi}'}{\varphi}-\dfrac{\varphi'\dot{\varphi}}{\varphi^2}\right)\left(\dfrac{\dot{\varphi}'}{\varphi}-\dfrac{\varphi'\dot{\varphi}}{\varphi^2}\right)}{\sigma^2},\tag{36}$$

где $\sigma^2=\dfrac{\ddot{\varphi}\varphi-\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}$.

Предположим, что выполнено условие

$$\varphi'(\lambda;\ 0)\equiv0.\tag{37}$$

Тогда из (35) и (36) следует, что

$$\overline{\Lambda}'(\alpha;\ 0)\equiv0,$$

$$\overline{\Lambda}''(\alpha;0)=-\frac{\varphi''\varphi}{\varphi^2}+\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\dot{\varphi}'}{\varphi}\right)\left(\frac{\dot{\varphi}'}{\varphi}\right)^{\mathrm{T}}.\tag{38}$$

Для вычисления матрицы, входящей в правую часть (38), введем новую меру

$$\widetilde{\mathbf{P}}(A)\equiv\frac{\mathbf{E}_0(e^{\lambda\xi(0)+\eta(0)};A)}{\varphi(\lambda;0)}.$$

Тогда справедливы следующие формулы:

$$\sigma^2 = \frac{\ddot{\varphi}\varphi - \dot{\varphi}^2}{\varphi^2} = \widetilde{\mathbf{E}}\xi(0) - \left(\widetilde{\mathbf{E}}\xi(0)\right)^2 = \widetilde{D}\xi(0), \tag{39}$$

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \widetilde{\mathbf{E}}(\lambda\xi'(0) + \eta'(0))^{\mathrm{T}}(\lambda\xi'(0) + \eta'(0)) + \widetilde{\mathbf{E}}(\lambda\xi''(0) + \eta''(0)), \tag{40}$$

$$\left(\frac{\dot{\varphi}'}{\varphi}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\dot{\varphi}'}{\varphi}\right) = \left[\widetilde{\mathbf{E}}\xi(0)(\lambda\xi'(0) + \eta'(0))\right]^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{E}}\xi(0)(\lambda\xi'(0) + \eta'(0)). \tag{41}$$

Искомая матрица (34) порядка m имеет вид

$$\overline{\Lambda}''(\alpha; 0) = -\Big[\widetilde{\mathbf{E}}(\lambda\xi'(0) + \eta'(0))^{\mathrm{T}}(\lambda\xi'(0) + \eta'(0)) -$$
$$-\frac{1}{\widetilde{\mathbf{D}}\xi(0)}\widetilde{\mathbf{E}}\xi(0)(\lambda\xi'(0) + \eta'(0))^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{E}}\xi(0)(\lambda\xi'(0) + \eta'(0))\Big] - \widetilde{\mathbf{E}}(\lambda\xi''(0) + \eta''(0). \tag{42}$$

Пусть теперь условие (37) не выполнено, т. е. $\varphi'(\lambda;\ 0) \neq 0$. Введем единичный вектор $e \in R^m$, положив

$$e = \frac{\varphi'(\lambda; 0)}{|\varphi'(\lambda; 0)|},$$

и пусть

$$\Pi = \Pi_e \equiv E - e^{\mathrm{T}}e.$$

Тогда в силу (35) и (36) получаем:

$$\overline{\Lambda}'(\alpha;\ 0) = \widetilde{\mathbf{E}}(\lambda\xi'(0) + \eta'(0)),$$

$$\Pi\Lambda''(\alpha; 0)\Pi = -\frac{\Pi\varphi''\Pi}{\varphi} + \frac{1}{\sigma^2}\Pi\left(\frac{\dot{\varphi}'}{\varphi}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\dot{\varphi}'}{\varphi}\right)\Pi,$$

где константа σ^2 и матрицы $\frac{\varphi''}{\varphi}$ и $\left(\frac{\dot{\varphi}'}{\varphi}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\dot{\varphi}'}{\varphi}\right)$ определяются формулами (39)—(41).

Обратимся непосредственно к доказательству лемм 3, 4. Для этого выберем

$$\mu = \theta_2 \in R^k, \qquad \widehat{\theta_2} + \theta_2 \in \Theta_2,$$

и пусть

$$\xi(\mu) = a(\widehat{\theta_2} + \theta_2) - a(\theta_1), \qquad \eta(\mu) = 0.$$

Из условия $B_1^{(1)}(c)$ следуст, что

$$\overline{\Lambda}'(\alpha; 0) = 0,\ \overline{\Lambda}''(\alpha; 0) \geqslant \frac{\lambda(\alpha)}{c}E.$$

Вычисляя далее с помощью формулы (42) матрицу $\overline{\Lambda}''(\alpha;\ 0)$, получаем

$$\overline{\Lambda}''(\alpha; 0) = -\lambda^2(\alpha)\widetilde{B} + \lambda(\alpha)K \geqslant \frac{\lambda(\lambda)}{c}E,$$

т. е. лемма 3 доказана.

Обратимся к лемме 4. Легко видеть, что справедливо неравенство

$$\mathbf{P}_\theta\left(\max_{\theta\in\Theta_2} A_n(\theta) - A_n(\theta_1) \leqslant n\alpha\right) \leqslant \mathbf{P}_\theta(A_n(\theta) - A_n(\theta_1) \leqslant n\alpha),\ \theta \in \Theta_2. \tag{43}$$

В силу лемм 10—12, которые докажем позже, справедливо

$$\ln \mathbf{P}_\theta\left(\max_{\theta_2\in\Theta_2} A_n(\theta_2) - A_n(\theta_1) \leqslant n\alpha\right) \sim -n(\Lambda(\alpha; \theta) - \alpha),$$

где функция $\Lambda(\alpha;\ \theta)$ определена формулой (22). Легко показать далее, используя технику грубых теорем о больших уклонениях (см. § 3), что

$$\ln \mathbf{P}_\theta (A_n(\theta) - A_n(\theta_1) \leqslant n\alpha) =$$
$$= \ln \mathbf{P}_\theta (A_n(\theta_1) - A_n(\theta) \geqslant -n\alpha) \sim -n(\Lambda(\alpha;\ \theta,\ \theta_1,\ \theta) - \alpha),$$

где функция $\Lambda(\alpha;\ \theta,\ \theta_1,\ \theta_2)$ определена формулой (20). В силу (43) имеем

$$\Lambda(\alpha;\ \theta) \geqslant \Lambda(\alpha;\ \theta,\ \theta_1,\ \theta), \quad \theta \in \Theta_2, \tag{44}$$

Поскольку

$$\Lambda(\alpha;\ \widehat{\theta}_2) = \Lambda(\alpha;\ \widehat{\theta}_2,\ \theta_1,\ \widehat{\theta}_2),$$
$$\Lambda'(\alpha; \widehat{\theta}_2) \equiv \frac{\partial \Lambda(\alpha; \theta)}{\partial \theta}\Bigg|_{\theta = \widehat{\theta}_2} \geqslant \frac{\partial \Lambda(\alpha; \theta, \theta_1, \theta)}{\partial \theta}\Bigg|_{\theta = \theta_2} = 0,$$

получаем из (44), что

$$\Lambda''(\alpha;\ \widehat{\theta}_2) \equiv \frac{\partial^2 \Lambda(\alpha; \theta)}{\partial \theta}\Bigg|_{\theta = \widehat{\theta}_2} \geqslant \frac{\partial^2 \Lambda(\alpha; \theta, \theta_1, \theta)}{\partial \theta}\Bigg|_{\theta = \widehat{\theta}_2} \equiv \Lambda_1''.$$

В силу условия $B_1^{(1)}(c)$ матрица Λ_1'' удовлетворяет условию

$$\Lambda_1'' \geqslant \frac{\lambda(\alpha)}{c} E,$$

поэтому справедливо неравенство

$$\Lambda''(\alpha;\ \widehat{\theta}_2) \geqslant \frac{\lambda(\alpha)}{c} E.$$

Таким образом, нам осталось воспользоваться леммой 11. Лемма 4 доказана.

Докажем лемму 11 (считая, что лемма 10 справедлива). Рассмотрим функцию

$$\widetilde{\Lambda}(\alpha;\ \widehat{\theta}_2 + \theta, \theta_1, \widehat{\theta}_2 + \theta_2) \equiv \Lambda(\alpha;\ \widehat{\theta}_2, \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2) + (\theta, \theta_2)\frac{\Phi}{2}(\theta, \theta_2)^{\mathrm{T}},$$

где квадратная матрица порядка $2k$ определяется так:

$$\Phi = \overline{\Lambda}''(\alpha;\ 0), \quad \overline{\Lambda}(\alpha;\ \mu) = \Lambda(\alpha;\ \widehat{\theta}_2 + \theta,\ \theta_1,\ \widehat{\theta}_2 + \theta_2), \tag{45}$$

$\mu = (\theta,\ \theta_2) \in R^{2k}$. Иначе говоря, функция $\overline{\Lambda}(\alpha;\ \mu)$ строится по формуле (32), если выбрать

$$\xi(\mu) = a(\widehat{\theta}_2 + \theta_2) - a(\theta_1), \quad \eta(\mu) = a(\widehat{\theta}_2 + \theta) - a(\widehat{\theta}_2),$$

и в качестве основного распределения $\mathbf{P}$ выбрать $\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}$. Для фиксированного θ найдем вектор $\overline{\theta}_2 = \overline{\theta}_2(\theta)$ как решение уравнения

$$\frac{\partial \widetilde{\Lambda}(\alpha;\ \widehat{\theta}_2 + \theta, \theta_1, \widehat{\theta}_2 + \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0. \tag{46}$$

Рассмотрим далее функцию

$$\widetilde{\Lambda}(\alpha;\ \theta) \equiv \widetilde{\Lambda}(\alpha;\ \widehat{\theta}_2 + \theta,\ \theta_1,\ \widehat{\theta}_2 + \overline{\theta}_2(\theta)), \tag{47}$$

которую представим в виде

$$\widetilde{\Lambda}(\alpha; \theta) = \Lambda(\alpha;\ \widehat{\theta}_2) + \theta\frac{\widetilde{\Lambda}''(\alpha; 0)}{2}\theta^{\mathrm{T}}.$$

Поскольку очевидно, что

$$\Lambda'(\alpha;\ \widehat{\theta}_2) = \widetilde{\Lambda}'(\alpha,\ 0),\ \ \Lambda''(\alpha;\ \widehat{\theta}_2) = \widetilde{\Lambda}''(\alpha;\ 0),$$

то лемма 11 будет доказана, если мы докажем, что

$$\widetilde{\Lambda}'(\alpha;\ 0)=0, \quad \widetilde{\Lambda}''(\alpha;\ 0)=U. \tag{48}$$

Выполним вычисления, приводящие к (48).

Найдем матрицу Φ, определяемую формулой (45). Для этого представим Φ в виде

$$\Phi=\|\Phi_{ij}\|_{i,j=1,2},$$

где Φ_{ij} — квадратные матрицы порядка k, которые легко вычисляются с помощью формулы (42):

$$\Phi_{11}=-\widetilde{B}+K, \quad \Phi_{22}=-\lambda^2(\alpha)\widetilde{B}+\lambda(\alpha)K, \quad \Phi_{12}=\Phi_{21}=\lambda(\alpha)\widetilde{B}.$$

Поэтому уравнение (46) имеет вид

$$\theta\Phi_{21}+\theta_2\Phi_{22}=0. \tag{49}$$

Решим уравнение (49)

$$\theta_2=\bar{\theta}_2(\theta)=-\theta\Phi_{21}\Phi_{22}^{-1}=\lambda^{-1}(\alpha)\widetilde{B}\left(-\widetilde{B}+\frac{1}{\lambda(\alpha)}K\right)^{-1},$$

где матрица $\left(-\widetilde{B}+\frac{1}{\lambda}K\right)^{-1}$ существует в силу леммы 3. Подставляя $\bar{\theta}_2(\theta)$ в правую часть (47), получим

$$\widetilde{\Lambda}(\alpha;\theta)=\Lambda(\alpha;\widehat{\theta}_2)+\theta\left[\frac{\Phi_{11}}{2}-\frac{\Phi_{12}\Phi_{22}^{-1}\Phi_{21}}{2}\right]\theta^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом,

$$\widetilde{\Lambda}'(\alpha;\ 0)=0, \quad \widetilde{\Lambda}''(\alpha;\ 0)=U.$$

Лемма 11 доказана.

Докажем лемму 10. Нам нужно доказать прежде всего, что на множестве $U_\delta(\widehat{\theta}_2)$, $\delta=\frac{1}{c}\sqrt{\lambda(\alpha)}$, определен вектор $\widetilde{\theta}_2=\widetilde{\theta}_2(\theta)$. Предположим сначала, что $\lambda(\alpha)\geqslant 1/c_1>0$ для некоторой константы $c_1\in[1,\ \infty)$. Выберем вектор-функцию $\Phi(\mu;\theta)$: $R^k\times R^k\to R^k$, положив

$$\Phi(\mu;\theta)=\frac{\partial\Lambda\left(\alpha;\ \widehat{\theta}_2+\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}},\ \theta_1,\ \widehat{\theta}_2+\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right)}{\partial\mu}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\Phi(\mu;\ \theta)=0$$

для $\mu=\mu(\theta)$. Используя вычисления, сделанные при доказательстве лемм 3, 4, 11, можно показать, что выполнены все условия леммы 5 (из приложения). В частности, определитель матрицы $\partial\Phi(\mu;\ \theta)/\partial\mu$ отделен от нуля. Поэтому решение $\mu=\mu(\theta)$ существует и обладает нужными свойствами в области $U_{1/c_1}(0)$. Стало быть, решение

$$\widetilde{\theta}_2(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mu\left((\theta-\widehat{\theta}_2)\sqrt{\lambda}\right),\ \theta\in U_{\sqrt{\lambda}/c_1}(\widehat{\theta}_2),$$

существует и обладает нужными свойствами. Лемма 10 доказана.

Доказательство леммы 12. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}_{\theta_2}\left(\max_{\theta\in\Theta_2}A_n(\theta)-A_n(\theta_1)\leqslant n\alpha\right)=\mathbf{P}_{\theta_2}\left(A_n(\theta_1)-\max_{\theta\in\Theta_2}A_n(\theta)\geqslant-n\alpha\right)\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}_{\theta_2}(A_n(\theta_1)-A_n(\theta_2)\geqslant-n\alpha).$$

Заметим далее, что вероятности

$$\mathbf{P}_{\theta_2}(A_n(\theta_1)-A_n(\theta_2)\geqslant-n\alpha)$$

отвечает функция уклонений

$$n(\Lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2)-\alpha);$$

в силу наших условий для $|\theta_2-\widehat{\theta}_2|\geqslant\frac{\sqrt{\lambda(\alpha)}}{c_1}$ выполняется неравенство

$$n(\Lambda(\alpha;\theta_1,\theta_2)-\alpha)-n\left(\Lambda\left(\alpha;\theta_1,\ \widehat{\theta}_2\right)-\alpha\right)\geqslant\frac{n\lambda(\alpha)}{cc_1^2}\geqslant\frac{\sqrt{n}\,N_n}{cc_1^2},$$

где $N_n\to\infty$. Поэтому соотношение (25) получается с помощью обычной техники грубых теорем о больших уклонениях (см. гл. I).

Обратимся к формулам (23), (24). Существует $c_1\in[1,\ \infty)$, зависящее только от c, такое, что для всех $\theta\in\{\theta_1\}\cup U_2(\widehat{\theta_2})$, $\alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$, четверка

$$(\{\theta_1\},\ \Theta_2,\ \mathscr{P},\ \alpha)$$

принадлежит классу II.$\mathscr{A}(c_1)$. Тут в пояснении нуждается только соотношение 1) из условия II.$\mathscr{A}(c_1)$, которое будет следовать из соотношения: существует $c_1<\infty$ такое, что для $\theta\in\{\theta_1\}\cup U_2(\widehat{\theta_2})$, $\alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$ справедливо неравенство

$$\widetilde{\mathbf{E}}_\theta\left(a\left(\widetilde{\theta}_2\right)-a(\theta_2)\right)\geqslant\frac{\lambda(\alpha)}{c_1}|\,\widetilde{\theta}_2(\theta)-\theta_2|^2,\ \theta_2\in\Theta_2,\tag{49'}$$

где вероятностные распределения $\widetilde{\mathbf{P}}_\theta$ определены как

$$\widetilde{\mathbf{P}}_\theta(A)=\frac{\mathbf{E}_\theta\left(e^{\lambda\left(\alpha;\theta,\theta_1,\widetilde{\theta}_2(\theta)\right)\left(a\left(\widetilde{\theta}_2(\theta)\right)-a(\theta_1)\right)};\ A\right)}{\varphi\left(\lambda\left(\alpha;\ \theta;\ \theta_1,\ \widetilde{\theta}_2(\theta)\right);\ \theta,\theta_1,\ \widetilde{\theta}_2(\theta)\right)}.\tag{50}$$

В наших (49′) условиях в силу леммы 10 математические ожидания в левой части (49) равномерно непрерывны по $\theta\in U_2(\widehat{\theta}_2)$. Поэтому данные неравенства достаточно проверить при $\theta=\theta_1$ и $\theta=\theta_2$. Поскольку меры (50) при $\theta=\theta_1$ и $\theta=\widehat{\theta}_2$ совпадают, то достаточно проверить, что

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{\theta_1}\left(a\left(\widehat{\theta}_2\right)-a(\theta_2)\right)\geqslant\frac{\lambda(\alpha)}{c_1}|\,\widehat{\theta}_2-\theta_2|^2,\ \theta_2\in\Theta_2.\tag{51}$$

Соотношение (51) достаточно доказать для случая $\lambda(\alpha)\geqslant\frac{1}{c}$; если же $\lambda(\alpha)\to 0$, то, выбирая

$$\widetilde{a}(\theta)=\frac{A_k(\theta)}{\sqrt{k}},\ \text{где}\ k=\left[\lambda^{-2}(\alpha)\right],$$

мы сводим дело к случаю $\widetilde{\lambda}(\widetilde{\alpha})=\lambda(\alpha)\sqrt{k}\geqslant 1/2$.

При θ_2, близких к $\widehat{\theta_2}$, соотношение (51) следует из условия B_1 (c), в силу которого левая часть (51) ведет себя как

$$(\theta_2-\widehat{\theta}_2)\frac{K}{2}(\theta_2-\widehat{\theta}_2)^{\mathrm{T}}\geqslant\frac{\lambda(\alpha)}{c}|\,\theta_2-\widehat{\theta}_2|^2.$$

Если $|\theta_2-\widehat{\theta_2}|\geqslant 1/c_1$, $\lambda(\alpha)\geqslant 1/c_1$, то требуемое соотношение

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{\theta_1}\left(a\left(\widehat{\theta}_2\right)-a(\theta_2)\right)\geqslant\frac{1}{c_2}$$

следует из леммы 13, сформулированной и доказанной ниже. Лемма 12 доказана.

Рассмотрим две случайные величины ξ_1 и ξ_2, заданные на одном вероятностном пространстве и удовлетворяющие условию Крамера:

$$\mathbf{E}e^{\lambda\xi_i}\leqslant c<\infty\ \text{при}\ |\lambda|\leqslant 1/c,\quad i=1,2.$$

Пусть $\Lambda_i(\alpha)$ есть функция уклонений случайной величины ξ_i и пусть выполнено условие

$$\inf_{\alpha\geqslant 0} \Lambda_2(\alpha) > \inf_{\alpha\geqslant 0} \Lambda_1(\alpha) = \Lambda(0). \tag{52}$$

Обозначим $\overline{\mathbf{P}}$ меру

$$\overline{\mathbf{P}}(A) \equiv \mathbf{E}\left(e^{\lambda_1(0)\xi_1}; A\right) \Big| \mathbf{E}e^{\lambda_1(0)\xi_1},$$

где $\lambda_1(\alpha) = \Lambda_1'(\alpha)$.

Лемма 13. *Пусть выполнено условие* (52). *Тогда*

$$\overline{\mathbf{E}}(\xi_1 - \xi_2) > 0. \tag{53}$$

Доказательство, очевидно, достаточно провести для случая, когда случайные величины ξ_1 и ξ_2 являются решетчатыми. Пусть $S_n^{(i)} = \xi_{1,i} + \ldots + \xi_{n,i}$, где $(\xi_{j,1}, \xi_{j,2})$, $j = 1, 2, \ldots$ — независимые случайные вектора с общим с (ξ_1, ξ_2) распределением.

Оценим сначала снизу вероятность $\mathbf{P}\left(\frac{1}{n} S_n^{(2)} \geqslant 0\right)$.

$$\ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{n} S_n^{(2)} \geqslant 0\right) \geqslant \ln \mathbf{P}\left(S_n^{(1)} = 0, \frac{S_n^{(2)} - S_n^{(1)}}{n} \geqslant 0\right) =$$

$$= -n\Lambda_1(0) + \ln \overline{\mathbf{P}}\left(S_n^{(1)} = 0, \frac{S_n^{(2)} - S_n^{(1)}}{n} \geqslant 0\right).$$

Поскольку $\overline{\mathbf{E}}\xi_1 = 0$, то в случае, если неравенство (53) не выполнено, т. е.

$$a \equiv \overline{\mathbf{E}}(\xi_2 - \xi_1) \geqslant 0, \tag{54}$$

имеем

$$\ln \overline{\mathbf{P}}\left(S_n^{(1)} = 0, \frac{S_n^{(2)} - S_n^{(1)} - a}{\sqrt{n}} \geqslant -\sqrt{n}\, a\right) \sim \ln \frac{c}{\sqrt{n}},$$

так что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{n} S_n^{(2)} \geqslant 0\right) \geqslant -n\Lambda_1(0).$$

С другой стороны,

$$\ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{n} S_n^{(2)} \geqslant 0\right) \sim -n \inf_{\alpha\geqslant 0} \Lambda_2(\alpha),$$

что приходит в противоречие с (53). Стало быть, предположение (54) неверно и лемма 13 доказана.

7. Доказательства теорем 3, 4 очень близки доказательствам теорем 1, 2. Поэтому ограничимся тем, что покажем, как рассматриваемую задачу для тройки

$$(E_n, \alpha^-, \alpha^+)$$

из класса $\mathscr{B}^{(2)}(c)$ свести к аналогичной задаче для тройки

$$(\overline{E}_n, \alpha^-, \alpha^+), \quad \overline{E}_n = (\{\theta_1\}, \widetilde{\Theta}_2, \mathscr{P}, X_n)$$

из класса $\mathscr{B}^{(1)}(c)$, где множество $\widetilde{\Theta}_2$ является «телесным» множеством в R^{k-1}.

Наряду с экспериментом

$$E_n = (\{\theta_1\}, \Theta_2, \mathscr{P}, X_n)$$

рассмотрим эксперимент

$$\widetilde{\mathrm{E}}_n = (\{\theta_1\},\ \widetilde{\Theta}_2,\ \mathscr{P},\ X_n),$$

в котором множество $\widetilde{\Theta}_2$ есть граница множества Θ_2 и, стало быть, в окрестности точки $\widetilde{\theta}_2 = \widetilde{\theta}_2(\alpha)$ является гладким многообразием размерности $k-1$. Точку $\widehat{\theta}_2 \in \widetilde{\Theta}_2 - \widehat{\theta}_2$ в окрестности $\theta_2 = 0$ можно представить в виде

$$\theta_2 = e\Phi(\theta_2\Pi) + \theta_2\Pi,$$

$$\Pi = \Pi_e = E - e^{\tau}e, \quad |\theta_2\Pi| \leqslant 1/c, \tag{55}$$

где функция $\Phi(\theta_2\Pi)\colon R^k\Pi \to R^1$ удовлетворяет условиям

$$\Phi'(0) = 0, \quad \Pi\Phi''(0)\Pi = \Pi V\Pi,$$

поэтому, используя новую параметризацию (55), сводим задачу для эксперимента $\widetilde{\mathrm{E}}_n$ к задаче, когда ближайшая к θ_1 точка $\widehat{\theta}_2$ является внутренней точкой множества $\bar{\Theta}_2$. Доказательства для эксперимента $\widetilde{E}_n$ ограничиваются доказательствами для эксперимента E_n в силу того, что в наших условиях на элементарных исходах из редкого события

$$\left\{\max_{\theta\in\Theta_2} A_n(\theta) - A_n(\theta_1) > n\alpha\right\}$$

с подавляющей вероятностью максимум $A_n(\theta_{2,n}^{+})$ поля $A_n(\theta)$ по множеству Θ_2 достигается на границе $\widetilde{\Theta}_2$ (разумеется, в окрестности точки $\widehat{\theta}_2 = \widehat{\theta}_2(\alpha)$).

8. **Доказательство теорем 5, 6.** Основано на сравнении вероятностей ошибок тестов $T^*_{n,y/n}$ и тестов

$$T^G_{n,y'/n} = \mathbf{1}\left\{\ln \int\limits_{\Theta_2} e^{A_n(\theta)} g_2(\theta)\,d\theta - A_n(\theta_1) > y'\right\},$$

где последовательность $y' = y_n'$ определяется с помощью соотношения

$$y_n' = y - \frac{k}{n}\ln n - \ln t + \frac{k-1}{2}\ln(2\pi) - \frac{(k-1)}{2}\ln\frac{T}{t} -$$

$$- \ln\left(1 - \frac{T}{t}\right) + \ln g_2(o),\ T = \frac{t}{2} + \frac{y}{t}. \tag{56}$$

Кроме того, нам понадобятся еще тесты

$$T^G_{n,\alpha,p} \equiv pT^G_{n,\alpha} + (1-p)\,\mathbf{1}\left\{\ln \int\limits_{\Theta_2} e^{A\ (\theta)} g_2(\theta)\,d\theta - A_n(\theta_1) = n\alpha\right\},$$

где $p \in [0, 1]$.

В леммах 14—16, сформулированных ниже, будем предполагать выполненными условие теоремы 5 и, кроме того, условие

$$-\frac{t}{2} + N_n \leqslant \frac{y}{t} \leqslant \frac{t}{2} - N_n \tag{57}$$

для некоторой последовательности $N_n \to \infty$. Пусть $\eta \in R^k$ есть случайный гауссовский вектор с параметрами $(0, E)$.

Лемма 14.

$$\varepsilon_0(T^*_{n,y/n}) \sim \varepsilon_0(T^G_{n,y'/n}) \sim \mathbf{P}\left(|\eta| > \frac{t}{2} + \frac{y}{t}\right).$$

Лемма 15. *Для любых* $\theta \in \Theta_2$, $1 \leqslant N < \infty$

$$\delta_0(T^*_{n,y/n}) = \delta_0(T^G_{n,y'/n})(1 + \nu_n^{(1)}(\theta)) = \mathbf{P}\Big(|\eta + 0\sqrt{n}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t}{2} + \frac{y}{t}\Big)(1 + \nu_n^{(2)}(\theta)), \tag{58}$$

где

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\theta\in\Theta_2} |\nu_n^{(i)}(\theta)| \leqslant c_1,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\frac{t}{\sqrt{n}}\leqslant|\theta|\leqslant\frac{t}{\sqrt{n}}(1+N)} |\nu_n^{(i)}(\theta)| = 0, \quad i=1,2.$$

Лемма 16. *Пусть числа* $\tilde{y}=\tilde{y}_n$, $p=p_n\in[0, 1]$ *таковы, что*

$$\varepsilon_0\left(T^*_{n,y/n}\right) = \varepsilon_0\left(T^G_{n,\tilde{y}/m,p}\right).$$

Тогда

$$\delta^Q\left(T^*_{n,y/n}\right) \sim \delta^Q\left(T^G_{n,\tilde{y}/n,p}\right) \sim \delta^Q\left(T^G_{n,\tilde{y}/n}\right).$$

Леммы 14—16 докажем несколько позже, а сейчас с их помощью докажем теорему 5. Соотношение (17) следует непосредственно из леммы 14, поскольку большие уклонения гауссовского случайного вектора $\eta\in R^k$ хорошо изучены (см., например, [27]):

$$\mathbf{P}\left(|\eta| \geqslant \left(\frac{t}{2}+\frac{y}{t}\right)\right) \sim (2\pi)^{-k/2}\, b_k \left(\frac{t}{2}+\frac{y}{t}\right)^{k-} e^{-\frac{\left(\frac{t}{2}+\frac{y}{t}\right)^2}{2}}.$$

При этом если последовательность N_n в (57) стремится к ∞ достаточно медленно, то диапазон изменения $\varepsilon_0\left(T^*_{n,y/n}\right)$ покрывает интервал $\left[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+\right]$, определяемый (16).

Для доказательства (18) изучим сначала асимптотику правой части (58). Непосредственно из теоремы 4.1 следует, что

$$\mathbf{P}\left(|\eta+\theta\sqrt{n}|\leqslant\frac{t}{2}+\frac{y}{t}\right) \sim \frac{e^{-\frac{\left(\frac{t}{2}+\frac{y}{t}-\sqrt{n}|\theta|\right)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,2^{\frac{k-1}{2}}\left|\frac{t}{2}+\frac{y}{t}-\sqrt{n}\,|\theta|\right|}, \tag{59}$$

где $|\theta|\geqslant\frac{t}{\sqrt{n}}$. Поскольку вклад в асимптотику усредненной ошибки $\delta^Q\left(T_{n,y/n}\right)$ вносят только те точки $\theta\in\Theta_2$, которые лежат вблизи границы $\left\{\theta\colon |\theta| = \frac{t}{\sqrt{n}}\right\}$, и плотность $q_2(\theta)$ непрерывна в точке $\theta=0$, то справедливо соотношение

$$\delta^Q\left(T^*_{n,y/n}\right) \equiv \int_{\Theta_2} \delta_\theta\left(T^*_{n,y/n}\right) q_2(\theta)\, d\theta \sim q_2(0)\int_{\Theta_2} \delta_\theta\left(T^*_{n,y/n}\right) d\theta. \tag{60}$$

В силу (60) и (61) достаточно найти асимптотику интеграла

$$\int_{|\theta|\geqslant t/\sqrt{n}} \left|\frac{t}{2}+\frac{y}{t}-\sqrt{n}\,|\theta|\right|^{-1} e^{-\frac{\left|\frac{t}{2}+\frac{y}{t}-\sqrt{n}|\theta|\right|^2}{2}}\, d\theta \sim$$

$$\sim \frac{1}{\left|\frac{t}{2}-\frac{y}{t}\right|}\int_{|\theta|\geqslant t/\sqrt{n}} e^{-\frac{\left|\frac{t}{2}+\frac{y}{t}-\sqrt{n}|\theta|\right|^2}{2}}\, d\theta \sim \frac{e^{-\frac{\left|\frac{t}{2}-\frac{y}{t}\right|^2}{2}}}{n^{k/2}\left|\frac{t}{2}-\frac{y}{t}\right|}\int_{|u|\geqslant t} e^{-\left|\frac{t}{2}-\frac{y}{3}\right|(|u|-t)}\, du \sim$$

$$\sim \frac{e^{-\frac{\left|\frac{t}{2}-\frac{y}{t}\right|^2}{2}} t^k}{n^{k/2}\left|\frac{t}{2}-\frac{y}{t}\right|} \int\limits_{|v|\geqslant 1} e^{-t\left(\frac{t}{2}-\frac{y}{t}\right)(|v|-1)}\, dv \sim \frac{e^{-\frac{\left|\frac{t}{2}-\frac{y}{t}\right|^2}{2}} t^k b_k}{n^{k/2}\left|\frac{t}{2}-\frac{y}{t}\right|} \int\limits_1^\infty e^{-t\left(\frac{t}{2}-\frac{y}{t}\right)(y-1)}\, dy =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\left|\frac{t}{2}-\frac{y}{t}\right|^2}{2}} t^k}{n^{k/2}\left|\frac{t}{2}-\frac{y}{t}\right|^2} b_k.$$

Таким образом, в силу леммы 15 соотношение (18) доказано.

В силу утверждений лемм 14, 15 для y в пределах (56) выполняются соотношения

$$\varepsilon^Q(T^*_{n,y/n}) \sim \varepsilon^Q(T^G_{n,y'/n}),$$
$$\delta^Q(T^*_{n,y/n}) \sim \delta^Q(T^D_{n,y'/n}).$$

Далее, в силу утверждения лемм 14, 15 для любой последовательности $p = p_n \in [0, 1]$ выполняется

$$\varepsilon^Q(T^G_{n,y'/n}) \sim \varepsilon^Q(T^G_{n,y'/n,p}),$$
$$\delta^Q(T^G_{n,y'/n}) \sim \delta^Q(T_{n,y'/n,p}).$$

Поэтому в силу леммы 16 классы $\{T^*_{n,\alpha}\}$, $\{T^G_{n,\alpha}\}$ вместе с классом $\{T^G_{n,\alpha,p}\}$ будут $\{Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+\}$-РАПМ классами. Мы доказали части I, II теоремы 5.

Обратимся к доказательству части III. Легко убедиться, используя (17) и (18), что если α лежит в пределах

$$-pt \leqslant \frac{n\alpha}{t} \leqslant \frac{t}{2} - N_n, \tag{61}$$

где $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$, $N_n \to \infty$, то соотношение

$$\varepsilon_0(T^*_{n,\alpha}) \sim \varepsilon_0(T^*_{n,\alpha'})$$

влечет за собой соотношение

$$\delta^Q(T^*_{n,\alpha}) \sim \delta^Q(T^*_{n,\alpha'}).$$

Это значит, что в диапазоне уклонений (61) «малому» изменению ошибки первого рода отвечает «малое» изменение ошибки второго рода, т. е. в этом диапазоне уклонений классы $\mathscr{K}_n^{(1)}$ и $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$ будут АПМ классами. Теорема 5 доказана.

Доказательства лемм 14—16 представим в виде последовательных утверждений.

1. *Пусть* $b^2 > 0$, $t \geqslant 0$, $y \leqslant \frac{b^2 t^2}{2}$. *Тогда*

$$\left\{\eta \in R^k\colon \max_{|\theta| \geqslant t/\sqrt{n}} \left\{ \sqrt{n}\,\theta\eta^{\mathrm{T}} - n\frac{|\theta|^2}{2} b^2 \geqslant y\right\}\right\} = \left\{\eta \in R^k\colon |\eta| \geqslant \frac{tb^2}{2} - \frac{y}{t}\right\}. \tag{62}$$

Доказательство (62) проведем сначала для $b^2 = 1$. В этом случае справедливо

$$D \equiv \left\{\eta \in R^k\colon \max_{|\eta| \geqslant t/\sqrt{n}} \left\{ \sqrt{n}\theta\eta^{\mathrm{T}} - n\frac{|\theta|^2}{2}\right\} \geqslant y\right\} =$$
$$= \left\{\eta \in R^k\colon \frac{|\eta|^2}{2} + \max_{|u| \geqslant t}\left\{-\frac{|\eta - u|^2}{2}\right\} \geqslant y\right\}.$$

Пусть далее

$$D_1=\{\eta:\ |\eta|\geqslant t\},\quad \bar{D}_1=\{\eta:\ |\eta|<t\}.$$

На множестве D_1 выполняется

$$R(t)\equiv\frac{|\eta|^2}{2}+\max_{|u|\geqslant t}\left\{-\frac{|\eta-u|^2}{2}\right\}=\frac{|\eta|^2}{2},$$

а на множестве $\bar{D}_1$ соответственно

$$R(t)=\frac{|\eta|^2}{2}-\frac{|t-|\eta||^2}{2}=\frac{-t^2+2t|\eta|}{2}.$$

Поэтому справедливо соотношение

$$D=(D\cap D_1)\cup(D\cap\bar{D}_1)=\left\{\frac{|\eta|^2}{2}\geqslant y,\ |\eta|\geqslant t\right\}\cup\left\{|\eta|t\geqslant\frac{t^2}{2}+y,\ |\eta|<t\right\}. \tag{63}$$

Далее, поскольку при $y\leqslant\frac{t^2}{2}$ выполняютя

$$\left\{\frac{\eta^2}{2}\geqslant y,\ |\eta|\geqslant t\right\}=\left\{|\eta|t\geqslant\frac{t^2}{2}+y,\ |\eta|\geqslant t\right\},$$

из (63) получаем требуемое

$$D=\left\{|\eta|t\geqslant\frac{t^2}{2}+y\right\}.$$

Переход к случаю $b^2\neq 1$ очевиден.

2. *Найдется* $\delta>0$ *такое, что*

$$\mathbf{P}_0\left(\exists\theta:\ |\theta|\leqslant\nu,\ -\frac{A_n''(\theta)}{n}\leqslant\delta E\right)\leqslant e^{-\frac{(1+\delta)}{8}t^2}.$$

Доказательство п. 2 следует в силу наших условий из леммы 4 в Приложении.

3. *Для* $\delta>0$ *из* п. 2 *найдется* $r<\infty$ *такое, что*

$$\mathbf{P}_0\left(\sup_{|\theta|\leqslant t\left(1+\frac{1}{\delta}\right)/\sqrt{n}}\left\|\frac{A_n''(\theta)}{n}+E\right\|>r\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\leqslant e^{-\frac{(1+\delta)}{8}t^2}.$$

Доказательство п. 3 следует в силу наших условий из леммы 4 в Приложении.

4. *Для* $y=y_n$, *удовлетворяющих* (56), *выполняется*

$$\mathbf{P}\equiv\mathbf{P}_0\left(\sup_{\frac{t}{\sqrt{n}}\leqslant|\theta|\leqslant\nu}(A_n(\theta)-A_n(0))>y\right)\leqslant\mathbf{P}_0\left(|\eta_n|\geqslant\frac{t}{2}+\frac{y}{t}\right),$$

где $\eta_n\equiv A_n'(0)/\sqrt{n}$.

Доказательство. Вероятность $\mathbf{P}$ не превосходит суммы $\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2$, где

$$\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_0\left(\sup_{\frac{t}{\sqrt{n}}\leqslant|\theta|\leqslant\frac{t}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}A_n(\theta)-A_n(0)>y\right),$$

$$\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_0\left(\sup_{\frac{t}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\leqslant|\theta|\leqslant\nu}A_n(\theta)-A_n(0)>y\right).$$

Для оценки $\mathbf{P}_1$ воспользуемся утверждением п. 3, в силу которого

$$\mathbf{P}_1 \leqslant \mathbf{P}_0\left(\sup_{\frac{t}{\sqrt{n}}\leqslant|\theta|\leqslant\frac{t}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}\left\{\sqrt{n}\theta\eta_n^{\mathrm{T}} - \frac{n|\theta|^2 b_n^2}{2}\right\} > y\right) + \exp\{-(1+\delta)t^2/8\},$$

где $b_n^2 = 1 - rt/\sqrt{n}$. Далее в силу п. 1 получаем, что

$$\mathbf{P}_1 \leqslant \mathbf{P}(|\eta_n| \geqslant tb_n^2/2 + y/t) + e^{-\frac{(1+\delta)}{8}t^2} \leqslant \mathbf{P}\left(|\eta_n| \geqslant \frac{t}{2} + \frac{y}{t}\right).$$

Для оценки $\mathbf{P}_2$ воспользуемся утверждением п. 2, в силу которого

$$\mathbf{P}_2 \leqslant \mathbf{P}_0\left(\sup_{|\theta|\geqslant\frac{t}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}\left\{\sqrt{n}\theta\eta_n^{\mathrm{T}} - \frac{n|\theta|^2}{2}\delta\right\} > y)\right) + e^{-\frac{(1+\delta)}{8}t^2}.$$

Далее в силу п. 1 имеем

$$\mathbf{P}_2 \leqslant \mathbf{P}_0\left(|\eta_n| \geqslant \left(\frac{t}{2}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\delta + \frac{y}{t\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}\right)\right) + e^{-\frac{(1+\delta)}{8}t^2} =$$

$$= o\left(\mathbf{P}\left(|\eta_n| \geqslant \frac{t}{2} + \frac{y}{t}\right)\right).$$

5. *Для* $y = y_n$, *удовлетворяющих* (56), *справедливо*

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}_0\left(\sup_{\frac{t}{\sqrt{n}}\leqslant|\theta|\leqslant\nu}\{A_n(\theta) - A_n(0)\} > y\right) \gtrsim \mathbf{P}\left(|\eta_n| > \frac{t}{2} + \frac{y}{t}\right).$$

Доказательство. Поскольку

$$\mathbf{P} \geqslant \mathbf{P}_0\left(\sup_{\frac{t}{\sqrt{n}}\leqslant|\theta|\leqslant\frac{t}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}\{A_n(\theta) - A_n(\theta)\} > y\right),$$

то в силу утверждения п. 3

$$\mathbf{P} \geqslant \mathbf{P}_0\left(\sup_{\frac{t}{\sqrt{n}}\leqslant|\theta|\leqslant\frac{t}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}\left\{\sqrt{m}\theta\eta_n^{\mathrm{T}} - n\frac{|\theta|^2}{2}b_n^2\right\} > y\right) \geqslant \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2,$$

где

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0\left(\sup_{|\theta|\geqslant\frac{t}{\sqrt{n}}}\left\{\sqrt{n}\theta\eta_n^{\mathrm{T}} - n\frac{|\theta|^2}{2}b_n^2\right\} > y\right),$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_0\left(\sup_{|\theta|\geqslant\frac{t}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}\left\{\sqrt{n}\theta\eta_n^{\mathrm{T}} - n\frac{|\theta|^2}{2}b_n^2\right\} > y\right),$$

$b_n^2 = 1 + r\frac{t}{\sqrt{n}}$. При доказательстве п. 4 установлено, что

$$\mathbf{P}_2 = o\left(\mathbf{P}_0\left(|\eta_n| > \frac{t}{2} + \frac{y}{t}\right)\right).$$

В силу п. 1 справедливо соотношение

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0\left(|\eta_n| > \frac{tb_n^2}{n} + \frac{y}{t}\right) \sim \mathbf{P}_0\left(|\eta_n| > \frac{t}{2} + \frac{y}{t}\right).$$

Хорошо известно, что в наших предположениях для уклонений $t = t_n = o(n^{1/6})$, вероятности больших уклонений нормированных сумм η_n

асимптотически эквивалентны вероятностям больших уклонений гауссовского вектора η. Поэтому из п. 4, 5 следует, что

$$\varepsilon_0\left(T^*_{n,y/n}\right) \sim \mathbf{P}_0\left(|\eta_n| > \frac{t}{2} + \frac{y}{t}\right) \sim \mathbf{P}\left(|\eta| > \frac{t}{2} + \frac{y}{t}\right).$$

6. *Пусть* $a \in R^k$, $(1 - |a|)\sqrt{t} \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}_t \equiv \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} t^{k/2} \int\limits_{|u-a|\geqslant 1} e^{\frac{-u^2}{2}t} du \sim \frac{1}{\sqrt{t}\,|a|^{\frac{k-1}{2}}(1-|a|)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1-|a|)^2}{2}t}.$$

Доказательство. Вероятность $\mathbf{P}_t$ можно представить в виде

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \in \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{n}} G_a\right),$$

где

$$G_a = \{u \in R^k \colon |u - a| \geqslant 1\},$$

$n = [t]$, векторы ξ_i имеют нормальное распределение с параметрами $(0, E)$. Далее остается воспользоваться теоремой 4.1.

7. *Пусть* $b^2 > 0$, $\tilde{y} = y - \frac{k}{2}\ln n - \ln t + \frac{k-1}{2}\ln(2\pi) - \frac{k-1}{2}\ln\frac{T}{t} - \ln\left(1 - \frac{T}{t}\right)$, *где* $T = t/2 + y/t$. *Тогда*

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}_0(R > \tilde{y}) \sim \mathbf{P}_0\left(|\eta_n| > \frac{tb^2}{2} + \frac{y + \ln b}{t}\right),$$

где

$$R \equiv \ln \int\limits_{|\theta|\geqslant t/\sqrt{n}} e^{\sqrt{n}\theta\eta_n^{\mathrm{T}} - n\frac{|\theta|^2}{2}b^2} d\theta.$$

Доказательство. Пусть сначала $b^2 = 1$. Введем событие

$$A(\delta) = A_n(\delta) \equiv \left\{T - \delta t \leqslant |\eta| \leqslant T + \frac{N_n}{t}\right\},$$

где N_n из (56), и убедимся, что для любого $\delta > 0$ выполняется

$$|\mathbf{P}_0(R > \tilde{y}) - \mathbf{P}_0(R > \tilde{y},\ A(\delta))| = O\left(\mathbf{P}_0\left(|\eta_n| > T + \frac{N_n}{t}\right)\right). \qquad (64)$$

Оценка снизу в (64) очевидна:

$$\mathbf{P}_0(R > \tilde{y}) \geqslant \mathbf{P}_0(R > \tilde{y},\ A(\delta)).$$

Для получения оценки сверху в (64) заметим, что

$$\mathbf{P}_0(R > \tilde{y}) \leqslant \mathbf{P}_0\left(R > \tilde{y},\ |\eta_n| \leqslant T + \frac{N_n}{t}\right) + \mathbf{P}_0\left(|\eta_n| > T + \frac{N_n}{t}\right),$$

поэтому достаточно доказать, что для любого $\delta > 0$, начиная с некоторого n, выполняется

$$\left\{R > \tilde{y},\ |\eta_n| \geqslant T + \frac{N_n}{t}\right\} \subseteq \{R > \tilde{y}\} \cap A(\delta). \qquad (65)$$

Заметим сначала, что

$$R = \frac{|\eta_n|^2}{2} - \frac{k}{2}\ln n + \frac{k}{2}\ln(2\pi) + R_1(t), \qquad (66)$$

где

$$R_1(t) = \ln \frac{t^k}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{\left|v - \frac{\eta_n}{t}\right| \geqslant 1} e^{\frac{v^2 t^2}{2}} dv.$$

Из условия (56) и неравенства

$$|\eta_n| \leqslant T + \frac{N_n}{t}$$

следует, что

$$\left|1 - \frac{|\eta_n|}{t}\right| t \to \infty,$$

поэтому для оценки $R_1(t)$ можно воспользоваться утверждением п. 6. Возьмем сначала грубый вариант этого утверждения:

$$R_1(t) = -\frac{\left(1 - \frac{|\eta_n|}{t}\right)^2 t^2}{2} + o\left(\left(1 - \frac{|\eta_n|}{t}\right)^2\right) t^2.$$

На событии

$$\left\{R > \tilde{y},\ |\eta_n| \leqslant T + \frac{N_n}{t}\right\}$$

получаем, что

$$\frac{|\eta_n|^2}{2} - \frac{k}{2}\ln n + \frac{k}{2}\ln(2\pi) - \left(\frac{\left(1 - \frac{|\eta_n|}{t}\right)^2 t^2}{2} + o\left(1 - \frac{|\eta_n|}{t}\right)^2 t^2\right) \geqslant \tilde{y},$$

т. е.

$$|\eta_n| \geqslant T - 2\frac{\ln t}{t} - o\left(\left(1 - \frac{|\eta_n|}{t}\right)^2 t\right).$$

Поскольку для любого $\delta > 0$ при $t \to \infty$ справедливо

$$\delta t \geqslant o\left(\left(1 - \frac{|\eta_n|}{t}\right)^2 t\right) + 2\frac{\ln t}{t},$$

соотношения (65) и (64) доказаны. Из соотношения (64) следует, что найдется $\delta_n \to 0$ такое, что

$$\mathbf{P}_0(R > \tilde{y}) \sim \mathbf{P}_0(R > \tilde{y},\ A(\delta)) + o(\mathbf{P}_0(|\eta_n| > T)).$$

Покажем теперь, что

$$\mathbf{P}_0(R > \tilde{y},\ A(\delta)) \sim \mathbf{P}_0(|\eta_n| > T).$$

Воспользуемся (66) и представим $R_1(t)$ с помощью утверждения п. 6

$$R = -\frac{t^2}{2} + |\eta_n| t - \frac{k}{2}\ln n + \frac{k-1}{2}\ln(2\pi) - \ln t - \frac{k-1}{2}\ln\frac{|\eta_n|}{t} -$$

$$-\ln\left(1 - \frac{|\eta_n|}{t}\right) + o(1).$$

На событии $A(\delta)$ величину $|\eta_n|$ можно представить в виде

$$|\eta_n| = T + \delta_n \nu t, \quad |\nu| \leqslant 1.$$

Поэтому

$$R = -\frac{t^2}{2} + |\eta_n| t - \frac{k}{2}\ln n + \frac{k-1}{2}\ln(2\pi) - \frac{k-1}{2}\ln\left(\frac{T}{t} + \delta_n \nu\right) -$$

$$-\ln\left(1 - \frac{T}{t} + \delta_n \nu\right) - \ln t + o(1),$$

и событие $\{R > \tilde{y}\}$ превращается в событие

$$\{|\eta_n| > T + z\},$$

где

$$z = \frac{o(1)}{t} + \frac{k-1}{t^2} \ln\left(1 + \frac{\delta_n \nu}{T/t}\right) + \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{\delta_n \nu}{1 - T/t}\right).$$

Поскольку $Tz = o(1)$, получаем, что слагаемым z можно пренебречь:

$$\mathbf{P}_0(R > \tilde{y},\ A(\delta_n)) = \mathbf{P}_0(|\eta_n| > T + z,\ A(\delta_n)) \sim$$
$$\sim \mathbf{P}_0(|\eta_n| > T,\ A(\delta_n)) \sim \mathbf{P}_0(|\eta_n| > T).$$

Утверждение п. 7 для $b^2 = 1$ доказано. Поскольку переход к случаю $b^2 \neq 1$ очевиден, утверждение п. 7 доказано.

Из утверждения п. 7 следует оставшееся утверждение леммы 14:

$$\varepsilon_0\left(T^*_{n,y/n}\right) \sim \varepsilon_0\left(T^G_{n,y'/n}\right).$$

Лемма 14 доказана.

Доказательства лемм 15, 16 совершенно аналогичны доказательству леммы 14, поэтому мы их опускаем.

Доказательство теоремы 6 значительно труднее, чем доказательство теоремы 5, и требует значительно больше места. Поэтому проведем его на физическом уровне строгости.

Как и в случае $t = o(n^{1/6})$, доказательство основано на сравнении вероятностей ошибок тестов $T^*_{n,y/n}$ и $T^G_{n,y'/n}$, где

$$y' = y - \frac{k}{2} \ln n - \frac{k-1}{2} \ln(2\pi) + \frac{k}{2} \ln 2 - \ln t + \ln g_2(0).$$

Лемма 17. *Пусть* $t = o(\sqrt{n})$, $y = o(t^2)$. *Тогда найдется* $y_1 = y + o(1)$ *такое, что*

$$\varepsilon_0\left(T^*_{n,y_1/n}\right) \sim \varepsilon_0\left(T^G_{n,y'/n}\right). \tag{67}$$

Лемма 18. *Пусть* $t = o(\sqrt{n})$, $y = o(t^2)$. *Тогда для любого* $\theta \in \Theta_2$ *выполняется*

$$\delta_\theta\left(T^*_{n,y/n}\right) \sim \delta_\theta\left(T^G_{n,y'/n}\right) \sim \frac{e^{-nK(\alpha;\theta,\nu_1)}}{\sqrt{2\pi n}\, 2^{\frac{k-1}{2}} \left|\frac{\nu_1}{2} - |\theta|\right|}, \tag{68}$$

где $\alpha = -\frac{y}{n}$, $\nu_1 = \frac{T}{\sqrt{n}}$, функция $K(\alpha;\ \theta,\ \nu_1)$, введенная ниже, удовлетворяет при $\alpha \to 0$, $\nu_1 \to 0$, $\alpha = o(\nu_1^2)$ соотношению

$$K(\alpha;\ \theta,\ \nu_1) = \frac{\left(\frac{\nu_1}{2} - \frac{\alpha}{\nu_1} - |\theta|\right)^2}{2} + o\left(\nu_1^{3-0{,}01} + \alpha^{3/2-0{,}01}\right).$$

Из соотношений (67) и (68) следует для $y_1 = y + o(1)$ соотношение

$$\delta_\theta\left(T^*_{n,y/n}\right) \sim \delta_\theta\left(T^*_{n,y_1/n}\right),$$

что и позволяет доказать теорему 6.

Доказательство леммы 17 в идейном и техническом плане мало отличается от доказательства соответствующего места в теореме 5 (см. доказательство п. 7), поэтому мы не будем на нем останавливаться.

Обратимся к доказательству леммы 18. Тут основным моментом является вычисление асимптотики вероятности

$$\delta_\theta\left(T^*_{n,y/n}\right) = \mathbf{P}_\theta\left(\max_{\nu \geqslant |\theta| \geqslant \nu_1} A_n(\theta) - A_n(0) \leqslant y\right) = \mathbf{P}_\theta\left(A_n(0) - \max_{\theta \in \Theta_2^{\nu_1}} A_n(\theta) \geqslant \alpha n\right), \tag{69}$$

где $\nu_1 = t/\sqrt{n}$, $\alpha = -y/n$, $\Theta_2^{\nu_1} = \{\theta\colon \nu \geqslant |\theta| \geqslant \nu_1\}$. Задача (69) очень близка к задаче, рассмотренной в теореме 7.1. Однако имеется ряд различий, не позволяющих сразу воспользоваться этой теоремой. Остановимся на этих отличиях несколько позже, а сейчас построим функцию $K(\alpha;\ \theta,\ \nu)$, которая занята в лемме 18. Для $\theta, \theta_2 \in \Theta_2^{\nu_1}$ определим функции

$$\varphi(\lambda;\ \theta,\ \theta_2) = \ln \mathbf{E}_\theta e^{\lambda(a(0)-a(\theta_2))}, \quad \lambda \in R^1,$$
$$\Lambda(\alpha;\ \theta,\ \theta_2) = \sup_\lambda \{\alpha\lambda - \varphi(\lambda;\ \theta,\ \theta_2)\}, \ \alpha \in R^1,$$
$$\Lambda_+(\alpha;\ \theta,\ \theta_2) = \inf_{t \geqslant \alpha} \Lambda(t;\ \theta,\ \theta_2).$$

Напомним, что функция $\Lambda_+(\alpha;\ \theta,\ \theta_2)$ позволяет найти точную асимптотику вероятностей больших уклонений сумм $A_n(0) - A_n(\theta_2)$:

$$\mathbf{P}_\theta(A_n(0) - A_n(\theta_2) > n\alpha) \sim \frac{e^{-n\Lambda_+(\alpha;\theta,\theta_2)}}{\sqrt{2\pi n}\lambda_+(\alpha;\ \theta,\ \theta_2)\,\sigma_+(\alpha;\ \theta,\ \theta_2)},$$

где

$$\lambda_+(\alpha;\ \theta,\ \theta_2) = \frac{\partial}{\partial\alpha} \Lambda_+(\alpha;\ \theta,\ \theta_2),$$
$$\sigma_+^2(\alpha;\ \theta,\ \theta_2) = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \lambda_+(\alpha;\ \theta,\ \theta_2)\right]^{-1},$$

при условии $\lambda_+(\alpha;\ \theta,\ \theta_2)\sqrt{n} \to \infty$. Функция $K(\alpha;\ \theta,\ \nu_1)$ из леммы 18 определяется как

$$K(\alpha;\ \theta,\ \nu_1) \equiv \sup_{\theta_2 \in \Theta_2^{\nu_1}} \Lambda_+(\alpha;\ \theta,\ \theta_2). \tag{70}$$

Главный член функции $K(\alpha;\ \theta,\ \nu_1)$ можно найти с помощью следующих соображений. Если вектора $\theta, \theta_2 \in \Theta_2^{\nu_1}$ таковы, что $|\theta| \to 0$, $|\theta_2| \to 0$, то функцию $\varphi(\lambda;\ \theta,\ \theta_2)$ можно приблизить функцией

$$\varphi_0(\lambda;\ \theta,\ \theta_2) = \lambda\left(\frac{\theta_2^2}{2} - \theta\theta_2^{\mathrm{T}}\right) + \frac{\lambda^2}{2}\theta_2^2.$$

Соответственно функция $\Lambda(\alpha;\ \theta,\ \theta_2)$ ведет себя как функция

$$\Lambda_0(\alpha;\ \theta,\ \theta_2) \equiv \sup_\lambda\{\alpha\lambda - \varphi_0(\lambda;\ \theta,\ \theta_2)\} = \frac{\left(\alpha - \frac{\theta_2^2}{2} - \theta\theta_2^{\mathrm{T}}\right)^2}{2\theta_2^2}.$$

Определим еще функцию

$$\Lambda_{0+}(\alpha;\ \theta,\ \theta_2) \equiv \inf_{t \geqslant \alpha} \Lambda_0(\alpha;\ \theta,\ \theta_2);$$

легко видеть, что при $\alpha = o(|\theta|^2)$, $|\theta - \theta_2| = o(|\theta|)$ функции $\Lambda_0(\alpha;\ \theta,\ \theta_2)$ и $\Lambda_{0+}(\alpha;\ \theta,\ \theta_2)$ совпадают. Поэтому функция $K(\alpha;\ \theta,\ \nu_1)$, см. (70), ведет себя как функция

$$K_0(\alpha;\ \theta,\ \nu_1) \equiv \sup_{\theta_2 \in \Theta_2^{\nu_1}} \Lambda_{0+}(\alpha;\ \theta,\ \theta_2) =$$
$$= \sup_{|\theta_2| \geqslant \nu_1} \frac{\left(\alpha - \frac{|\theta_2|^2}{2} + \theta\theta_2^{\mathrm{T}}\right)^2}{2\theta_2^2} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\nu_1} - \frac{\nu_1}{2} + |\theta|\right)^2}{2}. \tag{71}$$

При этом максимум в (71) достигается на векторе $\widehat{\theta}_2 = \widehat{\theta}_2(\theta) = \frac{\theta\nu_1}{|\theta|}$, который лежит на границе $\Gamma_2^{\nu_2} = \{\theta\colon |\theta| = \nu_1\}$ множества $\Theta_2^{\nu_1}$.

Теперь можно более точно сказать об отличиях задачи (69) от задачи из теоремы 7.1, где получена асимптотика вероятности

$$\mathbf{P}\left(\max_{\theta\in\Theta_1} A_n(\theta) - \max_{\theta\in\Theta_2} A_n(\theta) \geqslant n\alpha\right).$$

Основных отличий два: во-первых, в (69) множество Θ_1 одноточечно (это только облегчает задачу); во-вторых, максимум в (71), как мы убедились недавно, достигается на граничной точке, а не на внутренней, как в теореме 7.1. Однако эти отличия не мешают получить асимптотику в задаче (69), повторяя в общих чертах путь доказательства теоремы 7.1. Первый шаг заключается в использовании того же абсолютно непрерывного преобразования, что и в теореме 7.1. Затем нужно убедиться, что с подавляющей вероятностью (по новой мере) точка максимума поля $A_n(\theta)$ лежит в некоторой окрестности точки $\widehat{\theta}_2$, причем на границе $\Gamma_2^{\nu_1}$ множества $\Theta_2^{\nu_1}$. Тем самым можно считать, что $\widehat{\theta}_2$ является внутренней точкой множества $\Gamma_2^{\nu_1}$, поверхности размерности $k-1$. Мы попадаем таким образом в условие теоремы 7.1, поэтому можно записать, что для некоторого $\chi \in (0, \infty)$

$$\mathbf{P}_\theta\left(A_n(0) - \max_{\theta\in\Theta_2^{\nu_1}} A_n(\theta) \geqslant n\alpha\right) \sim \frac{\chi e^{-nK(\alpha;\theta,\nu_1)}}{\sqrt{n}\lambda_+(\alpha;\theta,\nu_1)}. \tag{72}$$

Сравнивая соотношение (72) с уже доказанным при $t = o(n^{1/6})$, уточним константу χ:

$$\mathbf{P}_\theta\left(A_n(0) - \max_{\theta\in\Theta_2^{\nu_1}} A_n(\theta) \geqslant n\alpha\right) \sim \frac{e^{-nK(\alpha;\theta,\nu_1)}}{\sqrt{2\pi n}\,2^{\frac{k-1}{2}}\left|\frac{\nu_1}{2} - |\theta|\right|}.$$

Поскольку доказательство соотношения

$$\delta_\theta\left(T^*_{n,y/n}\right) \sim \delta_\theta\left(T^G_{n,y'/n}\right)$$

мало отличается от доказательства леммы (13), мы не будем на нем останавливаться. Таким образом, мы привели подробное изложение идеи доказательства леммы 18.

Для $t = t_n \sim \sqrt{n}$ утверждения теорем 5, 6 уже не будут верны, если не накладывать дополнительных ограничений на поведение плотности $g_2(\theta)$. Дело в том, что тогда в леммах 17, 18 в определении последовательности y_n' будут участвовать значения $g_2(\theta)$ при $|\theta| = \frac{t}{\sqrt{n}} \sim 1$. Поэтому для справедливости теоремы 6 при $t \sim \sqrt{n}$ необходимо потребовать дополнительно, чтобы плотность $g_2(\theta)$ была постоянной на концентрических кругах радиуса ν_1, $0 \leqslant \nu_1 \leqslant 1$. Заметим еще, что *аналогичный эффект возникает всегда*, когда множество «наиболее важных» пар точек $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2$ состоит более чем из одной пары. Другой такой случай рассмотрен в § 12, где решается задача о проверке двух сложных соприкасающихся гипотез.

§ 11. АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ДВУХ СЛОЖНЫХ КОНТИНУАЛЬНЫХ ДАЛЕКИХ ГИПОТЕЗ

1. Постановка задачи. В настоящем параграфе рассмотрим задачу проверки сложной гипотезы $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$ против сложной гипотезы $H_2 = \{\theta \in \Theta_2\}$, где множества Θ_1 и Θ_2 являются ограниченными замкнутыми «телесными» подмножествами R^k. При этом гипотезы H_1 и H_2 являются *далекими* (см. § 10), т. е. расстояние между множествами Θ_1 и Θ_2 много больше, чем $1/\sqrt{n}$. Как и в § 10, выделим два основных случая: 1) пара ближайших точек $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2$ единственна; 2) пара $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)$ ближайших точек неединственна (для простоты изложения ограничимся рассмотрением двух случаев):

$$\Theta_1^{(1)} = \{\theta \in \overline{\Theta}\colon |\theta| \leqslant \nu_n\}, \quad \Theta_2^{(1)} = \left\{\theta \in \overline{\Theta}\colon |\theta| \geqslant \nu_n + \frac{t_n}{\sqrt{n}}\right\},$$

$$\Theta_1^{(2)} = \{\theta \in \overline{\Theta}\colon \langle\theta, e\rangle \leqslant 0\}, \quad \Theta_2^{(2)} = \left\{\theta \in \overline{\Theta}\colon \langle\theta, e\rangle \geqslant \frac{t_n}{\sqrt{n}}\right\},$$

где $\overline{\Theta} = \{\theta \in R^k\colon |\theta| \leqslant \nu\}$, $t_n \to \infty$, $t_n = o(n^{1/6})$; тогда пары ближайших точек $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)$ образуют «диагональ» в квадрате $\Gamma_1^{(i)} \times \Gamma_2^{(i)}$, где

$$\Gamma_1^{(1)} = \{\theta \in \Theta_1^{(1)}\colon |\theta| = \nu_n\}, \quad \Gamma_2^{(2)} = \left\{\theta \in \Theta_2^{(1)}\colon |\theta| = \nu_n + \frac{t_n}{\sqrt{n}}\right\},$$

$$\Gamma_1^{(2)} = \{\theta \in \Theta_1^{(2)}\colon \langle\theta, e\rangle = 0\}, \quad \Gamma_2^{(2)} = \left\{\theta \in \Theta_2^{(2)}\colon \langle\theta, e\rangle = \frac{t_n}{\sqrt{n}}\right\}\bigg).$$

В свою очередь, случай 1) делится на два подслучая:

1_a) точки $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$ лежат внутри множеств Θ_1 и Θ_2 соответственно; 1_b) точки $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$ лежат на границах множеств Θ_1 и Θ_2 соответственно. Можно рассматривать также и случаи, когда одна из точек, скажем $\widehat{\theta}_1$, лежит внутри множества Θ_1, а оставшаяся точка $\widehat{\theta}_2$ — на границе своего множества Θ_2 (развитая нами техника позволяет проводить такие рассмотрения), однако мы не будем этого делать. Более того, нет никаких идейных или технических препятствий рассматривать более общую задачу, когда множества Θ_1 и Θ_2 являются подмножествами пространств R^{k_1} и R^{k_2} разной размерности. Однако запланированный объем работы не позволяет нам этого делать.

Основное содержание настоящего параграфа состоит в отыскании условий, при которых классы тестов

$$\mathscr{K}_n^{(1)} = \{T_{n,\alpha}^*,\ \alpha \in R^1\},$$
$$\mathscr{K}_n^{(2)}(G) = \{T_{n,\alpha}^G,\ \alpha \in R^1\}$$

будут асимптотически оптимальными в смысле определений, данных в § 8. Напомним вид тестов $T_{n,\alpha}^*$ и $T_{n,\alpha}^G$:

$$T_{n,\alpha}^* = \mathbf{1}\left\{\max_{\theta \in \Theta_2} A_n(\theta) - \max_{\theta \in \Theta_1} A_n(\theta) > n\alpha\right\}.$$

$$T_{n,\alpha}^G = \mathbf{1}\left\{\ln \int_{\Theta_2} e^{A_n(\theta)} G_2(d\theta) - \ln \int_{\Theta_1} e^{A_n(\theta)} G_1(d\theta) > n\alpha\right\},$$

где $A_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln p(x_i, \theta)$ — логарифмическая функция правдоподобия, $G = (G_1, G_2)$ — пара априорных распределений.

В случае двух сложных континуальных далеких гипотез полностью единичны условиям и утверждениям в случае простой и сложной континуальной далеких гипотез, рассмотренных в § 10. Это же можно сказать и про доказательства, поэтому в настоящем параграфе они не приводятся.

2. Основные обозначения в случае, когда пара $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)$ единственна. Как и в § 10, рассмотрим частный случай, когда в статистическом эксперименте

$$\mathrm{E}_n=(\Theta_1,\ \Theta_2,\ \mathscr{P},\ X_n)$$

первые три координаты Θ_1, Θ_2, $\mathscr{P}$ не зависят от n.

Основные утверждения будут сформулированы для классов $\mathscr{C}^{(1)}(c)$, $\mathscr{C}^{(2)}(c)$ троек $(\mathrm{E}_n,\ \alpha^-,\ \alpha^+)$, которые определяются условиями $C_1^{(1)}(c)$, $C_1^{(2)}(c), C_2(c)$, $C_3(c)$. Верхний индекс (1) в условии $C_1^{(1)}(c)$, соответствует случаю, когда векторы $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$ лежат внутри своих множеств Θ_1 и Θ_2(в то время как верхний индекс (2) отвечает ситуации, когда векторы $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$ лежат на границе Γ_1 и Γ_2 множеств Θ_1 и Θ_2 соответственно (ср. с § 10). Приведем условия $C_1^{(1)}(c)$, $C_1^{(2)}(c)$, $C_2(c)$, $C_3(c)$. При этом используем все обозначения, введенные в § 8 и использованные в § 10 (см. условия $B_i(c)$). Как и везде ранее, буквой c обозначаем произвольную константу, лежащую в интервале $[1,\ \infty)$.

Условие

$C_1^{(2)}(c)$.

1) $\max\limits_{\theta\in\Theta_i}|\theta|\leqslant c,\quad \inf\limits_{\theta\in\Theta_i} m_k(U_\delta(\theta)\cap\Theta_i)\geqslant\dfrac{\delta^{kc}}{c}, 0\leqslant\delta\leqslant 1/c$, где $m_k(A)$ — мера Лебега в R^k, $i=1,\ 2$;

2) $[\alpha^-,\ \alpha^+]\subseteq[d^-,\ d^+]$;

$3^{(1)}$) для любого $\alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$ существует пара $(\widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2)=(\widehat{\theta}_1(\alpha).\ \widehat{\theta}_2(\alpha))\in\Theta_1\times\Theta_2$ такая, что

$$\Lambda(\alpha;\ \theta_1\,\theta_2)-\Lambda(\alpha;\ \widehat{\theta}_2,\widehat{\theta}_2)\geqslant\frac{\lambda(\alpha)}{c}|\theta_1-\widehat{\theta}_1|^2+\frac{1-\lambda(\alpha)}{c}|\theta_2-\widehat{\theta}_2|^2,$$

$$(\theta_1,\ \theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2,\quad U_{1/c}(\widehat{\theta}_i)\subseteq\Theta_i,\quad i=1,\ 2,$$

где $\lambda(\alpha)\equiv\lambda(\alpha,\ \widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2)$.

Комментарии к условию $C_1^{(1)}(c)$ точно такие же, как к условию $B_1^{(1)}(c)$ (см. § 10). В частности, из пункта $3^{(1)}$) следует, что для любого $\alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$ пара ближайших точек $(\widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2)$ единственна, и они, являясь внутренними точками своих множеств Θ_1 и Θ_2, существенно удалены от границы.

Как и в § 10, для введения класса $\mathscr{C}_1^{(2)}(c)$ нам понадобится класс $\mathscr{L}(e,\ V,\ \widehat{\theta},\ c)$ множеств $\Theta\subseteq R^k$, граница которых в окрестности точки θ мало отличается от параболоида

$$\widehat{\theta}+\left\{\theta\in R^k\colon\ \theta e^t=-\frac{1}{2}\theta\Pi V\Pi\theta^{\mathrm{T}}\right\}$$

(см. определение класса $\mathscr{L}(e,\ V,\ \widehat{\theta},\ c)$ в § 10).

Будем говорить, что для тройки $(\mathrm{E}_n,\ \alpha^-,\ \alpha^+)$ выполнено условие $C_1^{(2)}(c)$, если выполнены пункты 1), 2) условия $C_1^{(1)}(c)$, и вместо пункта $3^{(1)}$) следующий пункт:

$3^{(2)}$) для любого $\alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$ существуют пара $(\widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2)\in\Theta_1\times\Theta_2$, единичные вектора e_1, e_2 и матрицы V_1, V_2 такие, что

$$\Lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2)-\Lambda(\alpha,\ \widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2)\geqslant\frac{\lambda(\alpha)}{c}\left[\,|(\theta_2-\widehat{\theta}_2)e_2^{\mathrm{T}}|+|(\theta_2-\widehat{\theta}_2)\Pi_2|^2\,\right]+$$

$$+\frac{(1-\lambda(\alpha))}{c}\left[\,|(\theta_1-\widehat{\theta}_1)e_1^{\mathrm{T}}|+|(\theta_1-\widehat{\theta}_1)\Pi_1|^2\,\right],$$

$$(\theta_1,\ \theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2,\ \Theta_i\in\mathscr{L}(e_i,\ V_i,\ \widehat{\theta}_i,\ c),$$

$$\|V_i\|\leqslant c,\ i=1,\ 2,\ \ \lambda(\alpha)\equiv\lambda(\alpha;\ \widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2).$$

Таким образом, если выполнено условие $C_1^{(2)}(c)$, то пара ближайших точек $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)$ единственна, лежит на множестве $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ (Γ_i — граница Θ_i), и в окрестности точки $\widehat{\theta}_i$ множество Γ_i мало отличается от множества

$$\widehat{\theta}_i + \Omega(e_i, V_i, 1/c), \ i = 1, 2.$$

Если для тройки $(\mathrm{E}_n, \alpha^-, \alpha^+)$ выполнено условие $C_1^{(1)}(c)$ (или $C_1^{(2)}(c)$), то можно определить функции

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha; \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2), \ \lambda(\alpha) = \lambda(\alpha; \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2),$$
$$\sigma^2(\alpha) = \sigma^2(\alpha; \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2), \ \alpha \in [\alpha^-, \alpha^+].$$

Определим еще

$$\varphi_0(\lambda) = \mathbf{E}_{\widehat{\theta}_1} e^{\lambda(a(\widehat{\theta}_2) - a(\widehat{\theta}_1))}, \quad f_0(s) = \varphi_0(is)$$

и новую вероятностную меру

$$\widetilde{\mathbf{P}}(A) = \widetilde{\mathbf{P}}^{\lambda(\alpha)}(A) \equiv \mathbf{E}_{\widehat{\theta}_1}\left(e^{\lambda(\alpha)(a(\widehat{\theta}_2) - a(\widehat{\theta}_1))}; \ A\right)/\varphi_0(\lambda(\alpha)).$$

Особую роль будет играть распределение $\widehat{\mathbf{P}} = \widehat{\mathbf{P}}^{\lambda(\alpha)}$ при $\alpha = 0$; обозначим его $\widehat{\mathbf{P}}$.

Условие $C_2(c)$ совпадает с условиями $B_2(c)$ из § 10 и с $A_2(c)$ из § 9.

Условие

$C_3(c)$.

1) $\mathbf{E}_{\widehat{\theta}_1} e^{\frac{\|a'\|}{c}} \leqslant c$, где $\|a'\| = \sup\limits_{\theta \in \Theta_1 \cup \Theta_2} |a'(\theta)|$;

2) $\widehat{E}\|a''(\widehat{\theta}_i)\|^{2k+2+1/c} \leqslant c, \quad i = 1, 2;$

3) $\sup\limits_{\theta \in U_{1/c}(\widehat{\theta}_i) \cap \Theta_i} \widehat{\mathbf{E}}\|a'''(\theta)\|^{2k+1+1/c} \leqslant c, \quad i = 1, 2.$

Таким образом, условия $C_1^{(1)}(c)$, $C_1^{(2)}(c)$, $C_2(c)$, $C_3(c)$ являются полными аналогами условий $B_1^{(1)}(c)$, $B_1^{(2)}(c)$, $B_2(c)$, $B_3(c)$ из § 10.

3. Формулировки теорем для класса $\mathscr{C}^{(1)}_{(c)}$. Для дальнейшего нам понадобится ряд обозначений и лемм. Введем следующие квадратные матрицы

$$K_i = -\widetilde{\mathbf{E}}a''(\widehat{\theta}_i), \ B_{ij} = \widetilde{\mathbf{E}}a'(\widehat{\theta}_i)^{\mathrm{T}} a'(\widehat{\theta}_j),$$
$$C_{ij} = (\widetilde{\mathbf{E}}\xi a'(\widehat{\theta}_i))^{\mathrm{T}} (\widetilde{\mathbf{E}}\xi a'(\widehat{\theta}_j)), \widetilde{B}_{ij} = B_{ij} - \frac{1}{\widetilde{\mathbf{D}}\xi} C_{ij},$$

где $i, j = 1, 2$, $\xi = a(\widehat{\theta}_2) - a(\widehat{\theta}_1)$, символы $\widetilde{\mathbf{E}}$, $\widetilde{\mathbf{D}}$ отвечают распределению $\widetilde{\mathbf{P}}$.

Лемма 1.

$$K_i \geqslant \frac{1}{c} \mathrm{E}, \quad i = 1, 2.$$

Из леммы 1 следует, что существуют положительно определенные матрицы

$$D_i = K_i^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

Введем далее квадратные матрицы порядка $2k$:

$$\widetilde{B} = \begin{Vmatrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} \\ \widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_{22} \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} -D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{Vmatrix}, \quad D^* = -D.$$

В силу леммы 4.10 матрица $\widetilde{B}$ является неотрицательно определенной, поэтому ее можно считать ковариационной матрицей некоторого случайного вектора $\eta \in R^{2k}$.

Лемма 2. *Существует* $c_1 \in [1, \infty]$, *зависящее только от* c, *такое, что*

$$\chi = \chi(\alpha) \equiv \mathbf{E} e^{\lambda(\alpha)\eta \frac{D}{2} \eta^{\mathrm{T}}} \leqslant c_1,$$

$$\chi^* = \chi^*(\alpha) \equiv \mathbf{E} e^{(1-\lambda(\alpha))\eta \frac{D^*}{2} \eta^{\mathrm{T}}} \leqslant c_1,$$

где $\eta \in \Phi_{0,\widetilde{B}}$.

В доказательстве леммы 2 существенную роль играет

Лемма 3.

$$-\widetilde{B}_{22} + \frac{1}{\lambda(\alpha)} K_2 \geqslant \frac{1}{c\lambda(\alpha)} E,$$

$$-\widetilde{B}_{11} - \frac{1}{1-\lambda(\alpha)} K_1 \geqslant \frac{1}{c(1-\lambda(\alpha))} E.$$

Сейчас мы в состоянии выписки последовательности функций, которые определят асимптотику максимальных вероятностей ошибок первого и второго рода теста $T^*_{n\,\alpha}$:

$$\varepsilon_n(\alpha) = \frac{\chi(\alpha)\, e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{2\pi n}\lambda(\alpha)\,\sigma(\alpha)},$$

$$\delta_n(\alpha) = \frac{\chi^*(\alpha)\, e^{-n(\Lambda(\alpha)-\alpha)}}{\sqrt{2\pi n}(1-\lambda(\alpha))\,\sigma(\alpha)}, \quad \alpha \in [\alpha^-, \alpha^+] \tag{1}$$

Для вычисления усредненных ошибок теста $T^*_{n\alpha}$, нам понадобятся следующие матрицы, определенные в силу лемм 1, 3:

$$A = \left[\widetilde{B}_{11} + \frac{1}{\lambda(\alpha)} K_1\right]^{-1}, \quad A^* = \left[\widetilde{B}_{22} + \frac{1}{1-\lambda(\alpha)} K_2\right]^{-1},$$

$$R = \left[\widetilde{B}_{12} A \widetilde{B}_{12} - B_{22} + \frac{1}{\lambda(\alpha)} K_2\right]^{-1},$$

$$R^* = \left[\widetilde{B}_{12} A^* \widetilde{B}_{12} - B_{11} + \frac{1}{1-\lambda(\alpha)} K_1\right]^{-1},$$

$$U = -\widetilde{B}_{11} + K_1 + \widetilde{B}_{11}(-A + A\widetilde{B}_{12} R \widetilde{B}_{12} A + R - 2R\widetilde{B}_{12} A)\widetilde{B}_{11},$$

$$U^* = -\widetilde{B}_{22} + K_2 + \widetilde{B}_{22}(-A^* + A^*\widetilde{B}_{12} R^* \widetilde{B}_{12} A^* + R^* - 2R^*\widetilde{B}_{12} A^*)\widetilde{B}_{22}.$$

Лемма 4.

$$U \geqslant \frac{(1-\lambda(\alpha))}{c} E, \quad U^* \geqslant \frac{\lambda(\alpha)}{c} E.$$

Поведение усредненных ошибок теста $T^*_{n,\alpha}$ определяется функциями

$$\widetilde{\varepsilon}_n(\alpha) = \frac{1}{n^{k/2} |U|^{1/2}} \varepsilon_n(\alpha),$$

$$\widetilde{\delta}_n(\alpha) = \frac{1}{n^{k/2} |U^*|^{1/2}} \delta_n(\alpha), \quad \alpha \in [\alpha^-, \alpha^+].$$

Ниже установлено, что в некоторой окрестности точки $\widehat{\theta}_1$ ошибка первого рода теста $T^*_{n,\alpha}$ ведет себя как

$$\varepsilon_{\theta_1}(T^*_{n,\alpha}) \sim \frac{\chi(\alpha;\theta_1)\, e^{-n\Lambda(\alpha;\theta_1)}}{\sqrt{2\pi n}\lambda(\alpha;\theta_1)\,\sigma(\alpha;\theta_1)},$$

и в некоторой окрестности точки $\widehat{\theta}_2$ ошибка второго рода теста $T^*_{n,\alpha}$ ведет себя как

$$\delta_{\theta_2}(T^*_{n,\alpha}) \sim \frac{\chi^*(\alpha;\theta_2)\, e^{-n(\Lambda(\alpha;\theta_2)-\alpha)}}{\sqrt{2\pi n}(1-\lambda(\alpha;\theta_2))\,\sigma(\alpha;\theta_2)},$$

где функции $\Lambda(\alpha;\ \theta)$, $\lambda(\alpha;\ \theta)$, $\sigma(\alpha;\ \theta)$, $\chi(\alpha;\ \theta)$, $\chi^*(\alpha;\ \theta)$ удовлетворяют условиям

$$\chi(\alpha;\ \theta_1)\to\chi(\alpha),\ \chi^*(\alpha;\ \theta_2)\to\chi^*(\alpha),$$
$$\lambda(\alpha;\ \theta_i)\to\lambda(\alpha),\ \sigma(\alpha;\ \theta_i)\to\sigma(\alpha),$$
$$\Lambda(\alpha;\ \theta_1)-\Lambda(\alpha)\sim(\theta-\widehat{\theta}_1)\frac{U}{2}(\theta_1-\widehat{\theta}_1)^{\mathrm{T}},$$
$$\Lambda(\alpha;\ \theta_2)-\Lambda(\alpha)\sim(\theta_2-\widehat{\theta}_2)\frac{U^*}{2}(\theta_2-\widehat{\theta}_2)^{\mathrm{T}}$$

при $\theta_i\to\widehat{\theta}_i$, $i=1,\ 2$. Поэтому в силу леммы 4 усредненные ошибки $\varepsilon^Q\left(T^*_{n,\alpha}\right)$ δ и $\left(T^*_{n,\alpha}\right)$ будут определять функции $\tilde{\varepsilon}_n(\alpha)$ и $\tilde{\delta}_n(\alpha)$, дающие главный вклад в интегралы

$$\int\limits_{\Theta_1}\varepsilon_{\theta_1}\left(T^*_{n,\alpha}\right)d\theta_1\cdot\ \int\limits_{\Theta_2}\delta_{\theta_2}\left(T^*_{n,\alpha}\right)d\theta_2.$$

В рамках байесовского подхода рассмотрим пары $G=(G_1,\ G_2)$ априорных распределений на Θ_1, Θ_2 соответственно; абсолютно непрерывные относительно меры Лебега в R^k, плотности которых g_1 и g_2 удовлетворяют условиям

1) $g_i(\theta)$ непрерывно на $U_{1/c}(\widehat{\theta}_i)$,

2) $\inf\limits_{\theta\in U_{1/c}(\widehat{\theta}_i)} g_i(\theta)\geqslant 1/c$,

$\sup\limits_{\theta\in U_{1/c}(\widehat{\theta}_i)} g_i(\theta)\leqslant c,\quad i=1,\ 2.$

Класс пар $G=(G_1,\ G_2)$, удовлетворяющих условиям 1), 2), обозначим $\mathscr{G}(c)$. Через $\mathscr{G}_0(c)$ — подкласс $\mathscr{G}(c)$, определяемый дополнительным условием

3) $\inf\limits_{\theta\in\Theta_i} g_i(\theta)\geqslant 1/c,\quad i=1,\ 2.$

Теорема 1. *Пусть* $c\in[1,\ \infty)$, $N_n\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Пусть* $(\mathrm{E}_n,\ \alpha^-,\ \alpha^+)\in\mathscr{C}^{(1)}(c)$ *при* $n=1,\ 2,\ \ldots,$ *и* $Q=(Q_1,\ Q_2)\in\mathscr{G}(c)$, $G=(G_1,\ G_2)\in\mathscr{G}_0(c)$. *Пусть* $\lambda(\alpha)$, α^-, α^+, N_n *таковы, что*

$$\lambda(\alpha^-)\geqslant N_n/\sqrt{n},\ 1-\lambda(\alpha^+)\geqslant N_n/\sqrt{n}.$$

Тогда

I. *Можно выбрать последовательности*

$$\varepsilon_n^{\pm}\sim\varepsilon_n(\alpha^{\mp}),$$

(где функция $\varepsilon_n(\alpha)$ *определена формулой* (1)) *такие, что класс* $\mathscr{K}_n^{(1)}$ *(класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(Q,\ \varepsilon_n^-,\ \varepsilon_n)$*-РАМП классом.*

II. *Для* $\alpha\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$ *выполняется*

$$\varepsilon^Q\left(T^*_{n,\alpha}\right)\sim\tilde{\varepsilon}_n(\alpha)\,q_1\left(\widehat{\theta}_1\right),$$
$$\delta^Q\left(T^*_{n,\alpha}\right)\sim\tilde{\delta}_n(\alpha)\,q_2\left(\widehat{\theta}_2\right),$$

где $q_i(\theta)$ — *плотность меры* θ_i, $i=1,\ 2$; *для*

$$\alpha'\equiv\alpha+\frac{1}{2n}\ln\frac{|D_1|}{|D_2|}+\frac{1}{n}\ln\frac{g_1\left(\widehat{\theta}_1\right)}{g_2\left(\widehat{\theta}_2\right)}\in[\alpha^-,\ \alpha^+]$$

выполняется

$$\varepsilon^Q\left(T^G_{n,\alpha}\right)\sim\tilde{\varepsilon}_n(\alpha')\,q_1\left(\widehat{\theta}_1\right),$$
$$\delta^Q\left(T^G_{n,\alpha}\right)\sim\tilde{\delta}_n(\alpha')\,q_2\left(\widehat{\theta}_2\right).$$

III. *Если дополнительно выполнено условие*

$$\lambda(\alpha^-) \geqslant 1/c,$$

то класс $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом для*

$$\varepsilon_n^{\pm} = \varepsilon_n(\alpha^{\mp}).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда*

I. *Можно выбрать числа* $p \in (0, 1]$, $b_+ \geqslant 1$, $b_- \leqslant 1$ *такие, что для*

$$\varepsilon_n^{\pm} = b_{\mp}\varepsilon_n(\alpha^{\mp})$$

класс $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом.*

II. *Для* $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^*(T_{n,\alpha}^*) \sim \varepsilon_n(\alpha),$$

$$\delta^*(T_{n,\alpha}^*) \sim \delta_n(\alpha);$$

для $\alpha' = \alpha + \dfrac{1}{2n}\ln\dfrac{|D_1|}{|D_2|} + \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{g_1(\widehat{\theta}_1)}{g_2(\widehat{\theta}_2)} \in [\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^*(T_{n,\alpha}^G) \sim \varepsilon_n(\alpha'),$$

$$\delta^*(T_{n,\alpha}^G) \sim \delta_n(\alpha').$$

4. Формулировки теорем для класса $\mathscr{C}_{(c)}^{(2)}$. В настоящем пункте будем считать выполненным условие

$$(\mathrm{E}_n, \alpha^-, \alpha^+) \in \mathscr{C}^{(2)}(c), \ \alpha \in [\alpha^-, \alpha^+].$$

Напомним, что единичный вектор $e_i = e_i(\alpha)$ и квадратная матрица $V_i = V_i(\alpha)$, которые присутствуют в условии $C_1^{(2)}(c)$, определяют поведение границы Γ_i множества Θ_i в окрестности точки $\theta_i = \theta_i(\alpha)$; через $\Pi_i = \Pi = \Pi_{e_i} \equiv E = e^{\mathrm{T}}e_i$ обозначим проектор, отображающий R^k на гиперплоскость

$$\{\theta : \theta e_i^{\mathrm{T}} = 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим

$$m_i \equiv \widetilde{\mathbf{E}}z'(\widehat{\theta}_i)e_i^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, 2;$$

наряду с матрицами K_i и $\widetilde{B}_i$, введенными в п. 3, определим матрицы

$$K_i' = \Pi_i K_i \Pi_i - m_i \Pi_i V_i \Pi_i,$$

$$\widetilde{B}_{ij}' = \Pi_i \widetilde{B}_{ij} \Pi_j.$$

Лемма 5.

$$K_i' \geqslant \frac{1}{c}\Pi_i, \quad m_i \geqslant \frac{1}{c}, \quad i = 1, 2.$$

Из леммы 5 следует, что существуют неотрицательно определенные матрицы D_i такие, что

$$D_i K_i = K_i D_i = \Pi_i, \ \Pi_i D_i \Pi_i = D_i, \ i = 1, 2.$$

Введем далее квадратные матрицы порядка $2k$:

$$\widetilde{B}' = \begin{Vmatrix} \widetilde{B}_{11}' & \widetilde{B}_{12}' \\ \widetilde{B}_{21}' & \widetilde{B}_{22}' \end{Vmatrix}, \ D' = \begin{Vmatrix} -D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{Vmatrix}.$$

Как и в п. 3, матрица $\widetilde{B}'$ является неотрицательно определенной в силу леммы 4.10.

Лемма 6. *Существует константа* $c_1 \in [1, \infty]$, *зависящая только от* c, *такая, что*

$$\chi = \chi(\alpha) \equiv \mathbf{E} e^{\lambda(\alpha)\eta\frac{D'}{2}\eta^{\mathrm{T}}} \leqslant c_1,$$

$$\chi^* = \chi^*(\alpha) \equiv \mathbf{E} e^{-(1-\lambda(\alpha))\eta\frac{D'}{2}\eta^{\mathrm{T}}} \leqslant c_2,$$

где $\eta \in \Phi_{0,\widetilde{B}'}$.

Как и в п. 3, лемма 6 следует из леммы 7.

Лемма 7.

$$-\widetilde{B}'_{22} + \frac{1}{\lambda(\alpha)} K'_2 \geqslant \frac{1}{c\lambda(\alpha)} \Pi_2,$$

$$-\widetilde{B}'_{11} + \frac{1}{1-\lambda(\alpha)} K'_1 \geqslant \frac{1}{c(1-\lambda(\alpha))} \Pi_1.$$

Введем теперь функции, которые определяют асимптотику максимальных вероятностей ошибок первого и второго рода тестов $T^*_{n,\alpha}$:

$$\varepsilon_n(\alpha) = \frac{\chi(\alpha)\, e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{2\pi n}\,\lambda(\alpha)\,\sigma(\alpha)},$$

$$\delta_n(\alpha) = \frac{\chi^*(\alpha)\, e^{-n(\Lambda(\alpha)-\alpha)}}{\sqrt{2\pi n}\,(1-\lambda(\alpha))\,\sigma(\alpha)}.$$

Для вычисления асимптотики усредненной вероятности ошибок тестов $T^*_{n,\alpha}$ введем следующие матрицы:

$$U'_1 = -\widetilde{B}'_{11} + K'_1 + \widetilde{B}'_{11}\left(\widetilde{B}'_{11} + \frac{1}{1-\lambda(\alpha)} K'_1\right)^{-1} \widetilde{B}'_{11},$$

$$U'_2 = -\widetilde{B}'_{22} + K'_2 + \widetilde{B}'_{22}\left(\widetilde{B}'_{22} + \frac{1}{\lambda(\alpha)} K'_2\right)^{-1} \widetilde{B}'_{22}.$$

Лемма 8.

$$U'_1 \geqslant \frac{1-\lambda(\alpha)}{c} \Pi_1, \quad U'_2 \geqslant \frac{\lambda(\alpha)}{c} \Pi_2.$$

В силу леммы 8 существуют единственные матрицы B^*_i, $i = 1, 2$, удовлетворяющие условиям

$$U'_i B^*_i = B^*_i U'_i = \Pi_i, \quad \Pi_i B^*_i \Pi_i = B^*_i, \quad i = 1, 2.$$

Матрицы B^*_i являются неотрицательно определенными, поэтому можно считать их ковариационными матрицами гауссовских векторов η_i, $i = 1, 2$.

Лемма 9. *Существует константа* $c_1 \in [1, \infty)$ *такая, что*

$$\chi'_i = \chi'_i(\alpha) \equiv \mathbf{E} e^{m_i \eta \frac{V_i}{2} \eta_i^{\mathrm{T}}} \leqslant c_1, \ \eta \in \Phi_{0,B^*_i}, \quad i = 1, 2.$$

Введем, наконец, последовательности $\widetilde{\varepsilon}_n(\alpha)$ и $\widetilde{\delta}_n(\alpha)$, которые будут определять асимптотику усредненных вероятностей ошибок первого и второго рода тестов $T^*_{n,\alpha}$:

$$\widetilde{\varepsilon}_n(\alpha) = \varepsilon_n(\alpha) \frac{(2\pi)^{k/2}}{n^{k/2+1/2}} \chi'_1(\alpha),$$

$$\widetilde{\delta}_n(\alpha) = \delta_n(\alpha) \frac{(2\pi)^{k/2}}{n^{k/2+1/2}} \chi'_2(\alpha).$$

Теорема 3. *Пусть* $c \in [1, \infty)$, $N_n \to \infty$. *Пусть* $(\mathrm{E}_n, \alpha^-, \alpha^+) \in \mathscr{C}^{(2)}(c)$ *при* $n = 1, 2, \ldots$, *и* $Q = (Q_1, Q_2) \in \mathscr{G}(c)$, $G = (G_1, G_2) \in \mathscr{G}_0(c)$, *Пусть* $\lambda(\alpha)$, N_n, α^-, α^+ *таковы, что*

$$\lambda(\alpha^-) \geqslant N_n/\sqrt{n}, \quad (1-\lambda(\alpha^+)) \geqslant N_n/\sqrt{n}.$$

Тогда

I. *Можно выбрать последовательности*

$$\varepsilon_n^{\pm} \sim \varepsilon_n(\alpha^{\mp})$$

такие, что класс $\mathcal{K}_n^{(1)}$ (класс $\mathcal{K}_n^{(2)}(G)$) будет $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-РАПМ классом.

II. *Для* $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^Q(T_{n,\alpha}^*) \sim \tilde{\varepsilon}_n(\alpha) q_1(\hat{\theta}_1),$$

$$\delta^Q(T_{n,\alpha}^*) \sim \tilde{\delta}_n(\alpha) q_2(\hat{\theta}_2),$$

где $q_1(\theta)$, $q_2(\theta)$ — *плотности мер* Q_1, Q_2; *для*

$$\alpha' = \alpha + \frac{1}{n}\ln\frac{g_1(\hat{\theta}_1)}{g_2(\hat{\theta}_2)} + \frac{1}{n}\ln\frac{|K_2'|^{1/2}}{|K_1'|^{1/2}} \in [\alpha^-, \alpha^+]$$

$$\varepsilon^Q(T_{n,\alpha}^G) \sim \tilde{\varepsilon}_n(\alpha') q_1(\hat{\theta}_1),$$

$$\delta^Q(T_{n,\alpha}^G) \sim \tilde{\delta}_n(\alpha') q_2(\hat{\theta}_2),$$

где $g_1(\theta)$, $g_2(\theta)$ — *плотности мер* G_1, G_2.

III. *Если дополнительно выполнено условие*

$$\lambda(\alpha^-) \geqslant \frac{1}{c},$$

то класс $\mathcal{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathcal{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом* **для** $\varepsilon_n^{\pm} = \varepsilon_n(\alpha^{\mp})$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда*

I. *Можно выбрать числа* $p \in (0, 1]$, $b_+ \geqslant 1$, $b_- \leqslant 1$ *такие, что для*

$$\varepsilon_n^{\mp} = b_{\pm}\varepsilon_n(\alpha^{\mp})$$

класс $\mathcal{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathcal{K}_n^{(2)}(G)$) *является* $(p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом.*

II. *Для* $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^*(T_{n,\alpha}^*) \sim \varepsilon_n(\alpha),$$

$$\delta^*(T_{n,\alpha}^*) \sim \varepsilon_n(\alpha);$$

для $\alpha' = \alpha + \frac{1}{n}\ln\frac{g_1(\hat{\theta}_1)}{g_2(\hat{\theta}_2)} + \frac{1}{n}\ln\frac{|K_2'|^{1/2}}{|K_1'|^{1/2}} \in [\alpha^-, \alpha^+]$

$$\varepsilon^*(T_{n,\alpha}^G) \sim \delta_n(\alpha').$$

$$\delta^*(T_{n,\alpha}^G) \sim \varepsilon_n(\alpha'),$$

5. Случай, когда множество пар $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ не единственно. Как и в п. 5 § 10 рассмотрим семейство распределений

$$\mathcal{P} = \{P_\theta,\ \theta \in \bar{\Theta}\},\ \bar{\Theta} = \{\theta : |\theta| \leqslant \nu\} \leqslant R^k.$$

Разнообразие случаев, когда множества Θ_1 и Θ_2 не одноточечны и «расстояние» между границами Γ_1 и Γ_2 этих множеств постоянно, весьма большое. Рассмотрим, например, такие пары множеств:

$$\Theta_1^{(1)} = \{\theta \in \bar{\Theta}, |\theta| \leqslant \nu_n\}, \Theta_2^{(1)} = \{\theta \in \bar{\Theta}, |\theta| \geqslant \nu_n + u_n\}, \tag{2}$$

где $\nu_n \to 0$, $u_n \to 0$, $\sqrt{n}\, u_n \to \infty$;

$$\Theta_1^{(2)} = \{\theta \in \bar{\Theta}, \langle\theta, e\rangle \leqslant 0\}, \Theta_2^{(2)} = \{\theta \in \bar{\Theta}, \langle\theta, e\rangle \geqslant u_n\}, \tag{3}$$

где $u_n \to 0$, $\sqrt{n}\, u_n \to \infty$. Разумеется, можно придумать и другие примеры множеств Θ_1, Θ_2, обладающие следующим свойством: для любой точки θ_1 границы Γ_1

$$\min_{\theta_2 \in \Theta_2} |\theta_1 - \theta_2| = u_n.$$

Для простоты ограничимся примерами (2) и (3). Обозначим

$$\mathrm{E}_n^{(i)} = \{\Theta_1^{(i)}, \Theta_2^{(i)}, \mathscr{P}, X_n\}, \quad i = 1, 2.$$

Будем говорить, что эксперимент $\mathrm{E}_n^{(i)}$ принадлежит классу $\mathscr{C}(c)$, если для него выполнено условие $C(c)$, введенное в п. 10.5. Определим далее класс $\mathscr{G}(c)$ пар $G = (G_1, G_2)$ априорных распределений на Θ_1, Θ_2. Это такие абсолютно непрерывные меры G_1, G_2, плотности которых представляются в виде

$$g_i(\theta) = \frac{g(\theta)}{\int\limits_{\Theta_i} g(\theta)\, d\theta}, \theta \in \Theta_i,$$

где функции $g(\theta)$ непрерывна, ограничена на $\bar{\Theta}$ и отделена от 0 в точке $\theta = 0$. Следующая теорема по форме мало отличается от теоремы 10.5.

Теорема 5. *Пусть* $c \in [1, \infty)$, $N_n \to \infty$,

$$\mathrm{E}_n^{(1)} \in \mathscr{C}(c) \left(\mathrm{E}_n^{(2)} \in \mathscr{C}(c)\right), Q, G \in \mathscr{G}(c).$$

Пусть $t = t_n \equiv 8 u_n \sqrt{n} \to \infty$, $t = o(n^{1/6})$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

I. *Класс* $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-РАПМ *классом для*

$$\varepsilon_n^- = \frac{t^{k-2} e^{-\frac{t^2}{2}}}{N_n}, \quad \varepsilon_n^+ = \frac{1}{N_n}.$$

II. *Класс* $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *будет* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом для*

$$\varepsilon_n^- = \frac{t^{k-2}}{N_n} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \varepsilon_n^+ = e^{-\frac{t^2}{2}(1-\beta)},$$

где $\beta > 0$.

Рассмотрим наряду с экспериментами $E_n^{(i)}$ эксперименты

$$\mathrm{E}_{n,0}^{(i)} = \left(\Theta_1^{(i)}, \Theta_2^{(i)}, \Phi, X_n\right),$$

где Φ есть гауссовское семейство распределений со средним θ и ковариационной матрицей E. Основная идея доказательства теоремы 5 (как и теоремы 10.5) состоит в следующем: в условиях теоремы 5 *асимптотика вероятностей ошибок* $\varepsilon_\theta(T_n)$ и $\delta_\theta(T_n)$ *для тестов* $T^*_{n,y/n}$ и $T^G_{n,y/n}$ *для экспериментов* $\mathrm{E}_n^{(i)}$ и $\mathrm{E}_{n,}^{(i)}$ совпадают, $i = 1, 2$. Для пары $\Theta_1^{(2)}, \Theta_2^{(2)}$, которая разделяется гиперплоскостью, это утверждение близко к теоремам 13.1, 13.3, которые будут доказаны в гл. IV. Для пары $\Theta_1^{(1)}$, $\Theta^{(1)}$ (как, впрочем, и для пары $\Theta_1^{(2)}, \Theta_2^{(2)}$) доказательство этого факта практически не отличается от доказательства теоремы 10.5, поэтому мы не будем его приводить.

Аналог теоремы 10.6, когда множества Θ_1 и Θ_2 сближаются медленней, чем $n^{-1/3}$, в принципе возможен; однако в силу громоздкости и сложности эти случаи рассматривать не будем.

§ 12. АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ДВУХ СЛОЖНЫХ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ГИПОТЕЗ

1. Постановка задачи. В настоящем параграфе рассмотрим две сложные параметрические соприкасающиеся гипотезы $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$ и $H_2 = \{\theta \in \Theta_2\}$, для которых расстояние между множествами Θ_1 и Θ_2 равно 0. Для упрощения изложения ограничимся двумерным случаем $k = 2$, предполагая при этом (опять же для простоты), что множества Θ_1, Θ_2 могут иметь лишь следующую специальную форму: либо

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \{\theta = (\theta_1, \theta_2): \theta_1 \in [-1, 0], \theta_2 \in [0, 1]\},\\ \Theta_2 &= \{\theta = (\theta_1, \theta_2): \theta_1 \in (0, 1], \theta_2 \in [0, 1]\};\end{aligned} \tag{1}$$

либо

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \{\theta = (\theta_1, \theta_2): (\theta_1 + 1)^2 + \theta_2^2 < 1\},\\ \Theta_2 &= \{\theta = (\theta_1, \theta_2): (\theta_1 - 1)^2 + \theta_2^2 \leqslant 1\}.\end{aligned} \tag{2}$$

Случай (1) характеризуется тем, что общая часть границ множеств Θ_1 и Θ_2 является отрезком $\Theta_0 = \{\theta = (\theta_1, \theta_2): \theta_1 = 0, \theta_2 \in [0, 1]\}$, в то время как для случая (2) множества Θ_1 и Θ_2 касаются в единственной точке $\theta = (0, 0)$.

Будет показано, что в некоторых предположениях класс критериев отношения максимального правдоподобия (см. (8.3))

$$\mathscr{K}_n^{(1)} = \{T^*_{n,\alpha}, \alpha \in R^1\},$$

и класс критериев байесовского типа (см. (8.4))

$$\mathscr{K}_n^{(2)}(G) = \{T^G_{n,\alpha}, \alpha \in R^1\}$$

являются $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классами для некоторых априорных распределений $Q = (Q_1, Q_2)$ и интервалов $[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+]$.

Отметим, что частично минимаксный подход для соприкасающихся гипотез не применим, если рассматриваемое семейство распределений $\mathbf{P}_\theta$ непрерывно по θ (мы рассматриваем именно такие семейства). В этом случае не существует критериев, у которых максимальные ошибки одновременно стремились бы к 0.

Все основные утверждения настоящего параграфа переносятся и на другие случаи. Например, вместо (1) можно рассматривать множества

$$\Theta_1 = \{\theta \in R^2: |\theta| < 1\}, \quad \Theta_2 = \{\theta \in R^2: |\theta| \geqslant 1\}. \tag{3}$$

Основным общим «качественным» условием в (1) и (3) является достаточная гладкость общей границы множеств Θ_1 и Θ_2.

В случае (2) совершенно не важна конфигурация множеств Θ_1 и Θ_2 вне точки касания θ_0; важен только характер касания множеств Θ_1 и Θ_2 в точке θ_0.

При рассмотрении вместо R^2 пространств R^k более высокой размерности разнообразие возможных способов соприкасания Θ_1 и Θ_2 возрастает. Случаям (1) и (2) в R^k соответствуют ситуации, когда общая граница множеств Θ_1 и Θ_2 является гладким многообразием размерности $k - 1$ и 0. Очевидно, что при $k \geqslant 3$ возможны и $k - 2$ промежуточных случаев, когда общий участок границы множеств Θ_1 и Θ_2 есть поверхность размерности r, $1 \leqslant r \leqslant k - 2$. Важным обстоятельством является то, что в этих случаях не появляются новые идейные или технические трудности в доказательствах по сравнению со случаями (1) и (2), рассмотренными ниже, если предполагать выполненными некоторые условия на гладкость общей границы множеств Θ_1 и Θ_2 и на характер касания этих множеств.

Случай (2) близок к случаю проверки простой и сложной соприкасающихся гипотез, когда

$$\Theta_1 = \{\theta = 0\},\ \Theta_2 = \{\theta\colon\ \theta \neq 0\}.$$

Этот случай подробно изучен в [1], [28] и в настоящей работе не рассматривается.

Обратимся теперь к «модельным» примерам (1) и (2).

2. Формулировки основных результатов. Рассмотрим сначала случай (1). Обозначим $\mathscr{G}$ семейство пар $Q=(Q_1, Q_2)$ априорных распределений на множествах Θ_1 и Θ_2 соответственно. Обозначим через $\mathscr{G}_0$ подкласс $\mathscr{G}$ пар Q таких, что

а) мера $Q_i(A)$ абсолюно непрерывна относительно меры Лебега $m(A)$ на Θ_i с плотностью

$$q_i(\theta) = \frac{dQ_i}{dm}(\theta), \theta \in \Theta_i, \quad i = 1, 2;$$

б) функция $q_i(\theta)$ непрерывна и строго положительна на множестве $\Theta_i \cap \Theta_0^\delta$ для некоторого $\delta > 0$, где

$$\Theta_0^\delta = \{\theta = (\theta_1, \theta_2)\colon\ |\theta_1| \leqslant \delta, \theta_2 \in [0, 1]\}, \quad i = 1, 2,$$

и на множестве $\Theta_0 = \{\theta = (\theta_1, \theta_2)\colon\ \theta_1 = 0,\ \theta_2 \in [0, 1]\}$ отношение

$$\frac{q_1(\theta)}{q_2(\theta)} = d^\theta = \mathrm{const} \tag{4}$$

не зависит от θ.

Условие б) является естественным, по крайней мере, в тех случаях, когда частично байесовской постановке задачи предшествует полная байесовская постановка, т. е. когда задана априорная вероятностная мера Q_0 на множестве Θ, а компоненты пары $Q=(Q_1, Q_2)$ представляются в виде $Q_i(A) = Q_0(A)/Q_0(\Theta_i)$, $i = 1, 2$. Если потребовать, чтобы плотность $q_0(\theta)$ меры Q_0 была непрерывна и неотрицательна на множестве Θ_0^δ для некоторого $\delta > 0$ (естественно считать, что близкие точки apriori мало отличаются), то меры Q_1 и Q_2 удовлетворяют условию б), т. е. выполнено соотношение (4):

$$\frac{q_1(\theta)}{q_2(\theta)} = \frac{q_0(\theta)}{Q_0(\Theta_1)} : \frac{q_0(\theta)}{Q_0(\Theta_2)} = \frac{Q_0(\Theta_2)}{Q_0(\Theta_1)} = \mathrm{const}, \theta \in \Theta_0.$$

Пусть, как и прежде, $a_1(\theta), a_2(\theta), \ldots$ — последовательность независимых полей, где $a_i(\theta) = \ln p(\theta, x_i)$, и

$$p(\theta, x) = \frac{d\mathbf{P}_\theta}{d\nu}(x), \theta \in \Theta.$$

Модуль непрерывности поля $a_i(\theta)$ обозначим $\omega_i(t)$, а модуль непрерывности случайной матрицы $a_i''(\theta)$ на множестве Θ_0^δ обозначим $\omega_i''(\delta, t)$. Через $B^2(\theta)$ обозначим квадратную матрицу

$$B^2(\theta) \equiv -\mathbf{E}_\theta a''(\theta), \theta \in \Theta_0^\delta.$$

Будем говорить, что эксперимент

$$\mathrm{E}_n = (\Theta_1, \Theta_2, \mathscr{P}, X_n)$$

принадлежит классу $\mathscr{D}(c)$, $c \in [1, \infty)$, если выполнено условие $D(c)$.

1) $\mathbf{E}_\mu a^2(\theta) \leqslant c, \mathbf{E}_\mu (a(\mu) - a(\theta)) \geqslant \frac{1}{c} |\mu - \theta|^2, \mu, \theta \in \Theta,$

$$\|B^2(\theta) - B^2(\mu)\| \leqslant c |\mu - \theta|, \mu, \theta \in \Theta_0^{1/c};$$

2) $\mathbf{E}_\mu \omega''(1/c, t) \leqslant ct,\ 0 \leqslant c \leqslant 1/t,\ \mu \in \Theta_0^{1/c}$,

$\mathbf{E}_\mu [(\omega''(1/c, 1/c))^2 + \|\alpha''(\theta)\|] \leqslant c,\ \mu, \theta \in \Theta_0^{1/c}$.

Из условия (1) следует, что функция

$$h(\theta) = h_\mu(\theta) \equiv \mathrm{E}_\mu a(\theta)$$

как функция аргумента θ при каждом μ имеет единственный максимум в точке $\theta = \mu$ и при этом

$$h'(\mu) = 0, -h''(\mu) \geqslant \frac{1}{c} E.$$

Поскольку $B^2(\mu) = -h''(\mu)$, в силу наших условий получаем, что для всех $\mu \in \Theta_0^{1/c}$ выполняется

$$\frac{1}{c_1} E \leqslant B^2(\mu) \leqslant c_1 E, \tag{5}$$

где константа $c_1 < \infty$ зависит только от c. Заметим еще, что матрица $B^2(\theta)$ является ковариационной матрицей вектора $a'(\theta)$ по распределению $\mathbf{P}_\theta$:

$$B^2(\theta) = \mathbf{E}_\theta a'(\theta)^{\mathrm{T}} a'(\theta).$$

Пусть $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$; обозначим для $\theta \in \Theta_0$

$$\sigma^2(\theta) = e_1 B^2(\theta) e_1^{\mathrm{T}}.$$

Обозначим, как обычно,

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\quad \overline{\Phi}(u) = 1 - \Phi(u).$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{E}_n \in \mathscr{D}(c)$ *для некоторого* $c \in [1, \infty)$, *и пусть пары априорных распределений* $G = (G_1, G_2)$, $Q = (Q_1, Q_2)$ *принадлежат* $\mathscr{G}_0$. *Тогда класс тестов* $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *является* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом для интервала*

$$[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+] = \left[\frac{c_1}{\sqrt{n}}, \frac{c_2}{\sqrt{n}}\right] \tag{6}$$

при каждых $c_1, c_2 \in R^1$, $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$. *При этом*

$$\varepsilon^Q(T^*_{n,y/n}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \sigma(te_2)\, q_1(te_2)\, dt \int_{h(y)}^{\infty} \overline{\Phi}(u)\, du, \tag{7}$$

$$\delta^Q(T^*_{n,y/n}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^0 \sigma(te_2)\, q_2(te_2)\, dt \int_{h(-y)}^{\infty} \overline{\Phi}(u)\, du, \tag{8}$$

$$\varepsilon^Q(T^G_{n,y/n}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \sigma(te_2)\, q_1(te_2)\, dt \int_{g(y+d)}^{\infty} \overline{\Phi}(u)\, du.$$

$$\delta^Q(T^G_{n,y/n}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \sigma(te_2)\, q_2(te_2)\, dt \int_{g(-y-d)}^{\infty} \overline{\Phi}(u)\, du,$$

где

$$h(y) = \operatorname{sign}(y) \sqrt{2|y|},$$

функция $g(y)$ *определяется как единственное решение уравнения*

$$-\ln(\overline{\Phi}(g)/\Phi(g)) = y,$$

константа $d = d^G$ *определяется формулой* (4).

Замечание 1. Если потребовать более жесткие ограничения моментного типа в условиях 1), 2), то можно расширить «интервал» $[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+]$ в (6). Скажем, используя степенные моментные ограничения в рамках условий 1), 2),

$$\begin{gathered} \mathbf{E}_\mu a^{2+n_1}(\theta) \leqslant c, \ \mathbf{E}_\mu \| a''(\theta) \|^{1+n_2} \leqslant c, \\ \mathbf{E}_\mu \omega(1/c)^{2+n_3} \leqslant c, \mathbf{E}_\mu [\omega''(1/c, 1/c)]^{2+n_4} \leqslant c \end{gathered} \tag{9}$$

для подходящих чисел n_i, $i = 1, \ldots, 4$, можно получить в утверждении теоремы 1 интервал $[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+]$ виды

$$\left[\frac{c}{n^{1/2+\alpha}}, \frac{a \ln n}{\sqrt{n}}\right], \tag{10}$$

где числа $\alpha \geqslant 0$ и $a > 0$ согласованно выбираются по $n_1, \ldots, n_4$. Если же использовать вместо (9) ограничения Крамеровского типа, то можно получить еще более широкий интервал

$$[e^{-\delta n}, o(1)].$$

Замечание 2. Если условия таковы, что основное утверждение теоремы 1 справедливо для более широкого, чем (6), интервала $[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+]$ (например, для интервала (10)), то можно построить АПМ класс без использования условия (4) в определении класса $\mathscr{G}_0$. Класс $\mathscr{K}_n^{(1)}$ будет одновременно $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классом для

$$[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+] = \left[\frac{c}{n^{1/2+k}}, \frac{o(1)}{n^{1/2}}\right], \ [\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+] = \left[\frac{1}{o(1)\, n^{1/2}}, \frac{a \ln n}{n^{1/2}}\right].$$

Иными словами, мы удалили из интервала (10) интервал $\left[\frac{o(1)}{\sqrt{n}}, \frac{1}{o(1)\sqrt{n}}\right]$.

Обратимся теперь к случаю (2). Тут общая граница Θ_0 множеств Θ_1 и Θ_2 состоит из одной точки $\theta_0 = 0$, поэтому соотношение (4) в определении класса $\mathscr{G}_0$ всегда выполнено.

Теорема 2. *Пусть* $E_n \in \mathscr{D}(c)$ *для некоторого* $c \in [1, \infty)$ *и пусть* $G = (G_1, G_2)$, $Q = (Q_1, Q_2) \in \mathscr{G}_0$. *Тогда класс* $\mathscr{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}_n^{(2)}(G)$) *является* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом для интервала*

$$[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+] = \left[\frac{c_1}{n^{3/4}}, \frac{c_2}{n^{3/4}}\right],$$

где $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$ — *произвольные числа. При этом*

$$\varepsilon^Q(T^*_{n,y/n}) \sim \frac{2\sqrt{2}}{n^{3/4}} \sigma^{3/2}(0)\, q_1(0) \int_0^\infty \overline{\Phi}(u + h(y))\, u^{1/2}\, du,$$

$$\delta^Q(T^*_{n,y/n}) \sim \frac{2\sqrt{2}}{n^{3/4}} \sigma^{3/2}(0)\, q_2(0) \int_0^\infty \overline{\Phi}(u - h(y))\, u^{1/2}\, du,$$

$$\varepsilon^Q(T^G_{n,y/n}) \sim \frac{2\sqrt{2}}{n^{3/4}} \sigma^{3/2}(0)\, q_1(0) \int_0^\infty \overline{\Phi}(u + g(y + d))\, u^{1/2}\, du,$$

$$\delta^Q(T_{n,y/n}) \sim \frac{2\sqrt{2}}{n^{3/4}} \sigma^{3/2}(0) q_2(0) \int_0^\infty \overline{\Phi}(u - g(y + d))\, u^{1/2}\, du.$$

3. Доказательство теоремы 1 будет следовать из лемм 1, 2, в которых предполагаем выполненными условия теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть* $\theta_0 \in \Theta_0$, $y \in R^1$, $|y| \leqslant T$, $\alpha > 0$. *Тогда*

$$I \equiv \int_0^1 \varepsilon_{-te_1+\theta_0}\left(T^*_{n,y/n}\right) q_1(-te_1+\theta_0)\,dt \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}},$$

где константа $c_1 \in [1, \infty)$ *зависит только от* c, T *и* q_1; *если дополнительно* $\langle\theta_0, e_2\rangle \in [\alpha, 1-\alpha]$, *то*

$$I = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(\theta_0)\,q_1(\theta_0)\int_{h(y)}^{\infty}\overline{\Phi}(u)\,du\,(1+\varepsilon_n),$$

где $|\varepsilon_n| \leqslant \bar{\varepsilon}_n$ *и последовательность* $\bar{\varepsilon}_n$ *зависит только от* c, T, α, q_1 *и стремится к* 0 *при* $n \to \infty$.

Лемма 2. *Пусть* $\theta_0 \in \Theta_0$, $y \in R^1$, $|y| \leqslant T$, $\alpha > 0$. *Тогда*

$$I \equiv \int_0^1 \varepsilon_{-te_1+\theta_0}\left(T^0_{n,y/n}\right) q_1(-te_1+\theta_0)\,dt \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}},$$

где константа $c_1 \in [1, \infty)$ *зависит только от* c, T *и* q_1; *если дополнительно* $\langle\theta, e_2\rangle \in [\alpha, 1-\alpha]$, *то*

$$I = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(\theta_0)\,q_1(\theta_0)\int_{g(y+d)}^{\infty}\overline{\Phi}(u)\,du\,(1+\varepsilon_n),$$

где функция $g(u)$ *есть единственное решение уравнения*

$$-\ln\frac{\overline{\Phi}(g)}{\Phi(g)} = u,$$

константа $d = d^Q$ *определена формулой* (4), $|\varepsilon_n| \leqslant \bar{\varepsilon}_n$ *и последовательность* $\bar{\varepsilon}_n$ *зависит только от* c, T, α, q_1 *и стремится к* 0 *при* $n \to \infty$.

Леммы 1, 2 докажем несколько позже, а сейчас с их помощью проведем

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 2 получаем, что для любого $y \in R^1$

$$\varepsilon^Q\left(T^Q_{n,y/n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^1 \sigma(te_2)\,q_1(te_2)\,dt \int_{g(y+d)}^{\infty}\overline{\Phi}(u)\,du,$$

$$\delta^Q\left(T^Q_{n,y/n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^1 \sigma(te_2)\,q_2(te_2)\,dt \int_{g(-y-d)}^{\infty}\overline{\Phi}(u)\,du.$$

Соответственно из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned}\varepsilon^Q\left(T^*_{n,y/n}\right) &\sim \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^1 \sigma(te_2)\,q_1(te_2)\,dt \int_{h(y)}^{\infty}\overline{\Phi}(u)\,du,\\ \delta^Q\left(T^*_{n,y/n}\right) &\sim \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^1 \sigma(te_2)\,q_2(te_2)\,dt \int_{h(-y)}^{\infty}\overline{\Phi}(u)\,du.\end{aligned} \tag{11}$$

Тем самым мы доказали соотношения (7), (8).

Функции $h(u)$ и $g(u)$ являются неубывающими нечетными функциями, осуществляющими взаимно однозначное отображение R^1 в R^1. Поэтому для любого $y \in R^1$ найдется $y_1 = y_1(y)$ такое, что

$$g(y+d) = h(y_1),\quad g(-y-d) = h(-y_1). \tag{12}$$

Поэтому для тех же y и y_1 выполняется

$$\begin{aligned} \varepsilon^Q\left(T^Q_{n,y/n}\right) &\sim \varepsilon^Q\left(T^*_{n,y_1/n}\right), \\ \delta^Q\left(T^Q_{n,y/n}\right) &\sim \delta^Q\left(T^*_{n,y_1/n}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Класс $\mathcal{K}_n^{(2)}(Q)$ является $\left(Q, \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \frac{c_2}{\sqrt{n}}\right)$-ПМ классом. Кроме того, из формул (11), (12) следует, что он же является $\left(Q, \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \frac{c_2}{\sqrt{n}}\right)$-АПМ классом. Из (13) вытекает, что и класс $\mathcal{K}_n^{(1)}$ является $\left(Q, \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \frac{c_2}{\sqrt{n}}\right)$-АПМ классом. Теорема 1 для класса $\mathcal{K}_n^{(1)}$ доказана. Доказательство для класса $\mathcal{K}_n^{(2)}(G)$ совершенно аналогично.

4. Доказательство леммы 1. Мы представим доказательство леммы 1 в виде последовательности утверждений. Для удобства будем считать, что $a_i(\theta) = -\infty$ при $\theta \notin \Theta$.

1. Для $\mu \in \Theta$, $|y| \leqslant T$ справедливо

$$\mathbf{P}_\mu\left(\sup_{|\theta-\mu|\geqslant n^{-0,01}} A_n(\theta) - A_n(\mu) > y\right) \leqslant \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}},$$

где константа $c_1 \in [1, \infty)$ зависит только от c и T.

Доказательство следует из леммы 3 в Приложении.

Для двух случайных полей $D_1 = D_1(\theta)$, $D_2 = D_2(\theta)$ для $y \in R^1$, $\mu \in \Theta$, $\delta > 0$ обозначим

$$H(\mu, D_1, D_2, y, \delta) \equiv \mathbf{P}_\mu\left(\sup_{\substack{|\mu-\theta|\leqslant\delta \\ \langle\theta, e_1\rangle > 0}} D_1(\theta) - \sup_{\substack{|\mu-\theta|\leqslant\delta \\ \langle\theta, e_1\rangle \leqslant 0}} D_2(\theta) > y\right).$$

В этих обозначениях ошибка $\varepsilon_\mu\left(T^*_{n,y/n}\right)$ имеет вид

$$H(\mu, A_n, A_n, y, \infty).$$

2. Для $n^{-0,01} \leqslant t < \infty$, $\theta_0 \in \Theta_0$, $\theta_1 = -te_1 + \theta_0$, $|y| \leqslant T$ справедливо

$$H(\theta_1, A_n, A_n, y, \infty) \leqslant \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}},$$

где константа $c_1 \in [1, \infty)$ зависит только от c и T.

Доказательство. Поскольку

$$H(\theta_1, A_n, A_n, y, \infty) \leqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\sup_{|\theta-\theta_1|\geqslant n^{-0,01}} A_n(\theta) - A_n(\theta_1) > y\right),$$

утверждение п. 2 следует из п. 1.

Для произвольных поля $D = D(\theta)$, вектора $\mu \in \Theta$ и целых $n = 1, 2, \ldots$ введем события

$$B_n^+(D, \mu) = \left\{\sup_{\substack{|\theta-\mu|>n^{-0,01} \\ \langle\theta, e_1\rangle > 0}} D(\theta) - D(\mu) > 0\right\},$$

$$B_n^-(D, \mu) = \left\{\sup_{\substack{|\theta-\mu|>n^{-0,01} \\ \langle\theta, e_1\rangle \leqslant 0}} D(\theta) - D(\mu) > 0\right\}.$$

Повторяя доказательство п. 1, можно доказать, что

3. Для $0 \leqslant t \leqslant n^{-0,01}$, $\theta \in \Theta_0$, $\theta_1 = te_1 + \theta_0$

$$\mathbf{P}_{\theta_1}\left(B_n^{\pm}(A_n, \theta_1)\right) \leqslant \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}},$$

где константа $c_1 \in [1, \infty)$ зависит только от c.

В свою очередь, из п. 3 следует, что

4. Для $0 \leqslant t \leqslant n^{-0,01}$, $\theta_0 \in \Theta_0$, $\theta_1 = -te_1 + \theta_0$, $|y| \leqslant T$

$$|H(\theta_1, A_n, A_n, y, \infty) - H(\theta_1, A_n, A_n, y, n^{-0,01})| \leqslant \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}},$$

где константа $c_1 \in [1, \infty)$ зависит только от c, T.

Введем далее поля $A_n^{\pm}(\theta)$, которые оценивают сверху и снизу поле $A_n(\theta)$ на множестве $\{|\theta_1 - \theta| \leqslant n^{-0,01}\}$ с вероятностью $1\,O(n^{-1/2-0,01})$:

$$A_n^{\pm}(\theta) \equiv \sqrt{n}\, v\eta_n^{\mathrm{T}} - \frac{vn\left(B^2(\theta_0) \mp n^{-0,01}E\right)v^{\mathrm{T}}}{2}, \theta \in \Theta,$$

где $v = (\theta - \theta_1)$, $\theta_1 = -te_1 + \theta_0$, $\theta_0 \in \Theta_0$,

$$\eta_n = \frac{A_n'(\theta_1)}{\sqrt{n}}.$$

При $\theta \notin \Theta$ положим $A_n^{\pm}(\theta) = -\infty$.

Для того чтобы оценивать сверху и снизу поле $A_n(\theta)$ полями $A_n^{+}(\theta)$ и $A_n^{-}(\theta)$, нам понадобится следующее утверждение.

5. Для $|t| \leqslant n^{-0,01}$, $\theta_1 = te_1 + \theta_0$, $\theta_0 \in \Theta_0$

$$\mathbf{P}_{\theta_1}\left(\sup_{\substack{|\theta-\theta_1| \leqslant n^{-0,01} \\ \theta \in \Theta}} \left\| \frac{A_n^{\pm}(\theta) + nB^2(\theta_0)}{n} \right\| > n^{-0,01}\right) \leqslant \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}},$$

где константа $c_1 \in [1, \infty)$ зависит только от c.

Доказательство следует из леммы 3 в Приложении.

6. Для $0 \leqslant t \leqslant n^{-0,01}$, $\theta_1 = -te_1 + \theta_0$, $\theta_0 \in \Theta_0$, $|y| \leqslant T$

$$H(\theta_1, A_n^-, A_n^+, y, n^{-0,01}) + R_- \leqslant H(\theta_1, A_n, A_n, y, n^{-0,01}) \leqslant$$
$$\leqslant H(\theta_1, A_n^+, A_n^-, y, n^{-0,01}) + R_+,$$

где

$$|R_{\pm}| \leqslant \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}}$$

и константа $c_1 \in [1, \infty)$ зависит только от c и T.

Доказательство следует из п. 5.

7. Для $0 \leqslant t \leqslant n^{-0,01}$, $\theta_1 = -te_1 + \theta_0$, $\theta_0 \in \Theta_0$, для событий $B = B_n^{\pm}(A_n^+, \theta_1), B_n(A_n^-, \theta_1)$ справедливо

$$\mathbf{P}_{\theta_1}(B) \leqslant \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}}.$$

Доказательство повторяет доказательство п. 3.

Из п. 7 следует

8. Для $0 \leqslant t \leqslant n^{-0,01}$, $\theta_1 = -te_1 + \theta_0$, $\theta_0 \in \Theta_0$, $|y| \leqslant T$

$$|H(\theta_1, A_n^{\pm}, A_n^{\mp}, y, n^{-0,01}) - N(\theta_1, A_n^{\pm}, A_n^{\mp}, y, \infty)| \leqslant \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}},$$

где константа $c_1 \in [1, \infty)$ зависит только от c, T.

Рассмотрим теперь случайное поле

$$A_n^0(\theta) = v\eta^{\mathrm{T}} - \frac{vB^2(\theta_0)v^{\mathrm{T}}}{2}, \theta \in \Theta, A_A^0(\theta) = -\infty, \Theta \notin \Theta,$$

где $v = \sqrt{n}(\theta - \theta_1)$, случайный вектор $\eta \in R^2$ имеет гауссовское распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей $B^2(\theta_0)$.

Непосредственно из центральной предельной теоремы следует

9. Для $\theta_1 = -te_1 + \theta_0$, $\theta_0 \in \Theta_0$, $T < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant T/\sqrt{n} \\ |y| \leqslant T}} \left| H\left(\theta_1, A_n^{\pm}, A_n^{\mp}, y, \infty\right) - H\left(\theta_1, A_n^0, A_n^0, y, \infty\right) \right| = 0.$$

10. Для $0 \leqslant t \leqslant n^{-0{,}01}$, $\theta_1 = -te_1 + \theta_0$, $\theta_0 \in \Theta_0$, $T < \infty$

$$\sup_{|y| \leqslant T} H\left(\theta_1, A_n^{\pm}, A_n^{\mp}, y, \infty\right) \leqslant \frac{c_1}{(\sqrt{n}\ t)^{1+0{,}01}},$$

где константа $c_1 \in [1, \infty)$ зависит только от c и T.

Доказательство. Для любого $y \in [-T, T]$ справедливо

$$H\left(\theta_1, A_n^{\pm}, A_n^{\mp}, y, \infty\right) \leqslant H\left(\theta_1, A_n^{\pm}, A_n^{\mp}, -T, \infty\right) \leqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\sup_{\langle \theta, e_1\rangle > 0} A_n^{+}(\theta) > -T\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left\{\left(\sup_{\langle v, e_1\rangle > \sqrt{n}t} \left\{v\eta_n^{\mathrm{T}} - \frac{vB_n^2 v^{\mathrm{T}}}{2}\right\} > -T\right)\right\},$$

где $B_n^2 = B^2(\theta_0) + n^{-0{,}01}E$. Функция

$$g(v) \equiv v\eta_n^{\mathrm{T}} - \frac{vB_n^2 v^{\mathrm{T}}}{2} = \frac{\eta_n B_n^{-2} \eta_n^{\mathrm{T}}}{2} - \frac{\left(vB_n - \eta_n B_n^{-1}\right)^2}{2}$$

имеет единственный максимум в точке $\eta_n B_n^{-2}$. Поэтому на событии

$$B \equiv \{\langle \eta_n B_n^{-2}, e_1\rangle > \sqrt{n}\, t\}$$

выполняется

$$\bar{g} \equiv \sup_{\langle v, e_1\rangle > t\sqrt{n}} g(v) = \sup_{v \in R^2} g(v) = \frac{1}{2}\eta_n B_n^{-2} \eta_n^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

на событии $\bar{B}$

$$\bar{g} = \frac{\eta_n B_n^{-2} \eta_\eta^{\mathrm{T}}}{2} - \frac{\left(\eta_n B_n^{-2} e_1^{\mathrm{T}} - t\sqrt{n}\right)^2}{2e_1 B_n^{-2} e_1^{\mathrm{T}}}. \tag{15}$$

Поэтому

$$\mathbf{P}_{\theta_1}(\bar{g} > -T) = \mathbf{P}_{\theta_1}(\bar{g} > -T, B) + \mathbf{P}_{\theta_1}(\bar{g} > T, \bar{B}) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\eta_n B_n^{-2} e_1^{\mathrm{T}} > \sqrt{n}\, t, \eta_n B_n^{-2} \eta_n^{\mathrm{T}} > -2T\right) +$$

$$+ \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\eta_n B_n^{-2} e_1^{\mathrm{T}} \leqslant t\sqrt{n}, \frac{\eta_n B_n^{-2} e_n^{\mathrm{T}}}{2} - \frac{\left(\eta_n B_n^{-2} e_1^{\mathrm{T}} - t\sqrt{n}\right)^2}{2e_1 B_n^{-2} e_1^{\mathrm{T}}} > -T\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\eta_n B_n^{-2} e_1^{\mathrm{T}} > t\sqrt{n}\right) + \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\langle \tilde{\eta}_n, \tilde{e}_1\rangle \leqslant t\sqrt{n}, \frac{|\tilde{\eta}_n|^2}{2} -\right.$$

$$\left. - \frac{|\langle \tilde{\eta}_n, \tilde{e}_1\rangle - t\sqrt{n}|^2}{|\tilde{e}_1|^2} > -T\right) \equiv \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2,$$

где $\tilde{\eta}_n = \eta_n B_n^{-1}$, $\tilde{e}_1 = e_1 B_n^{-1}$. Для того, чтобы оценить $\mathbf{P}_2$, заметим, что вектор η_n можно представить в виде

$$\tilde{\eta}_n = \tilde{\eta}_n^1 + \tilde{e}_1 \frac{\tilde{\eta}_n \tilde{e}_1^{\mathrm{T}}}{|\tilde{e}_1|^2},$$

где $\tilde{\eta}_n^1$ ортогонально e_1. Поэтому

$$|\tilde{\eta}_n|^2 = |\tilde{\eta}_n^1|^2 + \frac{|\tilde{\eta}_n \tilde{e}_1^{\mathrm{T}}|^2}{|\tilde{e}_1|^2},$$

так что

$$\mathbf{P}_2 \leqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\tilde{\eta}_n \tilde{e}_1^{\mathrm{T}} \leqslant t\sqrt{n}, |\tilde{\eta}_n^1|^2 > \frac{t^2 n}{|\tilde{e}_1|^2} - \frac{2t\sqrt{n}\,\tilde{\eta}_n \tilde{e}_1^{\mathrm{T}}}{|\tilde{e}_1|^2} - 2T\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left(|\tilde{\eta}_n^1|^2 \geqslant \frac{t^2 n}{|\tilde{e}_1|^2} - \frac{2t\sqrt{n}\,\tilde{\eta}_n \tilde{e}_1^{\mathrm{T}}}{|\tilde{e}_1|^2} - 2T\right).$$

в силу (5) $\delta^{-1} \geqslant |\tilde{e}_1|^2 \geqslant \delta > 0$, где δ зависит только от c. Поэтому

$$\mathbf{P}_2 \leqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left(|\tilde{\eta}_n^1|^2 \geqslant t^2 n\delta - \frac{2}{\delta} t\sqrt{n}\,\tilde{\eta}_n^1 \tilde{e}_1^{\mathrm{T}} - 2T, \tilde{\eta}_n^1 \tilde{e}_1^{\mathrm{T}} > 0\right) +$$

$$+ \mathbf{P}_{\theta_1}(|\tilde{\eta}_n|^2 \geqslant t^2 n\delta - 2T) \leqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left(|\tilde{\eta}_n| \geqslant \frac{2}{\delta} t\sqrt{n} - \frac{T\delta}{t\sqrt{n}}\right) +$$

$$+ \mathbf{P}_{\theta_1}(|\tilde{\eta}_n|^2 \geqslant tn\delta - 2T) \equiv \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4.$$

Таким образом,

$$H(\theta_1, A_n^{\pm}, A_n^{\mp}, y, \infty) \leqslant \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4,$$

где величины $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ допускают нужную оценку в силу неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}_i \leqslant \frac{c_1}{(\sqrt{n}\,t)^2}, \quad i = 1, 3, 4.$$

11. Для $\theta_1 = -te_1 + \theta_0$, $\theta_0 \in \Theta_0$, $\nu > 0$, $T < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{\sqrt{n}}} \sup_{\substack{|y| \leqslant T \\ \nu \leqslant \theta_0 e_2^{\mathrm{T}} \leqslant 1-\nu}} \left| H(\theta_1, A_n^0, A_n^0, y, \infty) - \overline{\Phi}\left(\frac{t\sqrt{n}}{\sigma(\theta_0)} + h(y)\right)\right| = 0.$$

Доказательство основано на соотношениях (14) и (15) и не требует привлечения дополнительных идей.

Закончим доказательство леммы 1. Для призвольного $u < \infty$ справедливо

$$I \equiv \int_0^1 \varepsilon_{te_1+\theta_0}(T^*_{n,y/n})\, q_1(-te_1 + \theta_0)\, dt =$$

$$= \int_0^{u/\sqrt{n}} + \int_{u/\sqrt{n}}^{n^{-0,01}} + \int_{n^{-0,01}}^{\infty} \equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

Интеграл I_3 допускает нужную оценку в силу п. 2:

$$I_3 \leqslant \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}}. \tag{16}$$

В силу п. 10 выполняется

$$I_2 \leqslant \int_{u/\sqrt{n}}^{n^{-0,01}} \frac{c_1}{(t\sqrt{n})^{1+0,01}} \sup_{|t| \leqslant n^{-0,01}} q_1(te_1 + \theta_0)\, dt \leqslant \frac{c_2}{n^{1/2+0,005} u^{0,01}}.$$

Далее в силу п. 4, 6, 8—11 выполняется

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^u \overline{\Phi}\left(\frac{t}{\sigma(\theta_0)} + h(y)\right) q_1(\theta_0)\, dt + \frac{u}{\sqrt{n}} \varepsilon_n(u),$$

где $|\varepsilon_n(u)| \leqslant \overline{\varepsilon}_n(u)$, последовательность $\overline{\varepsilon}_n(u)$ зависит только от c, T, α, q_1, u и для любого $u < \infty$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому второе утверждение леммы доказано.

Первое утверждение леммы 1 следует из неравенств (16) и

$$I_2 + I_3 \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}}.$$

Последнее неравенство следует из п. 10. Лемма 1 доказана.

5. Доказательство леммы 2. Нам удобно сохранить нумерацию пунктов, которую мы использовали при доказательстве леммы 1.

12. Для $\mu \in \Theta$

$$\mathbf{P}_\mu \left(\sup_{|\theta-\mu|>n^{-0,01}} A_n(\theta) - A_n(\mu) > -n^{-0,01} \right) \leqslant \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}},$$

где константа $c_1 \in [1, \infty)$ зависит только от c. Доказательство аналогично доказательству п. 1.

13. Для $\theta_1 = -te_1 + \theta_0$, $\theta_0 \in \Theta_0$, $n^{-0,01} \leqslant t < \infty$,

$$\varepsilon(t, y) \equiv \mathbf{P}_{\theta_1} \left(\ln \int_{\Theta_2} e^{A_n(\theta)-A_n(\theta_1)} q_2(\theta)\, d\theta - \ln \int_{\Theta_n} e^{A_n(\theta)-A_n(\theta_1)} q^1(\theta)\, d\theta > y \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}},$$

где константа $c_1 \in [1, \infty)$ зависит только от c и T.

Доказательство. Введем множества для $i = 1, 2$

$$\Theta_{i,n}^+ = \Theta \cap \{\theta\colon |\theta - \theta_i| \geqslant n^{-0,01}\},$$

$$\Theta_{i,n}^- = \Theta \cap \{\theta\colon |\theta - \theta_i| < n^{-0,01}\}.$$

Тогда

$$\varepsilon(t, y) = \mathbf{P}_{\theta_1} \left(\ln \left(\int_{\Theta_{2,n}^+} + \int_{\Theta_{2,n}^-} \right) - \ln \left(\int_{\Theta_{1,n}^+} + \int_{\Theta_{1,n}^-} \right) > y \right),$$

и в силу того, что $\Theta_{2,n}^+ = \varnothing$, имеем

$$\varepsilon(t, y) \leqslant \mathbf{P}_{\theta_1} \left(\ln \int_{\Theta_{2,n}^-} - \ln \int_{\Theta_{1,n}^+} > y \right).$$

Воспользуемся далее п. 12, в силу которого

$$\varepsilon(t, y) \leqslant \mathbf{P}_{\theta_1} \left(\sup_{|\theta-\theta_1|>n^{-0,01}} A_n(\theta) - A_n(\theta_1) > n^{0,01} \right) +$$

$$+ \mathbf{P}_{\theta_1} \left(\ln \int_{\Theta_{2,n}^-} - \ln \int_{\Theta_{1,n}^+} > y, \quad \sup_{|\theta-\theta_1|>n^{-0,01}} A_n(\theta) - A_n(\theta_1) \leqslant -n^{0,01} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}} + \mathbf{P}_{\theta_1} \left(-n^{0,01} - \ln \int_{\Theta_{1,n}^+} > y \right).$$

Таким образом, нам осталось оценить

$$\mathbf{P}_1 \equiv \mathbf{P}_{\theta_1} \left(\ln \int_{\Theta_{1,n}^+} e^{A_n(\theta)-A_n(\theta_1)} q_1(\theta)\, d\theta \leqslant -n - n^{0,01} \right).$$

Воспользуемся далее п. 5, в силу которого

$$\mathbf{P}_{\theta_1} \left(\sup_{\theta \in \Theta_{1,n}^+} \{A_n^-(\theta) - (A_n(\theta) - A_n(\theta_1))\} \geqslant 0 \right) \leqslant \frac{c_2}{n^{1/2+0,01}}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}_1 \leqslant \mathbf{P}_2 + \frac{c_1}{n^{1/2+0,01}},$$

где

$$\mathbf{P}_2 \equiv \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\ln \int\limits_{\Theta_{1,n}^{+}} e^{\bar{A_n}(\theta)} q_2(\theta)\, d\theta \leqslant -n - n^{0,01}\right).$$

Поскольку априорная плотность $q_2(\theta)$ непрерывна и отделена от 0 на множестве $\Theta_{1,n}^{+}$ достаточно оценить снизу интеграл

$$I_n \equiv \int\limits_{\Theta_{1,n}^{+}} e^{\bar{A_n}(\theta)} d\theta = n^{-k/2} \int\limits_{\sqrt{n}\Theta_{1,n}^{+}} e^{u\eta_n^{\mathrm{T}} - \frac{uB_n^2 u^{\mathrm{T}}}{2}} du =$$

$$= n^{-k/2} e^{\frac{\eta_n B_n^2 \eta_n^{\mathrm{T}}}{2}} \int\limits_{\sqrt{n}\Theta_{1,n}^{+}} e^{-\frac{\left(\eta_n B_n^{-1} - uB_n\right)^2}{2}} du.$$

Если $\left|\eta_n B_n^{-1}\right| \leqslant 0{,}01 n^{1/2-0{,}01}$, то

$$I_n \geqslant n^{-k/2} e^{\frac{\eta_n B_n^{-2} \eta_n^{\mathrm{T}}}{2}} \Big/ c_1,$$

где $c_1 \in [1, \infty)$ зависит только от c. Поэтому

$$\mathbf{P}_2 \leqslant \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\left|\eta_n B_n^{-1}\right| > 0{,}01 n^{1/2-0{,}01}\right) +$$

$$+ \mathbf{P}_{\theta_1}\left(\eta_n \frac{B_n^{-2}\eta_n^{\mathrm{T}}}{2} \leqslant \frac{k}{2} \ln n - y - n^{0{,}01} + \ln c_1\right) \equiv \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4.$$

Поскольку $\mathbf{P}_3$ допускает нужную оценку, а $\mathbf{P}_4 = 0$, п. 13 доказан.

14. Для $0 \leqslant t \leqslant n^{-0{,}01}$, $|y| \leqslant T$ выполняется

$$\varepsilon(t, y) \leqslant \frac{c_1}{(t\sqrt{n})^{1+0{,}01}},$$

где $\varepsilon(f, ty)$ определено в п. 13, константа $c_1 \in [1, \infty)$ зависит только от c и T.

15. Для $T < \infty$, $\theta_1 = \theta_0 - te_1$, $\alpha > 0$, $\theta_0 \in \Theta_0$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T/\sqrt{n}} \sup_{\substack{|y| \leqslant T \\ \alpha \leqslant \langle \theta_0, e_2 \rangle \leqslant 1-\alpha}} \left| \varepsilon(t, y) - \overline{\Phi}\left(\frac{t\sqrt{n}}{\sigma(\theta_0)} - g(y)\right)\right| = 0,$$

где функция $g(y)$ определена в лемме 2.

Доказательство п. 14, 15 в основном повторяет доказательство п. 10, 11. Лемма 2 следует из п. 12—15.

6. Доказательство теоремы 2 проведем менее подробно, на физическом уровне строгости. Главную роль в средней ошибке $\varepsilon^Q\left(T_{n,y/n}\right)$ играют значения функции $\varepsilon_\theta\left(T^*_{n,y/n}\right)$ в окрестности точки $\theta_0 = 0$. Вероятность ошибки $\varepsilon_{\theta_1}\left(T^*_{n,y/n}\right)$ для $\theta_1 = \frac{\tilde{\theta}_1}{\sqrt{n}}$, $\tilde{\theta}_1 e_1^{\mathrm{T}} < 0$ ведет себя как

$$\mathbf{P}_{\theta_1}\left(\max_{\theta\in\Theta_2}\left\{\sqrt{n}(\theta - \theta_1)\eta_n^{\mathrm{T}} - (\theta - \theta_1)\frac{nB^2}{2}(\theta - \theta_1)^{\mathrm{T}}\right\} - \right.$$

$$\left. - \max_{\theta\in\Theta_1}\left\{\sqrt{n}(\theta - \theta_1)\eta_n^{\mathrm{T}} - (\theta - \theta_1)\frac{nB^2}{2}(\theta - \theta_1)^{\mathrm{T}}\right\} > y\right), \tag{17}$$

где $\eta_n = \frac{A_n'(\theta_1)}{\sqrt{n}}$, $B^2 = B^2(\theta_0)$. Поскольку вектор η_n слабо сходится к гауссовскому вектору η с параметрами $(0, B^2)$, вероятность (17) ведет себя как

$$\mathbf{P}\left(\max_{u\in\sqrt{n}(\Theta_2-\theta_1)}\left\{u\eta^{\mathrm{T}}-\frac{uB^2u^{\mathrm{T}}}{2}\right\}-\max_{u\in\sqrt{n}(\Theta_1-\theta_1)}\left\{u\eta^{\mathrm{T}}-\frac{uB^2u^{\mathrm{T}}}{2}\right\}>y\right).$$

Пусть $\theta_1=\frac{\tilde{\theta}_1}{\sqrt{n}}=\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{n}},\ \frac{\beta}{\sqrt{n}}\right)$, где $\alpha,\ \beta>0$. Легко видеть, что множества $\sqrt{n}(\Theta_1-\theta_1)$ и $\sqrt{n}(\Theta_2-\theta_1)$ при $n\to\infty$ переходят в множества

$$\tilde{\Theta}_1=\{\theta=(\theta_1,\ \theta_2):\ \theta_1<\alpha\},\ \tilde{\Theta}_2=\{\theta=(\theta_1,\ \theta_2),\ \theta_1>\alpha\},$$

поэтому вероятность (17) ведет себя как

$$\mathbf{P}\left(\max_{ue_1^{\mathrm{T}}>\alpha}\left\{u\eta^{\mathrm{T}}-\frac{uB^2u^{\mathrm{T}}}{2}\right\}-\max_{ue_1^{\mathrm{T}}<\alpha}\left\{u\eta^{\mathrm{T}}-\frac{uB^2u^{\mathrm{T}}}{2}\right\}>y\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\max_{u\tilde{e}_1^{\mathrm{T}}>\tilde{\alpha}}\left\{u\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}-\frac{|u|^2}{2}\right\}-\max_{u\tilde{e}_1^{\mathrm{T}}<\tilde{\alpha}}\left\{u\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}-\frac{|u|^2}{2}\right\}>y\right),$$

где $\tilde{\eta}=\eta B^{-1}$, $\tilde{e}_1=\frac{e_1B^{-1}}{|e_1B^{-1}|}$, $\tilde{\alpha}=\frac{\alpha}{|e_1B^{-1}|}$. Заметим, что $|e_1B^{-1}|=\sigma$, где $\sigma^2=e_1B^{-2}e_1^{\mathrm{T}}$. Повторяя далее рассуждения п. 11, получаем, что

$$\varepsilon_{\theta_1}\left(T^*_{n,y/n}\right)\sim\overline{\Phi}\left(\frac{\alpha}{\sigma}+h(y)\right),$$

где $\theta_1=\tilde{\theta}_1/\sqrt{n}$, $\tilde{\theta}_1=(-\alpha,\ \beta)$, $\alpha>0$. Аналогичным образом приходим к формуле

$$\varepsilon_{\theta_1}\left(T^Q_{n,y/n}\right)\sim\overline{\Phi}\left(\frac{\alpha}{\sigma}+g(y+d)\right),$$

где число d и функция $g(u)$ определены в лемме 2. Вычислим теперь поведение средней ошбки для теста $T^*_{n,y/n}$. Имеем

$$\varepsilon^Q\left(T^*_{n,y/n}\right)\sim q_1(0)\int_{\Theta_1}\overline{\Phi}\left(\frac{\sqrt{n}\theta_1}{\sigma}+h(y)\right)d\theta_1\,d\theta_2. \tag{18}$$

Поскольку главную роль в интеграле (18) играет окрестность точки $\theta_0=0$, то асимптотика не изменится, если круг Θ_1 заменить множеством

$$\tilde{\Theta}_1=\{\theta=(\theta_1,\ \theta_2),\ -\infty<\theta_1\leqslant 0,\ -\sqrt{2|\theta_1|}\leqslant\theta_2\leqslant\sqrt{2|\theta_1|}\},$$

граница которого в окрестности точки $\theta_0=0$ мало отличается от границы круга. Получаем

$$\varepsilon^Q\left(T^*_{n,y/n}\right)\sim q_1(0)\int_{\theta_1=0}^{\infty}\ \int_{\theta_2=-\sqrt{2\theta_1}}^{\sqrt{2\theta_1}}\overline{\Phi}\left(\frac{\theta_1\sqrt{n}}{\sigma}+h(y)\right)d\theta_1\,d\theta_2=$$

$$=2\sqrt{2}q_1(0)\frac{\sigma^{3/2}}{n^{3/2}}\int_0^{\infty}\overline{\Phi}(u+h(y))\,u^{1/2}\,du.$$

Аналогично ведут себя и другие средние ошибки:

$$\delta^Q\left(T^Q_{n,y/n}\right)\sim 2\sqrt{2}q_2(0)\frac{\sigma^{3/2}}{n^{3/2}}\int_0^{\infty}\overline{\Phi}(u-h(y))\,u^{1/2}du.$$

$$\varepsilon^Q\left(T^Q_{n,y/n}\right)\sim 2\sqrt{2}q_1(0)\frac{\sigma^{3/2}}{n^{3/2}}\int_1^{\infty}\overline{\Phi}(u+g(y+d))\,u^{1/2}\,du.$$

$$\delta^Q\left(T^Q_{n,y/n}\right)\sim 2\sqrt{2}q_2(0)\,\frac{\sigma^{3/2}}{n^{3/2}}\int\limits_1^\infty \overline{\Phi}(u-g(u+d))\,u^{1/2}\,du.$$

Далее доказательство теоремы 2 полностью совпадает с доказательством теоремы 1.

ГЛАВА IV

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ

§ 13. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ В ОБЛАСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

1. Постановка задачи. В настоящем параграфе используем обозначения, введенные в § 8. Рассмотрим задачу проверки двух гипотез $H_1=\{\theta\in\Theta_1\}$, $H_2=\{\theta\in\Theta_2\}$, которая полностью определяется статистическим экспериментом

$$\mathrm{E}_n=(\Theta_1,\ \Theta_2,\ \mathscr{P},\ X_n). \tag{1}$$

Каждому тесту $T_n=T_n(X_n)$ можно поставить в соответствие *средние* вероятности ошибок первого и второго рода (относительно пары априорных распределений $Q=(Q_1,\ Q_2)$)

$$\varepsilon^Q(T_n),\ \delta^Q(T_n)$$

и *максимальные* вероятности ошибок первого и второго рода

$$\varepsilon^*(T_m),\ \delta^*(T_n).$$

Здесь изучим ситуацию, когда множества Θ_1 и Θ_2, отвечающие гипотезам H_1 и H_2 (см. (1)), «сближаются» и имеют вид

$$\Theta_i=\theta_0+\frac{t}{\sqrt{n}}\Gamma_i,\quad i=1,2, \tag{2}$$

где Γ_1 и Γ_2 — два непересекающихся подмножества R^k, числовая последовательность $t=t_n$ удовлетворяет условию

$$t\geqslant\delta>0.$$

Гипотезы H_1 и H_2 в случае $t_n\to t$ принято называть *близкими* (*контигуальными*).

Задачу проверки двух сложных гипотез, определяемую экспериментом

$$\mathrm{E}_n=(\Theta_1,\ \Theta_2,\ \mathscr{P},\ X_n), \tag{3}$$

назовем задачей (A) (в эксперименте (3) множества Θ_1 и Θ_2 имеют вид (2)). Наряду с задачей (A) рассмотрим задачу $(\widetilde{B})$, определяемую экспериментом

$$\widetilde{E}_1=(\Theta_1,\ \Theta_2,\ \widetilde{\Phi},\ X_1),$$

где Θ_1 и Θ_2 — те же, что и в эксперименте E_n, а семейство

$$\widetilde{\Phi}=\{\Phi_{\theta,B},\ \theta\in\Theta\},\ \Theta=\Theta_1\cup\Theta_2$$

— семейство гауссовских распределений в R^k со средним θ и ковариационной матрицей $B=-n\left(\mathrm{E}_{\theta_0}a''(\theta_0)\right)^{-1}$, где $a(\theta)=\ln p_\theta(x_1)$, и $p_\theta(x)$ — плотность, отвечающая распределению $\mathbf{P}_\theta$ в эксперименте E_n.

Не ограничивая общности, будем считать, что в задаче (A)

а) $\theta_0=0$,

$$\delta^Q\left(T^Q_{n,y/n}\right) \sim 2\sqrt{2}q_2(0)\frac{\sigma^{3/2}}{n^{3/2}}\int\limits_1^\infty \overline{\Phi}(u - g(u+d))\, u^{1/2}\, du.$$

Далее доказательство теоремы 2 полностью совпадает с доказательством теоремы 1.

ГЛАВА IV

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ

§ 13. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ В ОБЛАСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

1. Постановка задачи. В настоящем параграфе используем обозначения, введенные в § 8. Рассмотрим задачу проверки двух гипотез $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$, $H_2 = \{\theta \in \Theta_2\}$, которая полностью определяется статистическим экспериментом

$$\mathrm{E}_n = (\Theta_1,\ \Theta_2,\ \mathscr{P},\ X_n). \tag{1}$$

Каждому тесту $T_n = T_n(X_n)$ можно поставить в соответствие *средние* вероятности ошибок первого и второго рода (относительно пары априорных распределений $Q = (Q_1, Q_2)$)

$$\varepsilon^Q(T_n),\ \delta^Q(T_n)$$

и *максимальные* вероятности ошибок первого и второго рода

$$\varepsilon^*(T_n),\ \delta^*(T_n).$$

Здесь изучим ситуацию, когда множества Θ_1 и Θ_2, отвечающие гипотезам H_1 и H_2 (см. (1)), «сближаются» и имеют вид

$$\Theta_i = \theta_0 + \frac{t}{\sqrt{n}}\Gamma_i, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

где Γ_1 и Γ_2 — два непересекающихся подмножества R^k, числовая последовательность $t = t_n$ удовлетворяет условию

$$t \geqslant \delta > 0.$$

Гипотезы H_1 и H_2 в случае $t_n \to t$ принято называть *близкими* (*контигуальными*).

Задачу проверки двух сложных гипотез, определяемую экспериментом

$$\mathrm{E}_n = (\Theta_1,\ \Theta_2,\ \mathscr{P},\ X_n), \tag{3}$$

назовем задачей (A) (в эксперименте (3) множества Θ_1 и Θ_2 имеют вид (2)). Наряду с задачей (A) рассмотрим задачу $(\widetilde{B})$, определяемую экспериментом

$$\widetilde{E}_1 = (\Theta_1,\ \Theta_2,\ \widetilde{\Phi},\ X_1),$$

где Θ_1 и Θ_2 — те же, что и в эксперименте E_n, а семейство

$$\widetilde{\Phi} = \{\Phi_{\theta,B},\ \theta \in \Theta\},\ \Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$$

— семейство гауссовских распределений в R^k со средним θ и ковариационной матрицей $B = -n\left(\mathrm{E}_{\theta_0}a''(\theta_0)\right)^{-1}$, где $a(\theta) = \ln p_\theta(x_1)$, и $p_\theta(x)$ — плотность, отвечающая распределению $\mathbf{P}_\theta$ в эксперименте E_n.

Не ограничивая общности, будем считать, что в задаче (A)

а) $\theta_0 = 0$,

б) матрица $-\mathbf{E}_{\theta_0} a''(\theta_0) = -\mathbf{E}_0 a''(0) = E$ является единичной, так что в эксперименте $\widetilde{E}_1$ матрица B имеет вид nE (согласно условиям регулярности, приведенным ниже, матрица $\mathbf{E}_{\theta_0} a''(\theta_0)$ не вырождена; в этом случае линейная замена параметра θ приводит к ситуации, когда $\theta_0 = 0$, $-\mathbf{E}_0 a''(0) = E$).

Можно показать, что при

$$t_n \sim t, \ 0 < t < \infty$$

задача $(\widetilde{B})$ (с учетом условий а), б)) эквивалентна задаче (B), которая определяется экспериментом

$$\widetilde{E}_1 = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Phi, X_1), \tag{4}$$

где Φ — семейство $\{\Phi_{t\gamma,E}, \ \gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$ гауссовских распределений со средним $t\gamma$ и единичной ковариационной матрицей.

Задача (B) (и эквивалентная ей задача $(\widetilde{B})$) является значительно более простой, чем исходная задача (A). Она содержит только одно наблюдение и относится к параметру сдвига для гауссовского семейства распределений при фиксированных множествах Γ_1 и Γ_2.

В работах А. Вальда, Л. Ле-Кама, Дж. Русаса, Д. М. Чибисова и др. (см. [1], [29]) для близких гипотез (когда $t_n \sim t$) был установлен следующий факт, позволяющий редуцировать задачу (A) к задаче (B) (с точки зрения поиска асимптотически оптимального критерия). Приведем этот результат.

Пусть тест $\pi = \pi(X_1)$ является оптимальным в задаче (B) (в каком-нибудь разумном смысле, например, байесовский или минимаксный); поскольку при $t_n \sim 1$ задача (B) не зависит от n, то можно говорить о «неасимптотической» оптимальности. Факт, о котором упоминалось выше, состоит в том, что тест

$$T_n = \pi(\theta_n^*),$$

где θ_n^* — оценка максимального правдоподобия параметра θ, построенная по выборке $X_n = (x_1, \ldots, x_n)$ из генеральной совокупности $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta_1 \cup \Theta_2$, является оптимальным при $n \to \infty$ в задаче (A) в том же смысле.

В [29] этот факт было предложено назвать «статистический принцип инвариантности», поскольку в полной аналогии с центральной предельной теоремой (ЦПТ) «предельная задача» (B) не зависит от индивидуальных характеристик распределения наблюдений x_i, за исключением конечного числа «собирательных» параметров, определяющих среднее и матрицу вторых моментов семейства $\Phi = \{\Phi_{\theta,B}\}$ гауссовских распределений. Отличительной особенностью случая близких гипотез является тот факт, что тут можно пользоваться ЦПТ применительно к соответствующим статистикам в «области нормальных уклонений», что соответствует тому, что параметры критериев в задаче (A) (вероятности ε и δ ошибок 1-го и 2-го рода) сходятся при $n \to \infty$ к положительным пределам.

Возникает естественный вопрос: *сохранит ли свою силу упомянутая редукция, если эти вероятности ошибок сходятся к нулю*? В настоящем параграфе получено распространение статистического принципа инвариантности на область больших уклонений, когда в (4) семейство Φ имеет вид

$$\{\Phi_{t\gamma,E}, \ \gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}, \ t = t_n \to \infty.$$

Основные утверждения доказаны в предположении

$$\delta \leqslant t \leqslant n^{\frac{1}{6}(1-\delta)}$$

для $\delta > 0$, которое может быть выбрано сколь угодно малым. В этом случае задача (B), как и (A), начинает зависеть от n; при этом вероятности ошибок 1-го и 2-го рода для разумных критериев в этой задаче сходятся к нулю.

2. Формулировки основных теорем. Перечислим сначала условия, которым будет удовлетворять эксперимент

$$\mathrm{E}_n=(\Theta_1,\ \Theta_2,\ \mathscr{P},\ X_n).$$

I. $\Theta_i=\dfrac{t}{\sqrt{n}}\Gamma_i$, где Γ_1, Γ_2 — два замкнутых подмножества R^k таких, что

1) $|\Gamma_i|\leqslant c$, $i=1, 2$ $(|\Gamma|=\sup(|\gamma|:\ \gamma\in\Gamma))$;

2) существует вектор $e\in R^k$, $|e|=1$, такой, что для любых $\gamma_1\in\Gamma_1$, $\gamma_2\in\Gamma_2$

$$\langle\gamma_1, e\rangle\leqslant 0,\ \langle\gamma_2, e\rangle\geqslant\frac{1}{c}. \tag{5}$$

II. 1) $\mathbf{E}_0a'(0)^Ta'(\theta)=-\mathbf{E}_0a''(\theta)=E$;

2) $\mathbf{E}_0\exp\left\{\frac{1}{c}\left[|a(0)|+|a'(0)|+\|a''(0)\|\right]\right\}\leqslant c$;

3) $\sup\limits_{|\theta|\leqslant 1/c}\mathbf{E}_0e^{\frac{1}{c}\|a'''(\theta)\|}\leqslant c$.

Таким образом, в силу условия 1 множества Γ_1 и Γ_2 ограничены, и существуют две параллельные плоскости, расстояние между которыми не меньше, чем $1/c$, разделяющие множества Γ_1 и Γ_2. Это последнее условие представляется довольно ограничительным (во всяком случае далеким от необходимого). Мы вводим его потому, что оно сильно упрощает доказательства.

Условия II являются моментными условиями крамеровского типа на поле $a(\theta)=\ln p_\theta(x_1)$ и его производные; в силу последнего условия в II семейство распределений $\mathbf{P}_\theta$ задано не только для $\theta\in\Theta_1\cup\Theta_2$, но и в множестве $\overline{\Theta}=\{\theta:\ |\theta|\leqslant 1/c\}$, причем для любого θ из этого множества существует третья производная $a'''(\theta)$, удовлетворяющая условию Крамера.

Оценкой максимального правдоподобия θ_n^* в условиях I, II будем называть такой случайный вектор $\theta=\theta_n^*$, для которого

$$A_n(\theta_n^*)=\sup_{|\theta|\leqslant\frac{t}{c\sqrt{n}}}A_n(\theta).$$

Используем оптимальные классы, введенные в § 8. Некоторые моменты при этом нуждаются в пояснении. В задаче (B), которая определяется экспериментом (4), рассматривается выборка $X_1=(x_1)$ единичного объема; это не мешает использовать определения асимптотически полных минимальных классов тестов T и для задачи (B). В задаче (A) множества Θ_1, Θ_2 зависят от n (см. (2)), поэтому в рамках частично байесовского подхода априорные распределения $Q=(Q_1,\ Q_2)$ тоже зависят от n. Это создает определенные неудобства, которые можно избежать, считая, что для множества $\Theta_i=\dfrac{t}{\sqrt{n}}\Gamma_i$ распределение Q_i задано на множестве Γ_i и не зависит от n.

Напомним еще, что тестами байесовского типа мы называем тесты (чистые и рандомизированные), основанные на статистике

$$I^Q(A_n)=\ln\int\limits_{\Theta_2}e^{A_n(\theta)}Q_2(d\theta)-\ln\int\limits_{\Theta_1}e^{A_n(\theta)}Q_1(d\theta).$$

Нам удобно в дальнейшем тесты байесовского типа (см. (8.5)) обозначать:

в задаче (B) буквами

$$\pi^Q_{n,\alpha,p},\quad \pi^Q_{n,\alpha}\left(=\pi^Q_{n,\alpha,0}\right);$$

в задаче (A) буквами

$$T^Q_{n,\alpha,p},\quad T^Q_{n,\alpha}\left(=T^Q_{n,\alpha,0}\right).$$

В сформулированных ниже теоремах 1, 2 предполагаются выполненными следующие условия: для некоторых $c\geqslant 1$ и $\delta>0$ выполнены условия I, II и последовательность $t=t_n$, определяющая в (2) уклонения множеств Θ_1 и Θ_2, удовлетворяет соотношению

$$\delta\leqslant t\leqslant n^{\frac{1}{6}(1-\delta)},\quad n=1,2,\ldots$$

Теорема 1. *Пусть класс* $\mathscr{K}=\{\pi_n=\pi_n(X)\}$ *тестов байесовского типа в задаче* (B) *является* $(Q,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-АПМ (*или* $(Q,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-РАПМ), *классом, где последовательности* $\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+$ *удовлетворяют неравенствам*

$$e^{-t^2c}\leqslant\varepsilon_n^-\leqslant\varepsilon_n^+\leqslant 1-1/c.$$

Тогда класс $\mathscr{K}^*=\{T_n\equiv\pi_n(\theta_n^*),\ \pi_n\in\mathscr{K}\}$ *тестов в задаче* (A) *является* $(Q,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-АПМ (*или* $(Q,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-РАМП)*классом. При этом*

$$\varepsilon^Q(T_n)\sim\varepsilon^Q(\pi_n),\quad \delta^Q(T_n)\sim\delta^Q(\pi_n) \tag{6}$$

для любого теста $\pi_n\in\mathscr{K}\cap\mathscr{K}^Q(\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$, $T_n=\pi_n(\theta_n^*)$.

Теорема 2. *Пусть класс* $\mathscr{K}=\{\pi_n=\pi_n(X)\}$ *тестов байесовского типа в задаче* (B) *является* $(*,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-АПМ (*или* $(*,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-РАПМ, *или* $(p,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-АПМ) *классом, где последовательности* $\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+$ *удовлетворяют неравенствам*

$$e^{-t^2c}\leqslant\varepsilon_n^-\leqslant\varepsilon_n^+\leqslant 1-1/c.$$

Тогда класс $\mathscr{K}^*=\{T_n\equiv\pi_n(\theta_n^*),\ \pi_n\in\mathscr{K}\}$ *тестов в задаче* (A) *является* $(*,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-АПМ (*или* $(*,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-РАМП, *или* $(p,\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$-АПМ) *классом.*

При этом

$$\varepsilon^*(T_n)\sim\varepsilon^*(\pi_n),\quad \delta^*(T_n)\sim\delta^*(\pi_n) \tag{7}$$

для любого теста $\pi_n\in\mathscr{K}\cap\mathscr{K}^*(\varepsilon_n^-,\varepsilon_n^+)$, $T_n=\pi_n(\theta_n^*)$.

Замечания. 1. В теоремах 1, 2 все элементы эксперимента E_n (например, множества Γ_1 и Γ_2) могут зависеть от n (нужно только, чтобы условия I и II выполнялись равномерно по n); кроме того, в теореме 1 можно выбирать пары априорных распределений $Q=(Q_1,Q_2)$ зависящими от n.

2. Если в условии II вместо последнего соотношения взять более жесткое

$$\mathbf{E}_0\exp\left(\frac{1}{c}\sup_{|\theta|\leqslant 1/c}\|Q'''(\theta)\|\right)\leqslant c,$$

то можно немного расширить диапазон изменения t:

$$\delta\leqslant t\leqslant\frac{n^{1/6}}{N_n}, \tag{8}$$

где N_n — произвольная последовательность, стремящаяся к ∞.

3. Правая граница $o(n^{1/6})$ в (8) является неулучшаемой в общем случае для статистического принципа инвариантности. Это следует, например, из того, что в области больших уклонений при $t\sim n^{1/6}$ для случайного вектора

$$\frac{A_n'(\theta)}{\sqrt{n}}.$$

(который хорошо приближает оценку максимального правдоподобия θ_n^*), начинает играть роль следующий член ряда Крамера.

3. Следствия из статистического принципа инвариантности. В настоящем разделе для некоторых частных классов множеств Θ_1 и Θ_2 в задаче (A) приведем следствия из теоремы 1. Предположим, что множества Γ_1 и Γ_2 удовлетворяют условию III. $C_1(c)$. В нашем случае (когда в задаче (B) семейство $\Phi=\{\Phi_{t\gamma,E},\ \gamma\in\Gamma_1\cup\Gamma_2\}$ состоит из гауссовских распределений с разными средними) этому условию можно придать более простую форму

$A_1(c)$. 1. Существует единственная пара $(\widehat{\gamma_1},\ \widehat{\gamma_2})\in\Gamma_1\times\Gamma_2$ ближайших точек в множествах Γ_1 и Γ_2 (относительно евклидовой нормы в R^k):

$$R\equiv|\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2|=\min_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2}|\gamma_1-\gamma_2|.$$

2. Для векторов $e_1=\dfrac{\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2}{|\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2|}$, $e_2=-e_1$ и двух квадратных симметричных матриц V_1 и V_2 выполнены соотношения

а) $-c\Pi_i\leqslant\Pi_iV_i\Pi_i\leqslant\Pi_i\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{c}\right),\ i=1,\ 2,$

где $\Pi_i\equiv E-e_i^{\mathrm{T}}e_i$;

б) $\Gamma_i\in\mathscr{L}(\widehat{\gamma}_i,\ e_i,\ V_i,\ c),\ i=1,\ 2,$

где классы $\mathscr{L}(\gamma,\ e,\ V,\ c)$ определены в § 10.

Поясним смысл условий I, II. Если рассмотреть сферу $S_R(\widehat{\gamma}_2)$ радиуса $R=|\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2|$ с центром в точке $\widehat{\gamma}_2$, то из условий 1, 2а) следует, что множество Γ_1 касается сферы $S_R(\widehat{\gamma}_2)$ в единственной точке $\widehat{\gamma}_1$ и это касание является «строгим» (т. е. матрица вторых производных $\Pi_1V_1\Pi_1$ границы множества Γ_1 строго меньше матрицы вторых производных $\Pi_1\dfrac{1}{R}$ сферы $S_R(\widehat{\gamma}_2)$). Аналогичным образом касаются сфера $S_R(\widehat{\gamma}_1)$ и множество Γ_2. Принадлежность классу $\mathscr{L}(\widehat{\gamma}_1,\ e_1,\ V_1,\ c)$ множества Γ_1 означает, что граница L_1 множества Γ_1 в окрестности точки $\widehat{\gamma}_1$ ведет себя как граница параболоида

$$\widehat{\gamma}_1+\Omega(e_1,\ V_1)=\widehat{\gamma}_1+\left\{\gamma:\ \gamma e_1^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}\gamma\Pi_1V_1\Pi_1\gamma^{\mathrm{T}}=0\right\}.$$

Условие $A_1(c)$ облегчает отыскание в задаче (B) асимптотического поведения средних и максимальных вероятностей ошибок тестов $T^*_{n,\alpha}$ и $T^G_{n,\alpha}$, что, в свою очередь, позволяет доказать асимптотическую оптимальность классов (см. (9.2), (9.3))

$$\mathscr{K}^{(1)}=(T^*_{n,\alpha},\ \alpha\in R^1\},\quad \mathscr{K}^{(2)}(G)=\{T^G_{n,\alpha},\ \alpha\in R^1\}$$

в задаче (A).

Теорема 3. *Пусть* $c\in[1,\ \infty)$, $N_n\to\infty$ *и выполнены все условия теоремы* 1 *и дополнительно условие* $A_1(c)$

I. *Пусть*

$$\varepsilon_n^-=\frac{N_ne^{-\frac{t^2R^2}{2}}}{t^{k+2}},\quad \varepsilon_n^+=\frac{1}{N_n}.$$

Тогда класс $\mathscr{K}^{(1)}$ (*класс* $\mathscr{K}^{(2)}(G)$) *является* $(Q,\ \varepsilon_n^-,\ \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом.*

II. *Пусть* $\alpha\in[-R^2/2+N_n/t,\ R^2/2-N_n/t]$, *тогда*

$$\varepsilon^Q\left(T^*_{n,\alpha\frac{t^2}{n}}\right)\sim\frac{\chi_1(\alpha)\,e^{-t^2\frac{\left(+\alpha-\frac{1}{2}R^2\right)^2}{2R^2}}}{t^{k+2}\left(\dfrac{\alpha}{R^2}+\dfrac{1}{2}\right)R}\,q_1(\widehat{\gamma}_1).$$

$$\delta^Q\left(T^*_{n,\alpha\frac{t^2}{n}}\right) \sim \frac{\chi_2(\alpha)\, e^{-t^2\frac{\left(\alpha-\frac{1}{2}R^2\right)^2}{2R^2}}}{t^{k+2}\left(-\frac{\alpha}{R^2}+\frac{1}{2}\right)R}\, q_2(\widehat{\gamma}_2);$$

пусть $\alpha' = \alpha + \frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{g_1(\widehat{\gamma}_1)\,|K_2'|^{1/2}}{g_2(\widehat{\gamma}_2)\,|K_1'|^{1/2}}\right)$, *тогда*

$$\varepsilon^Q\left(T^G_{n,\alpha\frac{t^2}{n}}\right) \sim \frac{\chi_1(\alpha)\, e^{-t^2\frac{\left(\alpha'+\frac{1}{2}R^2\right)^2}{2R^2}}}{t^{k+2}\left(\frac{\alpha}{R^2}+\frac{1}{2}\right)R}\, q_1(\widehat{\gamma}_1),$$

$$\delta^Q\left(T^G_{n,\alpha\frac{t^2}{n}}\right) \sim \frac{\chi_2(\alpha)\, e^{-t^2\frac{\left(\alpha'-\frac{1}{2}R^2\right)^2}{2R^2}}}{t^{k+2}\left(-\frac{\alpha}{R^2}+\frac{1}{2}\right)R}\, q_2(\widehat{\gamma}_2),$$

где функции χ_1, χ_2 *определяются точно так же, как в теореме* 11.3.

III. *Пусть*

$$\varepsilon_n^- = N_n\frac{e^{-\frac{t^2R^2}{2}}}{t}, \quad \varepsilon_n^+ = \varepsilon^{-\frac{t^2\delta}{2}}, \quad 0<\delta<R^2;$$

тогда класс $\mathcal{K}^{(1)}$ (*класс* $\mathcal{K}^{(2)}(G)$) *является* $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-РАПМ *классом.*

Теорема 4. *Пусть* $c \in [1, \infty)$, $N_n \to \infty$, *и выполнены все условия теоремы 2 и дополнительно условие* $A_1(c)$:

I. *Пусть*

$$\varepsilon_n^- = \frac{N_n e^{-\frac{t^2R^2}{2}}}{t}, \quad \varepsilon_n^+ = \frac{1}{N_n}.$$

Тогда класс $\mathcal{K}_n^{(1)}$ (*класс* $\mathcal{K}_n^{(2)}(G)$) *является* $(p, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ *классом.*

II. *Пусть* $\alpha \in [-R^2/2 + N_n/t,\ R^2/2 - N_n/t]$, *тогда*

$$\varepsilon^*\left(T^*_{n,\alpha\frac{t^2}{n}}\right) \sim \frac{\chi_1(\alpha)\, e^{-t^2\frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}R^2\right)^2}{2R^2}}}{t\left(\frac{\alpha}{R^2}+\frac{1}{2}\right)R},$$

$$\delta^*\left(T^*_{n,\alpha\frac{t^2}{n}}\right) \sim \frac{\chi_2(\alpha)\, e^{-t^2\frac{\left(\alpha-\frac{1}{2}R^2\right)^2}{2R^2}}}{t\left(-\frac{\alpha}{R^2}+\frac{1}{2}\right)R};$$

пусть $\alpha' = \alpha + \frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{g_1(\widehat{\gamma}_1)\,|K_2'|^{1/2}}{g_2(\widehat{\gamma}_2)\,|K_1'|^{1/2}}\right)$, тогда

$$\varepsilon^*\left(T^G_{n,\alpha\frac{t^2}{n}}\right) \sim \frac{\chi_1(\alpha)\, e^{-t^2\frac{\left(\alpha'+\frac{1}{2}R^2\right)^2}{2R^2}}}{t\left(\frac{\alpha}{R^2}+\frac{1}{2}\right)R},$$

$$\delta^*\left(T^G_{n,\alpha\frac{t^2}{n}}\right) \sim \frac{\chi_2(\alpha)\, e^{-t^2\frac{\left(\alpha'-\frac{1}{2}R^2\right)^2}{2R^2}}}{t\left(-\frac{\alpha}{R^2}+\frac{1}{2}\right)R},$$

где функции χ_1, χ_2 определяются точно так же, как в теореме 11.4.

Замечание. Из приведенных выше формул видно, что в соответствии со сказанным асимптотическое поведение вероятностей ошибок ε, δ (средних или максимальных) описывается теми же соотношениями, что и для гауссовского семейства. При этом остается справедливым характеристическое для гауссовских семейств свойство поведения вероятностей ошибок (см. введение и § 13 ниже)

$$\sqrt{-\ln\varepsilon}+\sqrt{-\ln\delta}\sim\frac{Rt}{\sqrt{2}}.$$

Как следует из теорем 1, 2 (см. доказательства этих теорем), задачи (A) и (B) в известном смысле эквивалентны с точки зрения рассматриваемой проблемы различения двух сложных гипотез H_1 и H_2. Рассмотрим еще одну задачу, которая позволяет сделать редукцию утверждений теорем 3, 4 к результатам гл. III (см. теоремы 11.3; 11.4). Эта редукция позволит понять вид асимптотических представлений для вероятностей ошибок в теоремах 3, 4.

Рассмотрим наряду с задачами (A) и (B) задачу ($\tilde{A}_\Phi$), которая определяется экспериментом

$$\tilde{E}_n^\Phi=(\Theta_1,\,\Theta_2,\,\Phi,\,X_n),$$

где множества Θ_1, Θ_2 — те же, что и в задаче (A), а семейство $\Phi=\{\Phi_{\theta,E},\ \theta\in\Theta_1\cup\Theta_2\}$ состоит из гауссовских распределений в R^k с параметрами (θ, E). Поскольку в задаче ($\tilde{A}_\Phi$) достаточной статистикой для параметра θ является выборочное среднее, то очевидно, что задачи ($\tilde{A}_\Phi$) и (B) эквивалентны. С этой точки зрения задачам ($\tilde{A}_\Phi$) и (B) эквивалентна задача (A_Φ), которая определяется экспериментом

$$E_m=(\Gamma_1,\,\Gamma_2,\,\Phi,\,X_m),\quad \text{где}\quad m=t_n^2$$

(для упрощения рассуждений будем считать, что число t_n^2 является целым для $n=1,\,2,\,\ldots$). Остается заметить, что задача (A_Φ) рассмотрена в § 11; в частности, в теоремах 11.3; 11.4 получены условия, когда классы $\mathcal{K}^{(1)}$ и $\mathcal{K}^{(2)}(G)$ асимптотически оптимальны (в том или ином смысле) и приведены асимптотические представления для вероятностей ошибок тестов $T^*_{m,\alpha}$ и $T^G_{m,\alpha}$. В частности, правые части асимптотических представлений из теорем 3, 4 в точности соответствуют правым частям из теорем 11.3; 11.4.

4. **Доказательство теорем 1,** 2 основано на ряде лемм. В леммах 1—3, которые мы сформулируем ниже, а докажем несколько позже, предполагаются выполненными условия теорем 1, 2.

Лемма 1. *Для любого* $\varepsilon\in(0,\,1)$ *найдется пара априорных распределений* $\bar{Q}=(\bar{Q}_1,\,\bar{Q}_2)$, *числа* $\alpha\in R^1$ *и* $p\in[0,\,1]$ *таких, что тест* $\bar{\pi}=\pi^{\bar{Q}}_{\alpha,p}$ *в задаче* (B) *будет удовлетворять следующим соотношениям*:

1) $\varepsilon^*(\bar{\pi})=\varepsilon^{\bar{Q}}(\bar{\pi})=\varepsilon$, $\delta^*(\bar{\pi})=\delta^{\bar{Q}}(\bar{\pi})$;

2) *для любого теста* $\pi'\in\mathcal{K}^{\bar{Q}}(0,\,\varepsilon)$

$$\delta^*(\bar{\pi})=\delta^{\bar{Q}}(\bar{\pi})\leqslant\delta^{\bar{Q}}(\pi')\leqslant\delta^*(\pi'). \tag{9}$$

Легко видеть, что в силу очевидного включения

$$\mathcal{K}^*(0,\,\varepsilon)\subseteq\mathcal{K}^{\bar{Q}}(0,\,\varepsilon)$$

соотношения (9) справедливы для любого теста $\pi'\in\mathcal{K}^*(0,\,\varepsilon)$.

Таким образом, из леммы 1 получаем важное следствие: в задаче (B) для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется тест $\bar{\pi} = \pi_{\alpha,p}^{\bar{Q}}$ байесовского типа, минимаксный в классе $\mathscr{K}^*(0, \varepsilon)$, т. е. такой, для которого выполнены соотношения 1), 2). Отметим еще, что лемма 1, в которой рассматривается частично минимаксный подход, не является следствием первой и второй фундаментальных теорем теории статистических игр (см., например, [2]), где рассматривается полный минимаксный подход.

Лемма 2. *Пусть последовательность тестов $\pi_n = \pi_n(X_1)$ байесовского типа в задаче (B) удовлетворяет условию*

$$\varepsilon^*(\pi_n) \in \left[e^{-t^2 c},\ 1\right]$$

для некоторого $c \geqslant 1$. Тогда для теста $T_n \equiv \pi_n(\theta_n^*)$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in\Theta_1} \left| \frac{\varepsilon_\theta(T_n)}{\varepsilon_\theta(\pi_n)} - 1 \right| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in\Theta_2} \left| \frac{\delta_\theta(T_n)}{\delta_\theta(T_n)} - 1 \right| = 0.$$

Лемма 3. *Пусть $\varepsilon_n \in \left[e^{-t^2 c},\ 1\right]$, Q_n — произвольная пара априорных распределений, $T_n = T_{n,\alpha,p}^Q$ — тест байесовского типа в задаче (A), для которого выполняется*

$$\varepsilon^{Q_n}(T_n) = \varepsilon_n.$$

Пусть $\pi_n = \pi_{n,\alpha',p'}^Q$ — тест байесовского типа в задаче (B), для которого выполняется

$$\varepsilon^{Q_n}(\pi_n) = \varepsilon_n.$$

Тогда справедливо

$$\delta^{Q_n}(T_n) \sim \delta^{Q_n}(\pi_n).$$

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала, что класс $\mathscr{K}^*$ удовлетворяет соотношению а) определения 8.1. Пусть $T_n' \in \mathscr{K}^Q(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$, $\varepsilon^Q(T_n') = \varepsilon_n$. Для этого ε_n найдется тест $\tilde{T}_n$ байесовского типа в задаче (A) такой, что

$$\begin{aligned} &\varepsilon^Q(\tilde{T}_n) = \varepsilon_n = \varepsilon^Q(T_n'), \\ &\delta^Q(\tilde{T}_n) \leqslant \delta^Q(T_n'). \end{aligned} \tag{10}$$

В силу леммы 3 найдется тест $\tilde{\pi}_n$ байесовского типа в задаче (B) такой, что

$$\varepsilon_n = \varepsilon^Q(\tilde{T}_n) = \varepsilon^Q(\tilde{\pi}_n), \quad \delta^Q(\tilde{T}_n) \sim \delta^Q(\tilde{\pi}_n). \tag{11}$$

Поскольку класс $\mathscr{K} = \{\pi_n\}$ является $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классом, найдется тест $\pi_n \in \mathscr{K}$ такой, что

$$\varepsilon^Q(\pi_n) \leqslant \varepsilon^Q(\tilde{\pi}_n), \quad \delta^Q(\pi_n) \leqslant \delta^Q(\tilde{\pi}_n). \tag{12}$$

В силу леммы 2 тест $T_n = \pi_n(\theta_n^*)$ из класса $\mathscr{K}^*$ удовлетворяет соотношениям

$$\varepsilon^Q(T_n) \sim \varepsilon^Q(\pi_n), \quad \delta^Q(T_n) \sim \delta^Q(\pi_n). \tag{13}$$

Поэтому в силу (10)—(13) тест $T_n \in \mathscr{K}^*$ удовлетворяет соотношениям

$$\varepsilon^Q(T_n) \lesssim \varepsilon^Q(T_n'), \quad \delta^Q(T_n) \lesssim \delta^Q(T_n').$$

Это есть условие а) в определении 8.1.

Проверка условия в) в определении 8.1 осуществляется аналогичным образом. Пусть тест $T_n \in \mathscr{K}^* \cap \mathscr{K}^Q(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$, T_n' — произвольный тест в задаче (A), и выполнено неравенство

$$\varepsilon^Q(T_n) \geqslant \varepsilon^Q(T_n'). \tag{14}$$

Выберем тест $\widetilde{T}_n$ байесовского типа в задаче (A) такой, что

$$\varepsilon^Q(\widetilde{T}_n) = \varepsilon^Q(T_n'), \quad \delta^Q(\widetilde{T}_n) \leqslant \delta^Q(T_n'). \tag{15}$$

В силу леммы 3 можно выбрать тест $\widetilde{\pi}_n$ байесовского типа в задаче (B) такой, что

$$\varepsilon^Q(\widetilde{T}_n) = \varepsilon^Q(\widetilde{\pi}_n), \; \delta^Q(\widetilde{T}_n) \sim \delta^Q(\widetilde{\pi}_n). \tag{16}$$

Рассмотрим далее тест $\pi_n \in \mathscr{K}$, отвечающий тесту T_n из (14): $T_n = \pi_n(\theta_n^*)$. В силу леммы 2

$$\varepsilon^Q(\pi_n) \sim \varepsilon^Q(T_n), \; \delta^Q(\pi_n) \sim \delta^Q(T_n), \tag{17}$$

поэтому

$$\varepsilon^Q(\pi_n) \geqslant \varepsilon^Q(\widetilde{\pi}_n). \tag{18}$$

Поскольку тест π_n принадлежит $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классу $\mathscr{K}$, из (18) следует, что

$$\delta^Q(\pi_n) \leqslant \delta^Q(\widetilde{\pi}_n).$$

Из последнего неравенства в силу (15)—(18) получаем, что

$$\delta^Q(T_n) \leqslant \delta^Q(T_n'),$$

т. е. условие в) в определении 8.1 доказано. Таким образом, мы доказали часть теоремы 1, относящуюся в АПМ классам. Поскольку часть теоремы 1, относящаяся к РАПМ классам доказывается аналогичным образом, а соотношения (6) следуют из леммы 2, теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть тест $T_n' \in \mathscr{K}^*(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$, $\varepsilon_n = \varepsilon^*(T_n')$. В силу леммы 1 для этого ε_n найдется пара $(\bar{Q}, \bar{\pi})$ такая, что

$$\varepsilon_n = \varepsilon^*(\bar{\pi}_n) = \varepsilon^{\bar{Q}}(\bar{\pi}),$$

$$\delta^{\bar{Q}}(\bar{\pi}_n) = \delta^*(\bar{\pi}_n),$$

и для любого теста $\pi_n' \in \mathscr{K}^*(0, \varepsilon_n)$ выполняется

$$\delta^*(\pi_n') \geqslant \delta^{\bar{Q}}(\pi_n') \geqslant \delta^*(\bar{\pi}_n).$$

Обозначим

$$\varepsilon_n' \equiv \varepsilon^{\bar{Q}}(T_n') \leqslant \varepsilon^*(T_n') \equiv \varepsilon_n.$$

Для этого ε_n' по лемме Неймана — Пирсона построим тест $\widetilde{T}_n$ байесовского типа в задаче (A), такой, что

$$\varepsilon^{\bar{Q}}(\widetilde{T}_n) = \varepsilon_n',$$

и для любого теста $T_n'' \in \mathscr{K}^{\bar{Q}}(0, \varepsilon_n')$ выполняется

$$\delta^{\bar{Q}}(\widetilde{T}_n) \leqslant \delta^{\bar{Q}}(T_n'').$$

Ошибки тестов T_n' и $\widetilde{T}_n$ соотносятся следующим образом:

$$\varepsilon^*(T_n') \geqslant \varepsilon^{\bar{Q}}(T_n') = \varepsilon^{\bar{Q}}(\widetilde{T}_n),$$

$$\delta^*(T_n') \geqslant \delta^{\bar{Q}}(T_n') \geqslant \delta^{\bar{Q}}(\widetilde{T}_n).$$

В силу леммы 3 можно построить тест π_n байесовского типа в задаче

(B) такой, что

$$\varepsilon^{\bar{Q}}(\tilde{\pi}_n) = \varepsilon^{\bar{Q}}(\tilde{T}_n) = \varepsilon'_n \leqslant \varepsilon_n,$$
$$\delta^{\bar{Q}}(\tilde{\pi}_n) \sim \delta^{\bar{Q}}(T_n),$$

поэтому

$$\varepsilon^*(T'_n) \geqslant \varepsilon^{\bar{Q}}(\tilde{\pi}_n),$$
$$\delta^*(T'_n) \geqslant \delta^{\bar{Q}}(\tilde{\pi}_n).$$

Поскольку

$$\varepsilon^{\bar{Q}}(\tilde{\pi}_n) \leqslant \varepsilon^{\bar{Q}}(\bar{\pi}_n),$$

выполняется

$$\delta^{\bar{Q}}(\tilde{\pi}_n) \geqslant \delta^{\bar{Q}}(\bar{\pi}_n) = \delta^*(\bar{\pi}_n).$$

Поэтому справедливо

$$\varepsilon^*(T'_n) = \varepsilon^*(\bar{\pi}_n), \quad \delta^*(T'_n) \leqslant \delta^*(\bar{\pi}_n). \tag{19}$$

По условию теоремы 2 класс $\mathscr{K} = \{\pi_n\}$ является $(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классом, поэтому для теста $\bar{\pi}_n$, который принадлежит $\mathscr{K}^*(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$, найдется тест $\pi_n \in \mathscr{K}$, такой, что

$$\varepsilon^*(\bar{\pi}_n) \gtrsim \varepsilon^*(\pi_n), \quad \delta^*(\bar{\pi}_n) \gtrsim \delta^*(\pi_n).$$

В силу леммы 2 тест $T_n = \pi_n(\theta_n^*)$, отвечающий тесту π_n и лежащий в классе $\mathscr{K}^*$, удовлетворяет этому же условию:

$$\varepsilon^*(\bar{\pi}_n) \gtrsim \varepsilon^*(T_n), \quad \delta^*(\bar{\pi}_n) \gtrsim \delta^*(T_n).$$

Последнее вместе с (19) позволяет доказать условие а) в определении 8.2:

$$\varepsilon^*(T'_n) \gtrsim \varepsilon^*(T_n), \quad \delta^*(T'_n) \gtrsim \delta^*(T_n).$$

Условие в) в определении 8.2 проверяется совершенно аналогично. Поэтому часть теоремы 2, относящаяся к $(*, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классам, доказана. Соотношения (7) следуют из леммы 2. Остальные части теоремы 2 доказываются аналогично. Теорема 2 доказана.

5. Доказательство леммы 1. Тест $\bar{\pi}$ является байесовским тестом в классе $\mathscr{K}^{\bar{Q}}(0, \varepsilon)$, т. е. для любого $\pi' \in \mathscr{K}^{\bar{Q}}(0, \varepsilon)$ выполняется соотношение 2).

Таким образом, нам осталось доказать соотношение 1) леммы 1.

Обозначим для $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2 \equiv \bar{\Theta}$

$$W(\pi, \bar{\theta}) = W_q(\pi, \bar{\theta}) \equiv q\varepsilon_{\theta_1}(\pi) + (1-q)\,\delta_{\theta_2}(\pi),$$

и для пары априорных распределений $Q = (Q_1, Q_2)$ обозначим

$$W(\pi, Q) \equiv \int_{\Theta_1}\int_{\Theta_2} W(\pi, \bar{\theta})\, Q_1(d\theta_1)\, Q_2(d\theta_2) = q\varepsilon^Q(\pi) + (1-q)\,\delta^Q(\pi).$$

Для $q \in [0, 1]$ рассмотрим класс $\mathscr{B}(q)$ тестов $\pi = \pi^Q_{\alpha,0}$ байесовского типа таких, что $\alpha = \ln(q/(1-q))$; хорошо известно (см., например, [1]), что для любой пары априорных распределений $Q = (Q_1, Q_2)$ справедливо

$$\inf_{\pi} W(\pi, Q) = W(\pi^Q_{\alpha,p}, Q),$$

где $\alpha = \ln(q/(1-q))$, $p \in [0, 1]$ — произвольно. Поэтому

$$\inf_{\pi} W(\pi, Q) = \inf_{\pi \in \mathscr{B}(q)} W(\pi, Q).$$

Обозначим $\overline{\mathscr{B}}(q)$ выпуклую оболочку класса $\mathscr{B}(q)$:

$$\overline{\mathscr{B}}(q)=\left\{\pi=\sum_{i=1}^{N}r_i\pi_i,\ \pi_i\in\mathscr{B}(q),\ r_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{N}r_i=1\right\}.$$

Обозначим $\mathscr{N}$ класс пар вероятностных мер $Q=(Q_1,\ Q_2)$ на множествах Θ_1 и Θ_2 соответственно. В множестве $\mathscr{N}$ рассмотрим топологию слабой сходимости и через $\mathscr{F}=\mathscr{F}_{\mathscr{N}}$ обозначим σ — алгебру борелевских подмножеств $\mathscr{N}$. Пусть $\mu=\mu(A)$ есть вероятностная мера на $\mathscr{N}$; класс таких мер обозначим $\mathscr{M}$. Для $\mu\in\mathscr{M}$ рассмотрим тест

$$\pi=\int_{\mathscr{N}}\pi_{\alpha,0}^{Q}\mu(dQ), \tag{20}$$

где $\alpha=\alpha(q)=\ln(q/(1-q))$. В частном случае, когда $\mu=\sum_{i=1}^{m}r_i\mu_{Q_i}$, где μ_{Q_i} — мера, сосредоточенная в «точке» Q_i, тест π вида (2θ) принадлежит классу $\overline{\mathscr{B}}(q)$.

Докажем, что для любого $q\in(\theta,\ 1)$ найдется тест $\bar{\pi}$ вида (20) и пара априорных распределений $\bar{Q}\in\mathscr{N}$ таких, что

$$\begin{aligned} &1)\ W^*\equiv W^*(q)\equiv\inf_{\pi\in\overline{\mathscr{B}}(q)}\sup_{Q}W(\pi,Q)=\inf_{\pi\in\overline{\mathscr{B}}(q)}W(\pi,\bar{Q})=W(\bar{\pi},\bar{Q}),\\ &2)\ W_*\equiv W_*(q)\equiv\sup_{Q}\inf_{\pi\in\overline{\mathscr{B}}(q)}W(\pi,Q)=\sup_{Q}W(\bar{\pi},Q)=W(\bar{\pi},\bar{Q}). \end{aligned} \tag{21}$$

Заметим сначала, что для любых π, Q, $\pi\in\overline{\mathscr{B}}(q)$ выполняется

$$\inf_{\pi\in\overline{\mathscr{B}}(q)}W(\pi,Q)\leqslant\sup_{Q}W(\pi,Q),$$

поэтому справедливо

$$W_*\leqslant W^*. \tag{22}$$

Докажем теперь, следуя [2], что существует пара априорных распределений $\bar{Q}=(\bar{Q}_1,\ \bar{Q}_2)$ такая, что

$$\inf_{\pi\in\overline{\mathscr{B}}(q)}W(\pi,\bar{Q})\geqslant W^*. \tag{23}$$

Для этого рассмотрим пространство $C(\bar{\Theta})$ непрерывных функций $v(\bar{\theta})$, отображающих $\bar{\Theta}\equiv\Theta_1\times\Theta_2$ в R^1. Обозначим $V\subseteq C(\bar{\Theta})$ множество $v\in\in C(\bar{\Theta})$ вида

$$v(\bar{\theta})=W(\pi,\bar{\theta}),\ \pi\in\overline{\mathscr{B}}(q).$$

Очевидно, что V есть выпуклое подмножество пространства $C(\bar{\Theta})$.

Для любого теста π справедливо

$$\sup_{Q}W(\pi,Q)=\sup_{\bar{\theta}\in\bar{\Theta}}W(\pi,\bar{\theta})=\sup_{\bar{\theta}\in\bar{\Theta}}v(\bar{\theta}).$$

Поэтому

$$W^*\equiv\inf_{\pi\in\overline{\mathscr{B}}(q)}\sup_{Q}W(\pi,Q)=\inf_{v\in V}\sup_{\bar{\theta}\in\bar{\Theta}}v(\bar{\theta}). \tag{24}$$

Рассмотрим выпуклое множество

$$U=\{v\in C(\bar{\Theta}):\ \sup_{\bar{\theta}\in\bar{\Theta}}v(\bar{\theta})<W^*\}.$$

Из (24) следует, что выпуклые множества U и V не пересекаются. Поэтому в силу теоремы Хана — Банаха (см., например, [30], с 171, 206—208) существует линейный функционал $L(v)$, такой, что

$$\sup_{v \in U} L(v) \leqslant W^*, \quad \inf_{v \in V} L(v) \geqslant W^*. \tag{25}$$

Этот функционал с необходимостью является неотрицательным, т. е. для любой неотрицательной функции $v(\bar{\theta}) \in C(\bar{\Theta})$ он принимает неотрицательные значения $L(v) \geqslant 0$. Действительно, допустив существование неотрицательного элемента $v_0 \in C(\bar{\Theta})$, для которого $L(v_0) < 0$, мы получим, что при любом $s > 0$ выполняется $-sv_0 \in U$, и при достаточно больших s выполняется $L(-sv_0) > W^*$, что противоречит (25).

Неотрицательный функционал L в силу теоремы Рисса (см., например, [30], с. 240) имеет вид

$$L(v) = \int_{\bar{\Theta}} v(\bar{\theta})\, \lambda(d\bar{\theta}),$$

где $\lambda(A)$ — конечная мера на σ-алгебре подмножеств $\bar{\Theta}$. Так как $W^* \geqslant \geqslant \sup_{v \in U} L(v) = W^* \lambda(\bar{\Theta})$, то справедлива оценка

$$\lambda(\bar{\Theta}) \leqslant 1.$$

Полагая

$$\bar{Q}_1(A_1) = \frac{\lambda(A_1 \times \Theta_2)}{\lambda(\bar{\Theta})}, \quad A_1 \subseteq \Theta_1,$$

$$\bar{Q}_2(A_2) = \frac{\lambda(\Theta_1 \times A_2)}{\lambda(\bar{\Theta})}, \quad A_2 \subseteq \Theta_2,$$

получаем пару априорных мер $\bar{Q} = (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$. Для $v \in V$ выполняется

$$L(v) = \int_{\bar{\Theta}} W(\pi, \bar{\theta})\, \lambda(d\bar{\theta}) = \lambda(\bar{\Theta})\, W(\pi, \bar{\Theta}),$$

$$\inf_{\pi \in \bar{\mathscr{B}}(q)} W(\pi, \bar{Q}) = \frac{1}{\lambda(\bar{\Theta})} \inf_{v \in V} L(v) \geqslant \frac{W^*}{\lambda(\bar{\Theta})} \geqslant W^*.$$

Таким образом, соотношение (23) доказано. Из (23) и (22) следует, что

$$W^* = W_*. \tag{26}$$

При этом доказано, что

$$W^* = \inf_{\pi \in \bar{\mathscr{B}}(q)} W(\pi, \bar{Q}). \tag{27}$$

Докажем теперь, что существует мера $\mu = \mu(dQ) \in \mathscr{M}$ такая, что тест

$$\bar{\pi} = \int \pi^{Q}_{\alpha,0} \mu(dQ), \tag{28}$$

$\alpha = \ln(q/(1-q))$, удовлетворяет неравенству

$$\sup_{Q} W(\bar{\pi}, Q) \leqslant W^*. \tag{29}$$

Заметим, что для любого теста π справедливо

$$\sup_{Q} W(\pi, Q) = \sup_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}} W(\pi, \bar{\theta}),$$

поэтому (29) эквивалентно

$$\sup_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}} W(\bar{\pi}, \bar{\theta}) \leqslant W^*.$$

По определению W^* для любого $n = 1, 2, \ldots$, существует тест $\pi_n \in \bar{\mathscr{B}}(q)$

такой, что

$$\sup_{\bar\theta\in\bar\Theta} W(\pi_n, \bar\theta) \leqslant W^* + \frac{1}{n}. \tag{30}$$

Как мы уже отмечали, тест $\pi_n \in \bar{\mathscr{B}}(q)$ имеет вид (28) с некоторой мерой $\mu_n \in \mathscr{M}$.

Пусть $F(x)$, $G(x)$ — две функции распределения, отвечающие случайным векторам в R^k. Рассмотрим метрику Леви

$$l(F, G) = \inf\{h > 0:\ F(x - eh) - h \leqslant G(x) \leqslant F(x + eh) + h \quad \forall x \in R^k\},$$

где $e = (1, \ldots, 1) \in R^k$. С помощью этой метрики введем метрику в множестве $\mathscr{N}$ пар априорных распределений $Q = (Q_1, Q_2)$, положив

$$\rho(\bar Q, Q) = l\left(F_{\bar Q_1}, F_{Q_1}\right) + l\left(F_{\bar Q_2}, F_{Q_2}\right), \tag{31}$$

где $F_Q = F_Q(x)$ — функция распределения, отвечающая вероятностной мере Q. Поскольку множества Θ_1 и Θ_2 являются компактами в R^k, множество мер $\mathscr{N}$ является компактом в смысле топологии слабой сходимости мер и (поскольку метрика ρ определяет топологию слабой сходимости) стало быть, множество $\mathscr{N}$ метрически компактно. Поэтому любая последовательность (μ_n) вероятностных мер, заданных на σ-алгебре $\mathscr{F}$ борелевских множеств компакта $\mathscr{N}$ (по теореме Прохорова (см. [31])), содержит сходящуюся подпоследовательность.

Обратимся к тестам π_n в соотношении (30). Не ограничивая общности, можно считать, что меры $\mu_n \in \mathscr{M}$, отвечающие тесту π_n, сходятся слабо к мере $\mu_0 \in \mathscr{M}$. Тест, отвечающий мере μ_0, обозначим

$$\bar\pi = \int \pi^Q_{\alpha,0}\mu_0(dQ).$$

В наших условиях имеет место сходимость

$$W(\pi_n, \bar\theta) \to W(\bar\pi, \bar\theta),$$

равномерная по $\bar\theta \in \bar\Theta$; поэтому мы построили тест $\bar\pi$ вида (28), для которого выполнено неравенство (29). Из (29) следует, что

$$W^* \geqslant \sup_Q W(\bar\pi, Q) \geqslant \sup_Q \inf_{\pi\in\bar{\mathscr{B}}(q)} W(\pi, Q) = W_*,$$

что вместе с (26) позволяет утверждать, что

$$W_* = \sup_Q W(\bar\pi, Q).$$

Заметим, что

$$\inf_{\pi\in\bar{\mathscr{B}}(q)} W(\pi, \bar Q) \leqslant W(\bar\pi, \bar Q) \leqslant \sup_Q W(\bar\pi, Q),$$

что вместе с (27), (26) и (31) завершает доказательство.

Докажем, что тест $\bar\pi$ вида (20), удовлетворяющий вместе с некоторой парой $\bar Q$ соотношениям (21), с необходимостью должен быть тестом байесовского типа, т. е.

$$\bar\pi = \pi^{\bar Q}_{\alpha,0}.$$

Для этого заметим, что

$$W(\bar\pi, \bar Q) = W\left(\int \pi^Q_{\alpha,0}\mu(dQ), \bar Q\right) = \int W\left(\pi^Q_{\alpha,0}, \bar Q\right)\mu(dQ). \tag{32}$$

Каждому тесту $\pi^Q_{\alpha,0}$ отвечает область $\mathscr{D}_Q \subseteq R^k$ принятия гипотезы H_1, которая определяется как

$$\mathscr{D}_Q = \{x \in R^k:\ S_Q(x) > \alpha\},$$

где

$$S_Q(x) \equiv \ln \int\limits_{\Theta_2} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}} Q_2(d\theta) - \ln \int\limits_{\Theta_1} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}} Q_1(d\theta).$$

Функция $S_Q(x)$ является аналитической функцией в R^k, поэтому если для двух пар мер Q и $\bar{Q}$ области $\mathscr{D}_Q$ и $\mathscr{D}_{\bar{Q}}$ не совпадают, то их симметричная разность

$$(\mathscr{D}_Q \setminus \mathscr{D}_{\bar{Q}}) \cup (\mathscr{D}_{\bar{Q}} \setminus \mathscr{D}_Q)$$

является множеством положительной лебеговой меры в R^k. Из последнего следует (см. доказательство в [2] соотношения 17.1), что если тест $\pi' = \pi^{Q'}_{\alpha,0}$ не совпадает с тестом $\pi = \pi^{\bar{Q}}_{\alpha,0}$, то справедливо

$$W(\pi^{\bar{Q}}_{\alpha,0}, \bar{Q}) < W(\pi^{Q'}_{\alpha,0}, \bar{Q}). \tag{33}$$

Обратимся к равенству (32). В силу (21) справедливо

$$W(\pi^{\bar{Q}}_{\alpha,0}, \bar{Q}) = \int W(\pi^{Q}_{\alpha,0}\, \bar{Q})\, \mu(dQ);$$

используя неравенство (33), получаем, что носитель меры μ состоит только из тех Q, для которых тесты $\pi^Q_{\alpha,0}$ и $\pi^{\bar{Q}}_{\alpha,0}$ совпадают. Поэтому можно считать, что мера μ сосредоточена в точке $\bar{Q}$. Мы доказали, что в равенствах (21) можно выбрать $\bar{\pi} = \pi^{\bar{Q}}_{\alpha,0}$.

Поскольку

$$\sup_Q W(\pi, Q) = q\varepsilon^*(\bar{\pi}) + (1-q)\,\delta^*(\bar{\pi}),$$

из первого соотношения в (21) следует, что

$$q\varepsilon^*(\bar{\pi}) + (1-q)\,\delta^*(\bar{\pi}) = q\varepsilon^{\bar{Q}}(\pi) + (1-q)\,\delta^{\bar{Q}}(\bar{\pi}).$$

Из последнего, очевидно, следует, что

$$\delta^*(\bar{\pi}) = \delta^{\bar{Q}}(\bar{\pi}), \quad \varepsilon^*(\bar{\pi}) = \varepsilon^{\bar{Q}}(\bar{\pi}).$$

Таким образом, мы доказали лемму 1 для ε вида

$$\varepsilon = \varepsilon(q) \equiv \varepsilon^{\bar{Q}(q)}(\bar{\pi}(q)).$$

Лемма 1 будет доказана полностью, если мы докажем, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется $q \in (0, 1)$ такое, что

$$\varepsilon = \varepsilon(q). \tag{34}$$

Для этого достаточно доказать три следующие соотношения:

1) $\lim\limits_{q\uparrow 1} \varepsilon^{\bar{Q}(q)}(\bar{\pi}(q)) = 0, \quad \lim\limits_{q\downarrow 0} \varepsilon^{\bar{Q}(q)}(\bar{\pi}(q)) = 1;$

2) если для некоторого $q_0 \in (0, 1)$ существуют две пары $(\bar{\pi}, \bar{Q})$ и $(\bar{\pi}', Q')$, и

$$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon^{\bar{Q}}(\bar{\pi}) < \varepsilon^{\bar{Q}'}(\bar{\pi}') \equiv \varepsilon_2,$$

то для любого $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ найдется пара $(\bar{\pi}'', \bar{Q}'')$ такая, что

$$\varepsilon = \varepsilon^{\bar{Q}''}(\bar{\pi}'');$$

3) если вектор $(\varepsilon_0, q_0) \in (0, 1) \times (0, 1)$ является предельным множества

$$\mathscr{L} = \{(\varepsilon, q) = (\varepsilon(q), q),\ 0 < q < 1\},$$

то он тоже принадлежит этому множеству.

Покажем, что из 1) — 3) следует (34). В силу 3) множество

$$K \equiv \{\varepsilon(q):\ q \in [0,\ 1]\}$$

является замкнутым подмножеством отрезка $[0,\ 1]$; в силу 1) точки 0 и 1 входят в K. Пусть найдется интервал $\Delta = (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ такой, что $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in K$ и $\Delta \cap K = \varnothing$. Рассмотрим два множества

$$L_1 = \{q \in [0,\ 1]:\ \varepsilon(q) \geqslant \varepsilon_2\},$$
$$L_2 = \{q \in [0,\ 1]:\ \varepsilon(q) \leqslant \varepsilon_1\}.$$

Поскольку $L_1 \cup L_2 = [0,\ 1]$, то найдется точка $q_0 \in [0,\ 1]$, которая принадлежит одному и является предельной для другого. В силу 3) эта точка принадлежит обоим множествам (мы допускаем, что одному q_0 могут отвечать две пары

$$(\bar{\pi}(q_0),\ \vec{Q}(q_0)),\ (\bar{\pi}'(q_0),\ \vec{Q}'(q_0)).$$

В силу 2) все точки отрезка

$$\Delta_1 = \left[\varepsilon^{\bar{Q}}(\bar{\pi}),\ \varepsilon^{\bar{Q}'}(\bar{\pi}')\right]$$

принадлежат K. Но очевидно, что $\Delta_1 \supseteq \Delta$, поэтому интервал Δ пуст: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Мы доказали, что множество K совпадает с $[0,\ 1]$.

Завершим доказательство леммы 1 проверкой соотношений 1) — 3).

Доказательство 1). Как мы доказали, тесты $\bar{\pi}$ в (21) имеют вид

$$\bar{\pi} = \pi^{\bar{Q}}_{\alpha,0} = 1\left\{\ln \int\limits_{\Theta_2} e^{A(\theta)} Q_2(d\theta) - \ln \int\limits_{\Theta_1} e^{A(\theta)} Q_1(d\theta) > \alpha\right\},$$

где $A(\theta) = A(\theta, x) \equiv -\frac{|x-\theta|^2}{2} = -\frac{|x|^2}{2} - \frac{|\theta|^2}{2} + \langle x, \theta\rangle$, $\alpha = \ln(q/(1-q))$. Рассмотрим новые вероятностные меры

$$\tilde{Q}_i(d\theta) = \frac{e^{-\frac{|\theta|^2}{2}} Q_i(d\theta)}{c_i},\quad \theta = \Theta_i,$$

где $c_i = \int\limits_{\Theta_i} e^{-\frac{|\theta|^2}{2}} Q_i(d\theta)$. Тогда

$$\ln \int\limits_{\Theta_2} e^{A(\theta)} Q_2(d\theta) - \ln \int\limits_{\Theta_1} e^{A_n(\theta)} Q_1(d\theta) =$$
$$= \ln \int\limits_{\Theta_2} e^{\langle\theta, X\rangle} \tilde{Q}_2(d\theta) - \ln \int\limits_{\Theta_1} e^{\langle\theta, X\rangle} \tilde{Q}_1(d\theta) + \ln \frac{c_2}{c_1}.$$

В силу наших условий число $\left|\ln \frac{c_2}{c_1}\right|$ равномерно ограничено. Пусть $\tilde{\Theta}_i$ есть выпуклая оболочка множества Θ_i, $i = 1,\ 2$; в силу наших условий для любых $\theta \in \tilde{\Theta}_i$, $i = 1,\ 2$, выполняется

$$\frac{1}{c} \leqslant |\theta_2 - \theta_1| \leqslant 2c. \tag{35}$$

Легко видеть, что для любого X найдется $\tilde{\theta}_i = \tilde{\theta}_i(X) \in \tilde{\Theta}_i$ такое, что

$$\int\limits_{\Theta_i} e^{\langle\theta, X\rangle} \tilde{Q}_i(d\theta) = e^{\langle\tilde{\theta}_i(X),\, X\rangle}.$$

Поэтому в силу (35) справедливо

$$\varepsilon_\theta(\pi) \leqslant \mathbf{P}_\theta\left(\langle\hat{\theta}_2(X), X\rangle \geqslant \alpha + \ln \frac{c_1}{c_2}\right) \leqslant \mathbf{P}_\theta\left(\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2} \langle\theta_2 - \theta_1,\ X\rangle \geqslant \alpha +\right.$$

$$+\ln\frac{c_1}{c_2}\Big)\leqslant \mathbf{P}_\theta\left(|X|\geqslant\left(\alpha+\ln\frac{c_1}{c_2}\right)\Big/(2c)\right).$$

Из последнего получаем, что

$$\varepsilon^*(\pi)\leqslant\sup_{\theta\in\Theta_1}\mathbf{P}_\theta\left(|X|\geqslant\alpha/(2c)+\frac{1}{2c}\ln\frac{c_1}{c_2}\right)\to 0$$

при $\alpha\to\infty$ (т. е. при $q\to 1$). Мы убедились, что $\varepsilon(q)\to 0$ при $q\to 1$. Поскольку второй соотношение в 1) доказывается аналогично, то 1) доказано.

Доказательство 2). Пусть существуют две пары

$$(\bar\pi_0,\ \bar Q_0),\ (\bar\pi_1,\ \bar Q_1),$$

удовлетворяющие соотношениям (21). Тогда для $i=0,\ 1$ справедливо

$$\inf_\pi W(\pi,\bar Q_i)\geqslant W^*,$$

и для $\bar Q_\alpha\equiv\alpha\bar Q_0+(1-\alpha)\bar Q_1$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ справедливо

$$\inf_\pi W(\pi,\bar Q_\alpha)\geqslant W^*.$$

Аналогично для

$$\bar\pi_\alpha\equiv\alpha\bar\pi_0+(1-\alpha)\bar\pi_1$$

выполнено

$$\sup_Q W(\bar\pi_\alpha,Q)\leqslant W^*.$$

Стало быть (см. доказательство (21)) для любого $\alpha\in[0,\ 1]$ пара $(\bar\pi_\alpha,\ \bar Q_\alpha)$ удовлетворяет (21). Остается заметить, что $\varepsilon^{\bar Q_\alpha}(\bar\pi_\alpha)$ непрерывно зависит от α и принимает все значения от $\varepsilon_0=\varepsilon^{\bar Q_0}(\bar\pi_0)$ до $\varepsilon_1=\varepsilon^{\bar Q_1}(\bar\pi_1)$.

Доказательство 3). Пусть вектор $(\varepsilon_0,\ q_0)\in(0,\ 1)\times(\theta,\ 1)$ является предельной точкой множества $\mathscr{L}$. Тогда можно выбрать последовательность q_n, сходящуюся к q_0, и последовательность пар априорных мер $\bar Q_n=\bar Q_n(q_n)$, слабо сходящуюся к паре мер $\bar Q_0$. При этом в силу наших условий для $\bar\pi_0=\pi_{\alpha,0}^{\bar Q_0}$ выполняется

$$\varepsilon_{\theta_1}(\bar\pi_n)\to\varepsilon_{\theta_1}(\bar\pi_0),$$

$$\delta_{\theta_2}(\bar\pi_n)\to\delta_{\theta_2}(\bar\pi_0)$$

равномерно по $\theta_1\in\Theta_1$, $\theta_2\in\Theta_2$. Поэтому

$$\varepsilon^{\bar Q_n}(\bar\pi_n)\to\varepsilon^{\bar Q_0}(\bar\pi_0),\ \delta^{\bar Q_n}(\bar\pi_n)\to\delta^{\bar Q_0}(\bar\pi_0).$$

Нам осталось убедиться, что полученная пара $(\bar\pi_0,\ \bar Q_0)$ отвечает параметру q_0, т. е. для нее выполнены соотношения (21).

Для этого убедимся, что функция $W^*=W^*(q)$ непрерывна по q. По определению

$$W^*(q_0)=\inf_\pi\sup_Q W_{q_0}(\pi,Q)\geqslant\inf_\pi W_{q_0}(\pi,\bar Q(q_1))\geqslant$$

$$\geqslant\inf_\pi\left[W_{q_1}(\pi,\bar Q(q_1))-2|q_0-q_1|\right]\geqslant W^*(q_1)-2|q_0-q_1|.$$

Поэтому

$$\limsup_{q\to q_0}W^*(q)\leqslant W^*(q_0).$$

С другой стороны,

$$W_*(q_0) \leqslant \sup_Q W_{q_0}\left(\vec{\pi}(q_1), Q\right) \leqslant \sup_Q \left[W_{q_1}\left(\vec{\pi}(q_1), Q\right) + 2\,|q_0 - q_1|\,\right] \leqslant$$
$$\leqslant W_*(q_1) + 2\,|q_0 - q_1|,$$

поэтому

$$\liminf_{q \to q_0} W_*(q_1) \geqslant W_*(q_0).$$

В силу (21) функции $W^*(q)$ и $W_*(q)$ совпадают, поэтому

$$\lim_{q \to q_0} W^*(q) = W^*(q_0). \tag{36}$$

Поскольку для пар $(\bar{\pi}_n, \bar{Q}_n)$ выполнялись соотношения

$$W_{q_n}(\bar{\pi}_n, \bar{Q}_n) = W^*(q_n),$$
$$\sup_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}} W_{q_n}(\bar{\pi}_n, \bar{\theta}) = W^*(q_n),$$

эти же соотношения в силу (31) сохранятся и для пары $(\bar{\pi}_0, \bar{Q}_0)$:

$$W_{q_0}(\bar{\pi}_0, \bar{Q}_0) = W^*(q_0),$$
$$\sup_Q W_{q_0}(\bar{\pi}_0, Q) = \sup_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}} W_{q_0}(\bar{\pi}_0, \bar{\theta}) = W^*(q_0).$$

Из этих соотношений следует (см. доказательство (21)), что пара $(\bar{\pi}_0, \bar{Q}_0)$ удовлетворяет (21) для $q = q_0$. Соотношение 3) доказано. Лемма 1 доказана.

6. Доказательство лемм 2, 3. Оно основано на леммах 4—6, приведенных ниже. Введем прежде необходимые обозначения.

Напомним, что множества $\Theta_i \subseteq R^k$ имеют вид

$$\Theta_i = \frac{t_n}{\sqrt{n}}\,\Gamma_i, \quad i = 1, 2,$$

поэтому пара $Q = (Q_1, Q_2)$ априорных распределений на Θ_1 и Θ_2 отвечает паре $q = (q_1, q_2)$ априорных распределений на Γ_1 и Γ_2: для множества $G \subseteq \Gamma_i$ выполняется

$$q_i(G) = Q_i\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\,G\right), \quad i = 1, 2.$$

Для пары $q = (q_1, q_2)$ определим функцию

$$S(x) = S^q(x) \equiv \ln \int_{\Gamma_2} e^{\langle x, \gamma \rangle} q_2(d\gamma) - \ln \int_{\Gamma_1} e^{\langle x, \gamma \rangle} q_1(d\gamma). \tag{37}$$

Введем случайную величину

$$z_n = z_n(\theta) \equiv \frac{A_n'(\theta)}{\sqrt{n}}, \quad \theta \in \Theta_1 \cup \Theta_2.$$

В леммах 4—6, которые мы сформулируем и докажем ниже, считаем выполненными все условия теорем 1, 2.

Лемма 4. *Пусть Y имеет нормальное распределение в R^k с параметрами* $(0, E)$,

$$a(\delta) \equiv \sup_{\substack{|\alpha| < c,\, t \geqslant 1 \\ \theta \in \Theta_1 \cup \Theta_2}} \sup_q \left| \frac{\mathbf{P}_\theta\left(S^q(z_n(\theta)\,t) > \alpha t^2 + \delta\right)}{\mathbf{P}\left(S^q(Yt) > \alpha t^2\right)} - 1 \right|.$$

Тогда

$$\lim_{\delta \downarrow 0} a(\delta) = 0.$$

Лемма 5. *Существует $\delta_n \to 0$ такое, что для любого $N < \infty$ найдется $c = c_N < \infty$ такое, что*

$$\sup_{\in\theta\Theta_1\cup\Theta_2} \mathbf{P}_\theta\left(\left|\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta) - z_n(\theta)\right| > \frac{\delta_n}{t_n}\right) \leqslant c_N e^{-Nt_n^2},$$

где θ_n^* — оценка максимального правдоподобия параметра θ.

Лемма 6. *Существует число $r < \infty$ такое, что для любой последовательности $q_n = (q_{1,n}, q_{2,n})$ пар априорных распределений на Γ_1, Γ_2, для $n = 1, 2, \ldots$, $\theta \in \Theta_1 \cup \Theta_2$ выполняются неравенства*

$$\mathbf{P}_\theta\left(S^{q_n}(z_n(\theta)t_n) > ct_n^2\right) \geqslant \frac{1}{2} e^{-\frac{t_n^2}{2}r},$$

$$\mathbf{P}\left(S^{q_n}(Yt_n) > ct_n^2\right) \geqslant \frac{1}{2} e^{-\frac{t_n^2}{2}r}.$$

Леммы 4—6 докажем несколько позже. Сейчас с их помощью проведем

Доказательство леммы 2. Для простоты вычислений будем считать, что тест π_n имеет вид $\pi_{\alpha,0}^Q$, т. е. константа $p = 0$ (см. (8.5)). Случай, когда $p > 0$, рассматривается аналогично.

Итак, $\pi_n = \mathbf{1}\{S_n(X) > \alpha\}$, где

$$S_n(x) \equiv \ln \int_{\Theta_2} e^{-\frac{|\theta - x|^2}{2}} Q_2(d\theta) - \ln \int_{\Theta_1} e^{-\frac{|\theta - x|^2}{2}} Q_1(d\theta).$$

Пусть $\theta_1 \in \Theta_1$, т. е. $\theta_1 = \frac{t}{\sqrt{n}}\gamma_1$, $\gamma_1 \in \Gamma_1$. Тогда

$$S_n\left(\frac{Y}{\sqrt{n}} + \theta_1\right) = S^{q^0}(tY) + \beta_n t^2,$$

где функция $S^q(x)$ строится по паре $q^0 = (q_1^0, q_2^0)$ в соответствии с формулой (37),

$$q_i^0(A) = \frac{1}{c_i}\int_A e^{-\frac{|\gamma|^2}{2}t^2 + \langle\gamma,\gamma_1\rangle t^2} q_i(d\gamma),$$

$$c_i = \int_{\Gamma_i} e^{-\frac{|\gamma|^2}{2}t^2 + \langle\gamma\cdot\gamma_1\rangle t^2} q_i(d\gamma),$$

$$\beta t^2 = \ln c_2 - \ln c_1.$$

Напомним, что пара распределений $q = (q_1, q_2)$ на Γ_1, Γ_2 соответствуют паре распределений $Q = (Q_1, Q_2)$ на Θ_1, Θ_2.

В силу наших условий константа $|\beta| = \frac{|\ln c_2 - \ln c_1|}{t^2}$ равномерно ограничена. Поскольку для $\theta_1 \in \Theta_1$ выполняется

$$\varepsilon_{\theta_1}(\pi) = \mathbf{P}\left(S_n\left(\frac{Y}{\sqrt{n}} + \theta_1\right) > \alpha\right),$$

то

$$\varepsilon_{\theta_1}(\pi) = \mathbf{P}\left(S^{q^0}(tY) > \alpha' t^2\right),$$

где $\alpha' t^2 = \alpha - \beta t^2$, $|\alpha| \leqslant c$. Соответственно

$$\varepsilon_{\theta_1}(T_n) = \mathbf{P}_{\theta_1}\left(S^{q^0}\left(t\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta_1)\right) > \alpha' t^2\right).$$

Воспользуемся далее леммой 5, в силу которой найдется $\delta_n \to 0$ такое, что для $|\nu| \leqslant 1$ выполняется

$$\varepsilon_{\theta_1}(T_n) = \mathbf{P}_{\theta_1}\left(S^{q^0}(tz_n^* + \nu\delta_n) > \alpha' t^2\right) + O\left(e^{-Nt^2}\right), \tag{38}$$

где $N > 2r$, r из леммы 6.

Убедимся далее, что для любого $q = (q_1, q_2)$ выполняется для $S(x) = S^q(x)$

$$|S(tx + \nu\delta_n) - S(tx)| \leqslant 2c\delta_n. \tag{39}$$

Для этого заметим, что

$$S'(x) = \frac{\int\limits_{\Gamma_2} e^{(x,\gamma)}\gamma q_2(d\gamma)}{\int\limits_{\Gamma_2} e^{(x,\gamma)}p_1(d\gamma)} - \frac{\int\limits_{\Gamma_1} e^{(x,\gamma)}\gamma q_1(d\gamma)}{\int\limits_{\Gamma_1} e^{(x,\gamma)}q_1(d\gamma)} = \int\limits_{\Gamma_2} \gamma\tilde{q}_2(d\gamma) - \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\tilde{q}_1(d\gamma), \tag{40}$$

где $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$ — пара вероятностных мер на Γ_1, Γ_2. Поэтому величину

$$\alpha_i = \int\limits_{\Gamma_i} \gamma\tilde{q}_i(d\gamma)$$

можно интерпретировать как среднее случайного вектора $\eta_i \in \Gamma_i$ с распределением $\tilde{q}_i$, так что в силу наших условий $|\alpha_i| \leqslant c$, $|S'(x)| \leqslant 2c$. Из последнего, очевидно, следует неравенство (39).

Обращаясь к (38), получаем

$$\varepsilon_{\theta_1}(T_n) = \mathbf{P}_{\theta_1}(S(tz_n) > \alpha t^2 + \nu\delta_n) + O\left(e^{-Nt^2}\right).$$

Воспользуемся далее леммами 4, 6, в силу которых следует

$$\left|\frac{\varepsilon_{\theta_1}(T_n)}{\varepsilon_{\theta_1}(\pi_n)} - 1\right| \to 0$$

равномерно по $\theta_1 \in \Theta_1$ и по классу априорных распределений Q_1, Q_2, определяющих тесты T_n и π_n. Таким образом, первое соотношение леммы 2 доказано. Поскольку второе соотношение леммы 2 доказывается аналогично, то лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3 совершенно аналогично доказательству леммы 2, поэтому мы не будем на нем останавливаться.

Нам осталось провести доказательства лемм 4—6.

Доказательство леммы 6. Рассмотрим событие

$$U = \{z_n \in tG\},$$

где множество G имеет вид

$$G = \left\{x \in R^k \colon \langle x, e_1\rangle \geqslant a,\ \langle x, e_2\rangle \leqslant \frac{1}{a},\ \ldots,\ \langle x, e_k\rangle \leqslant \frac{1}{a}\right\},$$

где число a произвольное, $e_1, \ldots, e_k$ — ортобазис в R^k, причем $e_1 = e$ — вектор, который занят в условии 1 (см. (5)). Легко видеть, что на событии U для $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$ выполняется

$$\langle z_n t, \gamma_1\rangle \leqslant \frac{k-1}{a} ct^2,$$

$$\langle z_n t, \gamma_2\rangle \geqslant \left(\frac{a}{c} - \frac{k-1}{a} c\right) t^2.$$

Вспоминая определение (37) функции $S(x)$, убеждаемся, что на событии U выполняется

$$S(z_n t) \geqslant \left(\frac{a}{c} - 2\frac{(k-1)c}{a}\right) t^2.$$

Выбирая далее $a > 0$ достаточно большим, получаем

$$\{S(z_n t) > c_1 t^2\} \supseteq U.$$

В силу грубых теорем о больших уклонениях сумм случайных векторов (см. § 3) вероятность события U допускает нужную оценку снизу

$$\mathbf{P}_{\theta_1}(U)=\mathbf{P}_{\theta_1}\left(\frac{z_n}{t}\in G\right)\geqslant\frac{1}{r}\,e^{-\frac{t^2}{2}r}.$$

Первое соотношение в лемме 6 доказано. Поскольку второе соотношение является следствием первого, то лемма 6 доказана.

Доказательство леммы 5. Убедимся сначала, что существует последовательность $\delta_n\downarrow 0$ и для любого $N<\infty$ существует $c=c_N<\infty$, такие, что

$$\sup_{\theta\in\Theta_1\cup\Theta_2}\mathbf{P}_\theta\left(\sup_{|\theta_1|\leqslant\frac{t}{\sqrt{n}}N}\left\|\frac{A_n''(\theta_1)}{n}+E\right\|\geqslant\frac{\delta_n}{t^2}\right)\leqslant c_N e^{-Nt^2}, \tag{41}$$

где $\|A\|=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant k}|A_{ij}|$. Легко видеть, что

$$\sup_{|\theta|\leqslant\frac{t}{\sqrt{n}}N}\left\|\frac{A''(\theta)}{n}+E\right\|\leqslant\left\|\frac{A_n''(\theta)}{n}+E\right\|+\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i}{n}\left(\frac{Nt}{\sqrt{n}}\right)^{1-\varepsilon},$$

где

$$\xi_i=\sup_{|\theta'|\leqslant 2N\frac{t}{\sqrt{n}}}\frac{\|a_i''(\theta)-a_i''(\theta')\|}{\left(\frac{Nt}{\sqrt{n}}\right)^{1-\varepsilon}}.$$

Поэтому левая часть (41) не больше, чем

$$\sup_{|\theta|\leqslant\frac{t}{\sqrt{n}}N}\mathbf{P}_\theta\left(\left\|\frac{A_n''(\theta)}{n}+E\right\|\geqslant\frac{1}{2}\,\frac{\delta_n}{t^2}\right)+$$

$$+\sup_{|\theta|\leqslant\frac{t}{\sqrt{n}}N}\mathbf{P}_\theta\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{n}>\frac{1}{2}\,\frac{\delta_n n^{\frac{1-\varepsilon}{2}}}{t^{3-\varepsilon}}\right)\equiv J_1+J_2.$$

При $|\theta|\leqslant\frac{t}{\sqrt{n}}N$ выполняется

$$\mathbf{E}_\theta a''(\theta)=-E+O\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right),$$

поэтому

$$J_1\leqslant\sup_{|\theta|\leqslant\frac{t}{\sqrt{n}}N}\mathbf{P}_\theta\left(\left\|\frac{A_n''(\theta)-\mathbf{E}_\theta A_n''(\theta)}{n}\right\|\geqslant\frac{1}{2}\,\frac{\delta_n}{t^2}-O\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\equiv\tilde{J}_1.$$

Пусть $\delta_n\to 0$ достаточно медленно, так что $t/\sqrt{n}$ есть o-малое от δ_n/t^2. Тогда слагаемое $\tilde{J}_1$ допускает нужную оценку в силу равномерного условия Крамера, которому удовлетворяет случайная величина $\|a''(\theta)\|$.

Для оценки второго слагаемого J_2 заметим, что можно выбрать $\varepsilon>0$ достаточно малым, чтобы для последовательности $\delta_n\downarrow 0$ выполнялось

$$\frac{\delta_n(\sqrt{n})^{1-\varepsilon}}{t^{3-\varepsilon}}\to\infty,\quad n\to\infty.$$

В силу леммы п. 4 (Приложение) для $\varepsilon>0$ найдется $c_\varepsilon<\infty$ такое, что для слагаемого ξ_1 будет выполнено равномерное условие Крамера

$$\sup_{|\theta|\leqslant\frac{t}{\sqrt{n}}N}\mathbf{E}_\theta e^{\frac{1}{c_\varepsilon}\xi_1}\leqslant c_\varepsilon.$$

Поэтому нужная оценка для J_2 тоже имеет место. Неравенство (41) доказано.

Рассмотрим класс $\mathscr{K}$ функций $f(\theta)$; $R^k \to R^1$, удовлетворяющий условиям:

$$f(0)=0,\ |f'(0)|\leqslant c,\quad \sup_{|\theta|\leqslant 2c}\|f''(\theta)+E\|\leqslant\delta\leqslant\delta_0. \tag{42}$$

Для любого $c<\infty$ найдется $\delta_0=\delta_0(c)>0$ такое, что для любой функции f из этого класса $\mathscr{K}$ существует единственный максимум θ^* на множестве $\{\theta\colon |\theta|\leqslant 2c\}$; этот максимум удовлетворяет неравенству

$$|\theta^*-f'(0)|\leqslant\frac{\delta|f'(0)|k}{1-\delta k}. \tag{43}$$

Докажем это. Для этого наряду с $f=f(\theta)\in\mathscr{K}$ рассмотрим функцию

$$f_0(\theta)=\langle\theta,\ f'(0)\rangle-\frac{|\theta|^2}{2},$$

которая, очевидно, тоже из класса $\mathscr{K}$. Она имеет максимум $\theta_0^*=f'(\theta)$. Поскольку

$$\sup_{|\theta|\leqslant 2c}|f(\theta)-f_0(\theta)|\to 0$$

при $\delta_0\to 0$, то можно утверждать, что $|\theta^*-\theta_0^*|\to 0$ при $\delta_0\to 0$. Стало быть, при достаточно малом $\delta_0>0$ выполняется $|\theta^*|\leqslant\frac{3}{2}c$. Далее, поскольку при $|\theta|\leqslant 2c$ выполняется

$$f''(\theta)\leqslant -\mathbf{E}(1-\delta_0),$$

очевидно, что точка максимума θ^* единственна и удовлетворяет уравнению

$$f'(\theta^*)=0.$$

Поэтому

$$f'(0)=\theta^*(E+\delta R), \tag{44}$$

где матрица $R=\|R_{ij}(\theta^*)\|$ такова, что $|R_{ij}(\theta^*)|\leqslant 1$. Считая, что точка максимума θ^* имеет вид $f'(0)+x$, где $x\in R^k$, оценим $|x|$. Для этого подставим $\theta^*=f'(0)+x$ в (44):

$$f'(0)-f'(0)+xR\delta-x-\delta f'(0)R=0,$$

т. е. $\delta xR+x=-\delta f'(0)R$. В силу неравенства

$$|x|\leqslant|x-\delta xR|+|-\delta xR|\leqslant\delta|f'|k+\delta|x|k$$

имеем (43)

$$|x|\leqslant\frac{\delta|f'(0)|k}{1-\delta k}.$$

Выберем $c<\infty$ таким образом, чтобы

$$\sup_{\theta\in\Theta_1\cup\Theta_2}\mathbf{P}_\theta\left(\left|\frac{A_n'(0)}{n}\right|>c\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\leqslant Ne^{-t^2N}.$$

Для этого c выберем $N=2c$ в (41). Рассмотрим далее функцию

$$f(\widetilde{\theta})=f_n(\widetilde{\theta})\equiv\frac{A_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\widetilde{\theta}\right)-A_n(0)}{t^2}.$$

Очевидно, что на событии

$$B_n\equiv\left\{\left|\frac{A_n'(0)}{\sqrt{n}}\right|\leqslant ct,\quad \sup_{|\theta|\leqslant 2c}\left\|\frac{A_n''(\theta)}{n}+E\right\|\leqslant\delta_n\right\}$$

функция $f(\widetilde{\theta})$ принадлежит классу $\mathscr{K}$, определяемому (42). Поэтому на этом событии выполняется

$$|\tilde{\theta}_n^* - f'(0)| \leqslant |f'(0)| \frac{\delta_n k}{1-\delta_n k},$$

где $\tilde{\theta}_n^*$ есть точка максимума $f(\tilde{\theta})$. Поскольку точка максимума θ_n^* функции $A_n(\theta)$ связана с $\tilde{\theta}_n^*$ соотношением

$$\theta_n^* = \frac{\tilde{\theta}_n^* \sqrt{n}}{t},$$

получаем, что на событии B_n

$$\left|\theta_n^* - \frac{A_n'(0)}{n}\right| \leqslant \frac{|A_n'(0)|}{n} \cdot \frac{k\delta_n}{1-k\delta_n} \leqslant 2k \frac{|A_n'(0)|}{n} \delta_n.$$

Таким образом, для $2k\delta_n = (\tilde{\delta}_n/t)^2$

$$\mathbf{P}_0\left(\sqrt{n}\left|\theta_n^* - \frac{A_n'(0)}{\sqrt{n}}\right| > \frac{\tilde{\delta}_n}{t}\right) \leqslant \mathbf{P}_0(\overline{B}_n) +$$

$$+ \mathbf{P}_0\left(2k\frac{|A_n'(0)|}{\sqrt{n}}\delta_n > \frac{\tilde{\delta}_n}{t}\right) \leqslant c_N e^{-Nt^2} + \mathbf{P}_0\left(\left|\frac{A_n'(0)}{\sqrt{n}}\right| \frac{\tilde{\delta}_n^2}{t^2} > \frac{\tilde{\delta}_n}{t}\right) =$$

$$= c_N e^{-Nt^2} + \mathbf{P}_0\left(\left|\frac{A_n'(0)}{\sqrt{n}}\right| > \frac{t}{\tilde{\delta}_n}\right) \leqslant 2c_N e^{-Nt^2}.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\mathbf{P}_\theta\left(|\sqrt{n}\theta_n^* - z_n(0)| > \frac{\delta_n}{t}\right) \leqslant 2c_N e^{-Nt^2}.$$

Поскольку доказательство аналогичного неравенства для любого $\theta \in \Theta_1 \cup \cup \Theta_2$ совершенно аналогично, то лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 4. Обозначим $Y(\theta)$ гауссовский случайный вектор в R^k с нулевым средним и с ковариационной матрицей $B(\theta) = \mathbf{E}_\theta a'(\theta)^{\mathsf{T}} a'(\theta)$. В силу известных теорем (см. [32]) случайные вектора $z_n(\theta)$ и $Y_n(\theta)$ можно задать на одном вероятностном пространстве так, что

$$\mathbf{P}_\theta\left(|z_n(\theta) - \mathrm{Y}_n(\theta)| > c\frac{\ln n + xt^2}{\sqrt{n}}\right) \leqslant e^{-c_1 xt^2}.$$

Поэтому для

$$\delta_n = c\frac{\ln n + r/ct^2}{\sqrt{n}}, \quad |\nu| \leqslant 1$$

выполняется

$$\mathbf{P}_\theta\left(S^q(tz_n(\theta)) > \alpha t^2 + \delta\right) = \mathbf{P}_\theta\left(S^q(t(\mathrm{Y}_n(\theta) + \nu\delta_n)) > \alpha t^2 + \delta\right) + O\left(e^{-rt^2}\right).$$

Заметим далее, что для $Y \equiv Y(\theta)$ для достаточно большого $N < \infty$ выполняется

$$\mathbf{P}(|\mathrm{Y}| > Nt) \leqslant \frac{e^{-rt^2}}{N}.$$

Поскольку при $|\theta| \leqslant \frac{t}{\sqrt{n}}c$ справедливо

$$\mathrm{Y}_n(\theta) = \mathrm{Y}(0)\left(1 + \nu c\frac{t}{\sqrt{n}}\right),$$

где $|\nu| \leqslant 1$, то справедливо для всех $|\theta| \leqslant c\frac{t}{\sqrt{n}}$

$$\mathbf{P}_\theta\left(S^q(tz_n(\theta)) > \alpha t^2 + \delta\right) = \mathbf{P}_\theta\left(S^q(t\mathrm{Y}(0) + \nu\delta_n) > \alpha t^2 + \delta\right) + O\left(e^{-rt^2}\right).$$

Как мы уже отмечали (см. (39)), для любого $q=(q_1, q_2)$ выполняется

$$|S^q(tY+t\nu\delta_n)-S^q(tY)|\leqslant ct\delta_n = c_1\frac{\ln t}{\sqrt{n}}+c_1\frac{t^3}{\sqrt{n}}=o(1).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}_\theta\left(S^q(tz_n(\theta))>\alpha t^2+\delta\right)=\mathbf{P}\left(S^q(tY)>\alpha t^2+\delta+\nu\delta_n\right)+O\left(e^{-rt^2}\right),$$

где $\delta_n=O\left(\frac{\ln t+t^3}{\sqrt{n}}\right)=o(1),\quad |\nu|\leqslant 1.$

Учитывая утверждение леммы 6, приходим к заключению, что для доказательства леммы 4 нам достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta\downarrow 0} a_0(\delta)=0, \tag{45}$$

где

$$a_0(\delta)\equiv\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant c\\ t\geqslant 1}}\sup_q\left|\frac{\mathbf{P}(S^q(tY)\geqslant\alpha t^2+\delta)}{\mathbf{P}(S^q(tY)\geqslant\alpha t^2)}-1\right|.$$

Докажем (45). Для любого $\delta>0$ справедливо

$$\mathbf{P}(S(tY)\geqslant\alpha t^2+\delta)\leqslant\mathbf{P}(S(tY)\geqslant\alpha t^2). \tag{46}$$

Пусть $a=a(t,\alpha)$ определяется как

$$a=\max\{x:\ \{|Y|\leqslant tx\}\cap\{S(tY)\geqslant\alpha t^2\}=\varnothing\}.$$

Если ввести множество $G=G(t,\alpha)$ с помощью равенства

$$G=\{Y:\ S(t^2Y)\geqslant\alpha t^2\},$$

то константа a есть в точности

$$\inf_{x\in G}|x|. \tag{47}$$

Поэтому a задает грубую асимптотику вероятности

$$\mathbf{P}(S(tY)\geqslant\alpha t^2)=\mathbf{P}(Y\in tG):\ \ln\mathbf{P}(Y\in tG)\sim-\frac{a^2t^2}{2}.$$

Легко убедиться, что в наших условиях существует $c_1<\infty$, зависящее только от c, такое, что для $|\alpha|\leqslant c$ выполняется

$$a\leqslant c_1.$$

Действительно, пусть вектор e, $|e|=1$ из условия I, т. е. такой, что

$$\langle e,\theta_2\rangle\geqslant\frac{1}{c}\ \langle e,\theta_1\rangle\leqslant 0\quad\text{для всех}\quad(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2.$$

Выберем $Y=ex$, где $x>0$; тогда

$$e^{t^2x\langle e,\theta_2\rangle}\geqslant e^{\frac{t^2x}{c}},\quad e^{t^2x\langle e,\theta_1\rangle}\leqslant 1,$$

$$\int_{\Theta_2}e^{t^2x\langle e,\theta_2\rangle}Q_2(d\theta_2)\geqslant e^{\frac{t^2x}{c}},\quad\int_{\Theta_1}e^{t^2x\langle e,\theta_1\rangle}Q_1(d\theta_1)\leqslant 1,$$

и поэтому получаем

$$S^q(t^2xe)\geqslant\frac{t^2x}{c}.$$

Из последнего следует, что при $x\geqslant c^2\geqslant c\alpha$ вектор xe лежит в множестве $G(t,\alpha)$. Это, значит, в силу (47), что

$$a\leqslant 2c.$$

Убедимся теперь, что для $\delta>0$

$$\{S(tY-c\delta e)\geqslant t^2\alpha\}\subseteq\{S(tY)\geqslant t^2\alpha+\delta\}. \tag{48}$$

Для этого заметим, прежде всего, что из соотношения (48) следует

$$2c \geqslant \langle S'(x), e\rangle \geqslant \frac{1}{c}, \| S''(x)\| \leqslant 4c^2, \quad x \in R^k,$$

Поэтому

$$S(tY - c\delta e) = S(tY) - c\delta\langle e, S'(tY - \nu\delta e)\rangle \leqslant S(tY) - \delta,$$

т. е.

$$S(tY) \geqslant S(tY - c\delta e) + \delta.$$

Из последнего, очевидно, следует (48). Из (48) получаем

$$\mathbf{P}(S(t\mathrm{Y}) \geqslant t^2\alpha + \delta) \geqslant \mathbf{P}\left(\mathrm{Y} - \frac{c\delta e}{t^2} \in tG(t, \alpha)\right). \tag{49}$$

Правую часть (49) представим в виде

$$\frac{t^{k/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{G(t,\alpha)} e^{-\frac{(x - c\delta e t^{-2})^2}{2} t^2} dx =$$

$$= \frac{t^{k/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{G(t,\alpha) \cap \{x:\ |x| \leqslant 2c^2/\sqrt{\delta}\}} e^{-\frac{x^2 t^2}{2} + c\delta\langle e, x\rangle + |c\delta|^2/(2t^2)} dx +$$

$$+ \nu \int\limits_{\{x:\ |x| > 2c^2/\sqrt{\delta}\}} e^{-(x - c\delta e t^{-2})^2 t^2} dx,$$

где $|\nu| \leqslant 1$. Из последнего имеем

$$\mathbf{P}\left(\mathrm{Y} - c\frac{\delta e}{t^2} \in tG(t, \alpha)\right) = \mathbf{P}(S(t\mathrm{Y}) > \alpha t^2)\, e^{\nu\sqrt{\delta}c^2} +$$

$$+ \nu\mathbf{P}\left(\left|\mathrm{Y} + \frac{\delta c e}{t^2}\right| \geqslant 2tc^2/\sqrt{\delta}\right). \tag{50}$$

Второе слагаемое в правой части не больше, чем

$$\mathbf{P}(|\mathrm{Y}| \geqslant tc^2/\sqrt{\delta}) + \mathbf{P}\left(\left|\frac{\delta c e}{t^2}\right| > \frac{tc^2}{\sqrt{\delta}}\right). \tag{51}$$

При $t \geqslant 1$, $\delta \leqslant 1$, $c \geqslant 1$ второе слагаемое в (51) обращается в нуль. Убедимся, что

$$\frac{\mathbf{P}(|Y| \geqslant tc^2/\sqrt{\delta})}{\mathbf{P}(Y \in tG(t, \alpha))} \to 0 \tag{52}$$

при $\delta \to 0$ равномерно по $t \geqslant 1$, $q = (q_1, q_2)$. Пусть $y \in G(t, \alpha)$, $|y| = a(t, \alpha)$, так что

$$S(t^2 y) \geqslant t^2\alpha.$$

Тогда для $|e_1| = 1$

$$S(t^2 y + ze + z^2 e_1) = S(t^2 y) + z\langle e, S'\rangle + z^2\langle e_1, S'\rangle \geqslant t^2 + \frac{z}{c} - 2z^2 c \geqslant t^2\alpha,$$

если $0 \leqslant z \leqslant 1/2$. Поэтому вместе с точкой y в множество $G(t, \alpha)$ входит шар радиуса $(2t^2)^{-1}$. Поэтому

$$\mathbf{P}(\mathrm{Y} \in tG(t, \alpha)) \geqslant \frac{1}{c_1} t^{-2k} e^{-\frac{at^2}{2}},$$

где $c_1 < \infty$ зависит только от c. Поскольку

$$\mathbf{P}\left(|\mathrm{Y}| \geqslant \frac{tc^2}{\sqrt{\delta}}\right) = e^{-\frac{t^2 c^4}{2\delta}(1 + o(1))},$$

(52) имеет место. Из соотношений (46), (48)—(50), (52) следует (45). Лемма 4 доказана.

7. Доказательство теорем 3, 4 начнем с вычисления вероятностей ошибок тестов $\pi^*_{\alpha\frac{t^2}{n}}$ и $\pi^G_{\alpha\frac{t^2}{n}}$ в задаче (B). Рассмотрим задачу (A_Φ), которая отвечает эксперименту

$$E_m^\Phi = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Phi, X_m),$$

где семейство $\Phi = (\Phi_{\gamma,E})$ есть семейство гауссовских распределений в R^k с параметрами (γ, E). Для простоты вычислений будем считать, что последовательность t_n (которая задает порядок уклонений в задачах (A), (B)), является целочисленной, и положим $m = t_n^2$. Легко убедиться, что вероятности ошибок тестов π^*_α и $T^*_{m,\widetilde{\alpha}}$, где $\widetilde{\alpha} = n\alpha t^{-2}$, в задачах (B) и (A_Φ) соответственно совпадают. То же верно и для тестов π^G_α, $T^G_{m,\widetilde{\alpha}}$.

Но задача (A_Φ), как нетрудно видеть, есть в точности задача, рассмотренная в § 11, где в качестве семейства $\mathscr{P} = \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\}$ нужно выбрать гауссовское семейство $\Phi = \{\Phi_{\gamma,E},\ \gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$. Поэтому асимптотика вероятностей (средних и максимальных) ошибок тестов $T^*_{m,\alpha}$ и $T^G_{m,\alpha}$ $\left(\text{а значит, и } \pi^*_{\alpha\frac{t^2}{n}}, \pi^G_{\alpha\frac{t^2}{n}}\right)$ следует из теорем 11.3, 11.4. Для того чтобы воспользоваться формулами из этих теорем, отыщем функции $\Lambda(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$, $\sigma^2(\alpha)$ для семейства

$$\Phi = \{\Phi_{\gamma,E},\ \gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}.$$

Легко видеть, что

$$a(\gamma) \equiv \frac{d\Phi_{\gamma,E}}{d\Phi_{0,E}} = -\frac{1}{2}(x-\gamma)^2 + \frac{1}{2}x^2,$$

поэтому

$$\ln \varphi(\lambda;\ \gamma_1, \gamma_2) \equiv \ln \mathbf{E}_{\gamma_1} e^{\lambda(a(\gamma_2) - a(\gamma_1))} = \frac{\lambda^2}{2}|\gamma_1 - \gamma_2|^2 - \frac{\lambda}{2}|\gamma_1 - \gamma_2|^2. \quad (53)$$

Функция уклонений, отвечающая функции (53), имеет

$$\Lambda(\alpha;\ \gamma_1, \gamma_2) \equiv \sup_\lambda \{\alpha\lambda - \ln \varphi(\lambda, \gamma_1, \gamma_2)\} = \frac{\left(\alpha + \frac{1}{2}|\gamma_1 - \gamma_2|^2\right)^2}{2|\gamma_1 - \gamma_2|^2}.$$

Поэтому в условиях $A_1(c)$ функция $\Lambda(\alpha)$ определена

$$\Lambda(\alpha) \equiv \inf_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2} \Lambda(\alpha;\ \gamma_1, \gamma_2) = \frac{\left(\alpha + \frac{1}{2}R^2\right)^2}{2R^2},$$

где $R = |\widehat{\gamma}_1 - \widehat{\gamma}_2|$. Соответственно

$$d_- = -\frac{R}{2}, \quad d_+ = \frac{R}{2}, \quad \lambda(\alpha) = \alpha/R^2 + 1/2, \quad \sigma^2(\alpha) = R^2.$$

Таким образом, в силу теорем 11.3; 11.4 соответствующие вероятности ошибок тестов $T^*_{m,\alpha}$ и $T^G_{m,\alpha}$ в задаче (A_Φ) (а значит, тестов $\pi^*_{\alpha\frac{t^2}{n}}$ и $\pi^G_{\alpha\frac{t^2}{n}}$ в задаче (B)) определяются правыми частями формул в частях II теорем 3, 4. Остается заметить, что (см. доказательства теорем 1, 2) соответствующие вероятности ошибок тестов $T^*_{n,\alpha}$ и $T^G_{n,\alpha}$ в задаче (A) асимптотически эквивалентны соответствующим вероятностям ошибок тестов π^*_α и π^G_α в задаче (B). Части II теорем 3, 4 доказаны. Часть I теоремы 3 следует из того, что класс $\mathscr{K}^{(2)}(Q)$ является $(Q, \varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$-АПМ классом (в силу леммы Неймана — Пирсона) и, в силу уже доказанной части II теоремы 3 и теоремы 1, этим же свойством обладают классы $\mathscr{K}^{(1)}$ и $\mathscr{K}^{(2)}(G)$.

Доказательство части III теоремы 3 практически не отличается от доказательства частей III теорем 11.3, 11.1. Тут нужно выбрать интервал $[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+]$ такой, чтобы «малому» изменению вероятности ошибки $\varepsilon^Q(T_{n,\alpha}^*)$ отвечало бы «малое» изменение вероятности $\delta^Q(T_{n,\alpha}^*)$.

Доказательство части I теоремы 4 практически не отличается от доказательства части I теоремы 3. Теоремы 3, 4 доказаны.

ГЛАВА V

СЛЕДСТВИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЛАВ III, IV И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

§ 14. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ (ГРУБЫЙ ВАРИАНТ) И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

1. Общие замечания о задании статистических критериев. Мы будем, как и прежде, рассматривать задачу о проверке двух сложных гипотез $H_i = \{\theta \in \Theta_i\}$ по выборке $X = X_n = (x_1, \ldots, x_n)$ растущего объема n из распределения $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta_1 \cup \Theta_2$. Используем два подхода к задаче: *частично минимаксный*, когда тест T характеризуется максимальными вероятностями ошибок

$$\varepsilon^*(T) = \max_{\theta\in\Theta_1} \mathbf{E}_\theta T(X), \quad \delta^*(T) = \max_{\theta\in\Theta_2} \mathbf{E}_\theta (1 - T(X)), \tag{1}$$

и *частично байесовский*, когда на Θ_1 и Θ_2 заданы априорные распределения Q_1 и Q_2 и тест T характеризуется средними вероятностями ошибок

$$\varepsilon^Q(T) = \int_{\Theta_1} \mathbf{E}_\theta (T) Q_1(d\theta), \quad \delta^Q(T) = \int_{\Theta_2} \mathbf{E}_\theta (1 - T) Q_2(d\theta), \tag{2}$$

где $Q = (Q_1, Q_2)$ (нам удобнее использовать обозначение ε^Q и δ^Q, хотя эти величины на самом деле зависят лишь от Q_1 и Q_2 соответственно)

Под статистическим критерием (тестом) T мы понимаем *семейство* измеримых функций $\{T_n\}$ со значениями в отрезке $[0, 1]$ таких, что функция $T_n = T_n(X_n)$ определена на выборке $X = X_n$ объема n, и таких, что принимается гипотеза H_2 с вероятностью $p = T_n(X_n)$ и гипотеза H_1 с вероятностью $q = 1 - T_n(X_n)$ (реализация вероятностей p и q происходит независимо от X_n). Как правило, $T_n(X_n)$ принимает лишь два значения 0 и 1; критерий T в этом случае называется нерандомизированным.

Однако на самом деле термин «статистический критерий» часто понимается *еще шире*: семейство $\{T_n\}$ предполагается настолько широким, что при каждом n можно выбрать тест *любого заданного уровня* ε (скажем, в одном из двух вариантов (1), (2)). Другими словами, рассматривается двупараметрическое семейство $\{T_{(\varepsilon),n}(X_n)\}$, где $\varepsilon = \varepsilon(T_{(\varepsilon),n})$ пробегает значения из $[0, 1]$. Например, критерий отношения правдоподобия $T_{n,\alpha}^*$ или критерий байесовского типа $T_{n\,\alpha}^G$, которые рассматривались в гл. III, представляют собой как раз такие семейства (при желании T^* и T^G можно рандомизировать с тем, чтобы спектр значений ε был непрерывным). В этом же широком смысле используются термины «критерий χ^2», «критерий Колмогорова» и др.

Рассмотрим произвольный критерий $T = \{T_{(\varepsilon),n}\}$, предполагая для простоты (это не существенно), что он нерандомизирован, а спектр возможных значений ε непрерывен, так что для всех $\varepsilon \in [0, 1]$ $T_{(\varepsilon),n}$ принимает только два значения 0 и 1. Обозначим

$$\Omega_{(\varepsilon),n} = \{X\colon\ T_{(\varepsilon),n}(X) = 1\}$$

Доказательство части III теоремы 3 практически не отличается от доказательства частей III теорем 11.3, 11.1. Тут нужно выбрать интервал $[\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+]$ такой, чтобы «малому» изменению вероятности ошибки $\varepsilon^Q(T^*_{n,\alpha})$ отвечало бы «малое» изменение вероятности $\delta^Q(T^*_{n,\alpha})$.

Доказательство части I теоремы 4 практически не отличается от доказательства части I теоремы 3. Теоремы 3, 4 доказаны.

ГЛАВА V

СЛЕДСТВИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЛАВ III, IV И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

§ 14. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ (ГРУБЫЙ ВАРИАНТ) И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

1. Общие замечания о задании статистических критериев. Мы будем, как и прежде, рассматривать задачу о проверке двух сложных гипотез $H_i=\{\theta\in\Theta_i\}$ по выборке $X=X_n=(x_1, \ldots, x_n)$ растущего объема n из распределения $\mathbf{P}_\theta$, $\theta\in\Theta_1\cup\Theta_2$. Используем два подхода к задаче: *частично минимаксный*, когда тест T характеризуется максимальными вероятностями ошибок

$$\varepsilon^*(T)=\max_{\theta\in\Theta_1}\mathbf{E}_\theta T(X),\quad \delta^*(T)=\max_{\theta\in\Theta_2}\mathbf{E}_\theta(1-T(X)), \tag{1}$$

и *частично байесовский*, когда на Θ_1 и Θ_2 заданы априорные распределения Q_1 и Q_2 и тест T характеризуется средними вероятностями ошибок

$$\varepsilon^Q(T)=\int_{\Theta_1}\mathbf{E}_\theta(T)\,Q_1(d\theta),\quad \delta^Q(T)=\int_{\Theta_2}\mathbf{E}_\theta(1-T)\,Q_2(d\theta), \tag{2}$$

где $Q=(Q_1, Q_2)$ (нам удобнее использовать обозначение ε^Q и δ^Q, хотя эти величины на самом деле зависят лишь от Q_1 и Q_2 соответственно)

Под статистическим критерием (тестом) T мы понимаем *семейство* измеримых функций $\{T_n\}$ со значениями в отрезке $[0, 1]$ таких, что функция $T_n=T_n(X_n)$ определена на выборке $X=X_n$ объема n, и таких, что принимается гипотеза H_2 с вероятностью $p=T_n(X_n)$ и гипотеза H_1 с вероятностью $q=1-T_n(X_n)$ (реализация вероятностей p и q происходит независимо от X_n). Как правило, $T_n(X_n)$ принимает лишь два значения 0 и 1; критерий T в этом случае называется нерандомизированным.

Однако на самом деле термин «статистический критерий» часто понимается *еще шире*: семейство $\{T_n\}$ предполагается настолько широким, что при каждом n можно выбрать тест *любого заданного уровня* ε (скажем, в одном из двух вариантов (1), (2)). Другими словами, рассматривается двупараметрическое семейство $\{T_{(\varepsilon),n}(X_n)\}$, где $\varepsilon=\varepsilon(T_{(\varepsilon),n})$ пробегает значения из $[0, 1]$. Например, критерий отношения правдоподобия $T^*_{n,\alpha}$ или критерий байесовского типа $T^G_{n\,\alpha}$, которые рассматривались в гл. III, представляют собой как раз такие семейства (при желании T^* и T^G можно рандомизировать с тем, чтобы спектр значений ε был непрерывным). В этом же широком смысле используются термины «критерий χ^2», «критерий Колмогорова» и др.

Рассмотрим произвольный критерий $T=\{T_{(\varepsilon),n}\}$, предполагая для простоты (это не существенно), что он нерандомизирован, а спектр возможных значений ε непрерывен, так что для всех $\varepsilon\in[0, 1]$ $T_{(\varepsilon),n}$ принимает только два значения 0 и 1. Обозначим

$$\Omega_{(\varepsilon),n}=\{X:\ T_{(\varepsilon),n}(X)=1\}$$

критическое множество критерия $T_{(\varepsilon),n}$. Предположим, что семейство $\{T_{(\varepsilon),n}\}$ обладает естественным свойством монотонности

$$\Omega_{(\varepsilon_1),n} \subset \Omega_{(\varepsilon_2),n} \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 < \varepsilon_2. \tag{3}$$

Все разумные критерии обладают этим свойством. В данном случае семейству $T_{(\varepsilon),n}$ можно поставить в соответствие статистику $S = S_n(X)$ (т. е. функцию, зависящую только от X) такую, что

$$T_{(\varepsilon),n}(X) = \mathbf{1}\{S_n(X) > \alpha n\} \tag{4}$$

при некотором $\alpha = \alpha_{(\varepsilon),n}$, зависящем от ε и n. Действительно, построим последовательность функций

$$S_{(m)}(X) = \frac{k}{2^m} \mathbf{1}\{\Omega_{(k2^{-m})} \setminus \Omega_{((k-1)2^{-m})}\}$$

(индекс n у обозначения $\Omega_{(\varepsilon),n}$ мы для краткости здесь опускаем). Очевидно, что $S_{(m)}(X) \downarrow$ при $m \to \infty$ и, стало быть, существует $\lim\limits_{m\to\infty} S_{(m)}(X) = S(X)$. Осталось положить $T_{(\varepsilon),n}(X) = \mathbf{1}\{S(X) < \varepsilon\}$.

Обратно критерий вида (4), очевидно, обладает свойством (3). Таким образом, *«монотонность»* (3) *является необходимым* и *достаточным условием для представимости критерия T в форме* (4).

В дальнейшем, ограничимся рассмотрением лишь «разумных» критериев $T = \{T_{(\varepsilon),n}\}$, обладающих свойством (3) и там, где это нужно, будем ассоциировать с ним статистику S, участвующую в представлении (4) (так собственно со всеми известными критериями и происходит). При этом критерий (тест), определяемый правой частью (4), обозначим

$$T^{(S)} = T^{(S)}_{n,\alpha} \equiv \mathbf{1}\{S_n(X) > n\alpha\}. \tag{5}$$

Это есть, очевидно, критерий в том широком понимании, о котором шла речь выше. Такое понимание критерия как семейства (5) будем иметь в виду в дальнейшем. Заметим еще, что тесты $T^* = T^*_{n,\alpha}$ и $T^G = T^G_{n,\alpha}$, изученные в гл. III, IV, понимались как критерии в смысле (5).

В соответствии с принятыми ранее соглашениями обозначим

$$\begin{aligned}
\varepsilon^*\left(T^{(S)}_{n,\alpha}\right) &= \max_{\theta\in\Theta_1} \mathbf{P}_\theta(S_n(X) > n\alpha),\\
\delta^*\left(T^{(S)}_{n,\alpha}\right) &= \max_{\theta\in\Theta_2} \mathbf{P}_\theta(S_n(X) \leqslant n\alpha),\\
\varepsilon^Q\left(T^{(S)}_{n,\alpha}\right) &= \int_{\Theta_1} \mathbf{P}_\theta(S_n(X) > n\alpha)\, Q_1(d\theta),\\
\delta^Q\left(T^{(S)}_{n,\alpha}\right) &= \int_{\Theta_2} \mathbf{P}_\theta(S_n(X) \leqslant n\alpha)\, Q_2(d\theta).
\end{aligned} \tag{6}$$

Индекс n у обозначений $T^{(S)}_{n,\alpha}$ и $S_n(X)$ иногда будем опускать. Используем также собирательные обозначения $\varepsilon(T)$ и $\delta(T)$, принимающие значения $\varepsilon^*(T)$, $\delta^*(T)$ или $\varepsilon^Q(T)$, $\delta^Q(T)$, так что применительно к $T = T^{(S)}_{n,\alpha}$ значения (6) обозначатся через $\varepsilon\left(T^{(S)}_{n,\alpha}\right)$, $\delta\left(T^{(S)}_{n,\alpha}\right)$.

Наряду с $\varepsilon(T)$ и $\delta(T)$ нам понадобятся также собирательные обозначения

$$\tilde\varepsilon(T) = -\frac{1}{n}\ln\varepsilon(T), \qquad \tilde\delta = -\frac{1}{n}\ln\delta(T).$$

с теми же оговорками относительно их толкования (подразумевается присутствие одного из двух верхних индексов * или Q, так что, например $\tilde\varepsilon^*(T) = -\frac{1}{n}\ln\varepsilon^*(T)$, и возможность подстановки вместо T критериев $T^{(S)}_{n,\alpha}$ при различных S). Как прежде, критерий отношения правдоподобия обозначится через $T^*_{n,\alpha}$, критерий байесовского типа — через $T^G_{n,\alpha}$, соответствующие им статистики — через S^* и S^G.

Характеристики $\varepsilon(T)$, $\delta(T)$ и $\tilde{\varepsilon}(T)$, $\tilde{\delta}(T)$ при знании объема выборки n эквивалентны. Однако если характеризовать критерий T главной частью асимптотики этих параметров при $n \to \infty$, то такая характеризация в случае использования $\tilde{\varepsilon}(T)$, $\tilde{\delta}(T)$ более грубая. Поэтому все утверждения, связанные с описанием свойств $\tilde{\varepsilon}(T)$, $\tilde{\delta}(T)$, относятся к «грубой» характеризации тестов. Соответственно использование самих вероятностей ошибок $\varepsilon(T)$, $\delta(T)$ будет относиться к «точной» характеризации, хотя на самом деле речь пойдет лишь об асимптотических соотношениях.

2. Закон сохранения (грубый вариант) и его следствия. Итак, мы рассматриваем задачу о проверке двух сложных параметрических гипотез $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$ и $H_2 = \{\theta \in \Theta_2\}$ однозначно определяемую статистическим экспериментом (см. гл. III)

$$\mathrm{E}_n = (\Theta_1,\ \Theta_2.\ \mathscr{P},\ X_n).$$

Для описания асимптотического поведения параметров критериев нами использовалось в гл. III «расстояние» между точками $\theta_1 \in \Theta_1$ и $\theta_2 \in \Theta_2$, определенное как

$$\Lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2) = \sup_{\lambda} \{\alpha\lambda \ln \varphi(\lambda;\ \theta_1,\ \theta_2)\},$$

где $\varphi(\lambda;\ \theta_1,\ \theta_2) = \mathbf{E}_{\theta_1} \exp(\lambda(a(\theta_2) - a(\theta_1)))$, $a(\theta) = a(\theta,\ x) = \ln d\mathbf{P}_\theta / d\mu(x)$ — плотность меры $\mathbf{P}_\theta$. Пусть существует единственная пара $(\widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2$ «ближайших» в Θ_1, Θ_2 точек (см. § 8):

$$\Lambda(\alpha)_* = \min_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2} \Lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2) = \Lambda(\alpha;\ \widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2). \tag{7}$$

Напомним, что «расстояние» Кульбака — Лейблера между распределениями P и Q определяется соотношениями

$$K(P,\ Q) = \begin{cases} \int \ln \dfrac{dP}{dQ} P(dx), & \text{если} \quad Q \ll P, \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В терминах этих расстояний введенные в § 8 константы $d^{\pm}(\theta_1,\ \theta_2)$ можно представить в виде

$$d^+(\theta_1,\ \theta_2) \equiv \varphi'(1;\ \theta_1,\ \theta_2) = K(P_{\theta_2},\ P_{\theta_1}) > 0,$$

$$d^-(\theta_1,\ \theta_2) \equiv \varphi'(0;\ \theta_1,\ \theta_2) = -K(P_{\theta_1},\ P_{\theta_2}) < 0.$$

Константа $d^+(\theta_1,\ \theta_2)$ обладает тем свойством, что в ней достигает минимума функция уклонений $\Lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2) - \alpha$:

$$0 = \Lambda(d^+(\theta_1,\ \theta_2);\ \theta_1,\ \theta_2) - d^+(\theta_1,\ \theta_2) \leqslant \Lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2) - \alpha.$$

Аналогично в точке $\alpha = d^-(\theta_1,\ \theta_2)$ достигает минимума функция уклонений $\Lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2)$:

$$0 = \Lambda(d^-(\theta_1,\ \theta_2);\ \theta_1,\ \theta_2) \leqslant \Lambda(\alpha;\ \theta_1,\ \theta_2).$$

Определение 1. Число

$$d = d(H_1,\ H_2) \equiv \inf_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2} \left(K(P_{\theta_1},\ P_{\theta_2}) + K(P_{\theta_2},\ P_{\theta_1})\right)$$

назовем *расстояние между гипотезами* H_1 и H_2.

Из определения вытекают следующие свойства расстояния $d(H_1,\ H_2)$:

Свойство 1. Расстояние $d(H_1,\ H_2)$ симметрично:

$$d(H_1,\ H_2) = d(H_2,\ H_1).$$

Свойство 2. Расстояние $d(H_1, H_2)$ инвариантно относительно выбора параметризации семейства $\mathscr{P}=\{\mathbf{P}_\theta, \theta\in\Theta_1\cup\Theta_2\}$, т. е. инвариантно относительно любой замены параметра θ.

Вспоминая определение констант $d^\pm$ в § 8, убеждаемся, что в том случае, когда существует единственная пара $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)$ ближайших точек в множествах Θ_1, Θ_2 (см. (8.1)), расстояние между гипотезами H_1 и H_2 представляется в виде

$$d=d^+-d^-=K\left(\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}, P_{\widehat{\theta}_2}\right)+K\left(\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}, \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\right). \tag{8}$$

Пусть расстояние между точками $\theta_1\in\Theta_1$ и $\theta_2\in\Theta_2$ стремится к нулю. Тогда (при естественных условиях регулярности семейства $\mathscr{P}=\{\mathbf{P}_\theta, \theta\in\Theta_1\cup\Theta_2\}$) справедливо

$$K\left(\mathbf{P}_{\theta_1}, \mathbf{P}_{\theta_2}\right)+K\left(\mathbf{P}_{\theta_2}, \mathbf{P}_{\theta_1}\right)\sim(\theta_1-\theta_2)\,I(\theta_1)\,(\theta_1-\theta_2)^{\mathsf{T}},$$

где матрица $I(\theta)$ есть информационная матрица Фишера в точке θ:

$$I(\theta)=\mathbf{E}_\theta a'^{\mathsf{T}}(\theta)a'(\theta).$$

Поэтому справедливо

Свойство 3. При выполнении (8) при $|\widehat{\theta}_1-\widehat{\theta}_2|\to 0$ справедливо

$$d(H_1, H_2)\sim(\widehat{\theta}_1-\widehat{\theta}_2)I(\widehat{\theta}_1-\widehat{\theta}_2)^{\mathsf{T}},$$

где $I\equiv I(\widehat{\theta}_1)\sim I(\widehat{\theta}_2)$.

Напомним теперь схему характеризации качества произвольного теста $T^{(S)}=T^{(S)}_{n,\alpha}$ с помощью сравнения характеристик этого теста с характеристиками критерия отношения правдоподобия $T^*=T^*_{n,\alpha}$, который, согласно результатам гл. III, является асимптотически оптимальным.

В гл. III при некоторых предположениях на эксперимент E_n (для краткости эти предположения назовем условиями (A)) асимптотическое поведение вероятностей ошибок $\varepsilon(T^*)$ и $\delta(T^*)$ может быть выведено в явном виде (см. теоремы 10.1, 11.1). Из этих формул следует, в частности, что

$$\begin{gathered}\widetilde{\varepsilon}\left(T^*_{n,\alpha}\right)=\Lambda(\alpha)(1+o(1)),\\ \widetilde{\delta}\left(T^*_{n,\alpha}\right)=(\Lambda(\alpha)-\alpha)(1+o(1)),\quad \alpha\in\left[d^-, d^+\right],\end{gathered} \tag{9}$$

где функция $\Lambda(\alpha)$ определена формулой (7).

Аналогичные утверждения справедливы и для критериев байесовского типа $T^G=T^G_{n,\alpha}$, если пара априорных распределений $G=(G_1, G_2)$ такова, что меры G_i имеют положительную плотность $g_i(\theta)$ в окрестностях точек $\widehat{\theta}_i$, $i=1, 2$. При этом справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\widetilde{\varepsilon}\left(T^G_{n,\alpha}\right)=\Lambda(\alpha)(1+o(1)),\\ \widetilde{\delta}\left(T^G_{n,\alpha}\right)=(\Lambda(\alpha)-\alpha)(1+o(1)),\end{gathered} \tag{10}$$

где $\alpha\in[d^-, d^+]$. Эти соотношения, относящиеся к «грубым» характеристикам $\widetilde{\varepsilon}$ и $\widetilde{\delta}$, верны в значительно более широких предположениях, чем условия (A). Не останавливаясь на них здесь, мы будем предполагать там, где это понадобится, что соотношения (9) и (10) имеют место.

Характеризация тестов, основанная на асимптотических соотношениях для $\widetilde{\varepsilon}(T)$, $\widetilde{\delta}(T)$, является *более грубой*, чем характеризация, основанная на соотношениях для $\varepsilon(T)$, $\delta(T)$. В настоящем параграфе остановимся на грубом варианте.

Введем в рассмотрение две функции

$$\begin{gathered}\Lambda_-(\alpha)=\Lambda(\alpha+d^-),\\ \Lambda_+(\alpha)=\Lambda(d^+-\alpha)-(d^+-\alpha),\quad \alpha\in[0, d],\end{gathered} \tag{11}$$

где $d=d^+-d^-=d(H_1, H_2)$.

Из свойств функции $\Lambda(\alpha)$ (см. § 8) следует, что функции $\Lambda_\pm(\alpha)$ определены на отрезке $[0, d]$, строго возрастают от значений $\Lambda_\pm(0)=0$ до значений

$$\Lambda_-(d)=d^+, \ \Lambda_+(d)=-d^-.$$

Функцию $\Lambda_-(\alpha)$ можно рассматривать как функцию уклонений, соответствующую $\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}$- распределению центрированной статистики отношения правдоподобия

$$S_n^* - \mathbf{E}_{\widehat{\theta}_1} S_n^* \approx S_n^* + nd^-.$$

Аналогично $\Lambda_+(\alpha)$ соответствует $\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}$-распределению центрированной статистики

$$-S_n^* + \mathbf{E}_{\widehat{\theta}_2} S_n^* \approx -S_n^* + nd^+.$$

В терминах функций $\Lambda_\pm(\alpha)$ асимптотические формулы (9) для $\widetilde{\varepsilon}(T^*)$, $\widetilde{\delta}(T^*)$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} \widetilde{\varepsilon}(T^*_{n,\alpha}) &= \Lambda_-(\alpha - d^-)(1+o(1)), \\ \widetilde{\delta}(T^*_{n,\alpha}) &= \Lambda_+(d^+ - \alpha)(1+o(1)). \end{aligned} \qquad (12)$$

Важным обстоятельством здесь является тот факт, что сумма аргументов функций $\Lambda_\pm$ в правых частях (12) остается постоянной и равна расстоянию между гипотезами H_1 и H_2:

$$-d^- + \alpha + d^+ - \alpha = d.$$

Из сказанного следует также, что функции $\Lambda_\pm(\alpha)$ (см. (11)) имеют обратные строго возрастающие функции $\Lambda_\mp^{-1}(t)$ соответственно в областях $[0, \mp d^\mp]$, и при этом $\Lambda_\pm^{-1}(0)=0$, $\Lambda_\pm^{-1}(d^\mp)=d$. Соотношение (12) поэтому можно записать как

$$\Lambda_-^{-1}(\widetilde{\varepsilon}(T^*_{n,\alpha})) + \Lambda_+^{-1}(\widetilde{\delta}(T^*_{n,\alpha})) \sim d. \qquad (13)$$

Полученное равенство играет ключевую роль в предложенной ниже характеризации качества тестов.

В гл. III использовался весьма естественный и соответствующий общепринятому подход к сравнению критериев. Для описания качества критерия T вычислялась его вероятность ошибки первого рода $\varepsilon(T)$ и рассматривались все критерии из класса $\mathscr{K}(\varepsilon)$; $\varepsilon=\varepsilon(T)$, с вероятностью ошибки первого рода, равной (или близкой) ε. Далее в классе $\mathscr{K}(\varepsilon)$ выбирался асимптотически оптимальный в том или ином смысле тест T_0 (в качестве такового можно взять согласно результатам гл. III критерий отношения правдоподобия T^* или критерий байесовского типа T^G). Тогда качество произвольного теста T можно оценивать сравнением вероятностей ошибок второго рода $\delta(T)$ и $\delta(T_0)$, для которых всегда $\delta(T)\geqslant\delta(T_0)$. Однако такое сравнение лучше проводить с учетом значения $\varepsilon(T)\approx\varepsilon(T_0)$, поэтому возможной характеристикой (грубой) качества теста могло бы быть отношение

$$\frac{\widetilde{\varepsilon}(T)+\widetilde{\delta}(T)}{\widetilde{\varepsilon}(T_0)+\widetilde{\delta}(T_0)} \leqslant 1. \qquad (14)$$

Соотношение (13) позволяет описанную процедуру сравнения тестов упростить и сделать более удобной. Для этого введем в рассмотрение характеристику сравнения, аналогичную (14), но отличающуюся от нее тем, что вместо значений $\widetilde{\varepsilon}(\cdot)$ и $\widetilde{\delta}(\cdot)$, присутствующих в левой части (14), подставим монотонные преобразования от них, порожденные функциями $\Lambda_\mp^{-1}$. Другими словами, для описания качества теста предлагается использовать отношение

$$\frac{\Lambda_-^{-1}(\tilde{\varepsilon}(T))+\Lambda_+^{-1}(\tilde{\delta}(T))}{\Lambda_-^{-1}(\tilde{\varepsilon}(T_0))+\Lambda_+^{-1}(\tilde{\delta}(T_0))}\leqslant 1, \tag{15}$$

где согласно сделанным выше замечаниям можно положить $T_0 = T^* = T^*_{n,\alpha}$; параметр α выбирается так, что $\tilde{\varepsilon}(T^*_{n,\alpha}) = \tilde{\varepsilon}(T)$. Замечательным свойством отношения (15) является тот факт, что его знаменатель

$$\Lambda_-^{-1}(\tilde{\varepsilon}(T^*_{n,\alpha})) + \Lambda_+^{-1}(\tilde{\delta}(T^*_{n,\alpha}))$$

согласно (13) при $\alpha\in[d^-, d^+]$ не зависит от α и равен (асимптотически) расстоянию между гипотезами $d = d(H_1, H_2)$, характеризующему эксперимент в целом (точнее, тройку (Θ_1, Θ_2, $\mathscr{P}$); см. (8)). Это значит, что отношение (15) можно записать в виде

$$\frac{1}{d}\left(\Lambda_-^{-1}(\tilde{\varepsilon}(T))\right) + \Lambda_+^{-1}(\tilde{\delta}(T))\leqslant 1. \tag{16}$$

Это означает, в свою очередь, что описанная выше *процедура сравнения, связанная с построением класса* $\mathscr{K}(\varepsilon)$; $\varepsilon = \varepsilon(T)$, *и отыскание в ней асимптотически оптимального теста, становится ненужной*, поскольку *вычисление количества* (16) *с этой процедурой никак не связано.* В то же время важно отметить, что по самому своему построению оценка качества критерия, основанная на количестве (16), по своей сути эквивалентна этой процедуре.

В известном смысле предложенная процедура сравнения тестов напоминает черновскую эффективность, введенную в основополагающей работе [33] и развитая далее в работах [34, 35]. Черновская эффективность определяется скоростью убывания не одной ошибки в отдельности, а их линейной комбинации (или максимума); это делает ее более «сбалансированной».

Итак, согласно предложенному подходу для заданной тройки (Θ_1, Θ_2, $\mathscr{P}$) должны быть изначально вычислены функции $\Lambda_\pm^{-1}(t)$ и расстояние d. Затем для характеризации качества критерия T надо вычислить число $\Lambda_-^{-1}(\tilde{\varepsilon}(T)) + \Lambda_+^{-1}(\tilde{\delta}(T))$ и сравнить его с d. Отметим, что характеризация критерия происходит с помощью одного числа, а не с помощью двух $\tilde{\varepsilon}(T)$, $\tilde{\delta}(T)$, как это обычно делается.

Перейдем теперь к более точному изложению.

Определение 2. Величина

$$B(T) = \Lambda_-^{-1}(\tilde{\varepsilon}(T)) + \Lambda_+^{-1}(\tilde{\delta}(T)) \tag{17}$$

называется *базой критерия* T.

Теорема 1 (*грубый закон сохранения*). *При выполнении* (9), (10) *при* $n\to\infty$ *справедливы соотношения*

$$B(T^*)\sim d,\ B(T^G)\sim d. \tag{18}$$

При выполнении условий (A) (*условий теорем* 10.1, 11.1) *для любого теста* $T = T^{(S)}$ *при* $n\to\infty$ *справедливо*

$$B(T)\leqslant d. \tag{19}$$

Как уже отмечалось, условия (A) могут быть заменены на более широкие. Естественность термина «закон сохранения» вытекает из самой сути соотношений (18), (19), которые характеризуют «суммарные» максимальные возможности критериев, сохраняющиеся при изменениях $\tilde{\varepsilon}(T)$ и $\tilde{\delta}(T)$. В частности, соотношения (18) и (19) останутся справедливыми, если вероятности ошибок $\varepsilon(T)$ или $\delta(T)$ не будут стремиться к 0; достаточно, чтобы эти вероятности не приближались к 1.

Как это будет видно из дальнейшего (см. также теорему 14.1), качество приближения $B(T^*)\sim d$ лучше, если в (17), (18) рассмотреть «немного смещенные» аргументы и под $B(T)$ понимать величину

$$B(T) = \Lambda_{-}^{-1}\left(\widetilde{\varepsilon}(T) - c_1\frac{\ln n}{n}\right) + \Lambda_{+}^{-1}\left(\widetilde{\delta}(T) - c_2\frac{\ln n}{n}\right),$$

где c_1, c_2 определяются размерностью k и поведением множеств Θ_i в окрестности точек $\theta_i = \widehat{\theta}_i$, а также зависит от того, средние или максимальные вероятности используются при этом. Например, если характеристики $\widetilde{\varepsilon}$ и $\widetilde{\delta}$ отвечают максимальным вероятностям, то $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, если же используются средние вероятности и точки $\widehat{\theta}_i$ лежат внутри своих множеств, то $c_1 = c_2 = (k+1)/2$.

Остановимся на следствиях грубого закона сохранения.

Закон сохранения (т. е. соотношение (19)) позволяет характеризовать качество критерия T с помощью одного числа — базы критерия $B(T)$: чем больше $B(T)$, тем лучше критерий. Эта характеризация, как и само упорядочивание критериев в соответствии со значением $B(T)$, отвечает общепринятой (скажем, характеризации и упорядочиванию критериев по величине $\widetilde{\delta}(T)$ при фиксированном значении $\widetilde{\varepsilon}(T) = \widetilde{\varepsilon}$ при каждом $\widetilde{\varepsilon}$).

Закон сохранения позволяет строить верхние границы для $\widetilde{\delta}(T)$ (грубые нижние границы для $\delta(T)$) при заданных значениях $\widetilde{\varepsilon}(T)$ и, наоборот, границы для $\widetilde{\varepsilon}(T)$ $(\varepsilon(T))$ при заданных значениях $\widetilde{\delta}(T)$. Действительно, непосредственно из (19) получаем

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1

$$\widetilde{\delta} \lesssim \Lambda_{+}\left(d - \Lambda_{-}^{-1}(\widetilde{\varepsilon}(T))\right). \qquad (20)$$

При $T = T^*$ *или* T^G *асимптотическое неравенство* (20) *превращается в асимптотическое равенство.*

Закон сохранения (19) позволяет осуществить *характеризацию всего семейства критериев*. Пусть для критерия $T^{(S)} = T^{(S)}_{n,\alpha}$ в (19) существует предел

$$b(\alpha) = \lim_{n\to\infty} B\left(T^{(S)}_{n,\alpha}\right).$$

Это предположение по отношению к применяемым на практике критериям, как правило, выполнено; его невыполнение требует специальных «паталогических» конструкций.

Функция $b(\alpha)$ (если она существует) будет характеризовать весь класс критериев $\{T^{(S)}_{n,\alpha}, \alpha \in R^1\}$ или, что то же, статистику S'. Знание $b(\alpha)$ позволяет восстанавливать главную часть значения $\widetilde{\delta}(T^{(S)}_{n,\alpha})$ по данному значению $\widetilde{\varepsilon}(T^{(S)}_{n,\alpha})$ и наоборот. Более грубыми характеристиками критерия $T^{(S)}$ (статистики S) являются числа

$$b^{+}(\alpha) = \sup_{\alpha} b(\alpha), \quad b^{-}(\alpha) = \inf_{\alpha} b(\alpha),$$

которые можно назвать соответственно верхней и нижней базой критерия $T^{(S)}$.

Для статистик S^* и S^G характеристика $b(\alpha)$ не зависит от α и равна d.

Наряду с «абсолютной» характеризацией критерия $T = T^{(S)}$ с помощью базы $B(T)$ можно ввести также относительную характеризацию с помощью эффективности $\mathrm{eff}(T)$, определяемую с помощью отношения

$$\mathrm{eff}(T) = \frac{B(T)}{d} \lesssim 1.$$

Кроме приведенных выводов и следствий закон сохранения позволяет также для заданных вероятностей ошибок ε и δ указать нижнюю оценку $n = n(\varepsilon, \delta)$ для числа испытаний, обеспечивающих заданные вероятности $\varepsilon(T) = \varepsilon$, $\delta(T) = \delta$ (см. ниже п. 6). Ряд следствий из теоремы 1, относящихся к случаю близких гипотез (когда $d \to 0$), приведено в разделе 7.

4. Доказательство теоремы 1. Обозначим для краткости

$$B(u, v) = \Lambda_-^{-1}(u) + \Lambda_+^{-1}(v),$$

так что база критерия T равна $B(T) = B(\tilde{\varepsilon}(T), \tilde{\delta}(T))$. Заметим сначала, что

$$\left(\Lambda_-^{-1}(t)\right)' \Big|_{t=\Lambda(\alpha)} = \frac{1}{\lambda(\alpha)}; \quad \left(\Lambda_+^{-1}(t)\right)' \Big|_{t=\Lambda(\alpha)-\alpha} = \frac{1}{1-\lambda(\alpha)},$$

где $\lambda(\alpha) = \Lambda'(\alpha)$. Поэтому справедливо

$$\Lambda_-^{-1}(\Lambda(\alpha) + o(\Lambda(\alpha))) = \Lambda_-^{-1}(\Lambda(\alpha)) + o\left(\frac{\Lambda(\alpha)}{\lambda(\alpha)}\right). \tag{21}$$

Аналогично имеем

$$\Lambda_+^{-1}(\Lambda(\alpha) - \alpha + o(\Lambda(\alpha) - \alpha)) = \Lambda_+^{-1}(\Lambda(\alpha) - \alpha) + o\left(\frac{\Lambda(\alpha) - \alpha}{1 - \lambda(\alpha)}\right). \tag{22}$$

Далее по построению функции $\Lambda_\pm^{-1}(t)$ удовлетворяют соотношению

$$B(\Lambda(\alpha), \Lambda(\alpha) - \alpha) = \Lambda_-^{-1}(\Lambda(\alpha)) + \Lambda_+^{-1}(\Lambda(\alpha) - \alpha) = d. \tag{23}$$

Поэтому в силу (9), (21)—(23) получаем

$$B\left(\tilde{\varepsilon}(I^*), \tilde{\delta}(T^*)\right) = d + o(1)\left[\frac{\Lambda(\alpha)}{\lambda(\alpha)} + \frac{\Lambda(\alpha) - \alpha}{1 - \lambda(\alpha)}\right],$$

откуда вытекает первое соотношение в (18)

$$B(\tilde{\varepsilon}(T^*), \tilde{\delta}(T^*)) = d + o(1).$$

Второе соотношение в (18) доказывается совершенно аналогично.

Соотношение (19) следует из того, что при выполнении условий (A) из равенства вероятностей ошибок первого рода

$$\tilde{\varepsilon}(T^*) = \tilde{\varepsilon}(T)$$

получаем неравенство

$$\tilde{\delta}(T^*)(1 + o(1)) \geqslant \tilde{\delta}(T);$$

остается воспользоваться монотонностью функций $\Lambda_\mp^{-1}(t)$

5. Пример 1. Пусть $\mathscr{P} = \{\Phi_{\theta, E}\}$, т. е. $\mathscr{P}$ есть семейство гауссовских распределений в R^k со средним θ и единичной ковариационной матрицей E. Рассмотрим два множества в R^k:

$$\Theta_1 = \{\theta\colon |\theta - \theta_1^0| \leqslant 1\},\ \Theta_2 = \{\theta\colon |\theta - \theta_2^0| \leqslant 1\},$$

где $|\theta_1^0 - \theta_2^0| > 2$. В этом случае

$$\Lambda(\alpha; \theta_1, \theta_2) = \frac{\left(\alpha + \frac{1}{2}|\theta_1 - \theta_2|^2\right)^2}{2|\theta_1 - \theta_2|^2},$$

так что

$$\Lambda(\alpha) \equiv \min_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2} \Lambda(\alpha; \theta_1, \theta_2) =$$

$$= \min_{t \geqslant R} \frac{(\alpha + t^2/2)^2}{2t^2} = \frac{(\alpha + R^2/2)^2}{2R^2},\ R = |\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2|,$$

где $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ — ближайшие вектора в множествах Θ_1, Θ_2:

$$R = |\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2| = \min_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2} |\theta_1 - \theta_2| = |\theta_1^0 - \theta| - 2 > 0.$$

Поэтому

$$d^- = -\frac{R^2}{2},\ d^+ = \frac{R^2}{2},\ d = R^2,$$

$$\Lambda_\pm(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2R^2},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant R^2.$$

Обратные функции $\Lambda_\pm^{-1}(t)$ совпадают и равны

$$\Lambda_\pm^{-1}(t) = R\sqrt{2t},\ 0 \leqslant t \leqslant R^2/2.$$

Таким образом, в условиях этого примера соотношения (18) имеют вид

$$\begin{aligned} &\sqrt{\widetilde{\varepsilon}(T^*)} + \sqrt{\widetilde{\delta}(T^*)} \sim \frac{R}{\sqrt{2}}, \\ &\sqrt{\widetilde{\varepsilon}(T^G)} + \sqrt{\widetilde{\delta}(T^G)} \sim \frac{R}{\sqrt{2}}; \end{aligned} \tag{24}$$

соответственно соотношение (19) имеет вид

$$\sqrt{\widetilde{\varepsilon}(T)} + \sqrt{\widetilde{\delta}(T)} \leqslant \frac{R}{\sqrt{2}}. \tag{25}$$

Вспоминая, что $\widetilde{\varepsilon}(T) = -\frac{1}{n}\ln\varepsilon(T)$, $\widetilde{\delta}(T) = -\frac{1}{n}\ln\delta(T)$, получаем из (25) нижнюю оценку для числа $n = n(\varepsilon, \delta)$ испытаний, необходимых для того, чтобы вероятности ошибок 1-го и 2-го рода достигли заданных значений ε и δ:

$$n(\varepsilon, \delta) \geqslant \frac{2(\sqrt{-\ln\varepsilon} + \sqrt{-\ln\delta})^2}{R^2}. \tag{26}$$

Из законов сохранения (24) следует также, что асимптотические неравенства (25) и (26) для тестов T^* и T^G превращаются в асимптотические равенства.

Предположим теперь для простоты, что размерность k равна 1, $\theta_1^0 = -a$, $\theta_2^0 = a$, $R = 2(a-1)$, так что

$$\widehat{\theta}_1 = -a + 1 = -R/2,\ \widehat{\theta}_2 = a - 1 = R/2.$$

Рассмотрим выборочную медиану

$$S = S_n = \begin{cases} x_{\left(\frac{n}{2}\right)}, & \text{если } n \text{ — четное}, \\ x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{если } n \text{ — нечетное}, \end{cases} \tag{27}$$

где $(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)})$ — вариационный ряд, отвечающий выборке $(x_1, \ldots, x_n)$.

Для критерия $T^{(S)} = T^{(S)}_{n,\alpha}$, построенного по выборочной медиане (27), вычислим базу

$$B(T) = R\sqrt{2\widetilde{\varepsilon}(T)} + R\sqrt{2\widetilde{\delta}(T)},$$

основанную на максимальных вероятностях ошибок $\varepsilon(T) = \varepsilon^*(T)$, $\delta(T) = \delta^*(T)$. Для этого заметим, что максимальная вероятность ошибки первого рода $\varepsilon^*(T^{(S)}_{n,\alpha})$ ведет себя как

$$\varepsilon^*(T^{(S)}_{n,\alpha}) \sim \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{x_i > \alpha\} \geqslant \frac{n}{2}\right), \tag{28}$$

где $\widehat{\theta}_1 = -\frac{R}{2}$; соответственно $\delta^*\left(T_{n,\alpha}^{(S)}\right)$ ведет себя как

$$\delta^*\left(T_{n,\alpha}^{(S)}\right) \sim \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{x_i \leqslant \alpha\} \geqslant \frac{n}{2}\right), \tag{29}$$

где $\widehat{\theta}_2 = \frac{R}{2}$. Таким образом, задача вычисления асимптотики вероятностей (28) и (29) сводится к задаче о больших уклонениях для симметричной схемы Бернулли ($\xi_j = \pm 1/2$) с вероятностями $p_i = \mathbf{P}\left(\xi_1 = \frac{1}{2}\right)$, $i = 1,2$, где

$$p_1 = \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}(x_1 > \alpha),\ p_2 = \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2}(x_1 \leqslant \alpha). \tag{30}$$

Поэтому получаем для $|\alpha| \leqslant R/2$ (см. § 4)

$$\begin{aligned} \varepsilon^*\left(T_{n,\alpha}^{(S)}\right) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{-n\Lambda_1(0)}}{\lambda_1(0)\,\sigma_1(0)}, \\ \delta^*\left(T_{n,\alpha}^{(S)}\right) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{-n\Lambda_2(0)}}{\lambda_2(0)\,\sigma_2(0)}, \end{aligned} \tag{31}$$

где функции $\Lambda_i(t)$, $\lambda_i(t)$, $\sigma_i(t)$ соответствуют симметричной бернуллиевской случайной величине ξ (принимающей значения $+\frac{1}{2}$ с вероятностью p_i и $-\frac{1}{2}$ с вероятностью $1 - p_i$, $i = 1, 2$). Нам достаточно знать грубую асимптотику вероятностей (31):

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}\left(T_{n,\alpha}^{(S)}\right) &\sim \Lambda_1(0) = -\frac{1}{2}\ln p_1(1 - p_1) - \ln 2, \\ \tilde{\delta}\left(T_{n,\alpha}^{(S)}\right) &\sim \Lambda_2(0) = -\frac{1}{2}\ln p_2(1 - p_2) - \ln 2, \end{aligned} \tag{32}$$

$$-R/2 \leqslant \alpha \leqslant R/2,$$

где параметры $p_1 = p_1(\alpha)$ и $p_2 = p_2(\alpha)$ определяются соотношениями (30). Тогда база $B(T^{(S)})$ удовлетворяет соотношению

$$b(\alpha) \equiv \lim_{n\to\infty} B\left(T_{n,\alpha}^{(S)}\right) =$$

$$= R\sqrt{-\ln p_1(\alpha)(1 - p_1(\alpha)) - 2\ln 2} + R\sqrt{-\ln p_2(\alpha)(1 - p_2(\alpha)) - 2\ln 2}.$$

Ниже приводятся значения характеристики $b(\alpha)$ при $-R/2 \leqslant \alpha \leqslant R/2$ для теста $T^{(S)}$, основанного на выборочной медиане для $R = 1$, $d = 1$

α	$\pm 0{,}50$	$\pm 0{,}45$	$\pm 0{,}40$	$\pm 0{,}35$	$\pm 0{,}30$	$\pm 0{,}25$	$\pm 0{,}20$	$\pm 0{,}15$	$\pm 0{,}10$	$\pm 0{,}05$	$0{,}00$
$b(\alpha)$	0,7280	0,7909	0,7934	0,7947	0,7948	0,7954	0,7955	0,7960	0,7960	0,7962	0,7966

и для $R = 0{,}1$, $d = 0{,}01$

α	$\pm 0{,}05$	$\pm 0{,}04$	$\pm 0{,}03$	$\pm 0{,}02$	$\pm 0{,}01$	$0{,}00$
$b(\alpha)$	0,007972	0,007989	0,007986	0,007984	0,007982	0,007602

Пример 2. Пусть $\mathscr{P} = \{\Phi_{\theta,B}\}$ есть снова семейство гауссовских распределений в R^k со средним θ и невырожденной ковариационной матрицей B (в отличие от примера 1, где $B = E$). Легко видеть, что в этом случае

$$\varphi_B(\lambda; \theta_1, \theta_2) \equiv \mathbf{E}_{\theta_1} e^{\lambda(a(\theta_2) - a(\theta_1))} = \varphi_E\left(\lambda; \theta_1 B^{-1/2}, \theta_2 B^{-1/2}\right).$$

Поэтому функция уклонений для $\Phi_{\theta_1,B}$-распределения величины $a(\theta_2) -$

$-a(\theta_1)$ имеет вид

$$\Lambda(\alpha;\theta_1,\theta_2)=\frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)B^{-1}(\theta_1-\theta_2)^{\mathrm{T}}\right)^2}{2(\theta_1-\theta_2)B^{-1}(\theta_1-\theta_2)^{\mathrm{T}}}. \qquad (33)$$

Информационная матрица Фишера, определяемая как

$$I(\theta)=\mathbf{E}_\theta a'^{\mathrm{T}}(\theta)a'(\theta),$$

для семейства $\mathscr{P}=\{\Phi_{\theta,B}\}$ постоянна и равна

$$I(\theta)=B^{-1}.$$

Рассмотрим далее новую норму в пространстве R^k, введенную с помощью матрицы $I=B^{-1}$:

$$|\theta|_I=(\theta I\theta^{\mathrm{T}})^{1/2};$$

тогда расстояние между множествами Θ_1 и Θ_2 по новой норме обозначим как

$$R_I=\min_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2}|\theta_1-\theta_2|_I, \qquad (34)$$

и функцию (33) представим как

$$\Lambda(\alpha;\theta_1,\theta_2)=\frac{\left(\alpha+\frac{|\theta_1-\theta_2|_I^2}{2}\right)^2}{2|\theta_1-\theta_2|_I^2}.$$

Легко видеть далее, что функция уклонений статистики отношения правдоподобия имеет вид

$$\Lambda(\alpha)\equiv\inf_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2}\Lambda(\alpha;\theta_1,\theta_2)=\frac{(\alpha+R_I^2/2)^2}{2R_I^2}.$$

Таким образом, все формулы из примера 1 сохраняются и для примера 2, если R заменить на R_I (см. (34)); в частности, расстояние между гипотезами $H_i=\{\theta\in\Theta_i\}$ в этом случае равняется квадрату расстояния (30) между множествами Θ_i:

$$d=d(H_1,H_2)=R_I^2.$$

Пример 3. Рассмотрим теперь в качестве $\mathscr{P}=\{\mathbf{P}_\theta,\ \theta\in R^1\}$ семейство распределений Коши с медианой θ:

$$\frac{d\mathbf{P}_\theta}{d\mu}(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+(x+\theta)^2)}.$$

Пусть $\Theta_1=\{\theta\colon\ \theta\leqslant 0\}$, $\Theta_2=\{\theta\colon\ \theta\geqslant 1\}$, так что $\widehat{\theta}_1=0$, $\widehat{\theta}_2=1$. Для критерия $T^{(S)}=T^{(S)}_{n,\alpha}$, основанного на выборочной медиане S_n (см. (27)), вычислим характеристику

$$b(\alpha)=\lim_{n\to\infty}B\left(T^{(S)}_{n,\alpha}\right).$$

Для этого можно воспользоваться формулами (32), где

$$p_1(\alpha)=\int_0^\infty\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\pi},$$

$$p_2(\alpha)=\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{1}{\pi(1+(x+1)^2)}dx=\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{arctg}(\alpha-1)}{\pi},$$

$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Расстояние между гипотезами $H_1 = \{\theta \leqslant 0\}$ и $H_2 = \{\theta \geqslant 1\}$ равно

$$d = d(H_1, H_2) = 0{,}4462;$$

значения характеристики $b(\alpha) = b(1-\alpha)$, определяемые по формуле

$$b(\alpha) = \Lambda_-^{-1}\left(-\frac{1}{2}\ln p_1(\alpha)(1-p_1(\alpha)) - \ln 2\right) +$$
$$+ \Lambda_+^{-1}\left(-\frac{1}{2}\ln p_2(\alpha)(1-p_2(\alpha)) - \ln 2\right),$$

представлены ниже:

α	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$b(\alpha)$	0,5322	0,5222	0,5122	0,5022	0,4922	0,4922

6. **Нижняя граница (грубая) для числа испытаний,** обеспечивающего заданные малые вероятности ошибок ε и δ. Обратимся вновь к соотношениям (9) или (10). До сих пор мы считали, что в них параметры n и α заданы и через них находили асимптотику вероятностей ошибок $\varepsilon(T)$ и $\delta(T)$. Рассмотрим теперь в некотором смысле обратную задачу. Пусть заданы «желаемые» малые значения ε и δ вероятностей ошибок. Каково минимальное значение объема выборки $n = n(\varepsilon, \delta)$, при котором существует тест T, позволяющий различать гипотезы H_1 и H_2 с заданными вероятностями ε и δ? Для этого введем характеристику

$$n(\varepsilon, \delta) = \min\left\{n\colon\ \exists S, \alpha_0\colon\ \varepsilon\left(T^{(S)}_{n,\alpha_0}\right) \leqslant \varepsilon, \delta\left(T^{(S)}_{n,\alpha_0}\right) \leqslant \delta\right\}. \tag{35}$$

Введенная таким образом характеристика $n(\varepsilon, \delta)$ определяется только тройкой $(\Theta_1, \Theta_2, \mathscr{P})$ и не связана *a* priori с каким-нибудь классом критериев. Можно ввести далее другую, менее универсальную характеристику $n(T;\ \varepsilon, \delta)$, определяемую как минимальный объем выборки, обеспечивающий для теста $T = T^{(S)}_{n,\alpha}$ заданные вероятности ошибок ε и δ:

$$n(T^{(S)};\ \varepsilon, \delta) =$$
$$= \min\left\{n\colon\ \exists \alpha_0, \varepsilon\left(T^{(S)}_{n,\alpha_0}\right) \leqslant \varepsilon, \delta\left(T^{(S)}_{n,\alpha_0}\right) \leqslant \delta\right\}.$$

Для любого теста $T^{(S)}$ справедливо неравенство

$$n(T^{(S)};\ \varepsilon, \delta) \geqslant n(\varepsilon, \delta).$$

Далее, из грубого закона сохранения следует, что в качестве теста $T^{(S)}$, дающего минимальное значение характеристики $n(T^{(S)};\ \varepsilon, \delta)$, следует выбрать критерий отношения правдоподобия, т. е. при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ справедливо

$$n(T^*;\ \varepsilon, \delta) \sim n(\varepsilon, \delta). \tag{36}$$

Из теоремы 1 следует, что характеристика $n(T^*;\ \varepsilon, \delta)$ удовлетворяет соотношению

$$\Lambda_-^{-1}\left(-\frac{\ln \varepsilon}{n(T^*;\ \varepsilon, \delta)}\right) + \Lambda_+^{-1}\left(-\frac{\ln \delta}{n(T^*;\ \varepsilon, \delta)}\right) \sim d, \tag{37}$$

из которого в силу (36) можно найти асимптотическое представление для $n(\varepsilon, \delta)$. Для этого рассмотрим при заданных $u > 0$, $v > 0$ строго убывающую по n функцию

$$h(n) = h_{u,v}(n) \equiv \Lambda_-^{-1}\left(\frac{u}{n}\right) + \Lambda_+^{-1}\left(\frac{v}{n}\right).$$

При $n \to \infty$ функция $h(n)$ убывает до 0, а при $n = \max(u/d^+, v/(-d^-))$ значение $h(n)$ строго больше 1. Поэтому существует единственное значение $n_1 = n_1(u, v)$, такое, что

$$h(n_1(u, v)) = d. \tag{38}$$

В силу (37), (36) значение $n_1(u, v)$ определяет асимптотику характеристики $n(T; \varepsilon, \delta)$ для $T = T^*$ или $n(\varepsilon, \delta)$:

$$n(T^*; \varepsilon, \delta) \sim n(\varepsilon, \delta) \sim n_1(-\ln\varepsilon, -\ln\delta),$$

где функция $n_1(u, v)$ определена уравнением (38).

Таким образом, мы вывели из теоремы 1

Следствие 2. *При* $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$

$$n(\varepsilon, \delta) \sim n_1(-\ln\varepsilon, -\ln\delta), \qquad (39)$$

где функция $n_1(u, v)$ *удовлетворяет уравнению* (38).

Функция $n_1(u, v)$ в условиях примеров 1, 2, имеет вид

$$n_1(u, v) = \frac{2(\sqrt{2u} + \sqrt{2v})^2}{R^2},$$

так что в этих примерах справедливо

$$n(\varepsilon, \delta) \sim \frac{2(\sqrt{2(-\ln\varepsilon)} + \sqrt{2(-\ln\delta)})^2}{R^2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда параметр ε убывает «существенно» медленнее, чем параметр δ:

$$-\ln\varepsilon = o(-\ln\delta). \qquad (40)$$

Это может быть, например, когда $\varepsilon = \mathrm{const}$. Тогда непосредственно из уравнения (38) следует, что

$$n_1(-o(\ln\delta), -\ln\delta) \sim \frac{-\ln\delta}{\Lambda_+(d)} \sim \frac{-\ln\delta}{-d^-}.$$

Заметим далее, что соотношение (40) эквивалентно $\varepsilon = e^{o(\ln\delta)}$, поэтому в дополнение к (39) получаем

$$n\left(e^{o(\ln\delta)}, \delta\right) \sim \frac{-\ln\delta}{-d^-}.$$

Аналогичное соотношение верно и в случае, когда $\ln\delta = o(\ln\varepsilon)$, т. е. $\delta = e^{0(\ln\varepsilon)}$:

$$n\left(\varepsilon, e^{o(\ln\delta)}\right) \sim \frac{-\ln\varepsilon}{d^+}.$$

7. Закон сохранения (грубый вариант) и его следствия для близких гипотез. Пусть теперь расстояние $d(H_1, H_2)$ между гипотезами H_1 и H_2 неограниченно убывает с ростом n, но так, что

$$d(H_1, H_2) \gg 1/\sqrt{n}.$$

Если ввести новый параметр $\gamma = \frac{\sqrt{n}}{t}(\theta - \theta_0)$ при некотором θ_0 (расстояние d не зависит от выбора параметризации), то множества Θ_1 и Θ_2, отвечающие гипотезам H_1 и H_2, можно записать в виде

$$\Theta_i = \theta_0 + \frac{t}{\sqrt{n}}\Gamma_i, \quad i = 1, 2,$$

где t подобрано так, что множества Γ_1 и Γ_2 «не сближаются». Для простоты можно считать также, что они и «не удаляются» друг от друга. Это означает, что расстояние между множествами Γ_1 и Γ_2 (евклидовое) сравнимо с 1,

$$t = t_n \to \infty, \ t = o(\sqrt{n}).$$

В этом случае при естественных условиях регулярности семейства $\mathscr{P} =$

$=\{\mathbf{P}_\theta,\ \theta\in\Theta_1\cup\boldsymbol{\Theta}_2\}$ справедливо

$$d(H_1,H_2)\sim\frac{t^2}{n}(\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2)I(\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2)^{\mathrm{T}},$$

где $I=I(\theta_0)$ — информационная матрица Фишера в точке θ_0 (см. свойство 3), $\widehat{\gamma}_i=\frac{\sqrt{n}}{t}\widehat{\theta}_i$, где $(\widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2)$ — пара ближайших точек в множествах $\boldsymbol{\Theta}_1$, Θ_2. Не ограничивая общности, будем считать $\theta_0=0$. Обозначим

$$d_0=(\widehat{\gamma_1}-\widehat{\gamma_2})I(\widehat{\gamma_1}-\widehat{\gamma_2})^{\mathrm{T}},$$

так что

$$d^-\sim-\frac{t^2}{n}\frac{d_0}{2},\ d^+\sim\frac{t^2}{n}\frac{d_0}{2},\ d\sim\frac{t^2}{n}d_0.$$

Очевидно, далее, что при естественных условиях регулярности и невырожденности функция $\Lambda(\alpha)$ в диапазоне $d^-\leqslant\alpha\leqslant d^+$ будет определяться «в главном» только характеристиками первого и второго порядков семейства $\mathscr{P}=\{\mathbf{R}_\theta,\ \theta\in\Theta_1\cup\Theta_2\}$ в окрестности $\theta=0$. Иначе говоря, главный член асимптотики функции $\Lambda(\alpha)=\Lambda_n(\alpha)$ при $\alpha\in[d^-,\ d^+]$ будет совпадать с функцией $\Lambda_0(\alpha)$, построенной для семейства $\Phi=\{\Phi_{\theta,B},\ \theta\in\Theta_1\cup\boldsymbol{\Theta}_2\}$, где $B=I^{-1}$. Обращаясь к примеру 2, получаем

$$\Lambda(\alpha)\sim\frac{\left(\alpha+\frac{1}{N}\frac{d_0}{2}\right)^2}{2\frac{d_0}{N}},\ |\alpha|\leqslant\frac{d_0}{2N},$$

$$\Lambda_\pm(\alpha)\sim\frac{\alpha^2}{2\frac{d_0}{N}},\ 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{d_0}{N},$$

где $N=\frac{n}{t^2}$, $N\to\infty$, $N=o(n)$. Поэтому для $0\leqslant u\leqslant d_0/N^2$ имеем

$$\Lambda_\pm^{-1}(u)\sim\sqrt{2d_0u/N}=\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{2d_0u}.$$

Таким образом, в случае близких гипотез поведение базы произвольного теста T определяется соотношением

$$B(T)\sim\frac{t}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{2d_0\widetilde{\varepsilon}(T)}+\sqrt{2d_0\widetilde{\delta}(T)}\right).\tag{41}$$

Непосредственно из теоремы 1 можно вывести ряд следствий для близких гипотез.

Следствие 3 (*грубый закон сохранения для близких гипотез.*) *Пусть выполнены условия теоремы 1 и при $n\to\infty$*

$$d(H_1,H_2)\sim\frac{t^2}{n}d_0,\ t\to\infty,\ t=o(\sqrt{n}),$$

где $d_0=(\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2)I(\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2)^{\mathrm{T}}$. Тогда справедливо

$$B(T^*)\sim B(T^G)\sim\frac{t^2}{n}d_0;$$

для произвольного теста $T=T^{(s)}$ справедливо

$$B(T)\leqslant\frac{t^2}{n}d_0.\tag{42}$$

Это соотношение приведено в [36], [37] для одномерного семейства распределений $F_\theta(x)$; $\theta \in R^1$, и для двух простых близких гипотез

$$H_1 = \left\{\theta_1 = \theta_0 + \frac{t}{\sqrt{n}}\gamma_1\right\},\ H_2 = \left\{\theta_2 = \theta_0 + \frac{t}{\sqrt{n}}\gamma_2\right\},\ \gamma_1 \neq \gamma_2,\ t \to \infty,$$
$$t/\sqrt{n} \to 0,$$

но в более широких положениях относительно регулярности семейства $F_\theta(x)$. Поскольку в [36], [37] отсутствуют доказательства, мы скажем о них несколько слов. В случае двух простых гипотез для доказательства (42) достаточно рассмотреть критерий отношения правдоподобия

$$T(\theta_1, \theta_2) = 1\{A_n(\theta_2) - A_n(\theta_1) > n\alpha\}.$$

Используя асимптотические формулы для ошибок первого и второго рода ([1], с. 287), можно убедиться, что если $|\alpha| \leqslant t/(2nd_0)$, то справедливо

$$B_{\theta_1,\theta_2}(T(\theta_1, \theta_2)) \sim \frac{t^2}{n}(\gamma_2 - \gamma_1)^2 I(\theta_1),$$

где

$$B_{\theta_1\theta_2}(T) = \frac{t}{n}\left[\left(\frac{2d_0 \,|\ln \varepsilon_{\theta_1}(T)|}{n}\right)^{1/2} + \left(\frac{2d_0\,|\ln \delta_{\theta_2}(T)\,|}{n}\right)^{1/2}\right],$$
$$d_0 = d_0(\gamma_1, \gamma_2) \equiv (\gamma_2 - \gamma_1)^2 I(\theta_1).$$

Поэтому для любого другого теста T, вероятности ошибок которого отделены от 1, имеет место грубый закон сохранения (42).

Покажем далее, что с помощью соотношения (42) для двух простых близких гипотез можно получить грубый закон сохранения для максимальных ошибок для случая двух сложных близких гипотез:

$$H_1 = \left\{\theta \in \Theta_1 \equiv \theta_0 \frac{t}{\sqrt{n}}\Gamma_1\right\},\quad H_2\left\{\theta \in \Theta_2 \equiv \theta_0 + \frac{t}{\sqrt{n}}\Gamma_2\right\},$$

где

$$\Gamma_1,\ \Gamma_2 \subseteq R^k,\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing,\ t \to \infty,\ t/\sqrt{n} \to 0.$$

Для k-мерного параметра $\theta_i = \theta_0 + \frac{t}{\sqrt{n}}\gamma_i$ соотношение (42) можно переписать в виде

$$\frac{t}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\,|\ln \varepsilon_{\theta_1}(T)|\,\right)^{1/2} + \left(\frac{2}{n}|\ln \delta_{\theta_2}(T)\,|\right)^{1/2}\right] \leqslant \frac{t}{n}\sqrt{d_0(\gamma_1, \gamma_2)},$$

где $d_0(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2 - \gamma_1) I(\theta_1)(\gamma_2 - \gamma_1)^\tau$. Из последнего следует асимптотическое неравенство для максимальных ошибок $\varepsilon^*(T)$, $\delta^*(T)$:

$$\frac{t}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\,|\ln \varepsilon^*(T)\,|\right)^{1/2} + \left(\frac{2}{n}\,|\ln \delta^*(T)\,|\right)^{1/2}\right] \leqslant \frac{t}{n}\sqrt{d_0(\gamma_1, \gamma_2)}$$

для всех $\gamma_i \in \Gamma_i$, $i = 1, 2$. Минимизируя правую часть по $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$, получаем соотношение (42) для характеристики $B(T)$, построенной по максимальным ошибкам.

Заметим, что получить аналогичное доказательство для средних ошибок не удается.

Из следствия 3 можно вывести нижние асимптотические границы для логарифмической вероятности одной ошибки через логарифмическую вероятность другой ошибки. Для этого нужно воспользоваться представлением (41) для базы $B(T)$ и соотношением (42); получаем утверждение

Следствие 4. *В условиях следствия 3 для любого теста T справедливо*

$$\ln \delta(T) \geqslant -t^2\left(\sqrt{\frac{d_0}{2}}-\sqrt{-\frac{\ln \varepsilon(T)}{t^2}}\right)^2; \tag{43}$$

для тестов T^* и T^G асимптотическое неравенство (43) превращается в асимптотическое равенство.

Очевидно, что нижняя граница для $\ln \varepsilon(T)$ выглядит совершенно аналогично.

Из соотношения (42) можно вывести и грубую нижнюю границу для характеристики $n(\varepsilon, \delta)$ (см. (35))

Следствие 5. *В условиях следствия 3 при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ справедливо*

$$n(\varepsilon, \delta) \sim \frac{(\sqrt{-\ln \varepsilon}+\sqrt{-\ln \delta})^2}{d(H_1, H_2)/2}.$$

Как и для далеких гипотез, в случае близких можно «упростить» форму нижней границы для характеристики $n(\varepsilon, \delta)$, если вероятности ошибок убывают с «существенно» разной скоростью. Скажем, если $\ln \varepsilon = o(\ln \delta)$, то

$$n(\varepsilon, \delta) \sim \frac{-\ln \delta}{d(H_1, H_2)/2}. \tag{44}$$

В частности, соотношение (44) остается верным, даже если параметр ε не убывает до 0 (достаточно, чтобы ε не приближалось к 1).

§ 15. ТОЧНЫЙ ВАРИАНТ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ

1. Точные асимптотические соотношения для вероятностей ошибок критерия отношения правдоподобия и критерия байесовского типа. Перейдем к рассмотрению более точной характеризации тестов с помощью асимптотики самих вероятностей $\varepsilon(T)$ и $\delta(T)$. В отличие от асимптотик логарифмических вероятностей $\tilde{\varepsilon}(T)$ и $\tilde{\delta}(T)$, для вероятностей $\varepsilon(T)$ и $\delta(T)$ уже не безразлично, максимальные или средние вероятности ошибок используются. Тем не менее наши рассуждения применимы в равной мере и к тем и другим и отличаются только несущественными деталями. Поэтому для краткости в настоящем параграфе ограничимся рассмотрением только максимальных вероятностей ошибок, т. е. будем считать, что

$$\varepsilon(T) = \varepsilon^*(T), \ \delta(T) = \delta^*(T).$$

Изменения, которые появляются при переходе к средним вероятностям, пояснены в замечании 1.

Нам понадобится некоторая, более точная чем в § 14, постановка задачи. Прежде всего, вероятности $\varepsilon(T)$ и $\delta(T)$ должны сходиться к 0 (иногда достаточно быстро), поэтому, следуя § 9—13, введем в рассмотрение соответственно нижнюю и верхнюю границы $\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+$ для вероятностей $\varepsilon(T)$ (эти границы построены во всех теоремах, на которые будем ссылаться ниже). Как и ранее, обозначим $\mathscr{K}(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ класс тестов $T = T_{n,\alpha}^{(S)}$ таких, что $\varepsilon_n^- \leqslant \varepsilon(T) \leqslant \varepsilon_n^+$.

При выполнении условий (A) (условий теорем 10.1; 11.1) (см. § 1.0; 1.1) на статистический эксперимент

$$E_n = (\Theta_1, \Theta_2, \mathscr{P}, X_n)$$

найдены асимптотические представления для вероятностей ошибок критерия отношения правдоподобия $T_{n,\alpha}^*$ из класса $\mathscr{K}(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ (т. е. для

$\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$, где границы $\alpha^\pm$ для уклонений α определены в упомянутых теоремах):

$$\tilde{\varepsilon}(T^*_{n,\alpha}) = \Lambda(\alpha) + \frac{\ln n}{2n} + \frac{\ln \lambda(\alpha)}{n} + \frac{\ln c_1(\alpha)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1}$$

$$\tilde{\delta}(T^*_{n,\alpha}) = \Lambda(\alpha) - \alpha + \frac{\ln n}{2n} + \frac{\ln(1-\lambda(\alpha))}{n} + \frac{\ln c_2(\alpha)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где, как и ранее, $\lambda(\alpha) = \Lambda'(\alpha)$, функции $c_i(\alpha)$ найдены в явном виде, непрерывны по α и отделены от 0 и ∞ на отрезке $[\alpha^-, \alpha^+]$ (т. е. $c_i(\alpha)$ обладают этими свойствами равномерно для всего класса $\mathcal{K}(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$). Аналогичные формулы справедливы и для критерия байесовского типа $T^G = T_{n,\alpha}$ из класса $\mathcal{K}(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^-)$; отличие состоит только в функциях $c_i(\alpha)$, которые в этом случае зависят от априорных мер G_1, G_2.

В ряде случаев нам понадобятся не условия (A), а только их следствия — соотношения (1).

2. Точный вариант закона сохранения и его следствия. Асимптотически более точной характеристикой теста T по сравнению с базой $B(T)$ является понятие дефекта $D(T)$, которое определим как нормированную разность $d - B(T)$ (чем больше дефект, тем хуже тест. Нормировка подбирается так, чтобы дефект асимптотически оптимального критерия оставался собственной величиной во всей зоне уклонений вероятностей ошибок и во всей зоне сближения гипотез). Обозначим для $u > 0$, $v > 0$

$$b(u, v) = \frac{n\Lambda_-^{-1}(u)\,\Lambda_+^{-1}(v)}{d}\,(d - B(u, v)), \tag{2}$$

где

$$B(u, v) \equiv \Lambda_-^{-1}(u) + \Lambda_+^{-1}(v).$$

Определение 1. Дефектом критерия T называется величина

$$D(T) = b\left(\tilde{\varepsilon}(T) - \frac{\ln n}{2n},\ \tilde{\delta}(T) - \frac{\ln n}{2n}\right).$$

Уточнением закона сохранения (теоремы 14.1) является следующее утверждение.

Теорема 1 (*точный закон сохранения*). I. *При выполнении соотношений* (1) *дефект критерия отношения правдоподобия* $T^* = T^*_{n,\alpha}$ *имеет вид*

$$D(T^*_{n,\alpha}) = H(\alpha) + o(1),$$

где

$$H(\alpha) = -\frac{(\alpha - d^-)(d^+ - \alpha)}{d}\left(\frac{\ln \lambda(\alpha)\, c_1(\alpha)}{\lambda(\alpha)} + \frac{\ln(1-\lambda(\alpha))\, c_2(\alpha)}{1-\lambda(\alpha)}\right).$$

Таким образом, дефект критерия $T^*_{n,\alpha}$ *из класса* $\mathcal{K}(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ (*т. е. при* $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$) *допускает оценку*

$$H^- + o(1) \leqslant D(T^*_{n,\alpha}) \leqslant H^+ + o(1),$$

где

$$H^- = \min_{\alpha^- \leqslant \alpha \leqslant \alpha^+} H(\alpha),\quad H^+ = \max_{\alpha^- \leqslant \alpha \leqslant \alpha^+} H(\alpha).$$

II. *Аналогичное утверждение* (*с очевидными поправками*) *справедливо и для критерия байесовского типа* $T^G = T^G_{n,\alpha}$.

III. *Если выполнены условия* (A), *то дефект любого теста* T *из класса* $\mathcal{K}(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ *допускает оценку снизу*:

$$D(T) \geqslant H_1(\alpha) + o(1), \tag{3}$$

где

$$H_1(\alpha)=H(\alpha)+\frac{(\alpha-d^-)(d^+-\alpha)}{d}\ln p(\alpha)\frac{1}{\lambda(\alpha)(1-\lambda(\alpha))},$$

$$\alpha=\Lambda^{-1}\left(\tilde{\varepsilon}(T)-\frac{\ln n}{2n}\right),$$

функции $p(\alpha)\in(0,\ 1]$ *определены в теоремах* 10,1, 11.1.

Доказательство теоремы 1 практически не отличается от доказательства теоремы 14.1; тут тоже нужно «извлекать» из-под знака функций $\Lambda_{\pm}^{-1}(u)$ слагаемые порядка $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Действительно, как было установлено при доказательстве теоремы 14.1, справедливо

$$\begin{gathered}\Lambda_{-}^{-1}\left(\Lambda(\alpha)+\frac{x}{n}\right)=\alpha-d^-+\frac{x}{\lambda(\alpha)n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\\ \Lambda_{+}^{-1}\left(\Lambda(\alpha)-\alpha+\frac{y}{n}\right)=d^+-\alpha+\frac{x}{(1-\lambda(\alpha))n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{gathered}\tag{4}$$

В силу (1) справедливо

$$\begin{gathered}\tilde{\varepsilon}-\frac{\ln n}{2n}=\Lambda(\alpha)+\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\\ \tilde{\delta}-\frac{\ln n}{2n}=\Lambda(\alpha)-\alpha+\frac{y}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\end{gathered}\tag{5}$$

где

$$x=\ln(\lambda(\alpha)c_1(\alpha)),\quad y=\ln((1-\lambda(\alpha))c_2(\alpha)).$$

Используя далее формулы (4) и (5), получаем требуемое:

$$H(\alpha)=-\frac{(\alpha-d^-)(d^+-\alpha)}{d}\left(\frac{x}{\lambda(\alpha)}+\frac{y}{1-\lambda(\alpha)}\right).$$

Таким образом, часть I теоремы 1 доказана. Поскольку критерий байесовского типа $T^G=T^G_{n,\alpha}$ удовлетворяет соотношениям, аналогичным (1), то часть II теоремы 1 тоже справедлива. Для доказательства части III достаточно заметить (см. теоремы 10.1; 11.1), что для теста $T=T^{(s)}$, удовлетворяющего условию

$$\tilde{\varepsilon}(T)=\tilde{\varepsilon}\left(T^*_{n,\alpha}\right)-\frac{\ln p(\alpha)}{n},$$

выполняется

$$\tilde{\delta}(T)\leqslant\tilde{\delta}\left(T^*_{n,\alpha}\right)-\frac{\ln p(\alpha)}{n}.$$

Поэтому дефект $D(T)$ произвольного теста T допускает оценку снизу

$$\begin{gathered}D(T)\geqslant D\left(T^*_{n,\alpha}\right)+\frac{(\alpha-d^-)(d^+-\alpha)}{d}\ln p(\alpha)\frac{1}{\lambda(\alpha)(1-\lambda(\alpha))}+\\ +o(1)\equiv H_1(\alpha)+o(1).\end{gathered}$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если использовать не максимальные, а средние вероятности ошибок $\varepsilon(T)=\varepsilon^Q(T)$, $\delta(T)=\delta^Q(T)$, то формулы (1) сохранятся, если слагаемые $\frac{\ln n}{2n}$ заменить на $\frac{(k+1)}{2}\frac{\ln n}{n}$. Поэтому в определении 1 логарифмические вероятности $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\delta}$ нужно «подправлять» в этом случае величиной $\frac{(k+1)}{2}\frac{\ln n}{n}$. При этих изменениях теорема 1 сохранится и для средних вероятностей ошибок.

Остановимся на следствиях из теоремы 1.

Точный закон сохранения позволяет выполнить более точную характеризацию критериев. Теорема 1 показывает, что одного параметра (базы $B(T)$) для более точной характеризации теста T все же недостаточно, так как нижняя граница дефекта $D(T)$ зависит от параметра α или, что то же самое, от характеристики $\varepsilon(T)$. Если исходить из чуть более грубой характеризации всего семейства тестов $T^{(S)} = T^{(S)}_{n,\alpha}$ из класса $\mathscr{K}(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$, основанной на характеристиках

$$H_{1-} = \inf_{\alpha\in[\alpha^-,\alpha^+]} H_1(\alpha), H_{1+} = \sup_{\alpha\in[\alpha^-,\alpha^+]} H_1(\alpha),$$

то можно, как и в теореме 14.1, обойтись одной характеристикой. При этом нужно будет сравнивать дефект $D(T)$ с постоянными границами $H_{1\pm}$, не зависящими от $\varepsilon(T)$.

Отметим также, что изменение дефекта $D(T)$ на постоянное число c отвечает изменению базы $B(T)$ на величину порядка c/n.

Точный вариант закона сохранения (теорема 1) позволяет указать *более точные, чем в § 14, верхние границы для логарифмической вероятности* $\tilde{\delta}(T)$ *при заданных значениях* $\tilde{\varepsilon}(T)$. Действительно, из (3) следует, что

$$\tilde{\delta}(T) - \frac{\ln n}{2n} \leqslant \Lambda_+\left(d - \Lambda_-^{-1}\left(\tilde{\varepsilon}(T) - \frac{\ln n}{2n}\right) - \frac{H_2(\alpha)}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где

$$H_2(\alpha) = \frac{H_1(\alpha)\, d}{(\alpha - d^-)(d^+ - \alpha)}, \tag{6}$$

$$\alpha = \Lambda^{-1}\left(\tilde{\varepsilon}(T) - \frac{\ln n}{n}\right). \tag{7}$$

Извлекая далее $\frac{H_2(\alpha)}{n}$ из-под знака Λ_+ и учитывая, что

$$\Lambda'_+(t)\Big|_{t=d-\Lambda_-^{-1}\left(\tilde{\varepsilon}(T)-\frac{\ln n}{2n}\right)} = 1 - \lambda(\alpha),$$

получаем

Следствие 1 (*верхняя граница для* $\tilde{\delta}(T)$). *В условиях теоремы* 1 *справедливо*

$$\tilde{\delta}(T) \leqslant \Lambda_+\left(d - \Lambda_-^{-1}\left(\tilde{\varepsilon}(T) - \frac{\ln n}{2n}\right)\right) - \frac{H_2(\alpha)(1 - \lambda(\alpha))}{n} + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где константа α *и функция* $H_2(\alpha)$ *определены соотношениями* (7) *и* (6).

Из точного закона сохранения можно вывести *более точную формулу для характеристики* $n(\varepsilon, \delta)$. В § 14 (см. п. 6) мы выписали грубую асимптотическую формулу для минимального числа $n(\varepsilon, \delta)$ (см. (14.35)) испытаний, обеспечивающего заданные значения вероятностей ошибок ε и δ:

$$n(\varepsilon, \delta) \sim n_1(-\ln \varepsilon, -\ln \delta), \tag{8}$$

где $n_1(u, v)$ есть единственное решение уравнения

$$\Lambda_-^{-1}\left(\frac{u}{n_1}\right) + \Lambda_+^{-1}\left(\frac{v}{n_1}\right) = d. \tag{9}$$

Более точную, чем (8), границу $n_0(\varepsilon, \delta)$ для характеристики $n(\varepsilon, \delta)$ (или $n(T; \varepsilon, \delta)$) будем искать в форме

$$n_0 = \frac{n_1(-\ln\varepsilon - \ln\delta)}{1 + t}, \quad t = o(1).$$

Пусть далее

$$\alpha_1 = \Lambda^{-1}\left(-\frac{\ln\varepsilon}{n_1}\right),$$

тогда справедливо в силу (9)

$$-\frac{\ln \varepsilon}{n_1} = \Lambda(\alpha_1), \quad -\frac{\ln \delta}{n_1} = \Lambda(\alpha_1) - \alpha_1.$$

В силу точного закона сохранения имеем

$$d - \Lambda_{-}^{-1}\left(\Lambda(\alpha_1)(1+t) - \frac{\ln n_1}{2n_1}\right) -$$
$$- \Lambda_{+}^{-1}\left((\Lambda(\alpha_1) - \alpha_1)(1+t) - \frac{\ln n_1}{2n_1}\right) = \frac{H_1(\alpha_1)}{n_1} + o\left(\frac{1}{n_1}\right).$$

Из последнего получаем

$$t = \frac{-\frac{H_1(\alpha_1)}{n_1} + \frac{\ln n_1}{2n_1}\,\frac{1}{\lambda(\alpha_1)(1-\lambda(\alpha_1))}}{\frac{\Lambda(\alpha_1)}{\lambda(\alpha_1)} + \frac{\Lambda(\alpha_1)-\alpha_1}{1-\lambda(\alpha_1)}} + o\left(\frac{1}{n_1}\right).$$

Таким образом,

$$n_0 = n_1 - n_1 t + o(1) = n_1 + n_2 + o(1),$$

где

$$n_1 = n_1(-\ln \varepsilon - \ln \delta), \quad \alpha_1 = \Lambda\left(-\frac{\ln \varepsilon}{n_1}\right),$$

$$n_2 = \frac{H_1(\alpha_1) - \ln n_1 \frac{1}{\lambda(\alpha_1)(1-\lambda(\alpha_1))}}{\frac{\Lambda(\alpha_1)}{\lambda(\alpha_1)} + \frac{\Lambda(\alpha_1)-\alpha_1}{1-\lambda(\alpha_1)}}. \tag{10}$$

Мы доказали

Следствие 2 (*нижняя граница для* $n(\varepsilon, \delta)$). *В условиях теоремы* 1 *справедливо неравенство*

$$n(\varepsilon, \delta) \geqslant n_1 + c_1 \ln n_1 + c_2 + o(1),$$

где $n_1 = n_1(-\ln \varepsilon, -\ln \delta)$, *функция* $n_1(u, v)$ *определяется уравнением* (9),

$$c_1 = \lambda(\alpha_1)\,(\lambda(\alpha_1) - 1)\,\beta(\alpha_1),$$

$$c_2 = H(\alpha_1)\,\beta(\alpha_1), \quad \alpha_1 = \Lambda\left(-\frac{\ln \varepsilon}{n_1}\right),$$

$$\beta(\alpha_1) = \left[\frac{\Lambda(\alpha_1)}{\lambda(\alpha_1)} + \frac{\Lambda(\alpha_1)-\alpha_1}{1-\Lambda(\alpha_1)}\right]^{-1}.$$

3. Следствия точного варианта закона сохранения для близких гипотез. Пусть гипотезы H_1 и H_2 близки. Как и в § 14, п. 7, в этом случае удобно считать, что

$$\Theta_i = \frac{t}{\sqrt{n}}\,\Gamma_i, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

где $t = t_n \to \infty$, $t = o(\sqrt{n})$; тогда справедливо (см. § 14, п. 7)

$$d(H_1, H_2) \sim \frac{t^2}{n} d_0, \quad d_0 = (\widehat{\gamma}_1 - \widehat{\gamma}_2)\, I\, (\widehat{\gamma}_1 - \widehat{\gamma}_2)^{\mathrm{T}}. \tag{12}$$

При этом естественно ожидать (разумеется, при достаточно жестких условиях регулярности на статистический эксперимент $E_n = (\Theta_1, \Theta_2, \mathscr{P}, X_n)$), что все нужные нам характеристики допускают асимптотические разложения по параметру

$$\nu = \nu(n) \equiv \frac{t}{\sqrt{n}}.$$

Например,

$$d(H_1,\ H_2)=\nu^2 d_0+\nu^3 d_1+\ldots+O(\nu^{2+m}),$$
$$\Lambda(\alpha\nu)=\nu^2\Lambda_0(\alpha)+\nu^3\Lambda_1(\alpha)+\ldots+O(\nu^{2+m}), \tag{13}$$
$$\Lambda_{\pm}^{-1}(u\nu)=\nu\Lambda_{0\pm}^{-1}(u)+\nu^2\Lambda_{1\pm}(u)+\ \ldots\ +O\left(\nu^{1+m}\right),$$

где главные части асимптотических разложений найдены в § 14:

$$\Lambda_0(\alpha)=\frac{\left(\alpha+\frac{d_0}{2}\right)^2}{2d_0},\quad |\alpha|\leqslant\frac{d_0}{2},$$
$$\Lambda_{0\pm}^{-1}(u)=\sqrt{2d_0u},\quad |u|\leqslant d_0,$$

и константа d_0 определена в соотношении (12). Для того, чтобы формулы (13) имели место, нужно, чтобы семейство $\mathbf{P}_\theta$ имело достаточно регулярную плотность $p_\theta(x_1)$ в окрестности точек $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$; в тех случаях, когда крайние точки $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$ лежат на границах $\partial\Theta_1$ и $\partial\Theta_2$ своих множеств Θ_1 и Θ_2, нужно, чтобы участки границ $\partial\Theta_i$ в окрестностях крайних точек $\widehat{\theta}_i$ были достаточно гладкими (понятно, что требования регулярности повышаются с ростом m в (13)). Можно указать рекуррентные формулы для чисел d_i и функций $\Lambda_{i\pm}^{-1}(0)$, $i\geqslant 0$, для характеристик, входящих в точный вариант закона сохранения. Это позволит уточнить закон сохранения для близких гипотез. Функция $b(u,\ v)$ (см. (2)), которая участвует в определении дефекта $D(T)$, представляется в виде

$$b(\nu^2u,\ \nu^2v)=n\nu^2b_0(u,\ v)+n\nu^3b_1(u,\ v)+\ldots, \tag{14}$$

где

$$b_0(u,v)=\frac{\Lambda_{0-}^{-1}(u)\,\Lambda_{0+}^{-1}(v)}{d_0}\left(d_0-\Lambda_{0-}^{-1}(u)-\Lambda_{0+}^{-1}(v)\right),$$

$u,\ v\in[0,\ d_0]$. Поэтому, если $\nu\to 0$ достаточно быстро $(n\nu^{2+l}\to 0)$, то растущими в разложении (14) будут лишь несколько первых слагаемых (первые l слагаемых). В частности, для уклонений

$$t=t_n=o(n^{1/6}),\ t\to\infty,$$

играет существенную роль только первое слагаемое в асимптотическом разложении (14).

Первое слагаемое в (14) совпадает с аналогичной характеристикой для гауссовского семейства

$$\Phi=(\Phi_{\theta,B},\ \theta\in\Theta_1\cup\Theta_2),\text{ где } B=I^{-1}.$$

Полученный вывод следует и из статистического принципа инвариантности, в силу которого исходную задачу можно редуцировать к аналогичной задаче для гауссовского семейства (см. § 13).

Таким образом, мы можем сформулировать в качестве следствий из теоремы 1 соответствующие утверждения для близких гипотез для уклонений $t=t_n=o(n^{1/6})$, $t\to\infty$.

Итак, пусть множества Θ_1, Θ_2 имеют вид (11), где

$$t=t_n\to\infty,\ t=o(n^{1/6}).$$

В этом случае согласно (14) дефект $D(T)$ произвольного теста T можно представить в виде

$$D(T)\equiv b\left(\widetilde{\varepsilon}(T)-\frac{\ln n}{2n},\ \widetilde{\delta}(T)-\frac{\ln n}{2n}\right)=$$
$$=b\left(\nu^2\left(-\frac{\ln\varepsilon(T)}{t^2}-\frac{\ln n}{2t^2}\right),\ \ \nu^2\left(-\frac{\ln\delta(T)}{t^2}-\frac{\ln n}{2t^2}\right)\right)\sim$$
$$\sim t^2b_0\left(-\frac{\ln\varepsilon(T)}{t^2}-\frac{\ln n}{2t^2},\ -\frac{\ln\delta(T)}{t^2}-\frac{\ln n}{2t^2}\right)\equiv D_0(T),$$

где

$$b_0(u,v) = \frac{\Lambda_{0-}^{-1}(u)\,\Lambda_{0+}^{-1}(v)\left(d_0 - \Lambda_{0-}^{-1}(u) - \Lambda_{0+}^{-1}(v)\right)}{d_0} = 2uv\left(d_0 - \sqrt{2d_0u} - \sqrt{2d_0v}\right).$$

Отсюда получаем

Следствие 3 (*точный закон сохранения для уклонений* $t = o(n^{1/6})$). I. *Для критерия отношения правдоподобия дефект имеет вид*

$$D\left(T^*_{n,\alpha n/t^2}\right) = D_0\left(T^*_{n,\alpha n/t^2}\right) + o(1) = H_0(\alpha n/t^2) + o(1),$$

где

$$H_0(\alpha) = \frac{\left(\alpha + \frac{d_0}{2}\right)\left(\frac{d_0}{2} - \alpha\right)}{d_0} \times$$

$$\times\left[\frac{\ln\left(\frac{d_0}{2} + \alpha\right)\Big/ d_0c_1(\alpha)}{\left(\frac{d_0}{2} + \alpha\right)\Big/ d_0} + \frac{\ln\left(\frac{d_0}{2} - \alpha\right)\Big/ d_0c_2(\alpha)}{\left(\frac{d_0}{2} - \alpha\right)\Big/ d_0}\right].$$

II. *Аналогичное утверждение справедливо для дефекта критерия байесовского типа* $T^G = T^G_{n,\alpha}$.

III. *Для произвольного теста T из класса $\mathscr{K}(\varepsilon_n^-, \varepsilon_n^+)$ дефект допускает оценку снизу*

$$D(T) = D_0(T) - o(1) \geqslant H_{01}(\alpha) + o(1),$$

где

$$H_{01}(\alpha) = H_0(\alpha) - d_0 \ln p(\alpha),$$

$$\alpha = \Lambda_0^{-1}\left(-\frac{\ln \varepsilon(T)}{t^2} - \frac{\ln n}{2t^2}\right).$$

Следствие 4 (*верхняя грань для* $\tilde{\delta}(T)$). *В условиях следствия 3 справедливо*

$$-\frac{\ln \delta(T)}{t^2} \leqslant \Lambda_{0+}\left(d_0 - \Lambda_{0-}^{-1}\left(-\frac{\ln \varepsilon(T)}{t^2} - \frac{\ln \delta(T)}{2t^2}\right)\right) -$$

$$- \frac{H_{02}(\alpha)(1 - \lambda_0(\alpha))}{t^2} + \frac{\ln n}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

где функция $H_{02}(\alpha)$ определяется так же, как в следствии 1.

Следствие 5 (*нижняя граница для* $n(\varepsilon, \delta)$). *В условиях следствия* 3 *справедливо неравенство*

$$n(\varepsilon, \delta) \geqslant n_1 + c_1 \ln n_1 + c_2 + o(1),$$

где $n_1 = n_1(-\ln \varepsilon, -\ln \delta)$, функция $n_1(u, v)$ *определяется как* (*см. следствие* 14.5)

$$n_1(u,v) = \frac{\left(\sqrt{2d_0u} + \sqrt{2d_0v}\right)^2}{d^2},$$

константы c_1 и c_2 определяются как в следствии 2.

§ 16. СВЯЗЬ С ДРУГИМИ ПОДХОДАМИ К ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ТЕСТОВ (ПОДХОДЫ БАХАДУРА И ХОДЖЕСА — ЛЕМАНА)

1. Характеризация качества теста с помощью оценивания числа необходимых испытаний. Пусть тест $\quad = T^{(S)}_{n,\alpha}$ характеризуется вероятностями ошибок $\varepsilon(T^{(S)})$ и $\delta(T^{(S)})$. Под $\varepsilon(T)$ и $\delta(T)$ будем понимать максимальные вероятности ошибок $\varepsilon^*(T)$, $\delta^*(T)$ либо средние вероятности

$\varepsilon^Q(T)$, $\delta^Q(T)$ (см. (14.1), (14.2)), либо более «детальные» характеристики

$$\varepsilon_\theta\left(T^{(S)}_{n,\alpha}\right)=\mathbf{P}_\theta(S_n(X)>n\alpha),\ \theta\in\Theta_1,$$
$$\delta_\theta\left(T^{(S)}_{n,\alpha}\right)=\mathbf{P}_\theta(S_n(X)\leqslant n\alpha),\ \theta\in\Theta_2.$$

Мы уже рассматривали в § 14, 15 характеристику

$$n\left(T^{(S)};\varepsilon,\delta\right)=\min\left\{n\colon\ \exists\alpha_0,\ \varepsilon\left(T^{(S)}_{n,\alpha_0}\right)\leqslant\varepsilon,\ \delta\left(T^{(S)}_{n,\alpha_0}\right)\leqslant\delta\right\},$$

определяющую минимальное число испытаний, обеспечивающее нужную малость вероятностей $\varepsilon(T)$ и $\delta(T)$. В § 14, 15 получены соответственно «грубая» и «точная» нижние границы для характеристики $n(T^{(S)};\ \varepsilon,\ \delta)$ при $\varepsilon\to0$, $\delta\to0$ для максимальных и средних вероятностей ошибок.

Наряду с названными подходами можно рассматривать также асимптотическое поведение характеристики $n(T^{(S)};\ \varepsilon,\ \delta)$ при фиксированном $\varepsilon>0$ и $\delta\to0$ или, наоборот, при фиксированном $\delta>0$ и $\varepsilon\to0$. Кроме того, вместо $\varepsilon(T)$, $\delta(T)$ можно использовать другие вероятности ошибок, определенные несколько иначе. Например, можно изучать характеристики $\tilde n(T^{(S)};\ \varepsilon,\ \delta)$, где в качестве $\varepsilon(T)$ используется, как и раньше, максимальная вероятность ошибки первого рода $\varepsilon^*(T)$, а в качестве $\delta(T)$ — более «детальная» вероятность $\delta_\theta(T)$, $\theta\in\Theta_2$. Такая характеристика $\tilde n(T^{(S)};\ \varepsilon,\ \delta)$ зависит еще от параметра $\theta\in\Theta_2$:

$$\tilde n\left(T^{(S)};\varepsilon,\delta\right)=n\left(T^{(S)};\varepsilon,\delta,\theta\right)=\min\left\{n\colon\ \exists\alpha_0,\ \varepsilon^*\left(T^{(S)}_{n,\alpha_0}\right)\leqslant\varepsilon,\ \delta_\theta\left(T^{(S)}_{n,\alpha_0}\right)\leqslant\delta\right\}.\tag{1}$$

При этом можно изучать асимптотику $n(T^{(S)};\ \varepsilon,\ \delta,\ \theta)$ при фиксированных $\delta>0$ и $\varepsilon\to0$ (подход Бахадура) и при фиксированных $\varepsilon>0$ и $\delta\to0$ (подход Ходжеса — Лемана). Остановимся кратко на этих двух подходах, которые не являются симметричными, поскольку несимметричны определения вероятностей ошибок, имеющих в качестве своих границ ε и δ.

2. Асимптотическая относительная эффективность по Бахадуру и Ходжесу — Леману. В подходах, перечисленных в названии настоящего пункта, характеристика $n(T^{(S)};\ \varepsilon,\ \delta,\ \theta)$ определяется (см. (1)) с помощью несимметричной пары вероятностей ошибок

$$\varepsilon^*(T^{(S)})\ \text{ и }\ \delta_\theta(T^{(S)}).$$

Тем самым a priori гипотезы H_1 и H_2 оказываются в «неравном положении».

Пусть два теста $T^{(1)}=T^{(S_1)}_{n,}$ и $T^{(2)}=T^{(S_2)}_{n,\alpha}$ определены своими статистиками S_1 и S_2. Относительной эффективностью (ОЭ) теста $T^{(1)}$ относительно теста $T^{(2)}$ в точке $\theta\in\Theta_2$ называют отношение

$$\operatorname{eff}\left(T^{(1)},T^{(2)};\varepsilon,\delta,\theta\right)=\frac{n\,(T^{(2)};\ \varepsilon,\ \delta,\ \theta)}{n\,(T^{(1)};\ \varepsilon,\ \delta,\ \theta)}.\tag{2}$$

Очевидно, что чем больше при заданных ε, δ, θ характеристика (2), тем лучше тест $T^{(1)}$ по отношению к тесту $T^{(2)}$.

Асимптотическая относительная эффективность (АОЭ) по Бахадуру теста $T^{(1)}$ по отношению к тесту $T^{(2)}$ в точке $\theta\in\Theta_2$ определяется как предел при $\varepsilon\to0$ (если он существует):

$$e^B\left(T^{(1)},T^{(2)};\theta\right)=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\operatorname{eff}\left(T^{(1)},T^{(2)};\varepsilon,\delta,\theta\right)\tag{3}$$

(этот предел, как правило, не зависит от δ). Если же устремить к 0 параметр δ, оставляя ε фиксированным, то получится АОЭ по Ходжесу — Леману теста $T^{(1)}$ по отношению к тесту $T^{(2)}$ в точке $\theta\in\Theta_2$

$$e^{H-L}\left(T^{(1)},T^{(2)};\theta\right)=\lim_{\delta\downarrow0}\operatorname{eff}\left(T^{(1)},T^{(2)};\varepsilon,\delta,\theta\right)\tag{4}$$

(этот предел, если он существует, как правило, не зависит от ε).

Отметим еще раз, что характеристики (3) и (4) различны ввиду несимметричной изначальной постановки задачи. Как и следовало ожидать, лучшими с точки зрения характеристик (3) и (4) являются критерии отношения правдоподобия $T^*_{n,\alpha}$ (как и критерий байесовского типа $T^G_{n,\alpha}$ с достаточно регулярными априорными распределениями). Приведем краткую сводку известных результатов о характеристиках (3), (4).

Точным наклоном $N(T;\ \theta)$ теста T в точке $\theta \in \Theta_2$ называют предел (если он существует) ([38])

$$N(T; \theta) = 2 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\ln (1/\varepsilon)}{n\,(T;\, \varepsilon,\, \delta,\, \theta)}, \tag{5}$$

который, как правило не зависит от δ. Если два теста $T^{(1)} = T^{(S_1)}$ и $T^{(2)} = T^{(S_2)}$ имеют точные наклоны $N(T^{(1)};\ \theta)$ и $N(T^{(2)};\ \theta)$, то АОЭ по Бахадуру для этих тестов представляется как отношение

$$e^B\left(T^{(1)}, T^{(2)}; \theta\right) = \frac{N\,(T^{(2)}; \theta)}{N\,(T^{(1)}; \theta)},\ \ \theta \in \Theta_2.$$

Известно (см., например, [39]), что в широких предположениях для любого теста $T^{(s)}$ (любой статистики S) справедливо неравенство

$$N(T^{(s)};\ \theta) \leqslant 2K(\theta,\ \Theta_1), \qquad \theta \in \Theta_2, \tag{6}$$

где

$$K\,(\theta, \Theta_1) = \inf \left\{K\left(\mathbf{P}_\theta, \mathbf{P}_{\theta_1}\right), \theta_1 \in \Theta_1\right\},$$

и $K(P,\ Q)$ — расстояние Кульбака — Лейблера между распределениями P, Q. В наших обозначениях (см. § 14)

$$\inf \{K(\theta,\ \Theta_1);\ \theta \in \Theta_2\} = K(\widehat{\theta}_2,\ \Theta_1) = d^+.$$

Неравенство (6) превращается в равенство для критерия отношения правдоподобия $T^*_{n,\alpha} = T^{(S^*)}_{n,\alpha}$, основанного на статистике отношения правдоподобия

$$S^*\,(A) = \max_{\theta \in \Theta_2} A_n\,(\theta) - \max_{\theta \in \Theta_1} A_n\,(\theta).$$

Поэтому из (6) следует, что характеристика (3) для произвольного теста $T^{(s)}$ и критерия отношения правдоподобия T^* допускает оценку сверху

$$e^B(T^{(s)},\ T^*;\ \theta) \leqslant 1, \qquad \theta \in \Theta_2. \tag{7}$$

Аналогично обстоит дело и с вычислением АОЭ по Ходжесу — Леману ([40]). Тут соответствующую роль играет индекс Ходжеса — Лемана теста $T^{(s)}$ в точке $\theta \in \Theta_2$, определяемый как предел (если он существует)

$$\widetilde{\delta}_\theta\left(T^{(S)}\right) = \lim_{n \to \infty} -\frac{2}{n} \ln \delta_\theta\left(T^{(S)}_{n,\alpha_0}\right), \tag{8}$$

где $\alpha_0 = \alpha_0\,(\varepsilon) \equiv \min\left\{\alpha\colon\ \varepsilon^*\left(T^{(S)}_{n,\alpha}\right) \leqslant \varepsilon\right\}$. Этот предел, как правило, не зависит от ε. Если для двух тестов $T^{(1)} = T^{(S_1)}$ и $T^{(2)} = T^{(S_2)}$ существуют индексы Ходжеса — Лемана $\widetilde{\sigma}_\theta(T^{(1)})$ и $\widetilde{\sigma}_\theta(T^{(2)})$, то АОЭ по Леману — Ходжесу для этих тестов определяется как отношение

$$e^{H-L}\left(T^{(1)}, T^{(2)}; \theta\right) = \frac{\widetilde{\delta}_\theta\,(T^{(1)})}{\widetilde{\delta}_\theta\,(T^{(2)})},\ \ \theta \in \Theta_2.$$

Известно ([41—43]), что в широких предположениях индекс Ходжеса — Лемана произвольного теста $T^{(s)}$ допускает оценку сверху

$$\widetilde{\sigma}_\theta\,(T^{(s)}) \leqslant 2K(\Theta_1,\ \theta), \qquad \theta \in \Theta_2, \tag{9}$$

где

$$K\,(\Theta_1, \theta) = \inf \left\{K\left(\mathbf{P}_{\theta_1}, \mathbf{P}_\theta\right), \theta_1 \in \Theta_1\right\}.$$

В наших обозначениях (см. § 14) выполняется

$$\inf\{K(\Theta_1, \theta), \theta\in\Theta_2\} = K(\Theta_1, \widehat{\theta}_2) = -d^-.$$

Неравенство (9) превращается в равенство для критерия отношения правдоподобия $T^*_{n,\alpha}$, поэтому характеристика (4) для произвольного теста $T^{(s)}$ и теста T^* допускает оценку сверху

$$e^{H-L}(T^{(s)}, T^*; \theta) \leqslant 1, \qquad \theta\in\Theta_2, \tag{10}$$

аналогичную (7).

Несколько позже мы покажем, как с помощью развитой в настоящей работе техники получить точное асимптотическое представление характеристики $n(T^*; \varepsilon, \delta, \theta)$ при фиксированном ε и при $\delta\to 0$ или при фиксированном δ и при $\varepsilon\to 0$.

Формулы (5) и (8) показывают, что характеристики e^B и e^{H-L} определяются грубыми (логарифмическими) вероятностями ошибок и дают довольно грубую школу сравнения тестов. Для дальнейшего более точного сравнения тестов в литературе рассматривались также более тонкие характеристики, например относительный дефект (ОД) теста $T^{(1)}$ по отношению к тесту $T^{(2)}$ в точке $\theta\in\Theta_2$:

$$\operatorname{def}(T^{(1)}, T^{(2)}; \varepsilon, \delta, \theta) \equiv n(T^{(1)}; \varepsilon, \delta, \theta) - n(T^{(2)}; \varepsilon, \delta, \theta),$$

где характеристика $n(T; \varepsilon, \delta, \theta)$ определяется формулой (1). Асимптотический относительный дефект (АОД) теста $T^{(1)}$ по отношению к тесту $T^{(2)}$ в точке $\theta\in\Theta_2$ по Бахадуру и по Ходжесу — Леману определяется как предел при стремлении к 0 соответственно ε или δ:

$$d^B(T^{(1)}, T^{(2)}; \delta, \theta) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \operatorname{def}(T^{(1)}, T^{(2)}; \varepsilon, \delta, \theta), \tag{11}$$

$$d^{H-L}(T^{(1)}, T^{(2)}; \varepsilon, \theta) = \lim_{\delta\downarrow 0} \operatorname{def}(T^{(1)}, T^{(2)}; \varepsilon, \delta, \theta).$$

Нам известно довольно мало критериев, где характеристики (11) вычислены или оценены (см. [44—47]). Несомненным недостатком всех перечисленных в этом разделе характеристик, использовавшихся в литературе для сравнения тестов, является тот факт, что эти характеристики *есть функции* от θ и, стало быть, как всякие элементы неупорядоченного множества неудобны для сравнения. Сравнение оказывается возможным лишь в случае, когда та или иная характеристика (например, (3), (4)) для одного критерия *равномерна по всем* θ оказывается лучше, чем для другого (это соответствует частичному порядку на множестве функций). Например, критерий отношения правдоподобия T^* с точки зрения рассматриваемых подходов следует признать асимптотически оптимальным (так же как при рассмотрениях в гл. III), так как для него оказалось, что при всех $\theta\in\Theta_2$ выполнены соотношения (7), (11).

В следующем разделе проиллюстрируем (рассуждения будут не всегда строгими), как с помощью результатов гл. I—III можно получить точные асимптотические представления для характеристики $n(T^*; \varepsilon, \delta, \theta)$ при $\varepsilon\downarrow 0$, $\delta>0$ или $\varepsilon>0$, $\delta\downarrow 0$. Эта задача несколько выходит за рамки тех утверждений, которые были подготовлены в гл. I—III, поскольку уклонения по одной из ошибок не являются большими. Однако это обстоятельство не помешает получить требуемые асимптотические представления.

3. Точные асимптотические представления для характеристики $n(T^*; \varepsilon, \delta, \theta)$. Утверждения, приведенные в настоящем разделе, справедливы при некоторых условиях на эксперимент $\mathrm{E}_n = (\Theta_1, \Theta_2, \mathscr{P}, X_n)$; эти условия в своих основных частях близки к условиям, которые использовались в § 9—13. Придерживаясь в настоящем разделе конспективного стиля изложения, мы для экономии места не будем приводить и эти условия.

А. Пусть $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$, $\delta \to 0$ (подход Бахадура),

$$n(T^*; \varepsilon, \delta, \theta) = \min\{n\colon \exists \alpha_0, \varepsilon^*(T^*_{n,\alpha_0}) \leqslant \varepsilon, \delta_\theta(T^*_{n,\alpha_0}) \leqslant \delta\},$$

где

$$\varepsilon^*(T^*_{n,\alpha}) = \max_{\theta\in\Theta_1} \mathbf{P}_\theta(S^*(A_n) > n\alpha),$$

$$\delta_\theta(T^*_{n,\alpha}) = \mathbf{P}_\theta(S^*(A_n) \leqslant n\alpha), \theta \in \Theta_2,$$

$S^*(A)$ — статистика отношения правдоподобия:

$$S^*(A) = \max_{\theta\in\Theta_2} A(\theta) - \max_{\theta\in\Theta_1} A(\theta).$$

Как и в § 8, по статистическому эксперименту $\mathrm{E}_n = (\Theta_1, \Theta_2, \mathscr{P}, X_n)$ можно построить характеристики d^-, d^+, $\Lambda(\alpha)$, $d^- \leqslant \alpha \leqslant d^+$; ближайшие точки в множествах Θ_1, Θ_2 обозначим соответственно $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$.

Точное асимптотическое представление для характеристики $n(T^*; \varepsilon, \delta, \theta)$ дает

Утверждение 1. *При* $\varepsilon = \mathrm{const} \in (0, 1)$, $\delta \to 0$ *справедливо соотношение*

$$n\left(T^*; \varepsilon, \delta, \widehat{\theta}_2 + \frac{\theta}{\sqrt{n_1}}\right) = n_1 + \frac{\beta(\varepsilon)\sqrt{n_1} + \frac{1}{2}\ln n_1 + c}{d^-} + o(1), \tag{12}$$

где

$$n_1 = -\frac{\ln \delta}{-d^-},$$

функции $\beta(\varepsilon)$ *и* $c = c(\varepsilon, \theta)$ *найдены в явном виде* (*см. формулы* (13), (16)).

Поясним, почему характеристику $n(T^*; \varepsilon, \delta, \theta)$ мы изучаем в окрестности точки $\theta = \widehat{\theta}_2$. Дело в том, что точки $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$, будучи самыми близкими в множествах Θ_1 и Θ_2, наиболее «трудны для различения». Поэтому характеристика $n(T^*, \varepsilon, \delta, \theta)$ достигает своего максимума в точке $\theta = \widehat{\theta}_2$ и, стало быть, правая часть соотношения (12) является для нее верхней границей (асимтотической).

Доказательство утверждения 1 мы проведем на физическом уровне строгости. Рассмотрим случайный вектор

$$S_n = (A_n(\widehat{\theta}_2) - A_n(\widehat{\theta}_1), A'_n(\widehat{\theta}_1), A'_n(\widehat{\theta}_2))$$

в пространстве R^{2k+1}. Повторяя рассуждения, которые использовались при доказательстве теоремы 7.1, можно показать, что

$$\varepsilon^*(T^*_{n,\alpha}) \sim \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}(S^*(A_n) > n\alpha) \sim \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(\frac{S_n - n\alpha e}{n} \in \Omega(e, D)\right),$$

где $e = (1, 0, \ldots, 0) \in R^{2k+1}$, $\Pi = \Pi_e \equiv E - e^{\mathrm{T}}e$,

$$\Omega(e, D) = \left\{\beta \in R^{2k+1}\colon \beta e^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\beta\Pi\frac{D}{2}\Pi\beta^{\mathrm{T}} > 0\right\},$$

и квадратная матрица D порядка $2k+1$ строится по эксперименту E_n в явном виде. Для того чтобы вероятность

$$\varepsilon^*(T^*_{n,\alpha}) \sim \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}(S^*(A_n) > n\alpha)$$

вела себя как $\varepsilon = \mathrm{const}$, выберем $\alpha = d^- + \beta n^{-\frac{1}{2}}$; тогда

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}(S^*(A_n) > n\alpha) \sim \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(\frac{A_n(\widehat{\theta}_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) - nd^- - \sqrt{n}\beta}{n} > \right.$$

$$\left. > -\frac{S_n}{n}\Pi\frac{D}{2}\Pi\frac{S_n^{\mathrm{T}}}{n}\right) \equiv \mathbf{P}_n$$

и (см. доказательство теоремы 7.1)

$$\mathbf{E}_{\widehat{\theta}_1}\left(A_n(\widehat{\theta}_2)-A_n(\widehat{\theta}_1)\right)=nd^-,$$

$$\mathbf{E}_{\widehat{\theta}_1}(S_n\Pi)=0.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}_n=\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(\frac{A_n(\widehat{\theta}_2)-A_n(\widehat{\theta}_1)-nd^-}{\sqrt{n}}>\beta-\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Pi\frac{D}{2}\Pi\frac{S_n^{\mathrm{T}}}{\sqrt{n}}\right)\sim$$

$$\sim\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(\frac{A_n(\widehat{\theta}_2)-A_n(\widehat{\theta}_1)-nd^-}{\sqrt{n}}>\beta\right),$$

и, выбирая по заданному $\varepsilon>0$ параметр $\beta=\beta(\varepsilon)$, получаем соотношение

$$\varepsilon^*\left(T^*_{n,d^-+\frac{\beta}{\sqrt{n}}}\right)\sim\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_1}\left(\frac{A_n(\widehat{\theta}_2)-A_n(\widehat{\theta}_1)-nd^-}{\sqrt{n}}>\beta\right)\sim\varepsilon.$$

Таким образом, $\beta=\beta(\varepsilon)$ определяется из уравнения

$$\overline{\Phi}(\beta/\sigma)=\varepsilon, \tag{13}$$

где $\sigma^2=\mathbf{E}_{\widehat{\theta}_1}\left(a(\widehat{\theta}_2)-a(\widehat{\theta}_1)-d^-\right)^2$,

$$\overline{\Phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Вычислим теперь асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}_n(\theta)\equiv\equiv\delta_\theta(T^*_{n,\alpha})$ для $\alpha=d^-+\beta(\varepsilon)/\sqrt{n}$. Как было установлено при доказательстве теоремы 11.1,

$$\mathbf{P}_n(\theta)\equiv\mathbf{P}_\theta\left(S_n^*(A_n)\leqslant n\left(d^-+\beta/\sqrt{n}\right)\right)\sim$$

$$\sim\frac{\chi^*(d^-)}{\sqrt{2\pi n}}\,\frac{e^{-n(\Lambda(d^-+\beta/\sqrt{n},\theta)-(d^-+\beta\sqrt{n}))}}{(1-\lambda(d^-))\,\sigma(d^-)}, \tag{14}$$

где функции, входящие в правую часть (14), обладают следующими свойствами:

$$\Lambda(d^-,\widehat{\theta}_2)-d^-=-d^-,\quad\lambda(d^-)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\Lambda(\alpha,\widehat{\theta}_2)-\alpha\right)\Big|_{\alpha=d^-}=\lambda(d^-)-1=-1,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\Lambda(\alpha;\widehat{\theta}_2)\Big|_{\alpha=-d^-}=\sigma^{-2}(d^-),$$

$$\frac{\partial\Lambda(d^-,\theta)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\widehat{\theta}_2}=0,\;\frac{\partial^2\Lambda(d^-,\theta)}{\partial\theta^2}\Big|_{\theta=\widehat{\theta}_2}=U^*,$$

и матрица U^* найдена в лемме 11.8. Поэтому для любого θ получаем

$$\mathbf{P}_n\left(\widehat{\theta}_2+\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{\chi^*(d^-)}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma(d^-)}\,e^{nd^-+\beta\sqrt{n}-\frac{\beta^2}{2\sigma^2(d^-)}-\frac{\theta U^*\theta^{\mathrm{T}}}{2}}. \tag{15}$$

Соотношение (15) можно переписать в виде

$$-\ln\delta_\theta(T^*_{n,\alpha})=-nd^-+\sqrt{n}\beta+\frac{1}{2}\ln n+c(\beta,\theta)+o(1),$$

где константа (по n) c имеет вид

$$c=-\ln\left(\frac{\sqrt{2\pi}\sigma(d^-)}{\chi^*(d^-)}\right)+\frac{\beta^2}{2\sigma^2(d^-)}+\frac{\theta U^*\theta^{\mathrm{T}}}{2}. \tag{16}$$

Из формулы (15) можно извлечь асимптотическую формулу для характеристики $n(T^*;\ \varepsilon,\ \delta,\ \theta)$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ и $\delta \to 0$:

$$n\left(T^*; \varepsilon, \delta, \widehat{\theta}_2 + \frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{\ln\delta}{-d^-} +$$
$$+\frac{\sqrt{-\ln\delta/(-d^-)}\,\beta + \frac{1}{2}\ln(-\ln\delta/(-d^-)) + c}{d^-} + o(1);$$

в частности, главная часть асимптотики характеристика $n\left(T^*; \varepsilon, \delta, \widehat{\theta}_2 + \frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)$ имеет вид

$$n_1 = -\ln\delta/(-d^-). \tag{17}$$

Поэтому окончательно получаем

$$n\left(T^*; \varepsilon, \delta, \widehat{\theta}_2 + \frac{\theta}{\sqrt{n_1}}\right) = n_1 + \sqrt{n_1}\frac{\beta}{d^-} + \frac{1}{2d^-}\ln n_1 + \frac{c}{d^-} + o(1),$$

где n_1 определено формулой (17).

В. Обратимся к изучению ситуации, когда $\delta = \mathrm{const} > 0$, $\varepsilon \to 0$ (подход Ходжеса — Лемана).

Утверждение 2. *При* $\delta = \mathrm{const} > 0$, $\varepsilon \to 0$ *справедливо соотношение*

$$n\left(T^*; \varepsilon, \delta, \theta_2 + \frac{\theta}{\sqrt{n_1}}\right) = n_1 + \frac{-\beta}{d^+}\sqrt{n_1} + \frac{1}{2d^+}\ln n_1 + c + o(1), \tag{18}$$

где

$$n_1 = \frac{-\ln\varepsilon}{d^+},$$

функции $\beta = \beta(\varepsilon,\ \theta)$ *и* $c = c(\varepsilon,\ \theta)$ *найдены в явном виде* (*см. формулы* (19), (20) *ниже*).

Доказательство утверждения 2 проведем на физическом уровне строгости. Вероятность

$$\delta_{\widehat{\theta}_2 + \frac{\theta}{\sqrt{n}}}(T^*_{n,\alpha}) = \mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2 + \frac{\theta}{\sqrt{n}}}(S^*(A_n) \leqslant n\alpha)$$

при $\alpha = d^+ + \frac{\beta}{\sqrt{n}}$ представляется в виде

$$\mathbf{P}_{\widehat{\theta}_2 + \theta/\sqrt{n}}\left(\frac{A_n(\widehat{\theta}_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) - nd^+}{\sqrt{n}} \leqslant \beta\right).$$

При этом

$$\mathbf{E}_{\widehat{\theta}_2 + \theta/\sqrt{n}}(A_n(\widehat{\theta}_2) - A_n(\widehat{\theta}_1) - nd^+) \sim \frac{\theta U \theta^{\mathrm{T}}}{2}$$

для некоторой матрицы U, которую можно найти в явном виде, поэтому для любых $\delta > 0$ и $\theta \in R^k$ найдется $\beta = \beta(\delta,\ \theta)$ такое, что

$$\delta_{\widehat{\theta}_2 + \theta/\sqrt{n}}(T^*_{n, d^+ + \beta/\sqrt{n}}) \sim \delta.$$

При этом константа β определяется из уравнения

$$\Phi\left(\frac{\beta - \frac{\theta U \theta^{\mathrm{T}}}{2}}{\sigma}\right) = \delta, \tag{19}$$

где $\sigma^2 = \mathbf{E}_{\widehat{\theta}_2}(a(\widehat{\theta}_2) - a(\widehat{\theta}_1) - d^+)^2$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Вероятность $\varepsilon^*\left(T^*_{n,d^++\beta/\sqrt{n}}\right)$ ведет себя как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\frac{\chi(d^+)}{\lambda(d^+)\sigma(d^+)}e^{-n\Lambda(d^++\beta/\sqrt{n})}.$$

Поскольку

$$\lambda(d^+)=1,\ \Lambda(d^++\beta/\sqrt{n})\sim d^++\beta/\sqrt{n}+\frac{\beta^2}{2\sigma^2(d^+)},$$

то

$$-\ln\varepsilon^*\left(T^*_{n,d^++\beta/\sqrt{n}}\right)\sim nd^++\sqrt{n}\beta+\frac{1}{2}\ln n+c+o(1),$$

где константа (по n) c имеет вид

$$c=-\ln\left((2\pi)^{1/2}\sigma(d^+)\right)-\frac{\beta^2}{2\sigma^2(d^+)}-\ln\chi(d^+). \tag{20}$$

Главная часть характеристики $n\left(T^*;\varepsilon,\delta,\widehat{\theta}_2+\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)$ ведет себя как

$$n_1=-\frac{\ln\varepsilon}{d^+}; \tag{21}$$

стало быть, справедлива формула

$$n\left(T^*;\varepsilon,\delta,\widehat{\theta}_2+\frac{\theta}{\sqrt{n_1}}\right)=n_1+\frac{-\beta}{d^+}\sqrt{n_1}+\frac{1}{2d^+}\ln n_1+c+o(1),$$

при $\delta>0$, $\varepsilon\to0$, где $n_1=n_1(\beta,\theta)$ определяется (21).

Итак, формулы (12) и (18) позволяют выписать асимптотическое представление для характеристики $n(T^*;\ \varepsilon,\ \delta,\ \theta)$ (с точностью до $o(1)$) для критерия отношения правдоподобия для фиксированного ε и $\delta\to0$ или для фиксированного δ и $\varepsilon\to0$.

Если критерий отношения правдоподобия является в известном смысле оптимальным (как правило, это так, однако доказательство настоящего факта требует дополнительных усилий), то правые части формул (12) и (18) будут нижними асимптотическими границами для характеристики $n(T^{(S)};\ \varepsilon,\ \delta,\ \theta)$ для произвольного теста $T^{(S)}$, порожденного статистикой S.

Изложенная техника позволяет (и это гораздо ближе по духу к настоящей работе) получить асимптотическое представление для характеристики $n(T^*;\ \varepsilon,\ \delta,\ \theta)$ при одновременном стремлении к 0 параметров ε и δ. Мы не станем этого делать, так как с нашей точки зрения более естественной и удобной для сравнения тестов является характеристика $n(T;\ \varepsilon,\ \delta)$, построенная по паре максимальных ошибок $\varepsilon^*(T)$ и $\delta^*(T)$. Асимптотическое поведение характеристики $n(T^*;\ \varepsilon,\ \delta)$ описано в § 14, 15. Более удобным и естественным представляется, на наш взгляд, и несколько иное построение характеристик eff, def, описанных в настоящем параграфе — построение, выполненное на основе симметричных количеств $n(T;\ \varepsilon,\ \delta)$.

4. Симметричная форма АОЭ и АОД. Пусть, как и ранее, тест $T^{(S)}=T^{(S)}_{n,\alpha}$ построен по статистике S, так что максимальные ошибки определены соответственно как

$$\begin{aligned}\varepsilon^*\left(T^{(S)}\right)&=\max_{\theta\in\Theta_1}\mathbf{P}_\theta(S(X)>n\alpha),\\ \delta^*\left(T^{(S)}\right)&=\max_{\theta\in\Theta_2}\mathbf{P}_\theta(S(X)\leqslant n\alpha).\end{aligned} \tag{22}$$

Минимальное число $n(T^{(S)};\ \varepsilon,\ \delta)$ испытаний, обеспечивающее заданные значения вероятностей ошибок (22), задается равенством

$$n\left(T^{(S)};\ \varepsilon,\ \delta\right)=\min\left\{n:\exists\alpha_0,\ \varepsilon^*\left(T^{(S)}_{n,\alpha_0}\right)\leqslant\varepsilon,\ \delta^*\left(T^{(S)}_{n,\alpha_0}\right)\leqslant\delta\right\}.$$

Эта характеристика более удобна для сравнения качества тестов, чем характеристика $n(T^{(s)};\ \varepsilon,\ \delta,\ \theta)$, так как она не зависит от θ.

Пусть $T^{(1)}=T^{(S_1)}$, $T^{(2)}=T^{(S_2)}$ — два теста, определяемые соответственно статистиками S_1 и S_2. Относительной эффективностью теста $T^{(1)}$ по отношению к $T^{(2)}$ назовем отношение

$$\operatorname{eff}\left(T^{(1)},\ T^{(2)};\ \varepsilon,\ \delta\right)=\frac{n\,(T^{(2)};\ \varepsilon,\ \delta)}{n\,(T^{(1)};\ \varepsilon,\ \delta)},$$

а относительным дефектом теста $T^{(1)}$ по отношению к $T^{(2)}$ — разность

$$\operatorname{def}(T^{(1)},\ T^{(2)};\ \varepsilon,\ \delta)=n(^{(1)};\ \varepsilon,\ \delta)-n(T^{(2)};\ \varepsilon,\ \delta).$$

Ясно, что чем больше значения $\operatorname{eff}(T^{(1)},\ T^{(2)};\ \varepsilon,\ \delta)$ или меньше значение $\operatorname{def}(T^{(1)},\ T^{(2)};\ \varepsilon,\ \delta)$, тем лучше тест $T^{(1)}$ по сравнению с тестом $T^{(2)}$.

Определим теперь АОЭ теста $T^{(1)}$ по отношению к тесту $T^{(2)}$ *в направлении* $\rho=\ln\varepsilon/\ln\delta$ как верхний предел

$$e\left(T^{(1)},\ T^{(2)};\ \rho\right)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \sup_{\frac{\ln\varepsilon}{\ln\delta}=\rho}\ \operatorname{eff}\left(T^{(1)},\ T^{(2)},\ \varepsilon,\ \delta\right).$$

Аналогично АОД теста $T^{(1)}$ по отношению к тесту $T^{(2)}$ в направлении $\rho=\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\delta}$ определим как верхний предел

$$d\left(T^{(1)},\ T^{(2)};\ \rho\right)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \sup_{\frac{\ln\varepsilon}{\ln\delta}=\rho}\ \operatorname{def}\left(T^{(1)},\ T^{(2)};\ \varepsilon,\ \delta\right).$$

Из грубого варианта закона сохранения (теорема 14.1 и ее следствия) вытекает, что АОЭ произвольного теста $T^{(S)}$ по отношению к критерию отношения правдоподобия по произвольному направлению $\rho>0$ ограничена 1:

$$e(T^{(S)},\ T^{*};\ \rho)\leqslant 1.$$

Точный вариант сохранения (теорема 15.1 и ее следствия) позволяет указать нижнюю грань для АОД произвольного теста $T^{(S)}$ по отношению к критерию отношения правдоподобия в направлении $\rho>0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Равномерные неравенства для сумм случайных полей. Пусть $a_1(\theta)$, $a_2(\theta)$, …— независимые случайные поля с общим распределением в $C(R^k)$, $A^n(\theta)=a_1(\theta)+\ldots+a_n(\theta)$.

Последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин обозначим через ξ_1, ξ_2, …. Пусть $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$.

Лемма 1 ([48]). *Пусть* $N\geqslant 1$, $\varepsilon>0$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n>n\varepsilon)\leqslant\frac{\mathbf{E}\,|\,\xi_1\,|^N}{(\varepsilon-\mathbf{E}\xi_1)_+^N}\begin{cases}\dfrac{A_N}{n^{N/2}}, & N\geqslant 2,\\[2mm] \dfrac{A_N}{n^{N-1}} & 1\leqslant N\leqslant 2,\end{cases}$$

где $x_+=\max(x,\ 0)$, *числа* A_N *зависят только от* N *и конечны.*

Лемма 2. *Пусть для* $N\geqslant 1$, $N_1=\max(N,\ k)$, $c\in[1,\ \infty)$ *выполняется условие*

$$\mathbf{E}\,|\,a\,(0)\,|^N\leqslant c,\qquad \sup_{|\theta|\leqslant 1/c}\mathbf{E}\,|a'\,(\theta)\,|^{N_1+1/c}\leqslant c.$$

Тогда найдется константа $c_1\in[1,\ \infty)$, *зависящая только от* c, k, N, *та-*

кая, что

$$\mathbf{E}\sup_{|\theta|\leqslant 1/c}|a(\theta)|^N\leqslant c_1.$$

Доказательство. В силу известных теорем (см., например, [49]), для любых k и $c\in[1,\infty)$ найдется $A=A(k,c)$, зависящее только от k и c такое, что

$$\sup_{|\theta|\leqslant 1/c}|a(\theta)|\leqslant|a(0)|+A\left(\int_{|\theta|\leqslant 1/c}|a'(\theta)|^{k+1/c}\,d\theta\right)^{\frac{1}{k+1/c}}. \qquad (1)$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\sup_{|\theta|\leqslant 1/c}|a(\theta)|^N\leqslant\mathbf{E}\left[|a(0)|+A\left(\int_{|\theta|\leqslant 1/c}|a'(\theta)|^{k+1/c}\,d\theta\right)^{\frac{1}{k+1/c}}\right]^N\leqslant$$

$$\leqslant 2^N\mathbf{E}|a(0)|^N+(2A)^N\,\mathbf{E}\left(\int_{|\theta|\leqslant 1/c}|a'(\theta)|^{k+1/c}\,d\theta\right)^{\frac{N}{k+1/c}}.$$

В последней формуле нуждается в пояснении только оценивание

$$I\equiv\mathbf{E}\left(\int_{|\theta|\leqslant 1/c}|a'(\theta)|^{k+1/c}\,d\theta\right)^{\frac{N}{k+2/c}}.$$

Если $N\geqslant k+1/c$, то

$$I\equiv\mathbf{E}\int_{|\theta|\leqslant 1/c}|a'(\theta)|^N\,d\theta\leqslant\int_{|\theta|\leqslant 1/c}\mathbf{E}|a'(\delta)|^N\,d\theta\leqslant c\int_{|\theta|\leqslant c}d\theta.$$

Если $N\leqslant k+1/c$, то

$$I\leqslant 1+\int_{|\theta|\leqslant 1/c}\mathbf{E}|a'(\theta)|^{k+1/c}\,d\theta\leqslant 1+c\int_{|\theta|\leqslant 1/c}d\theta.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть для* $N\geqslant 1$, $N_1=\max(N,k)$, $c\in[1,\infty)$ *выполнены условия*

$$\mathbf{E}a(0)=0,\quad \mathbf{E}|a(0)|^N\leqslant c,\quad \sup_{|\theta|\leqslant 1/c}\mathbf{E}|a'(\theta)|^{N_1+1/c}\leqslant c.$$

Тогда найдется $c_1\in[1,\infty)$, *зависящее только от* c, N, k *такое, что для любого* $t\geqslant c_1$ *выполняется*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{|\theta|\leqslant 1/t}|A_n(\theta)|>n\varepsilon\right)\leqslant\frac{c_1}{\left(\varepsilon-\dfrac{c_1}{t^{k/(N_1+1/c)}}\right)_+^N}\begin{cases}\dfrac{1}{n^{N/2}}, & N\geqslant 2,\\[2mm] \dfrac{1}{n^{N-1}}, & 1\leqslant N\leqslant 2.\end{cases} \qquad (2)$$

Доказательство. Левая часть (2) не больше P_1+P_2, где

$$P_1=\mathbf{P}\left(\sup_{|\theta|\leqslant 1/t}A_n(\theta)\geqslant n\varepsilon\right),$$

$$P_2=\mathbf{P}\left(\sup_{|\theta|\leqslant 1/t}(-A_n(\theta))\geqslant n\varepsilon\right).$$

Поскольку величины P_1, P_2 оцениваются идентично, достаточно показать, как оценить P_1.

Очевидно, что P_1 не больше, чем

$$\widetilde{P}_1=\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n\sup_{|\theta|\leqslant 1/t}a_i(\theta)\geqslant n\varepsilon\right).$$

Для оценки $\widetilde{P}_1$ воспользуемся леммой 3, в силу которой

$$\widetilde{P}_1\leqslant\frac{\mathbf{E}\left|\sup\limits_{|\theta|\leqslant 1/t}a(\theta)\right|^N}{\left(\varepsilon-\mathbf{E}\sup\limits_{|\theta|\leqslant 1/t}a(\theta)\right)_+^N}\begin{cases}\dfrac{A_N}{n^{N/2}}, & N\geqslant 2,\\[2mm] \dfrac{A_N}{n^{N-1}}, & 1\leqslant N\leqslant 2.\end{cases}$$

Таким образом, нам достаточно оценить сверху

$$\bar{a} = \bar{a}(t) \equiv \mathbf{E} \sup_{|\theta| \leqslant 1/t} a(\theta).$$

В силу неравенства (1)

$$\sup_{|\theta| \leqslant 1/t} a(\theta) = a(0) + \sup_{|\theta| \leqslant 1/t} |a(\theta) - a(0)| \leqslant$$

$$\leqslant a(0) + |a(0) - a(0)| + A\left(\int_{|\theta| \leqslant 1/t} |a'(\theta)|^{N_1 + 1/c} d\theta\right)^{\frac{1}{N_1 + 1/c}}.$$

Поэтому

$$\bar{a} \leqslant \mathbf{E}a(0) + A\mathbf{E}\left(\int_{|\theta| \leqslant 1/t} |a'(\theta)|^{N_1 + 1/c} d\theta\right)^{\frac{1}{N_1 + 1/c}} \leqslant$$

$$\leqslant A\left(\mathbf{E}\int_{|\theta| \leqslant 1/t} |a'(\theta)|^{N_1 + 1/c} d\theta\right)^{\frac{1}{N_1 + 1/c}} = A\left(\int_{|\theta| \leqslant 1/t} \mathbf{E}|a'(\theta)|^{N_1 + 1/c} d\theta\right)^{\frac{1}{N_1 + 1/c}} \leqslant$$

$$\leqslant A\left(c\int_{|\theta| \leqslant 1/t} d\theta\right)^{\frac{1}{N_1 + 1/c}} = c_1 \frac{1}{t^{k/(N_1 + 1/c)}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть*

$$\sup_{|\theta| \leqslant \delta} \mathbf{E}e^{\frac{1}{c}|a'(\theta)|} \leqslant c.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $c_\varepsilon < \infty$ *такое, что для*

$$\xi = \xi(\delta) \equiv \sup_{|\theta| \leqslant \delta} \frac{|a(\theta) - a(0)|}{\delta^{1-\varepsilon}}$$

выполняется при $0 \leqslant \delta \leqslant 1/c_\varepsilon$

$$\mathbf{E}e^{\frac{1}{c_\varepsilon}\xi} \leqslant c_\varepsilon.$$

Доказательство.

$$e^{x|a(\theta) - a(\theta)|} \leqslant e^{x(a(\theta) - a(0))} + e^{-x(a(\theta) - a(0))}.$$

Поэтому

$$e^{\sup\limits_{|\theta| \leqslant \delta} \frac{1}{c\delta^{1-\varepsilon}} |a(\theta) - a(0)|} \leqslant \sup_{|\theta| \leqslant \delta} e^{\frac{1}{c\delta^{1-\varepsilon}}(a(\theta) - a(0))} + \sup_{|\theta| \leqslant \delta} e^{-\frac{1}{c\delta^{1-\varepsilon}}(a(\theta) - a(0))} \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2.$$

Оценим первое слагаемое с помощью неравенства (1):

$$I_1 \leqslant 1 + \frac{1}{c\delta^{1-\varepsilon}} A_a \left(\int_{|\theta| \leqslant \delta} e^{\frac{k+a}{c\delta^{1-\varepsilon}}(a(\theta) - a(0))} |a'(\theta)|^{k+a} d\theta\right)^{\frac{1}{k+a}}.$$

Из последнего получаем

$$\mathbf{E}I_1 \leqslant 1 + \frac{A_a}{c\delta^{1-\varepsilon}} \left(\mathbf{E}\int_{|\theta| \leqslant \delta} e^{\frac{k+a}{c\delta^{1-\varepsilon}}(a(\theta) - a(0))} |a'(\theta)|^{k+a} d\theta\right)^{\frac{1}{k+a}} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{A}{c\delta^{1-\varepsilon}} \left[\int_{|\theta| \leqslant \delta} \left[\mathbf{E}e^{\frac{2(k+a)}{c\delta^{1-\varepsilon}}(a(\theta) - a(0))} \mathbf{E}|a'(\theta)|^{2(k+a)}\right]^{1/2} d\theta\right]^{\frac{1}{k+a}}.$$

Воспользуемся следующим утверждением: существует $c_1 < \infty$ такое, что для всех $0 \leqslant \delta \leqslant 1/c_1$

$$\sup_{|\theta|\leqslant\delta} \mathbf{E} e^{\frac{2(k+a)}{c\delta^{1-\varepsilon}}(a(\theta)-a(0))} \leqslant c_1. \tag{3}$$

В силу того, что

$$\sup_{|\theta|\leqslant\delta} \mathbf{E}^{1/2} |a'(\theta)|^{2(k+a)} \leqslant \tilde{c},$$

получаем, что

$$\mathbf{E} I_1 \leqslant 1 + \frac{A}{c\delta^{1-\varepsilon}} \left(\int_{|\theta|\leqslant\delta} \tilde{c}_1 \, d\theta \right)^{\frac{1}{k+a}} \leqslant 1 + \tilde{c}_2 \frac{\delta^{\frac{k}{k+a}}}{\delta^{1-\varepsilon}} \leqslant \tilde{c}_3,$$

если $a > 0$ будет достаточно мало.

Осталось доказать (3). В этом неравенстве размерность параметра не играет роли, поэтому можно считать его одномерным. Легко видеть, что в силу неравенства Иенсена для $T = 2(k+a)$, $T\delta^{\varepsilon} \leqslant 1/c$

$$\mathbf{E} e^{\frac{T}{\delta^{1-\varepsilon}}(a(\theta)-a(0))} = \mathbf{E} e^{\frac{T}{\delta^{1-\varepsilon}} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \theta a'(u)\,du} \leqslant \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \mathbf{E} e^{\frac{T\theta a'(u)}{\delta^{1-\varepsilon}}} du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \mathbf{E} e^{\frac{T\delta |a'(u)|}{\delta^{1-\varepsilon}}} du \leqslant \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \mathbf{E} e^{\frac{1}{c}|a'(u)|} du \leqslant c.$$

Поэтому (3) доказано. Лемма 4 доказана.

2. **Равномерная теорема об обратной функции.** Пусть $\Phi(\lambda, \theta)$ — векторная функция, отображающая $R^m \times R^k$ в R^m. Условимся производные по θ обозначать штрихом, а производные по λ — точкой. Тогда $\dot{\Phi}(\lambda, \theta)$ есть квадратная матрица порядка m, $\Phi'(\lambda, \theta)$ — прямоугольная матрица порядка $m \times k$.

Лемма 5. *Пусть для* $c \in [1, \infty)$ *выполнены условия*

1. $\Phi(\hat{\lambda}, 0) = 0$;

2. $\dot{\Phi}(\hat{\lambda}, 0) \geqslant \frac{1}{c} E_m$, где E_m — единичная матрица порядка m;

3. $\|\dot{\Phi}(\lambda_1, \theta_1) - \dot{\Phi}(\lambda_2, \theta_2)\| \leqslant c[|\lambda_1 - \lambda_2|^{1/c} + |\theta_1 - \theta_2|^{1/c}]$, где $|\theta_1| \leqslant 1/c$, $|\theta_2| \leqslant 1/c$, $|\hat{\lambda} - \lambda_1| \leqslant 1/c$, $|\hat{\lambda} - \lambda_2| \leqslant 1/c$;

4. $\|\Phi'(\lambda, \theta)\| \leqslant c$ для $|\theta| \leqslant 1/c$, $|\hat{\lambda} - \lambda| \leqslant 1/c$.

Тогда существуют число $c_1 \in [1, \infty)$, зависящее только от c, m, k и единственная функция $\lambda = \lambda(\theta)$: $R^k \to R^m$ такие, что

5. $\lambda(0) = \hat{\lambda}$, $\Phi(\lambda(\theta), \theta) = 0$, если $|\theta| \leqslant 1/c_1$;

6. $\|\lambda'(\theta)\| \leqslant c_1$ для $|\theta| \leqslant 1/c_1$.

Доказательство. В сделанных предположениях в силу известных теорем (см., например, теорему 15.2 на с. 556 в [50]) для некоторой окрестности $\theta = 0$ в R^k существует единственная функция $\lambda(\theta)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Phi(\lambda(\theta), \theta) = 0, \quad \lambda(0) = \hat{\lambda}. \tag{4}$$

Повторяя доказательство упомянутой теоремы 15.2 в [50], можно показать, что радиус окрестности зависит только от c, m, k, т. е.

а) существует число $c_1 \in [1, \infty)$, зависящее только от c, m, k, такое, что функция $\lambda(\theta)$ в (4) определена и дифференцируема при всех $|\theta| \leqslant 1/c_1$.

При этом функция $\lambda(\theta)$ равномерно непрерывна в нуле, т. е.

б) для любого $\nu > 0$ найдется $\delta > 0$, зависящее только от c, m, k, ν, такое, что для $|\theta| \leqslant \delta$ выполняется

$$|\lambda(\theta) - \hat{\lambda}| \leqslant \nu. \tag{5}$$

Для вычисления производной $\lambda(\theta)$ продифференцируем (4) по λ. Получим

$$\lambda'(\theta) = -\dot{\Phi}^{-1}(\lambda(\theta),\ \theta)\,\Phi'(\lambda(\theta),\ \theta).$$

В силу наших условий найдется $\nu > 0$ такое, что для всех $|\theta| \leqslant \nu$, $|\lambda - \widehat{\lambda}| \leqslant \nu$ справедливо

$$\|\dot{\Phi}^{-1}(\lambda,\ \theta)\,\Phi'(\lambda,\ \theta)\| \leqslant 1/\nu, \tag{6}$$

где $\nu > 0$ зависит только от c, m, k. Выбирая для этого ν число δ в силу б) получаем, что при $|\theta| \leqslant \delta$ выполняется (5). Поэтому, в силу (6)

$$\|\lambda'(\theta)\| \leqslant 1/\nu \leqslant \max(1/\delta,\ 1/\nu) = c_1.$$

Лемма 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боровков А. А.** Математическая статистика.— М.: Наука, 1984.— 472 с.
2. **Боровков А. А.** Математическая статистика. Дополнительные главы.— М.: Наука, 1984.— 144 с.
3. **Вальд А.** Последовательный анализ.— М.: Физматгиз, 1960.— 328 с.
4. **Русас Дж.** Контигуальность вероятностных мер.— М.: Мир, 1975.— 254 с.
5. **Chibisov D. M.** Transition to the limiting process for deriving asymptotically optimal tests // Sankhya.— 1969.— Vol. A31. N 3.— P. 241—258.
6. **Математическая** энциклопедия. Т. 2.— М.: Советская энциклопедия, 1977.— 1104 с.
7. **Боровков А. А.** Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения.— 1967.— Т. 12, № 4.— С. 635—654.
8. **Боровков А. А., Рогозин Б. А.** О центральной предельной теореме в многомерном случае // Там же.— 1965.— Т. 10, № 1.— С. 61—69.
9. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1967.— 267 с.
10. **Саулис Л., Статулявичус В.** Предельные теоремы о больших уклонениях.— Вильнюс: Мокслас, 1989.— 206 с.
11. **Varadhan S. R.** S. Large deviations and applications.— Philadelphia: Soc. for industr., 1984.— 75 p.
12. **Richter W. O.** Wahrscheinlichkeinten grossen Abweichungen von Summen unabhangiger identisch verteiller Zufallssvektoren // Litovski matem. sb.— 1985.— Vol. 19, N 3.— P. 55—68.
13. **Chaganty N. R., Sethuraman J.** Large deviations local limit theorem for arbitrary sequence of random vectors // Ann. Probab.— 1985.— Vol. 13, N 1.— P. 97—114.
14. **Карболис А.** Предельные локальные теоремы для сумм одинаково распределенных случайных векторов. I. // Литовский математический сборник.— 1973.— Т. 13, № 3.— С. 101—112.
15. **Титчмаш Е.** Введение в теорию интегралов Фурье. М. Л.: Гостехиздат, 1948.— 479 с.
16. **Крамер Г.** Об одной новой предельной теореме теории вероятностей // Успехи математических наук.— 1944.— Т. 10.— С. 166—178.
17. **Осипов Л. В.** Многомерные предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения.— 1975.— Т. 20, № 1.— С. 40—57.
18. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— Т. 2.— М.: Мир, 1967.— 752 с.
19. **Боровков А. А., Могульский А. А.** О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах. I, II. // Сиб. математ. журнал.— 1978.— Т. 119, № 5.— С. 988—1004; Т. 21, № 4.— С. 12—26.
20. **Bahadur R. R., Zabell S. L.** Large deviations of the sample mean general vector space // Ann. of Probab.— 1979.— Vol. 7, N 4.— P. 587—621.
21. **Ибрагимов И. А., Радавичус М. Е.** О вероятностях больших уклонений для оценки максимального правдоподобия // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 357.— С. 1048—1052.
22. **Радавичус М. Е.** О вероятностях больших и умеренных уклонений для оценок максимального правдоподобия // Зап. научных семинаров ЛОМИ. Исследования по математической статистике.— 1981.— С. 155—171.
23. **Радавичус М. Е.** О вероятностях больших уклонений для оценок максимального правдоподобия // Докл. АН СССР.— 1983.— Т. 268.— С. 551—556.
24. **Radavicius M.** Some remarks on asymptotic efficiency in Bahadur sense of maximum likelihood estimator // Prob. Theory and Math. Statist.: Proceeding of the Fifth Vilnius Conference, Grigelionis et all. (Eds.).— VSP/Moklas.— 1990.— P. 340—348.

25. **Kourouklis S.** A large deviations result for the likelihood ratio statistics in exponential families // The Annals of Statistics.— 1984.— Vol. 12, N 4.— P. 1510—1521.
26. **Mogulskii A. A.** Large deviations for the maximum likelihood estimators // Lect. Notes Math.— 1988.— Vol. 1299.— P. 526—531.
27. **Золотарев В. М.** Об асимптотическом поведении одного класса безгранично делимых распределений // Теория вероятностей и ее применения.— 1961.— Т. 6, № 3.— С. 303—334.
28. **Боровков А. А.** Асимптотически оптимальные тесты для проверки сложных гипотез // Теория вероятностей и ее применения.— 1975.— Т. 20, № 3.— С. 463—497.
29. **Боровков А. А., Саханенко А. И.** Об асимптотически оптимальных для проверки сложных гипотез // Тр. ин-та математики СО АН СССР.— 1981.— Т. 1.— 207 с.
30. **Эдвардс Р.** Функциональный анализ.— М.: Мир, 1969.— 1071 с.
31. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер.— М.: Наука, 1977.— 351 с.
32. **Einmahl U.** Extentions of results of Komlos, Major, Tusnady to the multivariate case // Tecnical Report Series of Laboratory for Research in Statistics and Probability, N 98, November, 1986, Carleton University.
33. **Chernoff H.** A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on sums of observations // Ann. Math. Stat.— 1952.— Vol. 23, N 4.— P. 493—507.
34. **Kallenberg W. C. M.** Chernoff efficiency and defficiency // Ann. Stat.— 1982.— Vol. 10, N 2.— P. 583—594.
35. **Ронжин А. Ф.** Эффективность типа Чернова для критериев согласия, основанных на эмпирических функциях распределения // Теория вероятностей и ее применения.— 1985.— Т. 3, № 2.— С. 378—380.
36. **Ermakov M. S.** Minimax testing nonparametric hypothesis against nonparametric sets of alternatives // Fifth International Vilnius Conference on Probab. Theory and Math. Statist. Abstract of commun.— 1989.— Vol. 1.— P. 138—139.
37. **Ermakov M. S.** Asymptotic minimaxity of usual goodness-of-fit tests // Prob. Theory and Math. Statist.: Proceeding of the Fifth Vilnius Conference, Grigelionis et all (Eds.).— VSP/Moklas.— 1990.— P. 323—331.
38. **Bahadur R.** Rafes of convergence of estimates and test statistics // Ann. Math. Stat.— 1967.— Vol. 38, N 2.— P. 303—324.
39. **Raghavachari M.** On a theorem of Bahadur on the rate of convergence of test statstics // Ibid.— 1970.— Vol. 46, N 6.— P. 1695—1699.
40. **Hodges J. L., Lehmann E. L.** The efficiency of some nonparametric competitors of t-tests // Ibid. — 1956.— Vol. 27, N 1.— P. 324—335.
41. **Никитин Я. Ю.** Об асимптотической эффективности по Ходжесу — Леману непараметрических критериев согласия и однородности // Теория вероятностей и ее применения.— 1987.— Т. 32, № 1.— С. 82—91.
42. **Nikitin Ja.** Hodges-Lehmann efficiency of nonparametric tests // Proc. of the IV Vilnius Conf. on Prob. Theory and Math. Stat. VMU Sci. Press.— 1986.— Vol. 11.— P. 391—408.
43. **Kourouklis S.** Hodges-Lehmann efficiencies of certain tests in multivariate analysis and regression analysis // Canadian J. Stat.— 1988.— Vol. 16, N 1.— P. 87—95.
44. **Hodges J. L., Lehman E. L.** Deficiency // Ann. Math. Stat.— 1970.— Vol. 41.— P. 783—801.
45. **Chandra T. K., Ghosk J. K.** Comparison of tests with same Bahadur-efficiency // Sankhya.— 1978.— Vol. A40, N 3.— P. 253—377.
46. **Kallenberg W. C. M.** Bahadur deficiency of likelihood ratio tests in exponential families // J. Maltivar Anal.— 1981.— Vol. 11, N 4.— P. 506—531.
47. **Groenboom P.** Large deviations and asymptotic efficiencie // Math. Centrum Trracts, N 118.— Amsterdam, 1980.— 123 p.
48. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.— 414 с.
49. **Избранные** главы анализа и высшей алгебры: Учебное пособие/под ред. М. З. Соломян.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.— 199 с.
50. **Ильин В. А., Позуняк Э. Г.** Курс высшей математики и математической физики. Ч. I.— М.: Наука, 1971.— 599 с.