АППРОКСИМАЦИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ БАНАХОВОЗНАЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*И. С. Борисов, Е. А. Соловьёв**

§ 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе получен второй член асимптотического разложения типа разложения Эджворта распределений гладких функционалов от сумм независимых разнораспределенных случайных элементов (с.э.) в произвольном банаховом пространстве. При этом оценка остаточного члена близка к оптимальной. В качестве следствия получено аналогичное разложение для распределений гладких функционалов в классическом принципе инвариантности Донскера — Прохорова.

Пусть $\zeta_{n1}, \dots, \zeta_{nn}$, $n = 1, 2, \dots,$— последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин (с.в.) с нулевыми средними и конечными дисперсиями, которые удовлетворяют следующему условию нормировки: $\sum\limits_{i \le n} \mathbf{E}\zeta_{ni}^2 = 1$. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ так называемую случайную ломаную $S_n(t) = \sum\limits_{i:\, t_{ni} \le t} \zeta_{ni}$, где $t_{ni} = \sum\limits_{k \le n} \mathbf{E}\zeta_{nk}^2$. Хорошо известно, что при выполнении условия Линдеберга распределения $S_n(\cdot)$ при $n \to \infty$ слабо сходятся в $D_U[0, 1]$ (банаховом пространстве непрерывных справа и имеющих пределы слева функций на $[0, 1]$ с равномерной нормой) к распределению стандартного винеровского процесса $W(t)$. Отметим, что несепарабельность пространства $D_U[0, 1]$ в данном случае не является помехой, поскольку распределения допредельных и предельного процессов имеют сепарабельные носители.

Обозначим

$$d_F(S_n, W) = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\mathbf{P}(F(S_n) < x) - \mathbf{P}(F(W) < x)|,$$

где F— некоторый непрерывный на $D_U[0, 1]$ функционал. Важность построения оценок для $d_F(S_n, W)$ отмечалась еще в работе А. Н. Колмогорова [1]. Различные подходы для решения этой задачи разрабатывались, например, в работах [2—8], в основе которых лежат так называемые методы одного вероятностного пространства. Наилучшие оценки величины $d_F(S_n, W)$ в этих работах имеют порядок $(\log n)^\beta n^{-1/2}$ в случае одинаково распределенных с.в. и получены они либо при весьма жестких

**Работа выполнена при частичной поддержке Гранта №214-627 Министерства по науке, высшей школе и технической политике Российской Федерации.*

ограничениях на распределения ζ_{nk} (см. [8]), либо для узких классов функционалов F (см. [2]).

В [9, 10] при минимальных моментных ограничениях получены оценки $d_F(S_n, W)$ типа Берри — Эссеена порядка $n^{-1/2}$ для достаточно широкого класса регулярных функционалов F. В основе метода [9, 10] лежит представление случайной ломаной $S_n(t)$ в виде суммы n независимых разнораспределенных случайных процессов индикаторного типа с весом и использование затем идей метода композиции аналогично тому, как это делалось в [11], где рассматривалась схема суммирования независимых одинаково распределенных банаховозначных с.э.

Настоящая работа может рассматриваться как уточнение результатов [9, 10]. Например, в важном частном случае симметрических функционалов F для величины $d_F(S_n, W)$ удается получить оценки порядка $n^{-1+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$. При этом результаты, касающиеся принципа инвариантности, по существу получаются как следствия более общего результата для схемы суммирования независимых разнораспределенных с.э.

Прежде чем сформулировать основные результаты, нам необходимо ввести еще целый ряд обозначений и определений.

Пусть $\{\xi_{ni};\ i \le n\}$, $n \ge 1$,— последовательность серий независимых в каждой серии с.э. в произвольном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Предполагается, что распределения ξ_{ni} имеют в X сепарабельные носители; при этом $\mathbf{E}\,\xi_{ni} = 0$, $\sum\limits_{i\le n} \sigma_{ni}^2 = 1$, где $\sigma_{ni}^2 = \mathbf{E}\,\|\xi_{ni}\|^2$ удовлетворяют так называемому условию бесконечной малости $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{i\le n} \sigma_{ni} = 0$. Кроме того, будем предполагать, что распределение каждого с.э. ξ_{ni} предгауссово. Соответствующие гауссовские с.э. обозначим через γ_{ni}. Положим

$$S_n = \sum_{i\le n} \xi_{ni}, \qquad W_n = \sum_{i\le n} \gamma_{ni}.$$

Основной результат работы связан с оценкой близости распределений с.в. $F(S_n)$ и $F(W_n)$, где F — некоторый в известном смысле регулярный функционал на X. Условимся, что всюду в дальнейшем запись вида $F \in C(m, \beta, \alpha)$, где $m = 0, 1, \dots$, $\alpha \ge 0$, $\beta \in [0, 1]$, будет означать следующее:

$$\begin{gathered} \|F^{(k)}(x)\|^* \le c_0(F)\exp\{\alpha\|x\|\}, \\ \|F^{(m)}(x) - F^{(m)}(y)\|^* \le c_0(F)\exp\{\alpha\|x\| + \alpha\|y\|\}\,\|x-y\|^\beta, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $k = 1, 2, \dots, m$ и $F^{(k)}(x)\,[\cdot]$ — k-я производная Фреше, $\|\cdot\|^*$ — стандартная норма полилинейного функционала.

Введем дополнительные ограничения на массивы с.э. $\{\xi_{ni};\, i \le n\}$ и $\{\gamma_{ni};\, i \le n\}$. Пусть для любого подмножества $N \subseteq \{1, \dots, n\}$ выполнены следующие соотношения:

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi_{ni}\right\|^2 \le A\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2, \qquad \mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|^2 \le A\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2, \tag{1.2}$$

где постоянная A не зависит от n и N, но может зависеть от X и тех или иных вероятностных характеристик наборов $\{\xi_{ni}; i \le n\}$ и $\{\gamma_{ni}; i \le n\}$. Например, в банаховых пространствах типа 2 эти соотношения выполнены и $A = A(X)$. Однако (1.2) может иметь место и в других банаховых пространствах (см. [9]). Отметим также, что без каких-либо ограничений на геометрию X соотношения в (1.2) не вытекают одно из другого.

Известно (см. [11]), что с помощью одних лишь условий (1.1) и (1.2) нельзя получить содержательные оценки для $d_F(\cdot, \cdot)$. Последнюю группу ограничений можно назвать условиями стохастической отделимости от нуля первых двух производных Фреше функционала F. Итак, предположим, что для любого n и некоторого $\delta \in (0, 1)$ найдется такое множество индексов $N(\delta, n)$, что $\sum_{i \in N(\delta,n)} \sigma_{ni}^2 > \delta$, и для всех подмножеств $N \subseteq N(\delta, n)$, удовлетворяющих требованию

$$\sum_{i \in N} \sigma_{ni}^2 \ge \varepsilon(n) \equiv \sum_{i \le n} \mathbf{E} \min\{\|\xi_{ni}\|^2, \|\xi_{ni}\|^3\}, \tag{1.3}$$

и некоторого достаточно большого положительного M_1 выполнено неравенство

$$\sup_{z>0} z^{-M_1} \mathbf{P}\left(\sum_{i \in N} D_{ni}(W_n) \le z \sum_{i \in N} \sigma_{ni}^2\right) \le B, \tag{1.4}$$

где δ и B не зависят от n и N,

$$D_{ni}(x) = \mathbf{E}\,(F^{(1)}(x)\ [\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(1)}])^2,$$

$$\mathbf{P}(\xi_{ni}^{(1)} \in A) = \mathbf{P}(\xi_{ni} \in A \mid \|\xi_{ni}\| \le K\hat{\sigma}_{ni}), \qquad \hat{\sigma}_{ni} = \sigma_{ni} + \varepsilon(n),$$

$K > 2$ — некоторая постоянная.

Отметим, что условие (1.4), введенное в [9], в случае одинаково распределенных слагаемых по существу совпадает с соответствующим условием в [11] и обеспечивает наряду с (1.1)—(1.3) оптимальные оценки величины $d_F(\cdot, \cdot)$. Однако для получения содержательных оценок остаточных членов в асимптотических разложениях необходимо вместо (1.4) требовать стохастическую отделимость от нуля производных более высокого порядка (см. [14—16]). В настоящей работе выделяется второй член асимптотического разложения с близкой к оптимальной оценкой остаточного члена. Получение полных асимптотических разложений может быть проведено по такой же схеме. Однако для разнораспределенных слагаемых формулировка соответствующих условий стохастической отделимости от нуля старших производных рассматриваемых функционалов становится, на наш взгляд, слишком громоздкой.

Для выделения второго члена асимптотического разложения рассматриваемых распределений мы будем предполагать, что существует разбиение определенного в (1.3) множества индексов N на два непересекающихся подмножества $N^{(1)}$ и $N^{(2)}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\sup_{z>0} z^{-M} \mathbf{P}\left(\sum_{i \in N^{(1)}} \sum_{j \in N^{(2)}} D_{nij}(W_n, \gamma_{nj}^{(1)}) \le z \sum_{i \in N^{(1)}} \sigma_{ni}^2 \sum_{j \in N^{(2)}} \sigma_{nj}^2\right) \le B, \tag{1.5}$$

где $D_{nij}(x, y) = \mathbf{E}\,(F^{(2)}(x)\ [\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(1)}, y])^2$, M — достаточно большое положительное число,

$$\sum_{i \in N^{(k)}} \sigma_{ni}^2 > \frac{1}{3} \sum_{i \in N} \sigma_{ni}^2 \quad , \ k = 1, 2, \tag{1.6}$$

$\{\gamma_{nj}^{(1)}\}$ — независимые центрированные гауссовкие с.э. с теми же ковариациями, что и $\{\xi_{ni}^{(1)}\}$. Отметим, что если распределения исходных с.э. предгауссовы, то $\{\gamma_{nj}^{(1)}\}$ существуют (см. [9]).

Введем обозначения

$$\xi'_{ni} = \xi_{ni}\mathbf{I}(\|\xi_{ni}\| \le 1), \quad \Lambda_2 = \sum_{i \le n} \mathbf{E}\ \|\xi_{ni} - \xi'_{ni}\|^2 \ , \quad L_m = \sum_{i \le n} \mathbf{E}\ \|\xi'_{ni}\|^m, \tag{1.7}$$

$$\varphi_t(x, y) = \exp\{itF(x)\}\{t^2(F^{(1)}(x)[y])^3 - F^{(3)}(x)[y^3] - 4itF^{(1)}(x)[y]\,F^{(2)}(x)[y^2]\},$$

$$F^{(k)}(x)[y^k] = F^{(k)}(x)[y, \ldots, y],$$

$$Q_n(z) = \frac{1}{12\pi} \sum_{k \le n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz}\mathbf{E}\,\varphi_t(W_n, \xi'_{nk})\, dt, \tag{1.8}$$

где W_n не зависит от последовательности $\{\xi_{nk}\}$; при этом в (1.8) предполагается существование всех интегралов.

Замечание 1. В доказательстве нижеследующей теоремы 1 используются срезки исходных с.в. на специально подобранном уровне, зависящем от параметров задачи. Однако соответствующие моментные характеристики (отношения Линдеберга и Ляпунова), участвующие в оценках и вычисленные для этих срезок, мажорируются линейными комбинациями величин Λ_2 и L_m. Например, при любом $T > 0$

$$\sum_{k \le n} \mathbf{E}\ \|\xi_{nk}\|^2 \mathbf{I}\,(\|\xi_{nk}\| \ge T) \le \Lambda_2 + T^{-1}L_3,$$

$$\sum_{k \le n} \mathbf{E}\ \|\xi_{nk}\|^3 \mathbf{I}\,(\|\xi_{nk}\| \le T) \le L_3 + T\Lambda_2.$$

Отметим также, что для величины $\varepsilon(n)$ в (1.3) справедливо представление $\varepsilon(n) = \Lambda_2 + L_3$.

Замечание 2. В условиях теоремы 1 функция $Q_n(z)$ допускает иное представление. Обозначим $g(x) = \mathbf{P}\,(F(W_n + x) < z)$. Тогда в силу леммы 11 можно внести оператор дифференцирования по банаховозначному параметру x под знак интеграла в формуле обращения. В результате получим

$$Q_n(z) = \frac{1}{6} \sum_{k \le n} \mathbf{E}\, g^{(3)}(0)\ [\xi'^{3}_{nk}].$$

Теорема 1. *Пусть* $F \in C(7, 0, \alpha)$ *и выполнены условия* (1.2), (1.3), (1.5), (1.6). *Тогда функция* $Q_n(z)$ *в* (1.8) *корректно определена и при всех* $z \in \mathbf{R}$ *справедливо следующее асимптотическое разложение*:

$$\mathbf{P}(F(S_n) \le z) = \mathbf{P}(F(W_n) \le z) + Q_n(z) + R_n(z)\,; \tag{1.9}$$

при этом для любого $\nu > 18M^{-1}$

$$\sup_{z\in\mathbf{R}} |R_n(z)| \le c(\nu, \cdot)(\Lambda_2 + L_3^{2-\nu} + L_4)\,, \tag{1.10}$$

где постоянная $c(\nu, \cdot)$ *зависит еще и от* $c_0, \alpha, A, \delta, B$. *Кроме того,*

$$\sup_{z\in\mathbf{R}} |Q_n(z)| \le c(\cdot)\, L_3\,.$$

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы* 1 F — *симметрический функционал, т.е.* $F(x) = F(-x)$ *для любого* $x \in X$ *или* ξ_{ni} *симметрично распределены при всех* $i \le n$. *Тогда* $Q_n(z) \equiv 0$ *и левая часть неравенства* (1.10) *совпадает с величиной* $d_F(S_n, W_n)$.

Первая часть этого утверждения следует из симметричности распределения W_n и того факта, что производные четного или нечетного порядка симметрических функционалов, соответственно, симметричны или асимметричны.

Замечание 3. Соотношение (1.10) в известной степени обобщает и усиливает результаты работ [12—14], где рассматривался случай одинаково распределенных $\{\xi_{ni}\}$, а также один из результатов работы [15], в которой изучались асимптотические разложения для частного случая симметрического функционала $F(x) = (Dx, x)$, где D — непрерывный линейный оператор в гильбертовом пространстве X.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 1

$$d_F(S_n, W_n) \le c(\cdot)(\Lambda_2 + L_3)\,.$$

Отметим, что подобная оценка была получена в [9] при выполнении (1.2)—(1.4) и $F \in C(4, \beta, \alpha)$, $\beta > 0$, $M_1 = \max\{(5+\beta)/\beta, 25\}$.

Рассмотрим важный частный случай, когда

$$\xi_{ni} = \xi_i (n\,\mathbf{E}\,\|\xi_1\|^2)^{-1/2}\,, \tag{1.11}$$

где $\{\xi_i\}$ — независимые одинаково распределенные с.э., не зависящие от n. В этом случае распределение $W_n \overset{d}{=} \gamma_1$ также не зависит от n и выражение в (1.8) принимает вид

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi(n\,\mathbf{E}\,\|\xi_1\|^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-itz\}\,\mathbf{E}\,\varphi_t(\gamma_1, \xi_k^{(N)})\,dt\,,$$

где $\xi_k^{(N)} = \xi_k \mathbf{I}(\|\xi_k\| \le (n\,\mathbf{E}\,\|\xi_1\|^2)^{1/2})$. Если же $\mathbf{E}\,\|\xi_k\|^4 < \infty$, то в условиях теоремы 1 справедливо представление

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi(n\,\mathbf{E}\,\|\xi_1\|^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-itz\}\,\mathbf{E}\,\varphi_t(\gamma_1, \xi_1)\,dt + o(1/n)\,.$$

Наконец, если $\mathbf{E}\,\|\xi_k\|^4 < \infty$ и условие (1.5) выполнено для любого положительного M, то из (1.10) при любом $\nu > 0$ следует оценка

$$\sup_{z\in\mathbf{R}} |R_n(z)| \le c(\nu, \cdot)\left(\frac{\mathbf{E}\,\|\xi_k\|^4}{n\,(\mathbf{E}\,\|\xi_k\|^2)^2}\right)^{1-\nu}.$$

Обратимся еще раз к принципу инвариантности Донскера — Прохорова. Обозначим

$$\widetilde{Q}_n(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k<n}\mathbf{E}\,\zeta'^{\,3}_{nk}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-itz\}\psi_{nk}(t)\,dt,$$

где $\zeta'_{nk} = \zeta_{nk}\mathbf{I}(|\zeta_{nk}| \le 1)$,

$$\psi_{nk}(t) = \mathbf{E}\exp\{itF(x)\}\{t^2(F^{(1)}(W)\,[I_{nk}])^3 - F^{(3)}(W)\,[I^3_{nk}] -$$

$$- 4itF^{(1)}(W)\,[I_{nk}]\,F^{(2)}(W)\,[I^2_{nk}]\}, \tag{1.12}$$

$I_{nk}(z) = 0$, если $z \le t_{nk}$ и $I_{nk}(\cdot) = 1$ в противном случае.

Доказательство следующего утверждения существенно опирается на теорему 1.

Теорема 2. *Пусть функционал $F: D_U[0,1] \to \mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям: $F \in C(7, 0, \alpha)$ и для некоторого $B > 0$*

$$\sup_{z>0} z^{-M}\,\mathbf{P}\left(\sum_{i\in N^{(1)}}\sum_{j\in N^{(2)}}\gamma_j^2\,\bar{\sigma}^2_{ni}\bar{\sigma}^2_{nj}(F^{(2)}(W)\,[I_{ni}, I_{nj}])^2 \le z\sum_{i\in N^{(1)}}\sigma^2_{ni}\sum_{j\in N^{(2)}}\sigma^2_{nj}\right) \le B, \tag{1.13}$$

где $M > 0$, $\bar{\sigma}^2_{ni} = \mathbf{D}\,\zeta^{(1)}_{ni}$, $\{\gamma_j^2\}$ — независимые $(0,1)$-гауссовские с.в., не зависящие от $W(\cdot)$, подмножества N, $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ удовлетворяют условиям (1.3), (1.6). Тогда функция $\widetilde{Q}_n(z)$ корректно определена при всех $z \in \mathbf{R}$ и

$$\mathbf{P}(F(S_n) < z) = \mathbf{P}(F(W) < z) + \widetilde{Q}_n(z) + \widetilde{R}_n(z);$$

при этом для любого $\nu > 18M^{-1}$

$$\sup_{z\in\mathbf{R}} |\widetilde{R}_n(z)| \le \delta(\zeta, F, \nu) + c(\cdot)\sum_{k\le n}\sigma^2_{nk}\lambda(t_{nk-1}, t_{nk}), \tag{1.14}$$

где $\delta(\cdot)$ совпадает с правой частью неравенства (1.10), вычисленной для массива с.в. $\zeta \equiv \{\zeta_{ni}\}$,

$$\lambda(t, s) = \sup_{z,\,x\ne 0}\left\{\frac{|F^{(1)}(z)\,[x(I_t - I_s)]|}{\|x\|\exp\{\alpha\|z\|\}} + \frac{|F^{(2)}(z)\,[x, x(I_t - I_s)]|}{\|x\|^2\exp\{\alpha\|z\|\}}\right\}. \tag{1.15}$$

Замечание 4. При выполнении (1.11) условие (1.13) можно заменить более жестким, но более удобным для проверки требованием:

$$\sup_{n}\sup_{\sqrt{n}\le m\le\delta n}\sup_{z>0}\left\{z^{-M}\,\mathbf{P}\left(m^{-2}\sum_{i,j\le m}\gamma_j^2\,(F^{(2)}(W)\,[I_{ni}, I_{nj}])^2 < z\right)\right\} \le B$$

для некоторого $\delta\in(0,1)$.

Следствие 3. *Для любого $s \in (2, 4]$ выполнено неравенство*

$$\delta(\zeta, F, \nu) \le c(\nu, \cdot)\,(L_{s\wedge 3}^{2-\nu} + \widetilde{L}_s),$$

где $\widetilde{L}_p = \sum_{i\le n} \mathbf{E}\,|\zeta_{ni}|^p$ *— классическое отношение Ляпунова. В частности, если* $\zeta_{ni} = \zeta_i (n\,\mathbf{E}\zeta_i^2)^{-1/2}$ *и условие* (1.13) *выполнено для любого* $M > 0$, *то при* $s = 4$

$$\delta(\zeta, F, \nu) < c(\nu, \cdot)\left(\frac{\mathbf{E}\,\zeta_1^4}{n(\mathbf{E}\,\zeta_1^2)^2}\right)^{1-\nu}, \tag{1.16}$$

где ν *— произвольно малое положительное число.*

Следствие 4. *В условиях теоремы* 2 *для функционалов интегрального типа*

$$F(x) = \int_0^1 f(x(t))\,d\mu(t), \tag{1.17}$$

где $\mu(t)$ *— конечная мера на отрезке* $[0,1]$, $f \in C(7,0,\alpha)$, *имеют место оценки*

$$\begin{gathered} \lambda(t, s) \le c_0(F)\,\mu([t, s]), \\ \sum_{i\le n} \lambda(t_{ni-1}, t_{ni})\,\sigma_{ni}^2 \le c_0(F) \max_{i\le n} \sigma_{ni}^2. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Поэтому в условиях следствия 1 для функционалов (1.17) *из* (1.14), (1.16) *и* (1.18) *получаем для любого* $\nu > 0$ следующую оценку :

$$\sup_{z\in\mathbf{R}} |\widetilde{R}_n(z)| \le c_1(\nu)\left(\frac{\mathbf{E}\,\zeta_1^4}{n\,(\mathbf{E}\,\zeta_1^2)^2}\right)^{1-\nu}. \tag{1.19}$$

Замечание 5. Если $\mu(\cdot)$ — мера Лебега на $[0,1]$, то для выполнения (1.13) достаточно (см. [9]), чтобы в (1.17) функция $f''(\cdot)$ была знакопостоянной, и для некоторых положительных δ, p имело место неравенство $|f''(x)| \ge |x|^p$ при всех $x \in (-\delta, \delta)$.

Отметим, что знакопостоянство производной не обязательно для выполнения (1.13).

§ 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем в рассмотрение независимые в совокупности массивы с.в. $\{\xi'_{ni}\}$, $\{\xi_{ni}^{(1)}\}$, $\{\xi_{ni}^{(2)}\}$, которые определим следующим образом:

$$\xi'_{ni} = \xi_{ni}\,\mathbf{I}\,(\|\xi_{ni}\| \le c^* / \alpha),$$

$$\mathbf{P}\,(\xi_{ni}^{(1)} \in A) = \mathbf{P}\,(\xi'_{ni} \in A \mid \|\xi'_{ni}\| \le K\widehat{\sigma}_{ni}), \qquad K \ge 2,$$

$$\mathbf{P}\,(\xi_{ni}^{(2)} \in A) = 2\,\mathbf{P}\,(\xi'_{ni} \in A) - \mathbf{P}\,(\xi_{ni}^{(1)} \in A).$$

Заметим, что распределение с.э. $\xi_{ni}^{(2)}$ корректно определено в силу оценки

$$\mathbf{P}\left(\|\xi'_{ni}\| \le K\hat{\sigma}_{ni}\right) \ge 1 - \frac{\mathbf{E}\,\|\xi'_{ni}\|^2}{K^2\sigma^2_{ni}} \ge \frac{3}{4}.$$

Пусть $\{\nu_i\}$ — последовательность независимых с.в., имеющих бернуллиевское распределение $\mathbf{P}(\nu_i = 0) = \mathbf{P}(\nu_i = 1) = 1/2$. Всюду в дальнейшем предполагается, что последовательности $\{\xi_{ni}\}$, $\{\xi'_{ni}\}$, $\{\xi^{(1)}_{ni}\}$, $\{\xi^{(2)}_{ni}\}$ и $\{\nu_i\}$ независимы в совокупности. В этом случае

$$\xi'_{ni} \overset{d}{=} \nu_i\,\xi^{(1)}_{ni} + (1-\nu_i)\,\xi^{(2)}_{ni}. \tag{2.1}$$

Это соотношение неоднократно будет использоваться при доказательстве теоремы (см. также [12, 13, 16]). Наконец, обозначим через $\gamma^{(1)}_{ni}$, $\gamma^{(2)}_{ni}$ центрированные гауссовские с.э. с теми же ковариациями, что и $\xi^{(1)}_{ni}$, $\xi^{(2)}_{ni}$ соответственно.

Нижеследующие леммы 1—7 доказаны в [9].

Лемма 1. *Для любого подмножества $N \subseteq \{1,\dots,n\}$ и произвольного $r \le \alpha(8c^*)^{-1}$*

$$\mathbf{E}\exp\left\{ r \left\| \sum_{i\in N} \xi'_{ni} \right\| \right\} \le 3\exp\{\alpha r / c^* + rA^{1/2} + 8r^2\};$$

кроме того, для любого $s \ge 0$

$$\mathbf{E}\exp\left\{ s \left\| \sum_{i\in N} \gamma_{ni} \right\| \right\} \le (1 + 2s(2\pi A)^{1/2})\exp\{s^2A^2/2 + sA^{1/2}\},$$

где A определено в (1.2).

Лемма 2. *Пусть ψ — произвольная выпуклая четная функция на X. Тогда для любого $N \subseteq \{1,\dots,n\}$*

$$\mathbf{E}\,\psi\left(\sum_{i\in N}(\xi^{(1)}_{ni} - \mathbf{E}\,\xi^{(1)}_{ni})\nu_i\right) \le \mathbf{E}\,\psi\left(2\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right),$$

$$\mathbf{E}\,\psi\left(\sum_{i\in N}(\xi^{(2)}_{ni} - \mathbf{E}\,\xi^{(2)}_{ni})(1-\nu_i)\right) \le \mathbf{E}\,\psi\left(2\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right),$$

$$\mathbf{E}\,\psi\left(\sum_{i\in N}(\nu_i\,\xi^{(1)}_{ni} - (1-\nu_i)\mathbf{E}\,\xi^{(1)}_{ni})\right) \le \mathbf{E}\,\psi\left(\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right).$$

Лемма 3. *Для любого $r \ge 1$ при выполнении* (1.3)

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}(\xi^{(1)}_{ni} - \mathbf{E}\,\xi^{(1)}_{ni})\nu_i\right\|^r \le c(A,r,\alpha,K)\left(\sum_{i\in N}\sigma^2_{ni}\right)^{r/2},$$

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}((\xi^{(1)}_{ni} - \mathbf{E}\,\xi^{(2)}_{ni})\nu_i + \mathbf{E}\,\xi^{(2)}_{ni})\right\|^r \le c(A,r,\alpha,K)\left(\sum_{i\in N}\sigma^2_{ni}\right)^{r/2}.$$

Лемма 4. *Для любого центрированного гауссовского с.э. $\gamma \in X$ и произвольного $r \ge 1$*

$$\mathbf{E}\,\|\gamma\|^r \le 2^{r-1}(r2^{r/2}\Gamma(r/2)+1)\,(\mathbf{E}\,\|\gamma\|^2)^{r/2},$$

где $\Gamma(z)$ *— гамма-функция.*

Следующая лемма обобщает утверждение леммы 5 в [9] и доказывается аналогичным образом.

Лемма 5. *Пусть некоторая выпуклая функция* $G(x)$ *удовлетворяет неравенству* $G(cx) \le |c|^r G(x)$, *где* $x \in \mathbf{X}$, $c \in \mathbf{R}$. *Тогда для любого подмножества* $N \subseteq \{1, \dots, n\}$

$$\mathbf{E}\,G\Bigl(\sum_{i\in N}\gamma_{ni}^{(m)}\Bigr) \le 2^{1+r/2}\,\mathbf{E}\,G\Bigl(\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\Bigr), \quad m = 1, 2.$$

Лемма 6. *Пусть* η *— произвольный предгауссовский центрированный с.э. в* X, γ *— центрированный гауссовский с.э. с той же ковариацией, что и у* η. *Тогда для любой непрерывной билинейной формы* $L(x,y)$, *заданной на* $X \times X$, *справедливо равенство*

$$\mathbf{E}\,L(\eta,\eta) = \mathbf{E}\,L(\gamma,\gamma).$$

Далее нам понадобятся следующие обозначения, определенные для любого подмножества $N \subseteq \{1, \dots, n\}$:

$$S'_{nk} = \sum_{i<k}\xi'_{ni} + \sum_{i>k}\gamma_{ni},$$

$$S_{nk}(N) = \sum_{i<k,\, i\notin N}\xi'_{ni} + \sum_{i>k,\, i\notin N}\gamma_{ni} + \sum_{i>k,\, i\in N}(\xi_{ni}^{(2)} - \mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(2)})(1-\nu_i) +$$

$$+ \sum_{i<k,\, i\in N}\{(\mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(2)})\nu_i + \mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(2)}\},$$

$$\delta_{nk}(N) = \sum_{i<k,\, i\in N}(\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(1)})\,\nu_i + \sum_{i>k,\, i\in N}\gamma_{ni},$$

$$\Delta_n(N) = \Bigl(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\Bigr)^{1/2}, \tag{2.2}$$

$$e_{nk}(N) = \sum_{i<k,\, i\in N}\{(\mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(2)})\nu_i + \mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(2)}\},$$

$$S_{nkr}(N) = \sum_{i<r,\, i\notin N}\xi'_{ni} + \sum_{i>r,\, i\notin N}\gamma_{ni} + \sum_{i<r,\, i\in N}(\xi_{ni}^{(2)} - \mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(2)})(1-\nu_i) + \sum_{k>i>r,\, i\in N}\gamma_{ni}^{(2)}(1-\nu_i),$$

$$\sigma_n(N) = \max_{i\in N}\hat{\sigma}_{ni}.$$

Лемма 7. *Пусть* $F \in C(m,\beta,\alpha)$. *Тогда для любого натурального* $r \le m$, *при выполнении* (1.3)

$$\mathbf{E}\,|F^{(r)}(S_{nk}(N))\,[\delta_{nk}(N)^r]| \le C(F,A,r,K)\,\Delta_n(N)^r.$$

Лемма 8. *Пусть* $F \in C(r,\beta,\alpha)$, $H \in C(m,\beta,\alpha)$ *и, кроме того, пусть* $\{N_j;\, j \le pr+m+1\}$ *— произвольное конечное разбиение* N. *Тогда если* $|t|\,\Delta_n(N)^3 \le 1$ *и* $|t|\sigma_n(N)^{1-a_1}\Delta_n(N)^{1-a_2} \le 1/8$, *то для любого* $q > 1$

$$|\mathbf{E}\, H(S'_{nk}) \exp\{itF(S'_{nk})\}| \le C(\cdot)\{\Delta_n(N)^{m+\beta} + |t|\Delta_n(N)^{r+\beta} + |t|^{p+1}\Delta_n(N)^{3(p+1)} +$$

$$+ \max_{j\le pr+m+1} \mathbf{E}^{1/q} \exp\{-\frac{t^2 q}{3}\, \mathbf{E}_{S_{nk}(N),\, \tilde\delta_{nk}(N_j^{(2)}),\, \nu} (F^{(2)}(S_{nk}(N))\, [\delta_{nk}(N_j^{(1)}), \tilde\delta_{nk}(N_j^{(2)})]\,)^2\}\},$$

где пара $N_j^{(1)}$ *и* $N_j^{(2)}$ *представляет собой произвольное разбиение множества* N_j*;* p *— произвольное натуральное число,* $\tilde\delta_{nk}(\cdot)$ *— симметризация с.в.* $\delta_{nk}(\cdot)$ *при фиксированной последовательности* $\{\nu_i\}$.

Доказательство. Разложим F и H в ряды Тейлора в точке $S_{nk}(N)$. Тогда имеем (ср. [9])

$$|\, \mathbf{E}\, H(S'_{nk}) \exp\{itF(S'_{nk})\}\,| \le$$

$$\le \left| \mathbf{E} \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} H^{(l)}(S_{nk}(N))\, [\delta_{nk}(N)^l]\, \exp\left\{it \left(F(S_{nk}(N)) + F^{(1)}(S_{nk}(N))\, [\delta_{nk}(N)] + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{2} F^{(2)}(S_{nk}(N))\, [\delta_{nk}(N)^2] + \sum_{d=3}^{r} \frac{1}{d!} F^{(d)}(S_{nk}(N))\, [\delta_{nk}(N)^d] \right)\right\}\right| +$$

$$+ C(\cdot)\left\{\Delta_n(N)^{m+\beta} + |t|\,\Delta_n(N)^{r+\beta}\right\} \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{m} \mathbf{E} \left| \mathbf{E}_{S_{nk}(N),\, \nu}\, \frac{1}{l!} H^{(l)}(S_{nk}(N))\, [\delta_{nk}(N)^l] \times \right.$$

$$\times \exp\{it\,(F^{(1)}(S_{nk}(N))\, [\delta_{nk}(N)] + \frac{1}{2} F^{(2)}(S_{nk}(N))\, [\delta_{nk}(N)^2]\,)\} \times$$

$$\left. \times \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{p} \frac{1}{s!} \left(it \sum_{d=3}^{r} \frac{1}{d!} F^{(d)}(S_{nk}(N))\, [\delta_{nk}(N)^d] \right)^s \right\} \right| +$$

$$+ \tilde{C}(\cdot)\left\{ \Delta_n(N)^{m+\beta} + |t|\,\Delta_n(N)^{r+\beta} + |t|^{p+1}\Delta_n(N)^{3(p+1)} \right\}. \qquad (2.3)$$

Заметим, что в правой части неравенства (2.3) содержатся члены вида

$$J \equiv |\, \mathbf{E}_{S_{nk}(N),\, \nu}\, L_l(\delta_{nk}(N)^l) \exp\{it\tilde{L}_2(\delta_{nk}(N)^2)\}\, |\ ,$$

где $l \le pr+m$, $\tilde{L}_2(x,x) = F^{(1)}(\cdot)\,[x] + 1/2\, F^{(2)}(\cdot)\,[x,x]$, $L_l(x^l)$ — l-линейный функционал. Далее, разбиваем N на $l+1$ непересекающихся подмножеств N_j. Тогда

$$J \le \sum_{i_1,\ldots i_l}^{l+1} \left| \mathbf{E}_{S_{nk}(N),\, \nu} L_l(\delta_{nk}(N_{i_1}), \ldots, \delta_{nk}(N_{i_l})) \exp\left\{it\tilde{L}_2\left(\sum_{j\le l+1, j\ne j^*} \delta_{nk}(N_j), \sum_{j\le l+1, j\ne j^*} \delta_{nk}(N_j)\right)\right\}\right.$$

$$\times\, \mathbf{E}_{\Sigma} \exp\left\{it\left(F^{(1)}(S_{nk}(N))\, [\delta_{nk}(N_{j^*})] + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{2} F^{(2)}(S_{nk}(N))\, [\delta_{nk}(N_{j^*}), \delta_{nk}(N_{j^*})]\right) + F^{(2)}(S_{nk}(N)) \left[\sum_{j\le l+1, j\ne j^*} \delta_{nk}(N_j),\, \delta_{nk}(N_{j^*})\right]\right\}\right| \le$$

$$\leq \sum_{i_1,\dots,i_l}^{l+1} \mathbf{E}_{S_{nk}(N),\nu} \, |L_l(\delta_{nk}(N_{i_1}),\dots,\delta_{nk}(N_{i_l}))| \times$$

$$\times \left| \mathbf{E}_\Sigma \exp\left\{ it \left\{ F^{(1)}(S_{nk}(N)) \, [\delta_{nk}(N_{j^*})] + 1/2 F^{(2)}(S_{nk}(N)) \, [\delta_{nk}(N_{j^*}), \delta_{nk}(N_{j^*})] + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + F^{(2)}(S_{nk}(N)) \left[\sum_{j \leq l+1,\, j \neq j^*} \delta_{nk}(N_j), \delta_{nk}(N_{j^*}) \right] \right\}\right\} \right| ,$$

где символ Σ обозначает семейство с.э. $\left\{ \sum_{j \leq l+1,\, j \neq j^*} \delta_{nk}(N_j), S_{nk}(N), \nu \right\}$. Далее, множество N_{j^*} разобьем на два подмножества $N_{j^*}^{(1)}$ и $N_{j^*}^{(2)}$ так, что $N_{j^*}^{(1)} \cap N_{j^*}^{(2)} = \varnothing$. Обозначим для упрощения записи

$$\delta_1 = \delta_{nk}(N_{j^*}^{(1)}), \qquad \delta_2 = \delta_{nk}(N_{j^*}^{(2)}).$$

Тогда, применяя метод Гётце (см. [11, 14]), связанный с оценкой характеристических функций билинейных функционалов от сумм независимых с.э., получаем

$$\left| \mathbf{E}_\Sigma \exp\left\{ it \left(F^{(1)}(S_{nk}(N)) \, [\delta_{nk}(N_{j^*})] + 1/2\, F^{(2)}(S_{nk}(N)) \, [\delta_{nk}(N_{j^*}), \delta_{nk}(N_{j^*})] + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + F^{(2)}(S_{nk}(N)) \left[\sum_{j \leq l+1,\, j \neq j^*} \delta_{nk}(N_j) \, , \, \delta_{nk}(N_{j^*}) \right] \right) \right\} \right| \leq$$
$$\leq \left| \mathbf{E}_\Sigma \exp\left\{ it \left(F^{(1)}(\cdot) \, [\delta_1] + F^{(1)}(\cdot) \, [\delta_2] + \right.\right.\right.$$
$$+ F^{(2)}(\cdot) \left[\sum_{j \leq l+1,\, j \neq j^*} \delta_{nk}(N_j), \delta_1 \right] + F^{(2)}(\cdot) \left[\sum_{j \leq l+1,\, j \neq j^*} \delta_{nk}(N_j), \delta_2 \right] +$$
$$\left.\left.\left. + F^{(2)}(\cdot) \, [\delta_1, \delta_2] + 1/2\, F^{(2)}(\cdot) \, [\delta_1, \delta_1] + 1/2\, F^{(2)}(\cdot) \, [\delta_2, \delta_2] \right) \right\} \right| \leq$$
$$\leq \mathbf{E}_\Sigma^{1/2} \left| \mathbf{E}_{\delta_1, \Sigma} \exp\left\{ it \left(F^{(1)}(\cdot) \, [\delta_2] + F^{(2)}(\cdot) \left[\sum_{j \leq l+1,\, j \neq j^*} \delta_{nk}(N_j), \delta_2 \right] + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + F^{(2)}(\cdot) \, [\delta_1, \delta_2] + 1/2\, F^{(2)}(\cdot) \, [\delta_2, \delta_2] \right) \right\} \right|^2 =$$
$$= \mathbf{E}_\Sigma^{1/2} \exp\left\{ it \left(F^{(1)}(\cdot) \, [\hat{\delta}_2] + F^{(2)}(\cdot) \, [\delta_1, \hat{\delta}_2] + \right.\right.$$
$$\left.\left. + F^{(2)}(\cdot) \left[\sum_{j \leq l+1,\, j \neq j^*} \delta_{nk}(N_j), \hat{\delta}_2 \right] + 1/2\, F^{(2)}(\cdot) \, [\delta_2, \delta_2] - 1/2\, F^{(2)}(\cdot) \, [\tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_2] \right) \right\},$$

где $\hat{\delta}_2 = \delta_2 - \tilde{\delta}_2$, $\tilde{\delta}_2$ и δ_2 одинаково распределены и независимы при фиксации $\{\nu_i\}$. Отсюда

$$J \le \sum_{i_1, \dots, i_l}^{l+1} \mathbf{E}^{1/2}_{S_{nk}, \nu} \mid L_l(\delta_{nk}(N_{i_1}), \dots, \delta_{nk}(N_{i_l})) \mid^2 \mathbf{E}^{1/2}_{S_{nk}, \nu} \exp\Big\{ it \Big(F^{(1)}(\cdot) [\hat{\delta}_2] +$$

$$+ F^{(2)}(\cdot) [\delta_1, \hat{\delta}_2] + F^{(2)}(\cdot) \Big[\sum_{j \le l+1, j \ne j^*} \delta_{nk}(N_j), \hat{\delta}_2 \Big] +$$

$$+ ½ F^{(2)}(\cdot) [\delta_2, \delta_2] - ½ F^{(2)}(\cdot) [\bar{\delta}_2, \bar{\delta}_2] \Big) \Big\}.$$

Далее, дополнительно фиксируя с.э. $\bar{\delta}_2$ и δ_2 во внутреннем условном среднем предыдущего неравенства, получаем, что

$$J \le \sum_{i_1, \dots, i_l}^{l+1} \mathbf{E}^{1/2}_{S_{nk}, \nu} \mid L_l(\delta_{nk}(N_{i_1}), \dots, \delta_{nk}(N_{i_l})) \mid^2 \Big| \mathbf{E}^{1/2}_{S_{nk}, \nu} \exp\Big\{ it \Big(F^{(1)}(\cdot) [\hat{\delta}_2] +$$

$$+ F^{(2)}(\cdot) \Big[\sum_{j \le l+1, j \ne j^*} \delta_{nk}(N_j), \hat{\delta}_2 \Big] + ½ F^{(2)}(\cdot) [\delta_2, \delta_2] - ½ F^{(2)}(\cdot) [\bar{\delta}_2, \bar{\delta}_2] \Big) \Big\} \times$$

$$\times \mathbf{E}_{S_{nk}, \nu, \bar{\delta}_2, \delta_2} \exp\{ it F^{(2)}(\cdot) [\delta_1, \hat{\delta}_2] \} \Big| \le$$

$$\le \sum_{i_1, \dots, i_l}^{l+1} \mathbf{E}^{1/2}_{S_{nk}, \nu} \mid L_l(\delta_{nk}(N_{i_1}), \dots, \delta_{nk}(N_{i_l})) \mid^2 \times$$

$$\times \mathbf{E}^{1/2}_{S_{nk}, \nu} \mid \mathbf{E}_{S_{nk}, \nu, \hat{\delta}_2} \exp\{ it F^{(2)}(\cdot) [\delta_1, \hat{\delta}_2] \} \mid . \tag{2.4}$$

Теперь оценим величину

$$\tilde{J} \equiv \mid \mathbf{E}_{S_{nk}(N), \nu, \hat{\delta}_2} \exp\{ it F^{(2)}(S_{nk}(N)) [\delta_1, \hat{\delta}_2] \} \mid$$

на множестве элементарных исходов, задаваемом неравенствами

$$\|S_{nk}(N)\| \le \frac{a_1}{\alpha} |\log \sigma_n(N)| , \qquad \|\hat{\delta}_2\| \le \Delta_n(N)^{1-a_2} .$$

При этих условиях можно воспользоваться известной оценкой (см. [10])

$$\tilde{J} \le \exp\{ -\frac{t^2}{3} \mathbf{E}_{S_{nk}(N), \hat{\delta}_2, \nu} (F^{(2)}(S_{nk}(N)) [\delta_{nk}(N_j^{(1)}), \hat{\delta}_2])^2 \} , \tag{2.5}$$

которая имеет место ввиду оценки

$$2K\sigma_n(N) |t| \exp\{ \alpha \|S_{nk}(N)\| \} \|\hat{\delta}_2\| \le 2K|t| \sigma_n(N)^{1-a_1} \Delta_n(N)^{1-a_2} \le 1/4 .$$

Далее, в силу лемм 1, 2

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} (\|S_{nk}(N)\| \ge \frac{a_1}{\alpha} | \log \sigma_n(N) |) \le c(A, r, \alpha, K) \, \sigma_n(N)^{a_1 / 8c^*} , \\ &\mathbf{P} (\|\hat{\delta}_2\| \ge \Delta_n(N)^{1-a_2}) \le C(A, r, \alpha, K) \, \Delta_n(N)^{r a_2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

для любого $r \ge 1$. Обозначим через I_1 первое слагаемое в правой части (2.3). Тогда на основании леммы 7 и оценок (2.4)—(2.6) получаем

$$I_1 \le c(F, A, r, K)\, \mathbf{E} \exp\{pr\alpha \|S_{nk}(N)\|\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{j=1}^{pr+1} \mathbf{E}_\nu \|\beta_{nk}(N_j)\|^{l} \sum_{j=1}^{pr+1} \exp\{-\frac{t^2}{3} \mathbf{E}_{S_{nk}(N), \mathfrak{Z}_2, \nu} (F^{(2)}(S_{nk}(N))\, [\delta_{nk}(N_j^{(1)}), \mathfrak{Z}_2])^2 \right\} +$$

$$+ C(\cdot)\, \sigma_n(N)^{a_1/8c^*} + C(\cdot)\, \Delta_n(N)^{ra_2}. \tag{2.7}$$

Заметим, что c^* и r можно выбрать такими, что последние два слагаемых в правой части (2.7) будут ограничены сверху величиной $\Delta_n(N)^R$ для любого наперед заданного сколь угодно большого R. Лемма 8 доказана.

Обозначим $\tilde{\Phi}_{kj}(x) = \mathbf{E}_{\mathfrak{Z}_2, \nu} (F^{(2)}(x)\ [\delta_{nk}(N_j^{(1)}), \mathfrak{Z}_2])^2$.

Лемма 9. *Пусть*

$$|\, t\, \Delta_{nk}(N_j^{(1)}) \Delta_{nk}(N_j^{(2)})\, | \ge 1,$$

$$|\, t^2 \Delta_n(N_j^{(1)})^2\, \Delta_n(N_j^{(2)})^2\, \Delta_n(N)\, | \le 1,$$

$$|\, t\, \Delta_{nk}(N_j^{(1)})\, \Delta_{nk}(N_j^{(2)})\, |^6 \varepsilon(n) \le 1,$$

где разбиения $\{N_j^{(1)}\}$ *и* $\{N_j^{(2)}\}$ *были введены в лемме* 8. *Тогда если* $N^{(1)}, N^{(2)}, N$ *удовлетворяют* (1.3), *то в условиях леммы* 8

$$\mathbf{E} \exp\{-t^2 \mathbf{E}_{S_{nk}(N), \mathfrak{Z}_2, \nu} (F^{(2)}(S_{nk}(N))\ [\delta_{nk}(N_j^{(1)}),\ \mathfrak{Z}_2])^2\} \le$$

$$\le \mathbf{E}^{\,d/3(d+1)} \exp\{-t^2\, \tilde{\Phi}_{kj}(W_{nx})\} +$$

$$+\ |\, t^2 \Delta_{nk}^3(N_j^{(1)}) \Delta_{nk}^3(N_j^{(2)})\, |^{(m+1)/3} + (|\, t\, \Delta_{nk}(N_j^{(1)}) \Delta_{nk}(N_j^{(2)})\, |^6 \varepsilon(n))^{(d+1)/3}.$$

Доказательство. Воспользуемся методом Линдеберга. Нам понадобится следующий вариант формулы Тейлора:

$$\exp\{-t^2\, \tilde{\Phi}_{kj}(x+\delta)\} = \exp\{-t^2\, \tilde{\Phi}_{kj}(x)\} \times$$

$$\times \left\{ 1 - t^2\, \tilde{\Phi}_{kj}^{(1)}(x)\ [\delta] + \frac{t^4}{2} (\tilde{\Phi}_{kj}^{(1)}(x)\ [\delta])^2 - \frac{t^2}{2}\, \tilde{\Phi}_{kj}^{(2)}(x)\ [\delta^2] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\theta)^2\, \psi(x+\theta\delta, t) \exp\{-t^2\, \tilde{\Phi}_{kj}(x+\theta\delta)\}\, d\theta,$$

где

$$\psi(x, t) = t^6 (\tilde{\Phi}_{kj}^{(1)}(x)\ [\delta])^3 - 3t^4\, \tilde{\Phi}_{kj}^{(1)}(x)\ [\delta]\ \tilde{\Phi}_{kj}^{(2)}(x)\ [\delta^2] + t^2\, \tilde{\Phi}_{kj}^{(3)}(x)\ [\delta^3]. \tag{2.8}$$

Теперь приступим к выводу интересующей нас оценки. Имеем

$$|\, \mathbf{E} \exp\{-t^2\, \tilde{\Phi}_{kj}(S_{nk}(N))\} - \mathbf{E} \exp\{-t^2\, \tilde{\Phi}_{kj}(W_n)\}\, | \le \sum_{r \le k} J_r + I_0, \tag{2.9}$$

где

$$J_r = \mathbf{E}\ |\ \mathbf{E}_\nu \exp\{-t^2\, \tilde{\Phi}_{kj}(S_{nk}(N) + e_{nk}(N) + \overline{\xi}_{nr})\} -$$

$$- \mathbf{E}_\nu \exp\{-t^2 \widetilde{\Phi}_{kj}(S_{nk}(N) + e_{nk}(N) + \overline{\gamma}_{nr})\} \mid ,$$

$$I_0 = \mid \mathbf{E} \exp\{-t^2 \widetilde{\Phi}_{nj}(S_{nk0}(N) + e_{nk}(N))\} - \mathbf{E} \exp\{-t^2 \widetilde{\Phi}_{nj}(W_n)\} \mid .$$

Напомним, что по определению $\overline{\xi}_{nr} = \xi'_{nr}$, $\overline{\gamma}_{nr} = \gamma_{nr}$, если $r \notin N$, и $\overline{\xi}_{nr} = (\xi^{(2)}_{nr} - \mathbf{E}\,\xi^{(2)}_{nr})\,(1 - \nu_r)$, $\overline{\gamma}_{nr} = \gamma^{(2)}_{nr}(1 - \nu_r)$ при $r \in N$. Применим формулу Тейлора (2.8) для каждого члена суммы в правой части (2.9) соответственно при $x = S_{nkr}(N) + e_{nk}(N)$ и $\delta = \overline{\xi}_{nr}$ или $\delta = \overline{\gamma}_{nr}$. Заметим, что при фиксированных с.в. $\{\nu_i\}$ сумма $S_{nkr}(N)$ состоит из независимых с.э. и верны следующие соотношения:

$$\mathbf{E}_\nu\, \Phi^{(1)}_{kj}(x)\ [\xi'_{nr}] = \mathbf{E}_\nu\, \Phi^{(1)}_{kj}(x)\ [\,\xi_{nr}\,\mathbf{I}\,(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha)]\ ,$$

$$\mathbf{E}_\nu\, L_2(x)\ [\xi'^{\,2}_{nr}] - \mathbf{E}_\nu\, L_2(x)\ [\gamma^2_{nr}] \le 2\,\|L(x)\|^*\, \mathbf{E}\ \|\xi_{nr}\|^2\, \mathbf{I}\,(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha)\,, \qquad (2.10)$$

$$\mathbf{E}_\nu\ L_2(x)\ [(\xi^{(2)}_{nr} - \mathbf{E}\,\xi^{(2)}_{nr})^2] = \mathbf{E}_\nu\ L_2(x)\ [(\gamma^{(2)}_{nr})^2]\ ,$$

где $L_2(x)$ — произвольный билинейный функционал. Например, можно положить (см. лемму 6)

$$L_2(x)\ [z, y] = \widetilde{\Phi}^{(2)}_{kj}(x)\ [z, y]\ , \qquad L_2(x)\ [z, y] = \Phi^{(1)}_{kj}(x)\ [z]\ \Phi^{(1)}_{kj}(x)\ [y]\ .$$

Таким образом, с помощью (2.8) и (2.10) можно оценить выражения вида

$$J_r \equiv \mathbf{E} \mid \mathbf{E}_\nu \exp\{-t^2 \widetilde{\Phi}_{kj}(x + \overline{\xi}_{nr})\} - \mathbf{E}_\nu \exp\{-t^2 \widetilde{\Phi}_{kj}(x + \overline{\gamma}_{nr})\} \mid \le J_{r1} + J_{r2} + J_{r3}\,,$$

где введены следующие обозначения:

$$J_{r1} = \mathbf{E} \exp\{-t^2 \widetilde{\Phi}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N))\} \times$$

$$\times \Big\{ t^2 \|\widetilde{\Phi}^{(1)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N))\|^*\ \mathbf{E}\ \|\xi_{nr}\|\,\mathbf{I}\,(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha) +$$

$$+ \frac{t^4}{2}\ \|\widetilde{\Phi}^{(1)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N))\ \|^{*2}\ \mathbf{E}\ \|\xi_{nr}\|^2\,\mathbf{I}\,(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha) +$$

$$+ \frac{t^2}{2}\ \|\widetilde{\Phi}^{(2)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N))\ \|^{*2}\ \mathbf{E}\ \|\xi_{nr}\|^2\,\mathbf{I}\,(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha) \Big\},$$

$$J_{r2} = C \sup_{0 \le \theta \le 1} \mathbf{E} \Big\{ \mid t^6 \mid \|\widetilde{\Phi}^{(1)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\,\overline{\xi}_{nr})\ \|^{*3}\ \|\overline{\xi}_{nr}\|^3 +$$

$$+ t^4 \|\widetilde{\Phi}^{(1)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\,\overline{\xi}_{nr})\ \|^* \|\widetilde{\Phi}^{(2)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\,\overline{\xi}_{nr})\ \|^* \|\overline{\xi}_{nr}\|^3 +$$

$$+ t^2 \|\widetilde{\Phi}^{(3)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\overline{\xi}_{nr})\|^* \exp\{-t^2 \widetilde{\Phi}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\overline{\xi}_{nr})\}\,,$$

$$J_{r3} = C \sup_{0 \le \theta \le 1} \mathbf{E} \Big\{ t^6 \|\widetilde{\Phi}^{(1)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\,\overline{\gamma}_{nr})\ \|^{*3} \|\overline{\gamma}_{nr}\|^3 +$$

$$+ t^4 \|\widetilde{\Phi}^{(1)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\,\overline{\gamma}_{nr})\|^*\ \ \|\widetilde{\Phi}^{(2)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\,\overline{\gamma}_{nr})\|^*\ \ \|\overline{\gamma}_{nr}\|^3 +$$

$$+ t^2 \| \tilde{\Phi}^{(3)}_{kj} (S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\bar{\gamma}_{nr}) \|^* \|\bar{\gamma}_{nr}\|^3 +$$

$$+ t^4 \| \tilde{\Phi}^{(1)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta \bar{\gamma}_{nr}) \|^* \| \tilde{\Phi}^{(2)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta \bar{\gamma}_{nr}) \|^* \|\bar{\gamma}_{nr}\|^3 +$$

$$+ t^4 \| \tilde{\Phi}^{(1)}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\bar{\gamma}_{nr}) \|^* \|\bar{\gamma}_{nr}\|^3 \exp\{-t^2 \tilde{\Phi}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\bar{\gamma}_{nr})\}\Big\}$$

Теперь принимая во внимания неравенство $|\, t\Delta_n(N^{(1)})\,\Delta_n(N^{(2)})\,| > 1$, получаем с помощью лемм 1—5 оценку

$$J_{r2} \le C\, |\, t\Delta_n(N^{(1)})\Delta_n(N^{(2)})\,|^6\, \mathbf{E}^{(q-1)/q} \exp\{\frac{6\alpha q}{q-1}(\|S_{nkr}(N)\| + \|e_{nk}(N)\| + c^*/\alpha)\} \times$$

$$\times \sup_{0\le\theta\le 1} \mathbf{E}\, \|\bar{\xi}_{nr}\|^3\, \mathbf{E}^{1/q}_{\bar{\xi}_{nr}} \exp\{-t^2 q \tilde{\Phi}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\,\bar{\xi}_{nr})\}\,.$$

Аналогично

$$J_{r3} \le C\, |\, t\Delta_n(N^{(1)})\,\Delta_n(N^{(2)})\,|^6\, \mathbf{E}^{(q-1)/q}(\|\bar{\gamma}_{nr}\|^{3q/(q-1)} \exp\{\frac{6\alpha q}{q-1}\|\bar{\gamma}_{nr}\|\}) \times$$

$$\times \sup_{0\le\theta\le 1} \mathbf{E}^{1/q} \exp\{-t^2 q\tilde{\Phi}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\,\bar{\gamma}_{nr})\}\,.$$

Соответствующая оценка для J_{r1} (без супремума) выводится точно так же. Далее имеем

$$\mathbf{E}^{(q-1)/q}(\|\bar{\gamma}_{nr}\|^{3q/(q-1)} \exp\{\frac{6\alpha q}{q-1}\|\bar{\gamma}_{nr}\|\} \le$$

$$\le \mathbf{E}^{(q-1)/2q}(\|\bar{\gamma}_{nr}\|^{6q/(q-1)}\, \mathbf{E}^{(q-1)/2q} \exp\{\frac{2\alpha q}{q-1}\|\bar{\gamma}_{nr}\|\} \le c(q)\sigma^3_{nr} \le$$

$$\le c(q)\,(\mathbf{E}\,\|\xi_{nr}\|^2)^{3/2} \le c(q)\,(\mathbf{E}\,\|\xi_{nr}\|^2\,\mathrm{I}\,(\|\xi_{nr}\| \le c^*/\alpha))^{3/2} +$$

$$+ (\mathbf{E}\,\|\xi_{nr}\|^2\,\mathrm{I}\,(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha))^{3/2} \le c(q)\,\Big\{\|\xi'_{nr}\|^3 + \mathbf{E}\,\|\xi_{nr}\|^2\,\mathrm{I}\,(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha)\Big\}\,.$$

Таким образом, сумма в правой части (2.9) допускает оценку

$$\sum_{r\le k} J_r \le c(F,q)\,|\, t\,\Delta_{nk}(N^{(1)}_j)\,\Delta_{nk}(N^{(2)}_j)\,|^6\, \varepsilon(n) \times$$

$$\times \sup_{0\le\theta\le 1} \mathbf{E}^{1/q} \exp\{-t^2 q\tilde{\Phi}_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\,\bar{\xi}_{nr})\}\,.$$

Оценим I_0. Заметим, что

$$S_{nk0}(N) = \sum_{j<k,\, j\in N} \gamma^{(2)}_{nj}(1-\nu_j) + \sum_{j\notin N} \gamma_{nj}\,,\quad W_n = S_{nk0}(N) + \Gamma_{nk}(N)\,,$$

где

$$\Gamma_{nk} = \sum_{j\in N} \gamma_{nj} - \sum_{j<k,\, j\in N} \gamma^{(2)}_{nj}(1-\nu_j)\,.$$

Воспользовавшись леммами 1—5 , неравенством Гёльдера и неравенством

$$| e^{-x} - e^{-y} | \le e^{-y} \sum_{j<=m} \frac{1}{j!} | x-y |^j + \frac{|x-y|^{m+1}}{(m+1)!}, \qquad x, y \ge 0,$$

убеждаемся в том, что

$$I_0 \equiv | \mathrm{E} \exp\{-t^2 \tilde{\Phi}_{nj}(S_{nk0}(N) + e_{nk}(N))\} - \mathrm{E}\exp\{-t^2 \tilde{\Phi}_{nj}(W_n)\} | \le$$

$$\le \mathrm{E}\exp\{-t^2 \tilde{\Phi}_{nj}(W_n)\} \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l!} \Big(t^2 \mathrm{E}_{S_{nk0}(N), \mathfrak{d}_2, \nu} \exp\{2\alpha \| S_{nk0}(N) \| + \| e_{nk}(N) \| + \|W_n\|\} \times$$

$$\times \Big(\| e_{nk}(N) \| + \Big\| \sum_{i\in N} \gamma_{ni} \Big\| + \Big\| \sum_{i\in N} \gamma_{ni}^{(2)} (1-\nu_i) \Big\| \Big) \| \delta_{nk}(N_j^{(1)}) \|^2 \, \| \delta_{nk}(N_j^{(2)}) \|^2 \Big)^l + R(t, m)$$

где величина $R(t, m)$ совпадает с отдельным слагаемым вышестоящей суммы при $l = m+1$. Учитывая неравенство

$$| t^2 \Delta_n(N_j^{(1)})^2 \Delta_n(N_j^{(2)})^2 \Delta_n(N) | \le 1,$$

получаем

$$| \mathrm{E}\exp\{-t^2 \tilde{\Phi}_{nj}(S_{nk0}(N) + e_{nk}(N))\} - \mathrm{E}\exp\{-t^2 \tilde{\Phi}_{nj}(W_n)\} | \le$$

$$\le c\,(F,A,m,q,K)\, \mathrm{E}^{1/q} \exp\{-t^2 \tilde{\Phi}_{nj}(W_n)\} + | t^2 \Delta_n(N^{(1)})^2 \Delta_n(N^{(2)})^2 \Delta_n(N) |^{(m+1)}. \tag{2.11}$$

Таким образом, из (2.9)—(2.11) следует оценка

$$\mathrm{E}\exp\{-t^2 \tilde{\Phi}_{nj}(W_n)\} \le$$

$$\le C(\cdot) \Big\{ \mathrm{E}^{1/q} \exp\{-t^2 \tilde{\Phi}_{nj}(W_n)\} + | t\, \Delta_n(N^{(1)})\, \Delta_n(N^{(2)}) |^6 \times$$

$$\times \Big\{ \varepsilon(n) \sup_{0\le\theta\le1} \mathrm{E}^{1/q} \exp\{-t^2 \tilde{\Phi}_{nj}(S_{nk}(N) + e_{nk}(N) + \theta \overline{\gamma}_{nr})\} +$$

$$+ \sum_{r<k} \sup_{0\le\theta\le1} \mathrm{E}\, \|\overline{\xi}_{nr}\|^3 \, \mathrm{E}^{1/q}_{\overline{\xi}_{nr}} \exp\{-t^2 \tilde{\Phi}_{nj}(S_{nk}(N) + e_{nk}(N) + \theta \overline{\xi}_{nr})\} \Big\} +$$

$$+ | t^2 \Delta_n(N^{(1)})^2 \Delta_n(N^{(2)})^2 \Delta_n(N) |^{m+1} \Big\}. \tag{2.12}$$

Так как $S_{nkr}(N)$ и $S_{nkr}(N) + \theta \overline{\gamma}_{nr}$ при фиксированных $\{\nu_i\}$ и θ состоят из независимых с.э., неравенство (2.7) по существу рекуррентное. Следовательно, для каждого среднего в правой части (2.12), где имеется с.э. $S_{nkr}(N)$, справедлива оценка (2.11). Применяя данное рекуррентное неравенство d раз, получаем

$$\mathrm{E}\exp\{-t^2 \Phi_{nj}(S_{nk}(N))\} \le$$

$$\leq C(\cdot)\left\{\mathbf{E}^{1/q^{(d+1)}}\exp\{-t^2\tilde{\Phi}_{nj}(W_n)\} + |t^2\Delta_n(N^{(1)})^2\Delta_n(N^{(2)})^2\Delta_n(N)|^{(m+1)/q^d} +\right.$$

$$\left.+ \left(|t\Delta_n(N^{(1)})\Delta_n(N^{(2)})|^6\varepsilon(n)\right)^{s(d)}, \qquad s(d) = \sum_{l=1}^{d} q^{-l}\,.\right.$$

Выбирая $q = 1 + d^{-1}$ и учитывая, что $|t\Delta_n(N^{(1)})\,\Delta_n(N^{(2)})|^6\,\varepsilon(n) \leq 1$, получаем требуемое.

Лемма 10. *При выполнении условий*

$$8c_0(F)K\,|t\,|\sigma_n(N)^{1-a}\Delta_n(N^{(1)})^{1-a_1} \leq 1\,,$$

$$8c_o(F)K\,|t\,|\sigma_n(N)^{1-a}\Delta_n(N^{(2)})^{1-a_2} \leq 1$$

справедливо неравенство

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2\tilde{\Phi}_{kj}(W_n)\} \leq$$

$$\leq \mathbf{E}^{d/3(d+1)}\exp\{-ct^2\tilde{\Phi}^*_{nj}(\overline{W}_n, \Gamma_k^{(2)})\} + C(\cdot)\left\{\Delta_n(N^{(2)})^{ra_1} + \Delta_n(N^{(1)})^{sa_2} + \sigma_n(N)^R +\right.$$

$$\left.+ |t^2\Delta_n(N^{(1)})^2\Delta_n(N^{(2)})^2\Delta_n(N)|^{(m+1)/3} + (|t\Delta_n(N^{(1)})\,\Delta_n(N^{(2)})|^6\,\varepsilon(n))^{(d+1)/3}\right\},$$

где d, s, r — произвольные положительные числа, c — абсолютная положительная постоянная;

$$\tilde{\Phi}^*_{kj}(x, y) = \mathbf{E}\,(F^{(2)}(x)\,[\delta_1^*, y])^2\,,$$

$$\delta_1^* = \sum_{i\in N_j^{(1)},\, i\neq k}(\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(1)})\,, \qquad \Gamma_2^{(1)} = \sum_{i\in N_j^{(1)},\, i\neq k}\hat{\gamma}_{nl}^{(1)}\,, \tag{2.13}$$

$\hat{\gamma}_{nl}^{(1)}$ — симметризация с.э. $\gamma_{nl}^{(1)}$, введенного в начале § 2, $\overline{W}_n$ — независящая от рассматриваемых семейств с.э. копия W_n.

Доказательство. Прежде всего отметим, что лемма 12 [9] может быть переформулирована для любого ограниченного линейного функционала вместо $F^{(1)}(\cdot)\,[\cdot]$. Поэтому

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2\tilde{\Phi}_{kj}(\overline{W}_n)\} \equiv \mathbf{E}\exp\{-t^2\,\mathbf{E}_{\overline{W}_n, \hat{\delta}_2, \nu}(F^{(2)}(\overline{W}_n)\,[\delta_1, \hat{\delta}_2])^2\} \leq$$

$$\leq \mathbf{E}\exp\{-\frac{3}{64}t^2\tilde{\Phi}^*_{nj}(\overline{W}_n, \hat{\delta}_2)\} + C(\cdot)\,\sigma_n(N)^R\,,$$

где δ_1, $\hat{\delta}_2$ были введены в лемме 8. При выводе этой оценки мы воспользовались неравенством, которое легко следует из леммы 2 [9]:

$$\mathbf{E}L(\gamma_{ni})^2 \geq 1/8\mathbf{E}L(\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\,\xi_{ni}^{(1)})^2\,.$$

Обозначим $\Psi(y) = \mathbf{E}\exp\{-t^2\tilde{\Phi}^*_{nj}(\overline{W}_n, y)\}$. Дальнейшие рассуждения, связанные с оценкой разности $\mathbf{E}\,\Psi(\hat{\delta}_2) - \mathbf{E}\,\Psi(\Gamma_2^{(1)})$ методом композиции, почти дословно совпадают с доказательством леммы 9, в силу чего мы их опускаем. Лемма 10 доказана.

Следствие 5. *В условиях лемм* 8—10 *при выполнении неравенства*

$$\min_{k,j}(\Delta_n(N_j^{(1)} \setminus \{k\})\Delta_n(N_j^{(2)} \setminus \{k\})) > c\Delta_n(N^{(1)})\,\Delta_n(N^{(2)})$$

имеет место оценка

$$\max_j \mathbf{E}\exp\{-t^2\,\tilde{\Phi}_{kj}(S_{nk}(N))\} \le C(\cdot)\Big\{|t\Delta_n(N^{(1)})\Delta_n(N^{(2)})|^{-2Md/3(d+1)} +$$

$$+\,|t^2\Delta_n(N^{(1)})^3\,\Delta_n(N^{(2)})^3|^{(m+1)/3} + (|t\Delta_n(N)|^6\,\varepsilon(n))^{(d+1)/3}\Big\}.$$

Лемма 11. *Пусть H и F удовлетворяют условиям леммы 8. Тогда для любого $t \in \mathbf{R}$ при выполнении* (1.4)

$$\Big|\,\mathbf{E}H(W_n)\exp\Big\{itF(W_n)\Big\}\Big| \le C(F,H,A,B)\,|t|^{-\mu},$$

где $\mu = \min\{m, r\}$.

Доказательство. В силу безграничной делимости с.э. W_n можно представить как

$$W_n = W_n^{(0)}(1 - |t|^{2(\alpha_1 - 1/2)})^{1/2} + (m+1)^{-1/2}|t|^{\alpha_1 - 1/2}\sum_{j=1}^{m+1} W_n^{(j)},$$

где $\Big\{W_n^{(j)}; j \ge 0\Big\}$ — независимые в совокупности копии с.э. W_n, $a > 0$. Обозначим $a = (1 - |t|^{2(\alpha_1 - 1/2)})^{1/2}$, $b = (m+1)^{-1/2}|t|^{\alpha_1 - 1/2}$. С помощью формулы Тейлора получаем

$$\Big|\,\mathbf{E}H(W_n)\exp\Big\{itF(W_n)\Big\}\Big| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{m}\mathbf{E}\,\Big|\,\mathbf{E}_{W_n^{(0)}}\frac{b^l}{l!}H^{(l)}(aW_n^{(0)})\Big[\Big(\sum_{j=1}^{m+1}W_n^{(j)}\Big)^l\Big]\times$$

$$\times\exp\Big\{it\Big(F^{(1)}(aW_n^{(0)})\Big[\sum_{j=1}^{m+1}W_n^{(j)}\Big] + \frac{1}{2}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\Big[\sum_{j=1}^{m+1}W_n^{(j)}, \sum_{j=1}^{m+1}W_n^{(j)}\Big]\Big)\Big\}\times$$

$$\times\Big\{1 + \sum_{d=1}^{R(m,r)-1}\frac{(it)^d}{d!}\Big(\sum_{s=3}^{r}\frac{b^s}{s!}F^{(3)}(aW_n^{(0)})\Big[\Big[\Big(\sum_{j=1}^{m+1}W_n^{(j)}\Big)^s\Big]\Big]\Big)^d\Big\}\Big| +$$

$$+\,c(\cdot)\,b^{m+1} + |t|\,b^{r+1} + (|t|\,b^3)^{R(m,r)},$$

где $R(m, r)$ может быть выбрано сколь угодно большим. Далее имеем

$$J_l \equiv \Big|\,\mathbf{E}_{W_n^{(0)}}\frac{b^l}{l!}H^{(l)}(aW_n^{(0)})\Big[\Big(\sum_{j=1}^{m+1}W_n^{(j)}\Big)^l\Big]\times$$

$$\times \exp\left\{ it \left(F^{(1)}(aW_n^{(0)}) \left[\sum_{j=1}^{m+1} W_n^{(j)} \right] + \frac{1}{2} F^{(2)}(aW_n^{(0)}) \left[\sum_{j=1}^{m+1} W_n^{(j)}, \sum_{j=1}^{m+1} W_n^{(j)} \right] \right) \right\} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m+1} \left| \mathbf{E}_{W_n^{(0)}} \frac{b^l}{l!} H^{(l)}(aW_n^{(0)}) \left[\left(\sum_{j=1}^{m+1} W_n^{(j)} \right)^l \right] \times \right.$$

$$\times \exp\left\{ it \left(b F^{(1)}(aW_n^{(0)}) \left[\sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)} \right] + b F^{(1)}(aW_n^{(0)}) \left[W_n^{(m+1)} \right] + \right.\right.$$

$$+ \frac{b^2}{2} F^{(2)}(aW_n^{(0)}) \left[\sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)}, \sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)} \right] + b^2 F^{(2)}(aW_n^{(0)}) \left[\sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)}, W_n^{(m+1)} \right] +$$

$$\left.\left. + \frac{b^2}{2} F^{(2)}(aW_n^{(0)}) \left[W_n^{(m+1)}, W_n^{(m+1)} \right] \right) \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} \left| \mathbf{E}_{W_n^{(0)}} \frac{b^l}{l!} H^{(l)}(aW_n^{(0)}) \left[\left(\sum_{j=1}^{m+1} W_n^{(j)} \right)^l \right] \exp\left\{ itG \left(b \sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)}, b \sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)} \right) \right\} \times \right.$$

$$\times \mathbf{E}_{w(m)} \exp\left\{ it \left(b F^{(1)}(aW_n^{(0)}) \left[W_n^{(m+1)} \right] + \frac{b^2}{2} F^{(2)}(aW_n^{(0)}) \left[\sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)}, W_n^{(m+1)} \right] + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{b^2}{2} F^{(2)}(aW_n^{(0)}) \left[W_n^{(m+1)}, W_n^{(m+1)} \right] \right) \right\} \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} \left| \mathbf{E}_{W_n^{(0)}} \frac{b^l}{l!} H^{(l)}(aW_n^{(0)}) \left[\left(\sum_{j=1}^{m+1} W_n^{(j)} \right)^l \right] \exp\left\{ itG \left(b \sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)}, b \sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)} \right) \right\} I \right|,$$

где дополнительно введены следующие обозначения:

$$G = b F^{(1)}(aW_n^{(0)}) \left[\sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)} \right] + \frac{b^2}{2} F^{(2)}(aW_n^{(0)}) \left[\sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)}, \sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)} \right],$$

$$w(m) = \left\{ W_n^{(j)}; j = 0, 1, \dots m \right\},$$

$$I = \mathbf{E}_{w(m)} \exp\left\{ it \left(bF^{(1)}(aW_n^{(0)}) \left[W_n^{(m+1)} \right] + b^2 F^{(2)}(aW_n^{(0)}) \left[\sum_{j=1}^{m} W_n^{(j)}, W_n^{(m+1)} \right] + \right.\right.$$

$$+\frac{b^2}{2}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[W_n^{(m+1)},W_n^{(m+1)}\right]\Bigg)\Bigg\}.$$

Заметим, что $W_n^{(m+1)}$ допускает следующее представление:

$$W_n^{(m+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{W}_n^{(1)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{W}_n^{(2)} \quad .$$

где $\tilde{W}_n^{(1)},\tilde{W}_n^{(2)}$ — независимые копии с. э. $W_n^{(m+1)}$. Тогда

$$|I|=\Bigg|\mathbf{E}_{w(m)}\exp\Bigg\{it\Bigg(\frac{b}{\sqrt{2}}F^{(1)}(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(1)}\right]+\frac{b}{\sqrt{2}}F^{(1)}(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(2)}\right]+$$

$$+\frac{b^2}{\sqrt{2}}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[\sum_{j=1}^{m}W_n^{(j)},\tilde{W}_n^{(1)}\right]+\frac{b^2}{\sqrt{2}}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[\sum_{j=1}^{m}W_n^{(j)},\tilde{W}_n^{(2)}\right]+$$

$$+\frac{b^2}{4}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(1)},\tilde{W}_n^{(1)}\right]+\frac{b^2}{4}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(2)},\tilde{W}_n^{(2)}\right]+$$

$$+\frac{b^2}{2}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(1)},\tilde{W}_n^{(2)}\right]\Bigg)\Bigg\}\Bigg|\le$$

$$\le\mathbf{E}^{1/2}_{w(m)}\Bigg|\mathbf{E}_{w(m),\tilde{W}_n^{(1)}}\exp\Bigg\{it\Bigg(\frac{b}{\sqrt{2}}F^{(1)}(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(2)}\right]+$$

$$+\frac{b^2}{\sqrt{2}}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[\sum_{j=1}^{m}W_n^{(j)},\tilde{W}_n^{(2)}\right]+\frac{b^2}{4}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(2)},\tilde{W}_n^{(2)}\right]+$$

$$+\frac{b^2}{2}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(1)},\tilde{W}_n^{(2)}\right]\Bigg)\Bigg\}\Bigg|^2=$$

$$=\mathbf{E}^{1/2}_{w(m)}\exp\Bigg\{it\Bigg(\frac{b}{\sqrt{2}}F^{(1)}(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(2)}-\tilde{W}_n^{(3)}\right]+$$

$$+\frac{b^2}{\sqrt{2}}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[\sum_{j=1}^{m}W_n^{(j)},\tilde{W}_n^{(2)}-\tilde{W}_n^{(3)}\right]+\frac{b^2}{2}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(1)},\tilde{W}_n^{(2)}-\tilde{W}_n^{(3)}\right]+$$

$$+\frac{b^2}{4}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(2)},\tilde{W}_n^{(2)}\right]-\frac{b^2}{4}F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(3)},\tilde{W}_n^{(3)}\right]\Bigg)\Bigg\} \quad ,$$

где $\tilde{W}_n^{(3)}$ — независимая копия $\tilde{W}_n^{(2)}$. Вновь применяя к условному среднему $\mathbf{E}_{w(m)}$ формулу полной вероятности, но на этот раз при дополнительной фиксации $\tilde{W}_n^{(2)}$ и $\tilde{W}_n^{(3)}$, получаем окончательную оценку для I:

$$|I| \le \mathbf{E}^{1/2}_{W_n^{(0)}} \left| \mathbf{E}_{W_n^{(0)},\tilde{W}_n^{(2)},\tilde{W}_n^{(3)}} \exp\left\{\frac{itb^2}{2} F^2(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(1)}, \tilde{W}_n^{(2)} - \tilde{W}_n^{(3)}\right]\right\} \right| =$$

$$= \mathbf{E}^{1/2}_{W_n^{(0)}} \exp\left\{-\frac{t^2b^4}{2}\mathbf{E}_{W_n^{(0)},\tilde{W}_n^{(2)},\tilde{W}_n^{(3)}}\left(F^2(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(1)}, \tilde{W}_n^{(2)} - \tilde{W}_n^{(3)}\right]\right)^2\right\}.$$

Таким образом, верхняя оценка для J_l имеет вид

$$J_l \le \mathbf{E}^{1/2}_{W_n^{(0)}} \left| \frac{b^l}{l!} H^{(l)}(aW_n^{(0)})\left[\left(\sum_{j=1}^{m+1} W_n^{(j)}\right)^l\right]\right|^2 \times$$

$$\times \mathbf{E}^{1/2}_{W_n^{(0)}} \exp\left\{-\frac{t^2b^4}{2}\mathbf{E}_{W_n^{(0)},\tilde{W}_n^{(2)},\tilde{W}_n^{(3)}}\left(F^2(aW_n^{(0)})\left[\tilde{W}_n^{(1)}, \tilde{W}_n^{(2)} - \tilde{W}_n^{(3)}\right]\right)^2\right\}.$$

Используя неравенства $x^2 \ge 1/2\, y^2 - (x-y)^2$ и $\mathbf{E}(\xi + c)^2 \ge \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2$, а также равенство ковариаций с.э. ξ_{ni} и γ_{ni}, получаем

$$\mathbf{E}_{W_n^{(0)},\tilde{W}_n^{(2)},\tilde{W}_n^{(3)}}\left(F^{(2)}(aW_n^{(0)})\left[W_n^{(m+1)}, \tilde{W}_n^{(2)} - \tilde{W}_n^{(3)}\right]\right)^2 \ge$$

$$\ge \mathbf{E}_{W_n^{(0)},\tilde{W}_n^{(2)},\tilde{W}_n^{(3)}}\left(F^{(2)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\le n}\xi_{ni}, \tilde{W}_n^{(2)} - \tilde{W}_n^{(3)}\right]\right)^2 -$$

$$- c(A,F)\, |t|^{4(\alpha-1/2)}\, \|W_n^{(0)}\|^2\, \|W_n^{(m)} - \tilde{W}_n^{(m)}\|^2 \exp\left\{2\alpha\, \|W_n^{(0)}\|\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{E}_{W_n^{(0)},\tilde{W}_n^{(2)},\tilde{W}_n^{(3)}}\left(F^{(2)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\le n}(\xi_{ni}^{(1)}\nu_i + \xi_{ni}^{(2)}(1-\nu_i)), \tilde{W}_n^{(2)} - \tilde{W}_n^{(3)}\right]\right)^2 - \ldots \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\mathbf{E}_{W_n^{(0)},\tilde{W}_n^{(2)},\tilde{W}_n^{(3)}}\mathbf{E}_{W_n^{(0)},\tilde{W}_n^{(2)},\tilde{W}_n^{(3)},\xi_{ni}^{(1)},\nu_j}\left(F^{(2)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\le n}(\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)})\nu_i, \tilde{W}_n^{(2)} - \tilde{W}_n^{(3)}\right]\right)^2 -$$

$$- \ldots = \frac{1}{4}\mathbf{E}_{W_n^{(0)},\tilde{W}_n^{(2)},\tilde{W}_n^{(3)}}\left(F^{(2)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\le n}\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}, \tilde{W}_n^{(2)} - \tilde{W}_n^{(3)}\right]\right)^2 -$$

$$- c(A,F)\, |t|^{4(\nu-1/2)}\, \|W_n^{(0)}\|^2\, \|W_n^{(m)} - \tilde{W}_n^{(m)}\|^2 \exp\left\{2\alpha\, \|W_n^{(0)}\|\right\}.$$

Рассмотрим среднее

$$I_1 \equiv \mathbf{E}\exp\left\{-\frac{t^2b^4}{32}\mathbf{E}_{W_n^{(0)},\tilde W_n^{(2)},\tilde W_n^{(3)}}\left(F^{(2)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\le n}\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)},\ \tilde W_n^{(2)}-\tilde W_n^{(3)}\right]\right)^2\right\}$$

в области $\left\{\ \|W_n^{(0)}\|<\frac{a_1}{\alpha}\log|t|\ ,\ \|W_n^{(m)}-\tilde W_n^{(m)}\|<t^{a_1}\right\}$. Тогда

$$\left|\ \mathbf{E}H(W_n)\ \exp\left\{itF(W_n)\right\}\right|\le$$

$$\le c_1(\cdot)\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{t^{a_2}}{64}\sum_{i\le n}D_{nij}(W_n)\right\}+c_2(\cdot)\exp\left\{-\frac{a_1^2}{2\alpha^2A}(\log|t|)^2\right\}+$$

$$+c_3(\cdot)\,t^{-\mu_1}\le c_3(\cdot)\,t^{-\mu_1}\ .$$

Лемма 11 доказана.

Замечание 6. Для одновременного выполнения условий

$$|t\,\Delta_n(N^{(1)})\,\Delta_n(N^{(2)})\ |\ \ge 1\ ,$$

$$8K|t|\sigma_n(N)^{1-a}\,\Delta_n(N^{(2)})^{1-a_1}<1\ ,$$

$$8K|t|\sigma_n(N)^{1-a}\,\Delta_n(N^{(1)})^{1-a_2}<1$$

удобно полагать $\Delta_n(N^{(1)})\sim\Delta_n(N^{(2)})$, что по существу зафиксировано в (1.6).

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Выберем N^* так, как это сделано в [9, §3]. Тогда верна

Лемма 12. *Для любого подмножества* $N\subset N(\delta,n)\,/\,N^*$ *при выполнении* (1.3)

$$\sigma_n(N)\le(1-4\delta^{-1}\sqrt{2})\varepsilon(n)\,.$$

Введем следующие обозначения:

$$S_n'=\sum_{i\le n}\xi_{ni}',\qquad f_n(t)=\mathbf{E}\exp\{itF(S'_n)\}\,,$$

$$f(t)=\mathbf{E}\exp\{itF(W_n)\}\,,\qquad h(t)=it\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dQ_n(x)\,.$$

Заметим, что

$$|\mathbf{P}(F(S_n)<x)-\mathbf{P}(F(S_n')<x)|\le\sum_{k\le n}\mathbf{P}(\|\xi_{nk}\|\ge c^*/\alpha)\le(\alpha/c^*)^2\Lambda_2\,.\quad(3.1)$$

В силу леммы 11 функция $f(t)+h(t)$ абсолютно интегрируема на прямой. Поэтому ее обратное преобразование Фурье является функцией ограниченной вариации с ограниченной производной. Неравенство Эссеена позволяет получить оценку (см. [10])

$$\sup_{z\in \mathbf{R}} |R(x)| \le \int\limits_{|t|\le\varepsilon(n)^{-2+a}} |f_n(t) - f(t) - h(t)|\,|t|^{-1}dt + c(F, A, B)\varepsilon(n)^{-2+a}. \tag{3.2}$$

Разобьем область интегрирования $T = \{|t| \le \varepsilon(n)^{-2+a}\}$ на три части:

$$T_1 = \{\, |t| \le \varepsilon(n)^{-a_1} \}, \quad T_2 = \{\varepsilon(n)^{-a_1} < |t| \le \varepsilon(n)^{-1+a_2}\},$$

$$T_3 = \{\varepsilon(n)^{-1+a_2} < |t| \le \varepsilon(n)^{-2+a_2}\}.$$

Тогда

$$\int\limits_T |f_n(t) - f(t) - h(t)|\,|t|^{-1}dt \le$$

$$\le \int\limits_{T_1} |f_n(t) - f(t) - h(t)|\,|t|^{-1}dt + \int\limits_{T_2} |f_n(t) - f(t) - h(t)|\,|t|^{-1}dt +$$

$$+ \int\limits_{T_3} |f_n(t)|\,|t|^{-1}\,dt + \int\limits_{T_3} |f(t)|\,|t|^{-1}\,dt + \int\limits_{T_3} |h(t)|\,|t|^{-1}\,dt \equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \tag{3.3}$$

Лемма 13. *При любом* $a > 0$

$$I_2 \le c(F, A, B, \delta, K)\,(\Lambda_2 + L_3^{2-a} + L_4).$$

Доказательство. Снова воспользуемся методом композиции (Линдеберга). Обозначим $\psi_t(x) = \exp\{itF(x)\}$. Тогда справедлива оценка

$$|f_n(t) - f(t) - h(t)| = |\mathbf{E}\psi_t(S_n') - \mathbf{E}\psi_t(W_n) - h(t)| \le$$

$$\le \sum_{k\le n} |\mathbf{E}\psi_t(S_{nk}' + \xi_{nk}') - \mathbf{E}\psi_t(S_{nk}' + \gamma_{nk}) - it\varphi_t(W_n, \xi_{nk}')|,$$

где $S_{nk}' = \sum_{j<k}\xi_{nj}' + \sum_{j>k}\gamma_{nj}$, а $\varphi_t(\cdot,\cdot)$ введена в (1.8). Разложим функции $\psi_t(S_{nk}' + \xi_{nk}')$ и $\psi_t(S_{nk}' + \gamma_{nk})$ в ряд Тейлора в точке S_{nk}'. Отметим, что в силу определения (см. (1.8)) $it\varphi_t(x, y) = \psi_t^{(3)}(x)\,[y^3]$. Поэтому получаем

$$J \equiv |f_n(t) - f(t) - h(t)| \le$$

$$\le \sum_{k\le n} |\mathbf{E}\psi_t^{(1)}(S_{nk}')[\xi_{nk}'] - \mathbf{E}\psi_t^{(1)}(S_{nk}')[\gamma_{nk}]| +$$

$$+ \sum_{k\le n}\frac{1}{2}|\mathbf{E}\psi_t^{(2)}(S_{nk}')[\xi_{nk}'^{2}] - \mathbf{E}\psi_t^{(2)}(S_{nk}')[\gamma_{nk}^2]| +$$

$$+ \sum_{k\le n}\frac{1}{6}|\mathbf{E}\psi_t^{(3)}(S_{nk}')[\xi_{nk}'^{3}] - \mathbf{E}\psi_t^{(3)}(S_{nk}')[\gamma^{3}{}_{nk}]| +$$

$$+ \sum_{k\le n}\frac{1}{6}\int_0^1 \Big\{ |\mathbf{E}\psi_t^{(4)}(S_{nk}' + \theta\xi_{nk}')[\xi_{nk}'^{4}]| + |\mathbf{E}\psi_t^{(4)}(S_{nk}' + \theta\gamma_{nk})[\gamma_{nk}^4]| \Big\} d\theta \equiv$$

$$\equiv \sum_{k\le n}(J_{nk}^{(1)}+\frac{1}{2}J_{nk}^{(2)}+\frac{1}{6}J_{nk}^{(3)}+\frac{1}{6}J_{nk}^{(4)}).$$

Определим функции $g_k(t)$ следующим образом:

$$g_k(t)=t^{-7+k+\tau(7-k)+\beta\tau-\beta}+t^{-6+7\tau-\beta+\beta\tau}+$$

$$+\,t^{-(1-6\tau)(m+1)/3p}+(t^{6\tau}\varepsilon(n))^{(s+1)/3p}+t^{-\tau Ms/3p(s+1)}.$$

Тогда, полагая $\Delta_n(N^{(i)})\sim t^{-1/2+\tau}$, $i=1,2$, можно оценить каждое из слагаемых $J_{nk}^{(\cdot)}$ с помощью лемм 8—10:

$$J_{nk}^{(1)}=|\,\mathbf{E}\,\psi_t^{(1)}(S'_{nk})[\xi'_{nk}]-\mathbf{E}\,\psi_t^{(1)}(S'_{nk})[\gamma_{nk}]\,|=$$

$$=|\,\mathbf{E}\,\psi_t^{(1)}(S'_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk}]\,|\le \mathbf{E}\,|\,\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(1)}(S'_{nk})\,[\xi_{nk}-\xi'_{nk}]\,|\times$$

$$\times\exp\{itF(S'_{nk})\}\,|t|\le|t|\,g_1(t)\,\mathbf{E}\,\|\xi_{nk}\|\,\mathbf{I}(\|\xi_{nk}\|>c^*/\alpha),$$

$$J_{nk}^{(2)}=|\,\mathbf{E}\,\psi_t^{(1)}(S'_{nk})[\xi'^{2}_{nk}]-\mathbf{E}\,\psi_t^{(1)}(S'_{nk})[\gamma^{2_{nk}}]\,|=$$

$$=|\,\mathbf{E}\,\psi_t^{(1)}(S'_{nk})[\xi'^{2}_{nk}]-\mathbf{E}\,\psi_t^{(1)}(S'_{nk})[\xi^2_{nk}]\,|\le 2\,|\,\mathbf{E}\,\psi_t^{(1)}(S'_{nk})[\xi'_{nk},\xi_{nk}-\xi'_{nk}]\,|\le$$

$$\le 2\,|t|\,\mathbf{E}\,|\,\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(1)}(S'_{nk})\,[\xi_{nk}-\xi'_{nk}]\,F^{(1)}(S'_{nk})\,[\xi_{nk}]\exp\{itF(S'_{nk})\}\,|+$$

$$+\,2t^2\,\mathbf{E}\,|\,\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(2)}(S'_{nk})\,[\xi_{nk}-\xi'_{nk},\xi_{nk}]\exp\{itF(S'_{nk})\}\,|\le$$

$$\le|t|\,g_1(t)\,\mathbf{E}\,\|\xi_{nk}\|^2\,\mathbf{I}(\|\xi_{nk}\|>c^*/\alpha)+|t|^2 g_2(t)\,\mathbf{E}\,\|\xi_{nk}\|^2\,\mathbf{I}(\|\xi_{nk}\|>c^*/\alpha),$$

$$J_{nk}^{(4)}=|\,\mathbf{E}\,\psi_t^{(4)}(S'_{nk}+\theta\xi'_{nk})[\xi'^{4}_{nk}]\,|+|\,\mathbf{E}\,\psi_t^{(4)}(S'_{nk}+\theta\gamma_{nk})[\gamma^4_{nk}]\,|=\widetilde{J}_{1k}^{(4)}+\widetilde{J}_{2k}^{(4)}.$$

Оценим $\widetilde{J}_{lk}^{(4)}$. Имеем

$$\widetilde{J}_{1k}^{(4)}\le c(\cdot)\sum_{r=1}^{4}|t|^{5-r}g_r(t)\,\mathbf{E}\,\|\xi'_{nk}\|^4,\qquad \widetilde{J}_{2k}^{(4)}\le c(\cdot)\sum_{r=1}^{4}|t|^{5-r}g_r(t)\,\mathbf{E}\,\|\gamma_{nk}\|^4.$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}\,\|\gamma_{nk}\|^4\le c(A)\sigma^4_{nk}=c(A)(\,\mathbf{E}\,\|\xi_{nk}\|^2)^2\le$$

$$\le 2c(A)\,(\,\mathbf{E}\,\|\xi'_{nk}\|^4+\mathbf{E}\,\|\xi_{nk}\|^2\,\mathbf{I}(\|\xi_{nk}\|>c^*/\alpha)).$$

Остается оценить величину

$$J_{nk}^{(3)}=|\,\mathbf{E}\,\psi_t^{(3)}(S'_{nk})[\xi'^{3}_{nk}]-\mathbf{E}\,\psi_t^{(3)}(W_n)[\xi'^{3}_{nk}]\,|.$$

Воспользуемся методом Линдеберга для оценки математического ожидания функционала $\widetilde{\Psi}_t(S'_{nk})=\psi_t^{(3)}(S'_{nk})[h]$. Имеем

$$J_{nk}^{(3)}\equiv|\,\mathbf{E}\,\widetilde{\Psi}_t(S'_{nk})-\mathbf{E}\,\widetilde{\Psi}_t(W_n)\,|\le\sum_{l<=n}|\,\mathbf{E}\,\widetilde{\Psi}_t(S'_{nkl}+\eta_{nl})-\mathbf{E}\,\widetilde{\Psi}_t(S'_{nkl}+\gamma_{nl})\,|,$$

где $S'_{nkl} = \sum_{j<l} \eta_{nj} + \sum_{j>l} \gamma_{nj}, \eta_{nl} = \xi'_{nl}$ при $l \le k$ и $\eta_{nl} = \gamma_{nl}$ при $l > k$, что позволяет уточнить предыдущее неравенство:

$$J_{nk}^{(3)} \le \sum_{l \le k} | \mathbf{E} \widetilde{\Psi}_t (S'_{nkl} + \xi'_{nl}) - \mathbf{E} \widetilde{\Psi}_t (S'_{nkl} + \gamma_{nl}) | \equiv \sum_{l \le k} \widetilde{J}_{nl}^{(3)} .$$

Оценим $\widetilde{J}_{nl}^{(3)}$. Разложим $\widetilde{\Psi}_t (S'_{nkl} + x)$ в ряд Тейлора в точке S'_{nkl}. Тогда

$$\widetilde{J}_{nl}^{(3)} \le | \mathbf{E} \widetilde{\psi}_t^{(1)}(S'_{nkl}) [\xi'_{nl}] | + \frac{1}{2} | \mathbf{E} \widetilde{\psi}_t^{(2)}(S'_{nkl}) [\xi'^{\,2}_{nl}] - \mathbf{E} \widetilde{\psi}_t^{(2)}(S'_{nkl}) [\gamma_{nl}^2] | +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \theta)^2 (| \mathbf{E} \widetilde{\psi}_t^{(3)}(S'_{nkl} + \theta \xi'_{nl}) [\xi'^{\,3}_{nl}] | + | \mathbf{E} \widetilde{\psi}_t^{(3)}(S'_{nkl} + \theta \gamma_{nl}) [\gamma_{nl}^3] |) d\theta \equiv$$

$$\equiv \widetilde{I}_{nl}^{(1)} + \frac{1}{2} \widetilde{I}_{nl}^{(2)} + \frac{1}{2} \widetilde{I}_{nl}^{(3)} .$$

С помощью лемм 8—10 можно получить следующую оценку:

$$\widetilde{I}_{nl}^{(1)} = | \mathbf{E} \psi_t^{(4)} (S'_{nkl}) [h^3, \xi_{nl} - \xi'_{nl}] | \le$$

$$\le c \mathbf{E} \|h\|^3 \mathbf{E} \|\xi_{nl}\| \mathbf{I} (\|\xi_{nl}\| > c^*/\alpha) (|t|^4 g_1(t) + |t|^3 g_2(t) + |t|^2 g_3(t) + |t| g_4(t)).$$

Аналогично

$$\widetilde{I}_{nl}^{(2)} \le 2 | \mathbf{E} \psi_t^{(5)} (S'_{nkl}) [h^3, \xi_{nl}, \xi_{nl} - \xi'_{nl}] | \le c \mathbf{E} \|h\|^3 \mathbf{E} \|\xi_{nl}\|^2 \mathbf{I} (\|\xi_{nl}\| > c^* / \alpha) \times$$

$$\times (|t|^5 g_1(t) + |t|^4 g_2(t) + |t|^3 g_3(t) + |t|^2 g_4(t) + |t| g_5(t)),$$

$$\widetilde{I}_{nl}^{(3)} \le \mathbf{E} \|h\|^3 (\mathbf{E} \|\xi'_{nl}\|^3 + \mathbf{E} \|\gamma_{nl}\|^3) \times$$

$$\times (|t|^6 g_1(t) + |t|^5 g_2(t) + |t|^4 g_3(t) + |t|^3 g_4(t) + |t|^2 g_5(t) |t| g_6(t)) .$$

Учитывая, что

$$\mathbf{E} \|\gamma_{nl}\|^3 \le c(A) \sigma_{nl}^3 \le c(A) (\mathbf{E} \|\xi'_{nl}\|^3 + \mathbf{E} \|\xi_{nl}\|^2 \mathbf{I} (\|\xi_{nl}\| > c^* / \alpha)) ,$$

выводим

$$J_{nk}^{(3)} \le c_2(F, A) g(t) (\mathbf{E} \|\xi'_{nl}\|^3 + \mathbf{E} \|\xi_{nl}\|^2 \mathbf{I} (\|\xi_{nl}\| > c^* / \alpha)) \times$$

$$\times \sum_{l<k} (\mathbf{E} \|\xi'_{nl}\|^3 + \mathbf{E} \|\xi_{nl}\|^2 \mathbf{I} (\|\xi_{nl}\| > c^* / \alpha)) ,$$

где $g(t) = \sum_{k=1}^{6} |t|^{7-k} g_k(t)$. Отсюда следует, что в области T_2 имеет место оценка

$$| f_n(t) - f(t) - h(t) | \le$$

$$\le \widetilde{c}(F, A)\Big\{\widetilde{g}_1(t)\sum_{k\le n}\mathbf{E}\,\|\xi_{nk}\|^2\,\mathbf{I}\,(\|\xi_{nk}\| > c^* / \alpha) +$$

$$+\,\widetilde{g}_2(t)\sum_{k\le n}(\mathbf{E}\,\|\xi'_{nk}\|^3 + \mathbf{E}\,\|\xi_{nk}\|^2\,\mathbf{I}\,(\|\xi_{nk}\| > c^* / \alpha))\,\times$$

$$\times\sum_{k\le l}(\mathbf{E}\,\|\xi'_{nl}\|^3 + \mathbf{E}\,\|\xi_{nl}\|^2\,\mathbf{I}\,(\|\xi_{nl}\| > c^* / \alpha)) + \widetilde{g}_3(t)\sum_{k\le n}\mathbf{E}\,\|\xi'_{nk}\|^4\Big\} =$$

$$= \widetilde{c}(F, A)\,(\widetilde{g}_1(t)\Lambda_2 + \widetilde{g}_2(t)(\Lambda_2 + L_3)^2 + \widetilde{g}_3(t)L_4)\,, \tag{3.4}$$

где

$$\widetilde{g}_1(t) = |t|^2 g_1(t) + |t|\, g_2(t)\,,$$

$$\widetilde{g}_2(t) = \sum_{k=1}^{6}|t|^{7-k} g_k(t)\,, \qquad \widetilde{g}_3(t) = \sum_{k=1}^{4}|t|^{5-k} g_k(t)\,.$$

Оценим функции $\widetilde{g}_1(t)$, $\widetilde{g}_2(t)$, $\widetilde{g}_3(t)$. Имеем

$$\widetilde{g}_1(t) \le c_1\Big\{t^{7\tau-4} + t^{2-(1-6\tau)(m+1)/3p} + t^2(t^{6\tau}\varepsilon(n))^{(s+1)/3p} + t^{2-\tau Ms/3p(s+1)}\Big\},$$

$$\widetilde{g}_2(t) \le c_2\Big\{t^{7\tau} + t^{6-(1-6\tau)(m+1)/3p} + t^6(t^{6\tau}\varepsilon(n))^{(s+1)/3p} + t^{6-\tau Ms/3p(s+1)}\Big\}, \tag{3.5}$$

$$\widetilde{g}_3(t) \le c_3\Big\{t^{7\tau-2} + t^{4-(1-6\tau)(m+1/3p} + t^4(t^{6\tau}\varepsilon(n))^{(s+1)/3p} + t^{4-\tau Ms/3p(s+1)}\Big\}.$$

Положим $m = s$. Тогда из (3.5) с необходимостью следуют ограничения на параметры, входящие в правые части предыдущих неравенств:

$$(1-6\tau)\frac{s+1}{3p} > 6\,, \qquad \tau < 1/7\,, \qquad \frac{\tau Ms}{3p(s+1)} > 6\,. \tag{3.6}$$

Пусть $\tau = 1/7 - \omega$, $0 < \omega < 1$. Положим $p = 1 + \omega$. Поскольку по условию теоремы $M > c/a$, при достаточно малом ω и достаточно большом s справедливо неравенство $c > 18$ при $\tau = a$, т.е. соотношения (3.6) будут выполнены. Поэтому из (3.5) и (3.6) следует, что

$$\widetilde{g}_1(t) \le t^{-4+\mu_1} + t^{\mu_2}\varepsilon(n)^4\,, \qquad \widetilde{g}_2(t) \le t^{\mu_3} + t^{\mu_4}\varepsilon(n)\,, \tag{3.7}$$

$$\widetilde{g}_3(t) \le t^{-2+\mu_5} + t^{\mu_6}\varepsilon(n)^2\,,$$

где $0 < \mu_i < 1$, $1 \le i \le 6$. Таким образом, из (3.4) и (3.7) получаем

$$\int_{T_2}|f_n(t) - f(t) - h(t)|\,|t|^{-1}\,dt \le \widetilde{c}(a, \cdot)\,(\Lambda_2 + L_3^{2-a} + L_4)\,,$$

Лемма 13 доказана.

Оценка I_1 повторяет рассуждения леммы 13 с той лишь разницей, что в зоне T_1 можно использовать более грубое неравенство

$$|\,\mathbf{E}\,H(x)\exp\{itF(x)\}\,| \le \mathbf{E}\,|\,H(x)\,|\,.$$

Отсюда $I_1 \le \widetilde{c}(F, A)\,(\Lambda_2 + L_3^2 + L_4)$. Оценки $I_j \le c(F, A)\,(\Lambda_2 + L_3)^{\mu}$, $j = 4, 5$, где $\mu > 2$, следуют из леммы 11.

Лемма 14. $I_3 \le c(\cdot)(\Lambda_2 + L_3^2)$.

Доказательство. В силу лемм 8—10, а также следствия 5, в зоне T_3 имеет место неравенство

$$| \mathrm{E} \exp\{itF(S_{nk})\} | \le C(\cdot)\left\{\Delta_n(N)^7 + | t^2 \Delta_n(N^{(1)})^3 \Delta_n(N^{(2)})^3 |^{(m+1)/3p} + \right.$$

$$\left. + | t \Delta_n(N^{(1)}) \Delta_n(N^{(2)}) |^{-Ms/3p(s+1)} + (| t\Delta_n(N^{(1)})\Delta_n N^{(2)}) |^6 \varepsilon(n))^{(s+1)/3p} \right\}.$$

Учитывая условие (1.6) и замечание 6, выберем $\Delta_n(N^{(i)}) \sim t^{-1/2+\tau}$, $i = 1, 2$. Отсюда

$$| \mathrm{E} \exp\{itF(S_{nk})\} | \le$$

$$\le C(\cdot)\left\{t^{7\tau - 7/2} + t^{-(1-6\tau)(s+1)/3p} + (t^{12\tau}\varepsilon(n))^{(s+1)/3p} + t^{-2\tau Ms/3p(s+1)}\right\}.$$

Выбирая τ, p, s и $M = c/a$ так, чтобы имели место соотношения (3.5), получаем требуемое. Лемма 14 доказана.

Таким образом, суммируя оценки для I_k, $1 \le k \le 5$, заключаем

$$\int_T | f_n(t) - f(t) - h(t) | \, |t|^{-1} \, dt \le \tilde{c}(a, \cdot)(\Lambda_2 + L_3^{2-a} + L_4).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2 [10]. Рассмотрим в $D_U[0,1]$ следующие с.э.:

$$\xi_{ni} = \zeta_{ni} I_{t_{ni}}(t),$$

$$\gamma_{ni} = (W(t_{ni}) - W(t_{ni-1})) I_{t_{ni}}(t),$$

$$w_{ni} = W((t \vee t_{ni-1}) \wedge t_{ni}) - W(t_{ni-1}),$$

$$w_{ni}^0 = (W(t) - W(t_{ni-1}))(I_{t_{ni-1}}(t) - I_{t_{ni}}(t)),$$

где, как и прежде, $I_z(t) = 1$ при $t \ge z$, $I_z(t) = 0$ в противном случае. Очевидно, что $W(t) = \sum_{i \le n} w_{ni}(t)$. Положим $W_n(t) = \sum_{i \le n} \gamma_{ni}(t)$. Тогда имеет место равенство $W(t) - W_n(t) = \sum_{i \le n} w_{ni}^0(t)$. Нетрудно показать, что соотношение (1.13) выполнено при замене $W(t)$ на $W_n(t)$ (подробнее см. [9, 10]). Тогда в качестве следствия теоремы 1 при выполнении (1.13) и любом $a > 0$ получаем неравенство

$$d_F(S_n, W_n) \le \delta(\zeta, F, a). \tag{3.8}$$

Отметим, что справедливость соотношений (1.2) для равномерной нормы $D_U[0,1]$ есть следствие классических моментных неравенств для полумартингалов (см., например, [18, с. 138]). Наконец, при выполнении (1.13) имеет место доказанная в [10] оценка

$$d_F(W, W_n) \leq c(F) \sum_{k \leq n} \sigma_{nk}^2 \lambda((t_{nk-1}, t_{nk}]) . \tag{3.9}$$

Очевидно, из (3.8) и (3.9) следует утверждение теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Колмогоров А. Н.** Теория вероятностей // Математика в СССР за сорок лет.—М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1957.—С. 781–795.
2. **Борисов И. С.** О скорости сходимости распределений функционалов интегрального типа // Теория вероятностей и ее применения.—1976.—Т. 21, № 2.—С. 283–299.
3. **Борисов И. С., Боровков А. А.** Аппроксимация второго порядка случайных ломаных в принципе инвариантности // Теория вероятностей и ее применения.—1986.—Т. 30, № 2.—С. 225–245.
4. **Боровков А. А.** О скорости сходимости в принципе инвариантности // Теория вероятностей и ее применостей.—3.—Т. 18, № 2.—С. 217–234.
5. **Дронов С. В., Саханенко А. И.** О скорости сходимости в многомерном принципе инвариантности длля функционалов интегрального типа // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 3.—С. 78–88.
6. **Прохоров Ю. В.** Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения.—1956.—Т. 1, № 2.—С. 177–238.
7. **Саханенко А. И.** Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности // Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы.—Новосибирск: Наука, 1982.—С. 72–79.—(Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 1).
8. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** An approximation of partial sums of independent RV'–s and sample DF. I. // Z. Wahrseinlichkeitstheoric verw. und Geb.—1975.—x B. 32, N 1{/}2, P. 111–133.
9. **Борисов И. С.** Аппроксимация распределений гладких функционалов от сумм независимых случайных элементов в банаховых пространствах // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1989.—С. 7–40.—(Тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).
10. **Borisov I. S.** Approximation for distributions of smooth functionals of sums of independent random variables in Banach spaces // Siberian Advances in Math.—1991.—V. 1, N 1, P. 1–38.
11. **Götze F.** On the rate of convergence in the central limit theorem in Banach spaces // Ann. Probab.—1986.—V. 14, N 3.—P. 922–942.
12. **Виноградова Т. Р.** О точности нормальной аппроксимации на множествах, определяемых гладкими функциями. 1 // Теория вероятностей и ее применостей.—1985.—Т. 30, № 2.—С. 219–229.
13. **Виноградова Т. Р.** О точности нормальной аппроксимации на множествах, определяемых гладкими функциями. П // Теория вероятностей и ее применения.—1985.—Т. 30, № 3.—С. 554–557.
14. **Götze F.** Edgeworth expansions in functional limit theorems // Ann. Probab.—1989.—V. 17, N4.—P. 1602–1634.
15. **Ульянов В. В.** Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин в гильбертовом пространстве // Теория вероятностей и ее применения.—1986.—Т. 31, № 1.—С. 31–46.

16. **Юринский В. В.** О точности нормального приближения вероятности попадания в шар // Теория вероятностей и ее применения.—1982.— Т. 27, № 2.—С. 270–278.
17. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин.—М.: Наука, 1972.
18. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов.—М.: Наука, 7.