СТОХАСТИЧЕСКИ РЕКУРСИВНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

*А. А. Боровков, С. Г. Фосс**

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются стохастически рекурсивные последовательности $\{X(n)\}$, определяемые как решения уравнений $X(n+1) = f(X(n), \xi_n)$ (где ξ_n — заданная случайная последовательность), а также случайные последовательности более общей природы, названные в работе рекурсивными цепями. Для них устанавливаются теоремы существования, эргодичности, устойчивости, строятся стационарные мажоранты. Рассматриваются процессы с непрерывным временем, ассоциированные с изучаемыми случайными последовательностями.

Основными объектами изучения в этой работе являются случайные последовательности двух типов:

— стохастически рекурсивные последовательности (СРП) $\{X(n)\}$, определяемые рекуррентными соотношениями вида

$$X(n+1) = f(X(n), \xi_n), \tag{1}$$

где f — заданная функция, $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность;

— последовательности $\{X(n)\}$, названные в работе рекурсивными цепями (РЦ), которые характеризуются тем, что функцией от $(X(n), \xi_n)$ является не само значение $X(n+1)$, а лишь его условное распределение относительно всей предыстории.

СРП изучались в [1—5 и др.]. РЦ были введены в [6], но систематически изучаются впервые в настоящей работе. СРП и РЦ часто возникают в приложениях (см., например, [1—5]) и являются объектами более общими, чем цепи Маркова (ЦМ); очевидно, что РЦ являются таковыми при $\xi_n \equiv \mathrm{const}$, СРП — при независимых $\{\xi_n\}$.

Если сравнить исследование СРП, проведенное в [2, 4], с эргодической теорией ЦМ, то, на первый взгляд, вряд ли можно обнаружить что-либо общее, тем более, что отправные соображения при изучении СРП и ЦМ были совершенно различными. Оказывается, однако, что общее все же есть. Более того, идеи конструкции искусственной регенерации для ЦМ, предложенные в [7, 8], могут быть эффективно использованы и в теории СРП и РЦ таким образом, что общие условия эргодичности ЦМ и названных процессов могут быть сделаны по форме и по существу очень близкими. Эти условия, как и для ЦМ, являются весьма общими и влекут за собой сходимость в очень сильной форме, из которой следует сходимость по вариации.

**Работа выполнена при частичной поддержке Гранта* №214-627 *Министерства по науке, высшей школе и технической политике Российской Федерации.*

Работа состоит из шести параграфов, которые, в свою очередь (за исключением § *5*), разбиты на пункты.

В § 1 приводятся условия эргодичности для ЦМ и СРП. В п. 1 формулируется известный критерий эргодичности для ЦМ, удовлетворяющих условию Харриса. В п. 2 развиваются идеи метода обновлений [2, 4], позволяющие устанавливать эргодичность СРП. В п. 3 приводятся критерии эргодичности СРП с нестационарным управлением. В п. 4 показывается, что для ЦМ условия эргодичности, сформулированные в п. 1, эквивалентны в известном смысле условиям «обновления». Наконец, в п. *5* приводятся простые оценки скорости сходимости в теореме эргодичности для СРП.

В § 2 определяются РЦ, являющиеся, как уже сказано, объектом более общим, чем ЦМ и СРП. В п. 1 приводятся определения и обсуждаются вопросы построения, существования и единственности РЦ. В п. 2 показывается, что РЦ может быть представлена как СРП с более «богатым» управлением.

В § 3 изучаются вопросы эргодичности РЦ. В п. 1 сформулированы общие критериии эргодичности РЦ. Критерии эргодичности для РЦ с нестационарным управлением приведены в п. 2. В п. 3 предлагаются некоторые условия, являющиеся достаточными для эргодичности РЦ и основанные на условии «перемешивания» управляющей последовательности.

В § 4 продолжается исследование проблем эргодичности, а также ограниченности по вероятности случайных последовательностей. В п. 1 рассматривается модификация условий эргодичности, связанная с конкретизацией структуры обновляющих событий. В пп. 2 и 3 приводятся условия, достаточные для построения так называемых V-индуцирующих событий (являющихся компонентой обновляющих событий) для различных фазовых пространств. Нахождению условий ограниченности по вероятности случайных последовательностей посвящен п. 4. В п. *5* приводится другой путь получения достаточных условий существования V-индуцирующих событий.

В § *5* доказывается теорема устойчивости РЦ.

Наконец, в § 6 рассматриваются стохастические процессы с непрерывным и дискретным временем, проблема эргодичности для которых может быть редуцирована в известном смысле к этой проблеме для «вложенных» РЦ. В п. 1 определяются процессы, допускающие вложенные РЦ. Условия эргодичности таких процессов в случае, когда элементы управляющей последовательности РЦ независимы, сформулированы в п. 2. В п. 3 вводится понятие процесса, допускающего вложенную ЦМ, и приводится критерий эргодичности таких процессов в случае, когда вложенная ЦМ эргодична по Харрису. В п. 4 сформулированы условия эргодичности общих процессов, допускающих вложенные РЦ. Наконец, в п. *5* приводятся примеры процессов, допускающих вложенные РЦ.

Нумерация теорем, лемм, формул и т. п. в каждом параграфе самостоятельная. При ссылках на теоремы, леммы, формулы из другого параграфа используется двойная нумерация.

§ 1. УСЛОВИЯ ЭРГОДИЧНОСТИ ЦЕПЕЙ МАРКОВА И СТОХАСТИЧЕСКИ РЕКУРСИВНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Цепи Маркова. Пусть $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$ — произвольное измеримое пространство и $X = \{X(n) = X(x, n),\ n \geq 0\}$ — однородная ЦМ со значениями в $\mathscr{X}$ и с начальным состоянием $X(x, 0) = x \in \mathscr{X}$. Наиболее общие условия эргодичности ЦМ приведены в [7—11]. Существует несколько близких друг к другу модификаций этих условий. Мы остановимся на одной из них, предложенной в [6, 12, 13].

Для множества $V \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ положим $\tau_V(x) = \min\ \{ i \geq 1 : X(x, i) \in V\}$. Предположим, что существуют множество $V \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$, вероятностная мера φ на $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$, вещественное число $p \in (0, 1)$ и натуральное число $m \geq 0$ такие, что

(I) $\mathbf{P}\,(\tau_V(x) < \infty) = 1$ для всех $x \in \mathscr{X}$, $\sup\limits_{x \in V} \mathbf{E}\,\tau_V(x) < \infty$;

(II) $\inf\limits_{x \in V} \mathbf{P}\,(X(x, m+1) \in B) \geq p\,\varphi(B)$ для всех $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$.

Условие (I) означает, в частности, «равномерную» положительную возвратность множества V. Условие (II) является условием «перемешивания». Оно выражено в терминах локальных характеристик и в этом смысле является окончательным. Условие (I) в конкретных задачах требует дополнительных рассмотрений.

Для эргодичности ЦМ нам понадобится также свойство ее непериодичности. Если выполнены условия (I) и (II), то это свойство может быть выражено в терминах m, φ, V, τ_V.

Пусть $n_1, n_2, \ldots$ — числа, для которых $\mathbf{P}\,(\tau_V(\varphi) = n_i) > 0$, где $\tau_V(\varphi) = \min\{i \geq 1 :\ X(\varphi, i) \in V\}$; $X(\varphi, i)$ — ЦМ со случайным начальным значением с распределением φ.

(III) (условие непериодичности) Существует число $l > 0$ такое, что наибольший общий делитель совокупности $m+n_1+1, m+n_2+1, \ldots, m+n_l+1$ равен единице (это условие выполнено, если $m = 0$, $\varphi(V) > 0$).

Обозначим $P(x, B) = \mathbf{P}\,(X(x, 1) \in B)$, $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (I)—(III). *Тогда существует заданная на одном с X вероятностном пространстве стационарная* ЦМ $\{X^n\}$ *с переходной вероятностью* $P(x, B)$, *не зависящая от* $X(0)$ *и такая, что для любого* $x \in \mathscr{X}$

$$\mathbf{P}\left(X(x, k) = X^k \quad \textit{при всех} \quad k \geq n\right) \to 1, \qquad n \to \infty. \tag{1}$$

Здесь и везде, где это потребуется, будем предполагать, что σ-алгебра $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ является счетно порожденной, так что функцию $P(x, B)$ можно считать измеримой по x мерой. Напомним, что σ-алгебра $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ называется *счетно порожденной*, если она порождена счетным набором множеств из X (см. [11]). Очевидно, что σ-алгебра борелевских множеств в $\mathbf{R}^d$ является счетно порожденной. Счетно порожденной будет также борелевская σ-алгебра в любом метрическом сепарабельном пространстве. Таким образом, условие счетной порожденности не является чрезмерно ограничительным.

Из (1) с необходимостью вытекает, что распределение X^0,

$$\pi(B) = \mathbf{P}(X^0 \in B), \quad B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}},$$

является инвариантной мерой:

$$\pi(B) = \int_{\mathscr{X}} \pi(dx)\, P(x, B), \quad B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}},$$

причем имеет место сходимость по вариации

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}} |\mathbf{P}(X(x,n) \in B) - \pi(B)| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Справедливо также следующее утверждение, обратное теореме 1.

Теорема 2. *Если* (2) (*или* (1)) *выполнено для любого* $x \in \mathscr{X}$, *то найдутся множество* V, *вероятностная мера* φ *и числа* p, m, *для которых выполняются условия* (I)—(III).

Утверждения теорем 1 и 2 в своих существенных чертах доказаны в [10, 11] (см. также [6]).

2. Стохастически рекурсивные последовательности. Пусть наряду с $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$ задано еще одно произвольное измеримое пространство $(\mathscr{Y}, \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}})$ с мерой $\mathbf{P}$, и пусть $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — случайная последовательность со значениями в $\mathscr{Y}$. Пусть, кроме того, на $(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}} \times \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}})$ задана измеримая функция $f\colon \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$.

Определение 1. Назовем $\{X(n)\}$ *стохастически рекурсивной последовательностью, управляемой последовательностью* $\{\xi_n\}$, если она удовлетворяет соотношениям $X(n+1) = f(X(n), \xi_n)$ при всех $n \geq 0$. Значение $X(0)$ для простоты будем считать постоянным (или случайным, не зависящим от $\{\xi_n\}$).

Распределение последовательности $\{X(n), \xi_n\}$ на $((\mathscr{X} \times \mathscr{Y})^{\infty}, (\mathfrak{B}_{\mathscr{X}} \times \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}})^{\infty})$ строится очевидным образом (аналогично тому, как по переходной функции $P(x, B)$ строится на $(\mathscr{X}^{\infty}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}^{\infty})$ распределение ЦМ X).

Последовательность $\{\xi_n\}$, не ограничивая общности, можно считать заданной при всех $-\infty < n < \infty$ (для стационарной последовательности необходимое продолжение для $n < 0$ всегда можно осуществить с помощью теоремы Колмогорова).

Следует отметить, что термин «стохастически рекурсивная последовательность» в настоящий момент нельзя считать общепринятым. Изучение СРП впервые началось, по-видимому, в [1], где рассматривался случай, когда $\mathscr{X} = \mathbf{R}^d$, а функция f предполагалась монотонной по первому аргументу. В [2, 4, 14] были доказаны общие теоремы эргодичности и устойчивости СРП, основанные на понятии так называемых обновляющих событий. Ряд общих построений и утверждений для СРП на базе теории точечных процессов содержится в [3, 5], где для обозначения СРП использовался термин «рекурсивные стохастические уравнения». Во всех названных работах предполагалось, что последовательность $\{\xi_n\}$ стационарна; полученные результаты применялись для исследования многоканальных систем обслуживания.

Как уже отмечалось, СРП есть объект более общий, чем ЦМ. Именно, любая ЦМ может быть представлена как СРП при независимых $\{\xi_n\}$ (подробнее об этом см. § 2).

Определим σ-алгебры

$$\mathfrak{F}^{\xi}_{l,n} = \sigma\{\xi_k, l\le k\le n\}, \quad \mathfrak{F}^{\xi}_{n} = \sigma\{\xi_k, k\le n\} = \mathfrak{F}^{\xi}_{-\infty,n},$$
$$\mathfrak{F}^{\xi} = \sigma\{\xi_k, -\infty<k<\infty\} = \mathfrak{F}^{\xi}_{-\infty,\infty}.$$

Определение 2. Событие $A \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$, $m \ge 0$, назовем *обновляющим* для СРП $\{X(n)\}$ на отрезке $[n, n+m]$, если существует измеримая функция $g: \mathcal{Y}^{m+1} \to \mathcal{X}$ такая, что на множестве A (т.е. при $\omega \in A$) выполняется равенство

$$X(n+m+1) = g(\xi_n, \dots, \xi_{n+m}). \tag{3}$$

Очевидно, что при $\omega \in A$ соотношения вида $X(n+m+k+1) = g_k(\xi_n, \dots$ $\dots, \xi_{n+m+k})$ будут справедливы при всех $k \ge 0$, где функция g_k зависит лишь от своих аргументов и определяется событием A.

Последовательность событий $\{A_n\}$, $A_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$ (где $m \ge 0$ — фиксированное целое число), называется *обновляющей для последовательности* $\{X(n)\}$, если существует целое число $n_0 \ge 0$ такое, что при каждом $n \ge n_0$ при A_n выполнено соотношение (3) для одной и той же функции g.

Основной интерес для нас будут представлять «положительные» обновляющие события, т.е. события, имеющие положительную вероятность $\mathbf{P}(A_n) > 0$.

Простейшим примером обновляющего события является попадание $X(n)$ в некоторую фиксированную точку x_0: $A_n = \{X(n) = x_0\}$; при этом $m = 0$. Однако такое событие может иметь нулевую вероятность. Ниже мы рассмотрим еще один, более содержательный пример. Другие примеры обновляющих событий можно найти в [2, 4, 15—17].

Отметим, что, вообще говоря, событие A и, стало быть функция g, могут зависеть от начального значения $X(0)$.

В дальнейшем будем предполагать, если не оговорено противное, что последовательность $\{\xi_n\}$ стационарна и метрически транзитивна. Символом U будем обозначать сохраняющее меру преобразование сдвига $\mathfrak{F}^{\xi}$-измеримых случайных величин, порожденное последовательностью $\{\xi_n\}$ так, что $U\xi_n=\xi_{n+1}$, а символом T — преобразование сдвига множеств (событий) из σ-алгебры $\mathfrak{F}^{\xi}$:

$$T\{\omega: \xi_j(\omega) \in B_j, j = 1, \dots, k\} = \{\omega: \xi_{j+1}(\omega) \in B_j, j = 1, \dots, k\}.$$

Соответственно, символами U^n и T^n, $n \ge 0$, будут обозначаться итерации этих преобразований (так что $U^1 = U$, $T^1 = T$; U^0 и T^0 суть тождественные преобразования), а символами U^{-n} и T^{-n} — преобразования, обратные к U^n и T^n. Последовательность событий $\{A_k\}$ назовем *стационарной*, если $A_k = T^k A_0$ при всех k.

Пример 1. Рассмотрим вещественнозначную последовательность $X(n+1) = (X(n)+\xi_n)^+$, $X(0) = a \ge 0$, где $x^+ = \max(0, x)$ и $\{\xi_n\}$ — стационарная метрически транзитивная последовательность. При любом n_0 события $A_n = T^n A_0$, где

$$A_0 \equiv A_{0,a} = \{\xi_{-1} \le 0,\ \xi_{-1}+\xi_{-2} \le 0, \dots, \xi_{-1}+\dots+\xi_{-n_0} \le 0,$$

$$\xi_{-1}+\dots+\xi_{-n_0}+\dots+\xi_{-n_0-l} \le -a \ \text{ при всех } l \ge 1\}, \tag{4}$$

образуют стационарную последовательность обновляющих событий при $m = 0$, $g(y) \equiv y^+$, так как при $n > n_0$ имеем $X(n+1) = \xi_n^+$ п.н. на A_n. Если $\mathbf{E}\,\xi_1 < 0$, последовательность $\{\xi_n\}$ метрически транзитивна и, следовательно, $\xi_{-1}+\dots+\xi_{-n} \to -\infty$ п.н. при $n \to \infty$, то найдется такой номер $n_0 = n_0(a)$, что $\mathbf{P}(A_{n_0}) > 0$.

С другой стороны, если определить события B_n, число m и функцию $g: \mathbf{R}^{m+1} \to \mathbf{R}$ из равенств $m = n_0+1$, $B_n = T^m A_n$, $g(y_0, \dots, y_m) \equiv y_m^+$, то события $B_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$ будут обновляющими для $\{X(n)\}$ на отрезке $[n, n+m]$ при всех $n \ge n_0 \equiv 0$.

Аналогичное соображение можно использовать и при произвольных обновляющих событиях. Поэтому в дальнейшем будем без ограничения общности предполагать, что число n_0, фигурирующее в определении последовательности обновляющих событий, равно нулю.

Конструкции нестационарных обновляющих событий могут быть проще. В примере 1 таковыми являются события

$$A_n = \{X(n+1) = 0\} \in \mathfrak{F}^{\xi}_{0,n} \quad \text{при } m = 0,\ g \equiv 0.$$

Можно рассматривать также вложенные в A_{n+m} обновляющие события

$$A_n^{(m)} = \{X(n) \le b,\ S_n^m \le \min(-b, S_n^0, \dots, S_n^{m-1})\} \in \mathfrak{F}^{\xi}_{0,n+m}$$

при некотором $m \ge 1$, где $S_n^k = \xi_n + \dots + \xi_{n+k}$. События $A_n^{(m)}$ также соответствуют функции $g \equiv 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. (а) *Пусть* $\{\xi_n\}$ *— произвольная стационарная последовательность, и пусть для* СРП $\{X(n)\}$ *существует последовательность обновляющих событий* $\{A_n\}$ *такая, что*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j T^{-s} A_{j+s}\right) \to 1, \quad n \to \infty, \tag{5}$$

равномерно по $s \ge 1$. *Тогда на одном с* $\{X(n)\}$ *вероятностном пространстве можно определить стационарную последовательность*

$\{X^n \equiv U^n X^0\}$, *удовлетворяющую уравнениям* $X^{n+1} = f(X^n, \xi_n)$ *и такую, что*

$$\mathbf{P}\,((X(k) = X^k \text{ при всех } k \geq n)) \to 1\,, \quad n \to \infty\,. \tag{6}$$

Обратно, если последовательность $\{\xi_n\}$ *метрически транзитивна и выполнено* (6), *то существуют обновляющие события* A_n, удовлетворяющие (5).

(б) *Если последовательность* $\{\xi_n\}$ *метрически транзитивна и события* A_n *стационарны, то соотношения* $\mathbf{P}(A_0) > 0$ *и* $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = 1$ *эквивалентны и влекут* (5).

По поводу утверждения (б) см. также [2, 4].

Отметим, что если, как и в теореме 1, ввести меру $\pi(B) = \mathbf{P}(X^0 \in \in B)$, то из (6) следует сходимость по вариации, т.е.

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}} |\mathbf{P}(X(n) \in B) - \pi(B)| \to 0\,, \quad n \to \infty\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Д о с т а т о ч н о с т ь. Покажем сначала, что из (5) следует равномерная по $s \geq 0$ сходимость

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{X(n+k) \neq U^{-s} X(n+k+s)\}\right) \to 0\,, \quad n \to \infty\,. \tag{7}$$

Для данного фиксированного $s \geq 1$ рассмотрим последовательность $X_s(j) = U^{-s} X(s+j)$. Она определена при $j \geq -s$:

$$X_s(-s) = X(0)\,, \quad X_s(-s+1) = f(X_s(-s), \xi_{-s}) = f(X(0), \xi_{-s}) \text{ и т.д.}$$

Ясно, что при каждом $j \in [0, n]$ событие $\{X(j) = X_s(j)\}$ влечет за собой $\{X(n+k) = X_s(n+k)\}$ при всех $k \geq 0$. Покажем, что

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} \{X(j) = X_s(j)\}\right) \to 1\,, \quad n \to \infty\,.$$

Положим для простоты $m = 0$. Тогда для того, чтобы произошло событие $X(j+1) = X_s(j+1)$, достаточно, чтобы одновременно произошли события A_j и $T^{-s} A_{j+s}$, т.е.

$$\bigcup_{j=0}^{n-1} A_j T^{-s} A_{j+s} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \{X(j) = X_s(j)\} \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} \{X(n+k) = X_s(n+k)\}\,.$$

Поэтому из (5) следуют (7) и равномерная по $k \geq 0$ и $s \geq 0$ сходимость

$$\mathbf{P}\left(X_n(k) \neq X_{n+s}(k)\right) \to 0\,, \quad n \to \infty\,.$$

Если ввести индикаторную метрику ρ : $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$, $\rho(x, x) = 0$, то сказанное означает, что для любого $\delta > 0$ найдется N такое, что

$$\mathbf{P}\left(\rho(X_n(k), X_{n+s}(k)) > \delta\right) = \mathbf{P}\left(\rho(X_n(k), X_{n+s}(k)) \neq 0\right) < \delta$$

при $n \geq N$ для любых $k \geq 0$, $s \geq 0$. Это есть фундаментальность при каждом k последовательности $X_n(k)$ относительно сходимости по вероятности. Так как любое пространство $\mathscr{X}$ является полным относительно введенной метрики, существует случайная величина X^k такая, что $X_n(k) \underset{\rho}{\to} X^k$ или, что то же самое (в силу специфики метрики ρ),

$$\mathbf{P}\left(X_n(k) \neq X^k\right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Последовательность X^k является стационарной. Действительно,

$$\mathbf{P}\left(X^{k+1} \neq U X^k\right) = \mathbf{P}\left(X_n(k+1) \neq U X_n(k)\right) + o(1) =$$

$$= \mathbf{P}\left(X_n(k+1) \neq X_{n-1}(k+1)\right) + o(1) = o(1) \text{ при } n \to \infty.$$

Так как здесь исходная вероятность от n не зависит, имеем $X^{k+1} = U X^k$ п.н. Далее, $X(n+k+1) = f\left(X(n+k), \xi_{n+k}\right)$ и, следовательно,

$$X_n(k+1) = U^{-n} f\left(X(n+k), \xi_{n+k}\right) = f\left(X_n(k), \xi_k\right). \tag{9}$$

Здесь левая и правая части сходятся по вероятности к X^{k+1} и $f(X^k, \xi_k)$, соответственно. Это означает, что $X^{k+1} = f(X^k, \xi_k)$ п.н. Для доказательства (6) остается заметить, что в силу (9) значения $X_n(k)$ и X^k, совпав однажды при каком-нибудь k, потом (при больших значениях k) уже не различаются. Поэтому наряду с (8) справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\geq 0} \{X_n(k) \neq X^k\}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\geq 0} \{X(k+n) \neq X^{k+n}\}\right) \to 0, \quad n \to \infty,$$

эквивалентное (6).

Необходимость. Для данного $m \geq 0$ обозначим

$$B_n = \{X(n+m+1) = X^{n+m+1}\} \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m},$$

$$D_n = \{U^n X(m+1) = X^{n+m+1}\} = T^n D_0 \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$$

и покажем, что события $A_n = B_n D_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$ являются обновляющими и удовлетворяют (5). Отметим предварительно, что события D_n стационарны. Кроме того, в силу (6) $\mathbf{P}(D_0) = \mathbf{P}\left(X(m+1) = X^{m+1}\right) \to 1$ при $m \to \infty$. Следовательно, найдется такое m, что $\mathbf{P}(D_0) > 0$. Это значение m в дальнейшем будем считать фиксированным. Поскольку $\{\xi_n\}$ метрически транзитивна, в силу утверждения (б) теоремы 3 (оно доказано ниже) соотношения $\mathbf{P}(D_0) > 0$ и $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n\right) = 1$ эквивалентны.

Тот факт, что A_n является обновляющим событием, вытекает из того, что на событии A_n совпадают значения трех последовательностей:

$$X(n+m+1) = X^{n+m+1} = U^n X(m+1),$$

где $U^n X(m+1) = f_m(X(0), \xi_n, \ldots, \xi_{n+m})$. Если положить

$$g(y_0, \dots, y_m) = f_m(X(0), y_0, \dots, y_m),$$

то будут выполнены условия определения 2, относящиеся к обновляющим событиям.

Покажем теперь, что справедливо (5). Имеем $T^{-s} A_{j+s} = D_j T^{-s} B_{j+s}$. Тогда $A_j T^{-s} A_{j+s} = D_j B_j T^{-s} B_{j+s}$, где события $C_j = B_j T^{-s} B_{j+s}$ означают совпадение трех СРП:

$$C_j = \{X(j+m+1) = X^{j+m+1} = U^{-s} X(j+m+s+1)\}$$

и потому являются вложенными: $C_j \subseteq C_{j+1}$. Следовательно, при $k = [n/2]$ выполняются неравенства

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j T^{-s} A_{j+s}\right) \ge \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=k}^{n} C_j D_j\right) \ge \mathbf{P}\left(C_k \bigcup_{j=k}^{n} D_j\right).$$

В силу (6) имеем $\mathbf{P}(B_k) \to 1$, $\mathbf{P}(T^{-s}B_{k+s}) = \mathbf{P}(B_{k+s}) \to 1$ и $\mathbf{P}(C_k) \to 1$ при $n \to \infty$ равномерно по $s \ge 0$. Тогда $\mathbf{P}(C_k \cup_{j=k}^{n} D_j) \to 1$ при $n \to \infty$ и выполнено (5), так как, согласно предыдущему,

$$\mathbf{P}(\cup_{j=k}^{n} D_j) = \mathbf{P}(\cup_{j=0}^{n-k} D_j) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Докажем теперь утверждение (б) теоремы 3. Если последовательность $\{A_n\}$ стационарна, то $A_j = A_j T^{-s} A_{j+s}$. Тогда нам достаточно убедиться в том, что метрическая транзитивность $\{\xi_n\}$ и неравенство $\mathbf{P}(A_0) > 0$ влекут за собой $\mathbf{P}(B) = 1$, где $B = \cup_{j=0}^{\infty} A_j$. Действительно, так как $TB = \cup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq B$, и T — сохраняющее меру преобразование ($\mathbf{P}(TB) = \mathbf{P}(B)$), верно равенство $TB = B$ с точностью до множества меры нуль. Это значит, что B инвариантно относительно T, что в силу метрической транзитивности влечет за собой $\mathbf{P}(B) = 1$ или $\mathbf{P}(B) = 0$. Так ка·· $\mathbf{P}(B) \ge \mathbf{P}(A_0) > 0$, имеем $\mathbf{P}(B) = 1$. Теорема 3 доказана.

В примере 1 стационарные обновляющие события (4), обладающие ством $\mathbf{P}(A_0) > 0$, удовлетворяют, очевидно, условиям теоремы 3.

Сделаем несколько замечаний относительно нестационарных обновляющих событий. Если A_j имеют вид $A_j = B_j W_j$, где $B_j = \{X(j) \in V\}$ при некс тором $V \subset \mathscr{X}$, $W_j = \{(\xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{j+m}) \in C\}$, $C \in \mathscr{Y}^{m+1}$, то событие $A_j T^{-s} A_{j+s}$ можно представить в виде $B_j B_j^{(s)} W_j$, где $B_j^{(s)} = \{X_s(j) \in V\}$, $X_s(j) = U^{-s} X(j+s)$ есть последовательность того же вида, что и $X(j)$, но с начальным значением $X_s(0) = U^{-s} X(s)$. В случае $C = \mathscr{Y}^{m+1}$, $A_j = B_j$ (W_j суть достоверные события) условие (5) превращается в условие $\mathbf{P}(\cup_{j=1}^{n} B_j B_j^{(s)}) \to 1$, $n \to \infty$, означающее, что при больших n с высокой вероятностью наступит одновременно хотя бы одна пара обновляющих событий B_j и $B_j^{(s)}$ соответственно для процессов X и X_s. Выполнение этого условия можно обеспечить следующими свойствами:

1) существованием для любого $\varepsilon > 0$ множества $V_\varepsilon \subset \mathscr{X}$ такого, что

$$\inf_s \mathbf{P}\left(X_s(0) \in V_\varepsilon\right) > 1 - \varepsilon \ ;$$

2) выполнением для каждого $\varepsilon > 0$ соотношения

$$\inf_{y \in V_\varepsilon} \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} \{X(j) \in V, X(y, j) \in V\}\right) \to 1 \ , \ n \to \infty \ ,$$

где $X(y, j)$ — последовательность вида $X(n)$, но с начальным значением $X(y, 0) = y$.

Последнее соотношение показывает, что для нестационарных обновляющих событий $A_j{=}B_j$ выполнение (5) связано с совместным поведением двух последовательностей $X(j)$ и $X(y, j)$ (ср. с условием $\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \to 1$ для стационарных обновляющих событий; см. доказательство теоремы 3).

Для выполнения (5) с обновляющими событиями вида $A_j = B_j W_j$ достаточно потребовать дополнительно к условиям 1 и 2 существование $q > 0$ такого, что $\mathbf{P}\left(W_j \mid \mathfrak{F}_{j-1}\right) > q$ п.н. (условия 1 и 2 обеспечивают при $n \to \infty$ появление с высокой вероятностью растущего количества событий $B_j B_j^{(s)}$).

В примере 1 проверка соотношений 1 и 2 (или (5)) осуществляется просто. В этом случае $A_j = B_j = \{X(j) = 0\}$, $B_j^{(s)} = \{X_s(j) = 0\}$ и функция f, определяющая $\{X(n)\}$, монотонна. Поэтому для $Y = \max(X(0), X_s(0))$ выполняется включение $A_j^{(Y)} \equiv \{X(Y, j) = 0\} \subseteq B_j B_j^{(s)}$. Следовательно, (5) будет выполнено, если

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j^{(Y)}\right) = \mathbf{P}\left(\min_{0 \le k \le n} (Y + S^k) < 0\right) \to 1 \ , \quad n \to \infty \ ,$$

где $S^k = \xi_0 + \ldots + \xi_k$. Для этого достаточно, в свою очередь, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) случайные величины $X_s(0)$ (или Y) ограничены по вероятности:

$$\sup_s \mathbf{P}\left(X_s(0) > N\right) \to 0 \ , \ N \to \infty \ ,$$

равномерно по s ;

б) последовательность $\{\xi_n\}$ метрически транзитивна и $\mathbf{E}\,\xi_n < 0$.

Вернемся к утверждениям теоремы 3. Так как обновляющие события A_n (а также число m и функция g), вообще говоря, зависят от начального состояния $X(0) = x \in \mathscr{X}$, может зависеть от x и стационарная последовательность $\{X^n\}$. Однако, если предположить, что для некоторого множества $V_0 \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ можно подобрать стационарную последовательность событий $A_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$, являющуюся обновляющей для $\{X(n)\}$ (с одной и той же функцией g) при любом $X(0) = x \in V_0$, то предельная стационарная последовательность $\{X^n\}$ и, следовательно мера π , также не будут зависеть от $X(0) \in V_0$. Ясно, что если $X(0)$ случайно, $\mathbf{P}(X(0) \in V_0) = 1$, то последовательность $\{X(n)\}$ также будет сходиться к $\{X^n\}$ в смысле (5).

Из сказанного вытекает следующее

Утверждение. *Пусть существует возрастающая последовательность множеств* $\{V_k\}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k = \mathscr{X}$, *такая, что при любом* k *найдется стационарная последовательность событий* $\{A_{nk}\}$, *являющаяся обновляющей (с одной и той же функцией* g_k*) для* $\{X(n)\}$ *при любом* $X(0) = x \in V_k$. *Тогда предельная стационарная последовательность* $\{X^n\}$ *и, вместе с ней мера* π, *не будут зависеть от начального значения* $X(0) = x$ *при произвольном* $x \in \mathscr{X}$.

Пример 2. Рассмотрим последовательность $X(n)$ из примера 1. Так как функция $f(x, y) = (x+y)^+$ является монотонно возрастающей, события A_{nk}, определенные в (4) при $a = k$, являются обновляющими для $\{X(n)\}$ при любом начальном условии $X(0) \le k$. Следовательно, в качестве множеств V_k можно взять $V_k = [0, k]$.

Замечание 1. Одно из многих отличий СРП от ЦМ состоит в следующем. Мы знаем, что периодичность ЦМ и ее эргодичность (в смысле соотношений (1) и (2)) несовместимы. Для СРП это не так.

Пример 3. Пусть $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = \{0, 1\}$, $f(x, y) = y$ и $\{\xi_n\}$ есть стационарная метрически транзитивная последовательность вида $\xi_{n+1} = 1 - \xi_n$, где $\mathbf{P}(\xi_0 = 1) = \mathbf{P}(\xi_0 = 0) = 1/2$. Очевидно, что $\{\xi_n\}$ образуют стационарную периодическую ЦМ. Для рассматриваемой СРП имеем $X(n+1) = f(X(n), \xi_n) = \xi_n$ при любом $X(0) \in \{0, 1\}$; условия теоремы эргодичности выполнены очевидным образом. С другой стороны, СРП X является 2-периодической в следующем смысле:

$$\mathbf{P}\big(X(n+1) = 1 \mid X(n) = 0\big) = \mathbf{P}\big(X(n+1) = 0 \mid X(n) = 1\big) = 1 .$$

Само понятие периодичности для СРП может быть значительно шире — как в смысле более глубокой зависимости от предыстории, так и в смысле отсутствия детерминированности, присутствующей в приведенных равенствах. Чтобы пояснить сказанное, модифицируем пример 3. Наряду с последовательностью $\{\xi_n\}$ из примера 3 рассмотрим не зависящую от $\{\xi_n\}$ стационарную последовательность независимых случайных величин $\{\eta_n\}$ (например, нормально распределенных) и рассмотрим в качестве управляющей стационарную, метрически транзитивную последовательность $\{\xi_n, \eta_n\}$, так что в этом случае $\mathscr{Y} = \{0, 1\} \times \mathbf{R}$, $y = (y_1, y_2)$. Положим $f(x, y) = y_1 + y_2$. Тогда $\{X(n)\}$ будет эргодической СРП, но периодичность ее будет не детерминированной, а относиться лишь к распределениям.

Последняя часть теоремы 3 утверждает, что существование стационарной последовательности обновляющих событий A_n, $\mathbf{P}(A_n) > 0$, влечет за собой сходимость (6). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Оно будет верным, если вместо (6) рассматривать несколько более сильную сходимость. Для этого введем ряд понятий.

Пусть X^0 — некоторая случайная величина со значениями в пространстве $\mathscr{X}$, измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}^{\xi}$, и $\{X^n = U^n X^0\}$ — построенная по X^0 стационарная последовательность.

Определение 3. Будем говорить, что СРП $\{X(n)\}$ *каплинг-сходится к* $\{X^n\}$, и писать $X(n) \xrightarrow{c} X^n$, если выполнено (5).

Используя это определение, можно переформулировать теорему 3 так: *если для* $\{X(n)\}$ *существует «положительная» стационарная последовательность обновляющих событий, то* $\{X(n)\}$ *каплинг-сходится к некоторой стационарной последовательности.*

Если ввести случайную величину

$$\mu_0 = \min\{n \ge 0 : X(n) = X^n\} \equiv \min\{n \ge 0 : X(k) = X^k \text{ при } k \ge n\},$$

то утверждение (6) можно записать также в виде

$$\mathbf{P}(\mu_0 < \infty) = 1. \tag{10}$$

При $k = 0, 1, 2, \ldots$ наряду с последовательностью $\{X(n)\}$ рассмотрим последовательность $X_k(n) = U^{-k} X(n+k)$, $n \ge -k$, получаемую «сдвигом» на время $-k$ исходной последовательности $\{X(n)\}$. Другими словами, $\{X_k(n)\}$ определяется начальным условием $X_k(-k) = X(0)$ в момент времени $-k$ и рекуррентными соотношениями $X_k(n+1) = f(X_k(n), \xi_n)$ при $n \ge -k$. Если обозначить $\mu_k = \min\{n = -k : X_k(n) = X^n\}$, то, как нетрудно видеть, $\mu_k = U^{-k}\mu_0 - k$. Следовательно, каплинг-сходимость последовательности $\{X(n)\}$ влечет каплинг-сходимость последовательности $\{X_k(n), n \ge -k\}$ (или, что то же, последовательности $\{X_k(n), n \ge 0\}$) к $\{X^n\}$ при любом $k \ge 0$.

Обозначим через $\mu^0 = \sup\{\mu_k : k \ge 0\}$ момент «склеивания» одновременно всех последовательностей $\{\{X_k(n)\}, k \ge 0\}$ с последовательностью $\{X^n\}$.

Определение 4. Будем говорить, что последовательность $\{X(n)\}$ *сильно каплинг-сходится* (*sc-сходится*) *к последовательности* $\{X^n \equiv U^n X^0\}$, и писать $X(n) \xrightarrow{sc} X^n$, если $\mu^0 < \infty$ п.н.

Отметим, что *sc*-сходимость сильнее *c*-сходимости, т.е. из конечности п.н. случайной величины μ_0 не следует, вообще говоря, конечность μ^0, что показывает следующий пример.

Пример 4. Пусть $\mathscr{X} = \mathbf{Z}_+$, $X(0) = 0$, $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями $1, 2, 3, \ldots$, $\mathbf{E}\,\xi_n = \infty$,

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \text{при } x = 0, \\ x & \text{при } x = 1, \\ x-1 & \text{при } x \ge 2. \end{cases}$$

Положим $X^n \equiv 1$, $-\infty < n < \infty$. Нетрудно видеть, что СРП $\{X(n)\}$ каплинг-сходится к $\{X^n\}$. Действительно, $\mu_0 = \xi_0 + 1 < \infty$ п.н. С другой стороны,

$$X_k(0) = U^{-k} X(k) = U^{-k}(1 + (\xi_0 - k)^+) = 1 + (\xi_{-k} - k)^+ .$$

Поэтому

$$\mu^0 = \min\{n \geq 0 : (\xi_{-k} - k)^+ = 0 \ \text{ при всех } k \geq n\} =$$

$$= \min\{n \geq 0 : \xi_{-k} \leq k \ \text{ при всех } k \geq n\} = \infty \ \text{п.н.}$$

Дадим также иной вариант определения sc-сходимости. Обозначим $\nu = \min\{n \geq 0 : U^{-k}X(k) = X^0$ при всех $k \geq n\}$. Нетрудно видеть, что распределения случайных величин μ^0 и ν совпадают. Действительно,

$$\mathbf{P}(\mu^0 \leq n) = \mathbf{P}(X_k(n) = X^n \ \text{ при всех } k \geq 0) =$$

$$= \mathbf{P}(X_{k+n}(0) = X^0 \ \text{ при всех } k \geq 0) =$$

$$= \mathbf{P}(X_l(0) = X^0 \ \text{ при всех } l \geq n) = \mathbf{P}(\nu \leq n) .$$

Имеет место (см. [4, 18]).

Теорема 4. *Условия теоремы* 3 (существование стационарной последовательности обновляющих событий $\{A_n\}$, $\mathbf{P}(A_n) > 0$) *необходимы и достаточны для sc-сходимости* $X(n) \xrightarrow{sc} X^n$.

Доказательство. Достаточность. Пусть снова простоты ради $m = 0$. Как уже отмечалось в доказательстве теоремы 3, при $j \leq n$

$$A_j T^{-s} A_{j+s} \subseteq \{X(j) = X_s(j) \equiv U^{-s} X(j+s)\} \subseteq \{X(n) = X_s(n)\} .$$

Для стационарных A_j при всех $s \geq 0$ выполняются равенства

$$A_j = A_j T^{-s} A_{j+s} = \bigcap_{s=0}^{\infty} A_j T^{-s} A_{j+s}$$

и, стало быть,

$$A_j \subseteq \{X(j) = X_1(j) = X_2(j) = \ldots\} \subseteq \{X(n) = X_1(n) = X_2(n) = \ldots\} ,$$

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subseteq \{X(n) = X_1(n) = X_2(n) = \ldots\} .$$

В теореме 3 было установлено существование предела $\lim\limits_{k\to\infty} X_k(n) = X^n$. Из сказанного следует, что

$$\mathbf{P}\left(X(n) = X_1(n) = X_2(n) = \ldots = \lim_{k\to\infty} X_k(n) = X^n\right) \geq \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \to 1$$

при $n \to \infty$. Но это и означает sc-сходимость.

Необходимость. Пусть последовательность $X(n+1) = f(X(n), \xi_n)$ sc-сходится к стационарной последовательности $X^{n+1} = f(X^n, \xi_n)$. Выберем число $m \geq 0$ так, чтобы событие $A_0 \equiv \{\mu^0 = m+1\} \in \mathfrak{F}_m^{\xi}$ имело положительную вероятность. Как и ранее, введем функцию $g : \mathcal{Y}^{m+1} \to \mathcal{X}$,

$$g(y_0, \ldots, y_m) = f_{m+1}(X(0), y_0, \ldots, y_m) .$$

Тогда на множестве A_0 п.н. имеют место равенства

$$X_k(m+1) = X_0(m+1) \equiv g(\xi_0, \ldots, \xi_m) , \qquad k \geq 0 .$$

Следовательно, при любом $n \geq 0$ на множестве $A_n \equiv T^n A_0$ справедливы п.н. равенства

$$U^n X_k(m+1) = U^n X_0(m+1) = g(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m}) , \qquad k \geq 0 .$$

В частности, при $k = n$ имеем $U^n X_n(m+1) \equiv X(n+m+1) = g(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m})$ п.н. на множестве A_n. Теорема 4 доказана.

Если обновляющие события A_j не стационарны, то sc-сходимость может быть обеспечена условием (см. [2, 4])

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{s=s_0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n} A_j T^{-s} A_{j+s} \right) \to 1$$

при $n \to \infty$ и некотором $s_0 > 0$. Однако эти условия оказываются труднопроверяемыми (ср. с [2]) и мы на них останавливаться не будем.

Возникает естественный вопрос: когда каплинг-сходимость и sc-сходимость эквивалентны, т.е. из $\mu_0 < \infty$ п.н. следует $\mu^0 < \infty$ п.н.? Существуют простые достаточные условия, основанные на монотонности функции f по первому аргументу (это свойство выполняется, например, для ряда систем обслуживания с ожиданием), которые обеспечивают требуемую эквивалентность.

Лемма 1. *Предположим, что на пространстве $\mathscr{X}$ задано отношение частичного порядка ($\leq$), и для функции f и начального условия $X(0) = x$ выполнены свойства монотонности:*

1) *$f(x, y) \geq x$ для любого $y \in \mathscr{Y}$,*

2) *если $x_1, x_2 \in \mathscr{X}$ и $x_1 \leq x_2$, то $f(x_1, y) \leq f(x_2, y)$ для любого $y \in \mathscr{Y}$.*

Тогда $\mu_0 = \mu^0$ п.н.

Доказательство. Из свойств монотонности следует, что

$$X(0) = x \leq U^{-1}X(1) \leq \ldots \leq U^{-n}X(n) \leq U^{-n-1}X(n+1) \leq \ldots \leq X^0 \text{ п.н.}$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\mu_0 \leq n\right) = \mathbf{P}\left(X(n) = X^n\right) = \mathbf{P}\left(U^{-n} X(n) = X^0\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(U^{-i} X(i) = X^0 \text{ при всех } i \geq n\right) = \mathbf{P}\left(\nu \leq n\right) = \mathbf{P}\left(\mu^0 \leq n\right) .$$

Из приведенных равенств и соотношения $\mu_0 \leq \mu^0$ п.н. следует $\mu_0 = \mu^0$ п.н.

3. Эргодичность СРП для нестационарных управляющих последовательностей. Эргодические теоремы типа теоремы 3 можно формулировать и для нестационарной управляющей последовательности $\{\zeta_n\}$, которая лишь сходится к стационарной. Ниже мы приведем два варианта такого типа утверждений (теоремы 5, 6).

Теорема 5. *Пусть заданы стационарная метрически транзитивная последовательность $\{\xi_n\}$, последовательность $\{\zeta_n\}$ и множество $V_0 \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$ такие, что*

1) *существует стационарная последовательность событий $A_n \in \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$, являющаяся обновляющей (с одной и той же функцией g) для последовательности $X(n+1) = f(X(n), \xi_n)$ при любом $X(0) = x \in V_0$;*

2) *последовательность $\{\zeta_n\}$ с-сходится к $\{\xi_n\}$;*

3) *последовательность $\{Y(n)\}$, $Y(n+1) = f(Y(n), \zeta_n)$, удовлетворяет условию*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i \ge n} \{Y(i) \in V_0\}\right) = 1 \text{ при всех } n .$$

Обозначим через $\{X^n\}$ стационарную последовательность, к которой sc-сходится $\{X(n)\}$ при некотором $X(0) \in V_0$. Тогда $\{Y(n)\}$ с-сходится к $\{X^n\}$, причем $\{X^n\}$ не зависит от $X(0) \in V_0$.

Доказательство. Пусть $\gamma = \min\{n \ge 0: \xi_i = \zeta_i \text{ при всех } i \ge n\}$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем номер n_ε такой, что $\mathbf{P}(\gamma \le n_\varepsilon) \ge 1-\varepsilon$. При $i \ge n_\varepsilon$ на множестве $\{Y(i) \in V_0\}$ рассмотрим последовательность

$$\widetilde{X}(i+n+1) = f(\widetilde{X}(i+n), \xi_{i+n}), \quad n \ge 0, \quad \text{где } \widetilde{X}(i) = Y(i).$$

В соответствии с теоремой 3 и замечаниями к ней, после- довательность $\{\widetilde{X}(n)\}$, $n \ge i$, c-сходится к $\{X^n\}$ на множестве $\{Y(i) \in V_0\}$. Определим на множестве $\{Y(i) \in V_0\}$ случайную величину $\mu(i) = \min\{n \ge i: \widetilde{X}(n) = X^n\}$. Найдем число N_ε такое, что

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=n_\varepsilon}^{N_\varepsilon} \{Y(i) \in V_0\}\right) \ge 1 - \varepsilon .$$

Обозначим $\mu_0 = \min\{n \ge 0: Y(i) = X^i \text{ при } i \ge n\}$. Тогда при достаточно больших n

$$\mathbf{P}(\mu_0 > n) \le \varepsilon + \mathbf{P}(\gamma \le n_\varepsilon, \mu_0 > n) \le 2\varepsilon + \sum_{i=n_\varepsilon}^{N_\varepsilon} \mathbf{P}\left(\gamma \le n_\varepsilon, Y(i) \in V_0, \mu(i) > n\right) \to 2\varepsilon$$

при $n \to \infty$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ утверждение теоремы 5 доказано.

Теорему 5 можно несколько обобщить.

Теорема 6. *Пусть заданы стационарная метрически транзитивная последовательность $\{\xi_n\}$, последовательность $\{\zeta_n\}$ и возрастающая последовательность множеств $V_k \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$ такие, что*

1) *при каждом $k = 1, 2, \ldots$ существует стационарная последовательность событий $A_{n,k}$, являющаяся обновляющей (с одними и теми же параметром m_k и функцией g_k) для последовательности $X(n+1) = = f(X(n), \xi_n)$ при любом $X(0) = x \in V_k$;*

2) *последовательность* $\{\zeta_n\}$ *c-сходится к* $\{\xi_n\}$.

Обозначим через $\{X^n\}$ *стационарную последовательность, к которой sc-сходится* $\{X(n)\}$ *при некотором* $X(0) = x \in \mathscr{X}$. *Тогда* $\{X^n\}$ *не зависит от* $X(0)$ *и последовательность* $Y(n+1) = f(Y(n), \zeta_n)$ *c-сходится к* $\{X^n\}$ *при любом* (возможно, случайном) *начальном значении* $Y(0) \in \mathscr{X}$.

Доказательство. Пусть, как и ранее, $\gamma = \min\{n \geq 0 : \xi_i = \zeta_i$ при всех $i \geq n\}$. Для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдем номер n_ε такой, что $\mathbf{P}(\gamma \leq n_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, и по нему определим число k_ε так, чтобы выполнялось неравенство $\mathbf{P}(Y(n_\varepsilon) \in V_{k_\varepsilon}) \geq 1-\varepsilon$. Рассмотрим последовательность $\widetilde{X}(n_\varepsilon+l+1) = = f(\widetilde{X}(n_\varepsilon+l), \xi_{n_\varepsilon+l})$, $l \geq 0$, где

$$\widetilde{X}(n_\varepsilon) = \begin{cases} Y(n_\varepsilon), & \text{если } Y(n_\varepsilon) \in V_{k_\varepsilon} \\ y_0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и $y_0 \in V_{k_\varepsilon}$ — произвольный фиксированный элемент. В соответствии с теоремой 3 и замечаниями к ней, последовательность $\{\widetilde{X}(n)\}$ c-сходится к $\{X^n\}$. Поэтому при $n \geq n_\varepsilon$

$$\mathbf{P}\left(Y(l) = X^l \text{ при всех } l \geq n\right) \geq$$

$$\geq \mathbf{P}\left(Y(l) = \widetilde{X}(l) = X^l \text{ при всех } l \geq n, \gamma \leq n_\varepsilon, Y(n_\varepsilon) \in V_{k_\varepsilon}\right) \geq$$

$$\geq \mathbf{P}\left(\widetilde{X}(l) = X^l \text{ при всех } l \geq n\right) - 2\varepsilon \to 1-2\varepsilon$$

при $n \to \infty$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ теорема 5 доказана.

Рассмотрим один частный случай СРП с нестационарным управлением, для которого можно получить утверждение о более сильном типе сходимости (о sc-сходимости).

Пусть, как и ранее, $X(n+1) = f(X(n), \xi_n)$ есть СРП с управлением $\{\xi_n\}$; $(\mathscr{Z}, \mathfrak{B}_{\mathscr{Z}})$ — некоторое измеримое пространство; $F : \mathscr{Z} \times \mathscr{X} \to \mathscr{Z}$ — измеримая функция. Определим СРП $Z(n+1) = F(Z(n), X(n))$, $Z(0) = \text{const}$, принимающую значения в пространстве $(\mathscr{Z}, \mathfrak{B}_{\mathscr{Z}})$ и управляемую последовательностью $\{X(n)\}$. Отметим, что при каждом n случайная величина $Z(n+1)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}^\xi_n$. Имеет место

Теорема 7. *Предположим, что*

1) *для последовательности* $X(n)$ *выполнены условия теоремы* 3;

2) *существуют число* M *и стационарная «положительная» последовательность событий* $D_n \in \mathfrak{F}^\xi_{n+M}$, *являющаяся обновляющей для* СРП $Z(n+1) = F(Z(n), X(n))$, *т.е. для некоторой функции* $G : \mathscr{X}^{M+1} \to \mathscr{Z}$ *при всех* $n \geq 0$ *и* $\omega \in D_n$ *выполняются равенства*

$$Z(n+m+1) = G(X(n), \dots, X(n+M)).$$

Тогда последовательность $\{Z(n)\}$ *sc-сходится к некоторой стационарной последовательности* $\{Z^n\}$, *удовлетворяющей соотношениям*

$Z^{n+1} = F(Z^n, X^n)$, *где* $\{X^n\}$ *— последовательность, к которой sc-сходится последовательность* $\{X(n)\}$.

Доказательство. Обозначим

$$\mu^0 = \min\{n \ge 0 : U^{-l} X(i+l) = X^i \text{ при всех } l \ge 0, i \ge n\}.$$

Найдем число $i_0 > 0$ такое, что $\mathbf{P}(\mu^0 \le i_0) \ge 1 - \mathbf{P}(D_0)/2$. Обозначим $C_0 = \{U^{-i_0}\mu^0 \le i_0\}$, $C_n = T^n C_0$, $E_n = D_n \cap C_n$. Так как $\mathbf{P}(E_n) \ge \mathbf{P}(D_0)/2 > 0$, события E_n образуют стационарную «положительную» обновляющую последовательность для $\{Z(n)\}$, причем при $\omega \in E_n$

$$Z(n+m+1) = G(X^n, \dots, X^{n+M}) = U^{-l} Z(n+M+l+1)$$

при всех $n \ge i_0$, $l \ge 0$ и, кроме того,

$$Z(j+1) = F(Z(j), X^j) = U^{-l} Z(j+l+1)$$

при всех $j > n+M$ и $l \ge 0$. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют доказательство первой части теоремы 4.

4. Сопоставление условий эргодичности ЦМ и СРП.

Теорема 8. (а) *Если σ-алгебра* $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ *счетно порождена, то* ЦМ *является* СРП *и ее траекторию можно представить в виде*

$$X(n+1) = f(X(n), \xi_n), \quad X(0) = x, \tag{11}$$

при подходящей функции f и независимых одинаково распределенных вещественнозначных $\{\xi_n\}$.

(б) *Если для* ЦМ *выполнены условия* (I), (II) *и начальное условие* $x \in \mathscr{X}$ *таково, что* $\mathbf{E}\tau_V(x) < \infty$, *то последовательность* $\{X(n)\}$ *sc-сходится к некоторой стационарной последовательности* $\{X^n\}$, *удовлетворяющей* (11).

Доказательство. Утверждение (а) теоремы 8 является частным случаем теоремы 2.1, которая будет доказана в следующем параграфе (см. также [36]). Докажем вторую часть теоремы. При выполнении условий (I), (II) с использованием приема, предложенного в [7, 8], можно «расширить» ЦМ так, чтобы она имела точки регенерации. Если предполагать, что $\{X(n)\}$ уже есть расширенная ЦМ, то условия (I), (II) трансформируются в следующие:

1) существуют множество V и вероятностная мера φ такие, что $P(y, B) = \varphi(B)$ для любых $y \in V$, $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$;

2) $\mathbf{E}\tau_V(y) < \infty$ для $y \in V$.

Заметим, что из свойства 1 следует, что распределение $\tau_V(y)$ не зависит от $y \in V$. Поэтому, если мы зафиксируем точку $y_0 \in V$ и введем новую функцию f' равенствами

$$f'(y, z) = \begin{cases} f(y, z) & \text{при } y \notin V, \\ f(y_0, z) & \text{при } y \in V, \end{cases}$$

где функция f определена согласно утверждению (а) теоремы для уже «расширенной» цепи, то конечномерные распределения ЦМ $\{X'(n+1) = f'(X'(n), \xi_n)\}$, $X'(0) = x$, совпадают с соответствующими конечномерными распределениями ЦМ $\{X(n)\}$. Поэтому без ограничения общности можно предполагать, что $f(y,z)=f(y_0,z)$ при всех $y \in V$, $z \in \mathscr{Y}$. Из этого, в частности, следует, что $\tau_V(y)=\tau_V(y_0)$ при $y \in V$.

Воспользовавшись теоремой 1, построим на одном с $\{X(n)\}$ вероятностном пространстве стационарную ЦМ $\{X^n\}$ (тоже «расширенную») такую, что $\mu_0 < \infty$ п.н., где, как и ранее,

$$\mu_0 = \min\{n \ge 0 : X(k) = X^k \text{ при всех } k \ge n\}.$$

При этом $\{X^n\}$ является также СРП вида $X^{n+1} = f(X^n, \xi_n)$. Рассмотрим, как и в предыдущем пункте, последовательности $\{X_k(n) = U^{-k}X(n+k)\}$ и введем случайные величины $\mu_k = U^{-k}\mu_0 - k$, $\mu^0 = \sup\{\mu_k : k \ge 0\}$.

Обозначим $\tau_k = \tau_k(x) = \min\{n \ge -k : X_k(n) \in V\}$ и $\tau^0 = \tau^0(x) = \sup\{\tau_k(x) : k \ge 0\}$. Отметим, что последовательность $\{\tau_k + k : k \ge 0\}$ состоит из одинаково распределенных случайных величин. Поэтому

$$\mathbf{P}(\tau^0 \ge N) \le \sum_k \mathbf{P}(\tau_k \ge N) = \sum_k \mathbf{P}(\tau_0 \ge N-k) \le \mathbf{E}(\tau_0 ; \tau_0 \ge N) \to 0$$

при $N \to \infty$. При $k \ge 0$ введем случайные величины $t_{1,k} = \tau_k$ и при $l \ge 1$

$$t_{l+1,k} = \min\{n > t_{l,k} : X_k(n) \in V\} \equiv t_{l,k} + \tau_{l+1,k},$$

где случайные величины $\tau_{l,k}$ имеют при $l > 1$ то же распределение, что и $\tau_V(y_0)$; $\gamma_k(x) \equiv \gamma_k = \min\limits_{l \ge 1} \{t_{l,k} : t_{l,k} \ge 0\}$ — первый из неотрицательных моментов попадания $\{X_k(n)\}$ в V; $\gamma = \sup\{\gamma_k : k \ge 0\} \equiv \gamma(x)$. Тогда $\mathbf{P}(\gamma > 2N) \le$ $\le \mathbf{P}(\tau^0 > N) + \mathbf{P}(\tau_0 \le N, \gamma > 2N)$. Сделаем «сдвиг» на время $-N$:

$$\mathbf{P}(\tau^0 \le N, \gamma > 2N) \le \mathbf{P}(\gamma(y_0) > N) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \tau_k(y_0) > N\right) \le \mathbf{E}\{\tau_V(y_0) ; \tau_V(y_0) \ge N\} \to 0$$

при $N \to \infty$. Поэтому

$$\mathbf{P}(\mu^0 > M) \le \mathbf{P}(\gamma > N) + \mathbf{P}(\gamma \le N, \mu^0 > M) \le \mathbf{P}(\gamma > N) + \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(\tilde{\mu} > M-k),$$

где $\tilde{\mu} = \min\{n \ge 1 : X(y_0, n) = X^n\}$. Поскольку второе слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $M \to \infty$ (при любом фиксированном N), имеем $\mu^0 < \infty$ п.н.

Ниже мы приведем одно обращение второй части теоремы 8, доказательство которого будет опубликовано в другой работе.

Теорема 9. *Пусть на одном вероятностном пространстве заданы* ЦМ $\{X(n)\}$ *вида* (7) *при некотором* $X(0) = x \in \mathscr{X}$ *и стационарная* ЦМ $\{X^n\}$, *причем* $X(n) \overset{sc}{\to} X^n$. *Тогда существуют множество* V, *числа* p, m

и вероятностная мера φ *на* $\mathscr{X}$ *такие, что выполнены условия* (I), (II) *теоремы* 1 *и* $\tau_V(x) < \infty$ *п.н.*

Кроме того, можно задать «положительную» стационарную обновляющую последовательность $\{A_n\}$, $A_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$ *вида* $A_n = A_n^{(1)} \cap A_n^{(2)}$, *где* $A_n^{(1)} \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n-1}$, $A_n^{(2)} \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n,n+m}$, *и число* $M \geq 0$ *так, что* $\{X(n) \in V\} \supseteq \supseteq A_n^{(1)}$ *для любого* $n \geq M$ *и последовательность* $G_n \equiv \{X(n) \in V\} \cap A_n^{(2)} \supseteq \supseteq A_n$ *является обновляющей для* $\{X(n)\}$. *Если* $\mu_1 = \min\{n \geq 0 : \mathrm{I}(G_n) = 1\}, \dots,$ $\mu_{k+1} = \min\{n > \mu_k + m : \mathrm{I}(G_n) = 1\}$ $(k \geq 1)$ — *последовательность моментов осуществления событий* G_n, *то случайные величины* $\nu_k = \mu_{k+1} - \mu_k$, $k \geq 1$, *независимы и одинаково распределены (и не зависят от* μ_1*). Более того,* $\mathbf{E}\,\nu_k < \infty$ *и* Н.О.Д.$\{i : \mathbf{P}(\nu_k = i) > 0\}$ *равен единице.*

Отметим одно различие в формулировках теорем 2 и 9: в условиях теоремы 9 требуется сходимость (sc-сходимость) для одного какого-нибудь $x \in \mathscr{X}$, а в условиях теоремы 2 — сходимость (по вариации или c-сходимость) для всех $x \in \mathscr{X}$.

Теоремы 8 и 9 устанавливают наличие связей между условиями (I), (II) и существованием «положительных» стационарных обновляющих событий. Однако наличие этих связей можно обнаружить и непосредственно, рассмотрев более внимательно форму условий эргодичности в теореме 1.

Как уже отмечалось, доказательство теоремы 1 [7, 8] основано на том, что при выполнении (I), (II) оказывается возможным расширение фазового пространства $\mathscr{X}$ до пространства $\mathscr{X}^*$ и построение на нем новой цепи $X^*(n) = (X(n), \delta_n)$ такой, что $X(n)$ будет ее первой координатой, а новая цепь $\{X^*(n)\}$ будет обладать свойством регенерации, так что доказательство ее эргодичности не составляет труда. Далее, цепь $X^*(n)$ (или ее фазовое пространство) можно укрупнить так, что получим цепь $Y(n)$, эквивалентную $X^*(n)$ и такую, что она имеет положительный атом y_0, обладающий свойством $\{Y(n) = y_0\} \subseteq \{X(n) \in V\}$, причем время возвращения в y_0 имеет конечное математическое ожидание, а наибольший общий делитель возможных значений времени возвращения для непериодических цепей равен единице (отсюда немедленно следует эргодичность $Y(n)$).

Сказанное означает, что событие $A_n = \{Y(n) = y_0\}$ является обновляющим для $Y(n)$ и $\mathbf{P}(A_n) > q > 0$ для всех достаточно больших n. Итак, условия (I), (II) означают, что ($\mathfrak{F}_n^* = \sigma(X^*(0), \dots, X^*(n))$) следующее:

1) существует последовательность $A_n \in \mathfrak{F}_n^*$, $\mathbf{P}(A_n) \geq q > 0$ при достаточно больших n;

2) на множестве A_n (считаем, простоты ради, $m = 0$)

$$\mathbf{P}\left(X^*(n+1) \in B \mid \mathfrak{F}_n^*\right) = \varphi(B),$$

где мера φ не зависит от $\mathfrak{F}_n^*$.

С другой стороны, условия теоремы 3 можно записать в следующем виде :

1а) существует стационарная последовательность $A_n \in \mathfrak{F}_n$, $\mathbf{P}(A_n) > 0$;

2а) на множестве A_n

$$\mathbf{P}\left(X(n+1) \in B \mid \mathfrak{F}_n\right) = \mathbf{I}\left(g(\xi_n) \in B\right) \equiv \varphi(\xi_n, B) . \tag{12}$$

В такой форме условия 1, 2 (т.е. условия (I),(II)) и условия 1а, 2а (т.е. условия теоремы 3) имеют много общего. Эта общность станет еще большей, если рассмотреть обобщения СРП, представленные в следующем параграфе (так называемые рекурсивные цепи). При этом упомянутая выше техника расширения фазового пространства вновь оказывается очень полезной.

З а м е ч а н и е 2. Отметим одно существенное различие между ЦМ и СРП: для СРП из условий (I), (II) не следует, вообще говоря, эргодичность. Как вытекает из теоремы 8, ЦМ X можно представить в виде СРП $X(n+1) = f(X(n), \xi_n)$, $X(0) = \text{const}$, где $\{\xi_n\}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Если предположить, что для ЦМ X выполнено условие (II) при $V = \mathscr{X}$, $m = 0$, т.е.

$$\mathbf{P}\left(X(n+1) \in B \mid X(n)\right) \geq p\,\varphi(B) \text{ п.н.}, \tag{13}$$

то для этой цепи будут выполнены условия (I)—(III) и в соответствии с теоремой 1 ЦМ X будет эргодической. Условие (13) совпадает со следующим:

$$\mathbf{P}\left(X(n+1) \in B \mid X(n), \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots\right) \geq p\,\varphi(B) \text{ п.н.} \tag{14}$$

Пусть теперь X есть СРП, определяемая соотношениями $X(n+1) = f(X(n), \xi_n)$, $X(0) = \text{const}$, где управляющая последовательность $\{\xi_n\}$ стационарна и метрически транзитивна. Будет ли в этом случае из (14) следовать эргодичность X? Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицателен, на что указывает следующий

П р и м е р 5. Пусть $\{\eta_n\}$ — последовательность независимых случайных величин с равномерным на $[-1, 1]$ распределением, $\xi_n = (\eta_n, \eta_{n+1})$, так что последовательность ξ_n метрически транзитивна. Положим

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 1-x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1 . \end{cases}$$

Определим вещественнозначную СРП $X = \{X(n), n \geq 0\}$ следующим образом: $X(0) = \text{const}$, $X(n+1) = g(X(n)-\eta_n) + \eta_{n+1} \equiv f(X(n), \xi_n)$. Так как η_n и $X(n)$ измеримы относительно σ-алгебры, порожденной случайными величинами $X(n), \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_0$, для X выполнено условие (10), если положить $p = 1/2$ и в качестве φ взять меру Лебега на $[0, 1]$. С другой стороны, при $n \geq 1$ имеем $g^{(2n-1)}(x) = g(x)$, $g^{(2n)}(x) = 1-g(x)$ где $g^{(i)}$ есть i-я итерация функции g. Положим $Y(n) = X(n)-\eta_n$. Тогда

$$Y(n) = g(Y(n-1)) = \begin{cases} g(Y(1)) & \text{при четных } n, \\ 1 - g(Y(1)) & \text{при нечетных } n . \end{cases}$$

Но при $X(0) \neq 1/2$ распределения $Y^* = g(Y(1)) = g^{(2)}(X(0) - \eta_0)$ и $1 - g(Y(1)) = 1 - Y^*$ различны. Различными (и не зависящими от n) будут и распределения $X(2n+1) = 1 - Y^* + \eta_{2n+1}$ и $X(2n) = Y^* + \eta_{2n}$. Это означает периодичность распределения СРП $\{X(n)\}$ при выполнении условий (14) (можно положить $V = \mathscr{X} = [-2, 2]$). Другими словами, перенос условий (II) с ЦМ на СРП в форме (14) к эргодичности СРП, вообще говоря, не приводит. Поэтому для СРП (и вводимых в следующем параграфе рекурсивных цепей) при формулировке аналогов условий (I)—(III) приходится с необходимостью расширять σ-алгебру, относительно которой берется условное распределение, т.е. рассматривать условия типа (12).

5. Оценки скорости сходимости. Приведем теперь некоторые простые результаты, касающиеся оценок скорости сходимости к стационарному распределению. Для ЦМ скорость сходимости можно оценить в терминах распределения $\mathbf{P}(\tau_V(x) > n)$, $x \in V$, где $\tau_V(x) = \min\{n \geq 1 : X(x, n) \in V\}$ (см. [6, 12]). Другими словами, оценивание производится в терминах распределения времени возвращения $X(n)$ в множество V.

Для СРП оценки скорости сходимости получаются аналогично, если использовать времена попадания в множества A_n. Точнее, пусть $\{A_n\}$, $A_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$, есть стационарная последовательность обновляющих событий для СРП $\{X(n)\}$, и τ — время между двумя последовательными моментами осуществления событий A_n:

$$\mathbf{P}(\tau = k) = \mathbf{P}(A_k \cap \overline{A}_{k-1} \cap \ldots \cap \overline{A}_1 \mid A_0).$$

Имеет место (см. [17]) следующая оценка скорости сходимости.

Теорема 10. *Справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(\mu^0 > n) \leq \mathbf{P}(A_0)\, \mathbf{E}(\tau - n + m)^+ .$$

Доказательство. Действительно,

$$\mathbf{P}(\mu^0 > n) \leq \mathbf{P}(\overline{A}_0 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-m-1}) = \mathbf{P}(\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-m}) =$$

$$= \mathbf{P}(A_0 \cap \overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-m}) + \mathbf{P}(\overline{A}_0 \cap \overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-m}) = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{i=n-m}^{\infty} \mathbf{P}(A_0)\, \mathbf{P}(\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_i \mid A_0) = \mathbf{P}(A_0)\, \mathbf{E}(\tau - n + m)^+ ,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно получать оценки и для СРП с нестационарным управлением. Например, пусть выполнены условия теоремы 7. Обозначим, как и ранее, через

$$\mu^0 = \min\{n \geq 0 : U^{-l} X(i+l) = X^i \text{ при всех } l \geq 0; i \geq n\}$$

момент *sc*-«склеивания» последовательностей $\{X(k)\}$ и $\{X^k\}$, и через γ^0 — момент «*sc*-склеивания» последовательностей $\{Z(n)\}$ и $\{Z^n\}$. Тогда

$$\mathbf{P}\,(\gamma^0 > 2n+M) \le \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{P}\,(\mu^0 = i, \overline{D}_{i+1} \cap \ldots \cap \overline{D}_{2n}) + \mathbf{P}\,(\mu^0 > 2n) \le$$

$$\le \mathbf{P}\,(\overline{D}_1 \cap \ldots \cap \overline{D}_n) + \mathbf{P}\,(\mu^0 > n) = \mathbf{P}\,(\mu^0 > n) + \mathbf{P}\,(D_0)\,\mathbf{E}\,(T-n)^+ ,$$

где $\mathbf{P}\,(T = k) = \mathbf{P}\,(D_k \cap \overline{D}_{k-1} \cap \ldots \cap \overline{D}_1 \mid D_0)$.

§ 2. РЕКУРСИВНЫЕ ЦЕПИ (ЦЕПИ МАРКОВА В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ)

1. Основные определения и свойства. Пусть $\{X(n)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — две случайные последовательности, элементы которых, $X(n)$ и ξ_n, принимают значения в произвольных измеримых фазовых пространствах $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$ и $(\mathscr{Y}, \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}})$, соответственно. Как и ранее, будем предполагать там, где это необходимо, что σ-алгебры $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ и $\mathfrak{B}_{\mathscr{Y}}$ счетно порождены.

Последовательность $\{\xi_n\}$ будем считать заранее заданной. Последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{X(n)\}$ предполагаются определенными на одном вероятностном пространстве. Обозначим через $\mathfrak{F}_n$ σ-алгебру $\mathfrak{F}_n = \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_n, X(0), \ldots, X(n))$, порожденную «историей» последовательности $\{\xi_k, X(k)\}$ до момента n.

Определение 1. Последовательность $\{X(n)\}$ называется *рекурсивной цепью, управляемой последовательностью* $\{\xi_n\}$, если при всех $n \ge 0$, $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$

$$\mathbf{P}\,(X(n+1) \in B \mid \mathfrak{F}_n) = \mathbf{P}\,(X(n+1) \in B \mid X(n), \xi_n) \ \text{п.н.} \tag{1}$$

Из счетной порожденности σ-алгебр следует, что в (1) существуют регулярные условные вероятности, т.е. существуют функции $P_{(n)} : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \times \mathfrak{B}_{\mathscr{X}} \to [0,1]$ такие, что

1) $P_{(n)}(x, y, \cdot)$ является вероятностной мерой на $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$ при любых фиксированных x, y;

2) функция $P_{(n)}(x, y, B)$ при каждом $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ измерима по (x, y);

3) справедливо равенство

$$\mathbf{P}\,(X(n+1) \in B \mid \mathfrak{F}_n) = P_{(n)}(X(n), \xi_n, B) \ \text{п.н.} \tag{2}$$

или, что то же,

$$\mathbf{P}\,(X(n+1) \in B \mid X(n), \xi_n) = P_{(n)}(X(n), \xi_n, B) \ \text{п.н.} \tag{2'}$$

Пример 1. Чтобы проиллюстрировать естественность введенного понятия, рассмотрим в качестве примера одну из многих прикладных задач, в которой случайный процесс, характеризующий поведение интересующих нас параметров системы, представляет собой РЦ.

Рассмотрим коммуникационную сеть, представляющую собой «широковещательный, синхронный канал с множественным доступом» [19]; таким системам посвящена весьма обширная литература (см., например, [20], там же см. более подробную библиографию). Пусть имеется канал передачи (распространения) сообщений (пакетов) между многими пользователями. Время поступлений сообщений дискретно (целочисленно), время передачи равно единице. Каждое сообщение передается от какого-нибудь одного пользователя всем другим. Если два или более пользователя передают сообщения одновременно, то канал блокируется. Факт блокировки известен пользователю и непереданное сообщение подлежит последующей передаче. Все пользователи используют для повторной передачи (ретрансляции) сообщений один и тот же алгоритм, который выбирается по возможности автономным, не использующий информации о количестве непереданных сообщений у других пользователей. Алгоритм ALOHA предписывает каждому непереданному пакету в каждый момент времени $n = 1, 2, \ldots$ обращаться с вероятностью p для ретрансляции и с вероятностью $1-p$ «оставаться на месте».

Перейдем к более формальному описанию системы. Пусть ξ_n — число «новых сообщений», которые в момент n пользователи предоставляют для трансляции, $X(n)$ — число непереданных к моменту n сообщений, η_n — число обращений в канал связи в момент n, порожденное непереданными сообщениями. Мы будем предполагать, что вероятности

$$\mathbf{P}\left(\eta_n = j \mid \xi_0, \ldots, \xi_n, X(0), \ldots, X(n)\right) = \mathbf{P}\left(\eta_n = j \mid X(n)\right) = q_{j,\, X(n)}$$

заданы, где $\sum_{j=0}^{N} q_{j,N} = 1$ при любом $N \in \mathbf{Z}_+$. В частности, для алгоритма ALOHA $q_{j,N} = C_N^j p^j (1-p)^{N-j}$. Из сказанного следует, что

$$X(n+1) = \begin{cases} X(n) + \xi_n & \text{на множестве } \{\xi_n + \eta_n \neq 1\}, \\ X(n) & \text{на множестве } \{\xi_n = 1, \eta_n = 0\}, \\ X(n) - 1 & \text{на множестве } \{\xi_n = 0, \eta_n = 1\}. \end{cases}$$

Это позволяет выписать распределение $X(n+1)$ при известных $X(n)$ и ξ_n и означает, что последовательность $X(n)$ является РЦ, управляемой последовательностью $\{\xi_n\}$.

Функции $P_{(n)}(x, y, B)$ по аналогии с функцией $P(x, B)$ для ЦМ можно называть переходными вероятностями (или функциями) — это есть вероятность для РЦ $\{X(n)\}$ попасть на $(n+1)$-м шаге из x в множество B, когда «управляющий» параметр равен y. Если фиксировать всю траекторию $\{\xi_n\}$, то РЦ $\{X(n)\}$ можно рассматривать как неоднородную ЦМ с переходной функцией $P_{(n)}(x, B) = P_{(n)}(x, \xi_n, B)$ (эта цепь будет, вообще говоря, неоднородной и в том случае, когда $P_{(n)}(x, y, B)$ не зависят от n, а последовательность $\{\xi_n\}$ стационарна, $\xi_n \not\equiv \mathrm{const}$; см. § 3). Сказанное означает, что РЦ $\{X(n)\}$ можно интерпретировать также как ЦМ в «случайной среде», когда переходные вероятности $P_{(n)}(x, B)$ выбираются случайным образом (из некоторого семейства).

Существует значительный цикл исследований, посвященный таким «цепям Маркова» в случае, когда $\mathscr{X}$ — конечное или счетное множество (см. [34, 35], а также списки литературы в этих работах). Будем считать для определенности, что $\mathscr{X} = \mathbf{Z}_+$. В названных работах рассматривались случайные последовательности $X(n)$, движение которых по $\mathscr{X}$ определяется случайными матрицами $\|p_{ij}^{(n)}\| \equiv \xi_n$, $i, j, n = 0, 1, \ldots$, взятыми из стационарной последовательности $\{\xi_n\}$. Другими словами, при заданных ξ_n последовательность $X(n)$ будет неоднородной ЦМ с матрицами переходных вероятностей $p_{ij}^{(n)}$. Так как мы можем записать $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}(\xi_n)$, рассматриваемые случайные последовательности $\{X(n)\}$ будут РЦ с переходными функциями $P_{(n)}(i, \xi_n, B) = \sum_{j \in B} p_{ij}(\xi_n)$. Основным объектом исследований в [34, 35] являются эргодические теоремы для таких последовательностей. При этом сходимость понимается главным образом по Чезаро (в [35] приведены также результаты, касающиеся предельного при $n \to \infty$ поведения $\mathbf{P}(X(n) = j \mid X(0) = i)$) для метрически транзитивных ξ_n). В основе рассмотрений в [34, 35] лежит теория Хопфа так называемых L_1-цепей Маркова. Она находится в стороне от основного русла изложения в этой статье; кроме того, она относится к весьма частному фазовому пространству $\mathscr{X} = \mathbf{Z}_+$. Поэтому останавливаться на ней мы здесь не будем, отсылая читателя за более детальными сведениями к цитированным выше работам.

Как уже отмечалось, для ЦМ переходные вероятности $P(x, B)$ позволяют, согласно теореме о продолжении меры, однозначным образом построить саму ЦМ (при заданном начальном состоянии). Аналогично обстоит дело с РЦ: распределение последовательности $\{\xi_n\}$ и набор функций $\{P_{(n)}\}$ позволяют построить распределение последовательности $\{X(n), \xi_n\}$.

Действительно, предположим для простоты (это не ограничивает общности), что $X(0) = x_0 = \text{const}$. Распределение пары $Z_0 = (\xi_0, X(1))$ определим соотношением

$$\mathbf{P}(\xi_0 \in A_0, X(1) \in B_1) = \int \mathbf{P}(\xi_0 \in dy_0)\, P_{(0)}(x_0, y_0, B_1). \tag{3}$$

Распределение $Z_n = (\xi_0, \dots, \xi_n, X(0), \dots, X(n+1))$ при $n > 0$ определим через распределение Z_{n-1} соотношением

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \{\xi_k \in A_k, X(k+1) \in B_{k+1}\}\right) =$$

$$= \int\limits_{E_{n-1}} \dots \int \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \{\xi_k \in dy_k, X(k+1) \in dx_{k+1}\}\right) \times$$

$$\times\, \mathbf{P}\left(\xi_n \in dy_n \,\middle|\, \bigcap_{k=0}^{n-1} \{\xi_k \in dy_k\}\right) P_{(n)}(x_n, y_n, B_{n+1}),$$

где E_{n-1} есть множество $\{y_0 \in A_0, \dots, y_{n-1} \in A_{n-1},\ x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n\}$. Приведенные соотношения можно записать также в виде

$$\mathbf{P}(\xi_n \in A_n, X(n+1) \in B_{n+1} \mid \sigma(Z_{n-1})) =$$

$$= \int \mathbf{P}(\xi_n \in dy_n \mid \xi_0, \dots, \xi_{n-1})\, P_{(n)}(X(n), y_n, B_{n+1}). \tag{4}$$

Полагая $B_{n+1} = \mathscr{X}$, получим

$$\mathbf{P}(\xi_n \in A_n \mid \sigma(Z_{n-1})) = \mathbf{P}(\xi_n \in A_n \mid \xi_0, \dots, \xi_{n-1}) \tag{5}$$

(свойство условной независимости ξ_n от $X(n), \ldots, X(0)$ при данной $\mathfrak{F}^{\xi}_{n-1}$). Покажем, что так построенные распределения Z_n или, что то же, конечномерные распределения $\{\xi_k, X(k)\}$ удовлетворяют свойству рекурсивности (2). Действительно, в силу (5) соотношение (4) можно записать в виде

$$\mathbf{P}\,(\xi_n \in A_n, X(n+1) \in B_{n+1} \mid \sigma(Z_{n-1})) =$$

$$= \int \mathbf{P}\,(\xi_n \in dy_n \mid \sigma(Z_{n-1}))\, P_{(n)}(X(n), y_n, B_{n+1}) =$$

$$= \mathbf{E}\,(P_{(n)}(X(n), \xi_n, B_{n+1}), \xi_n \in A_n \mid \sigma(Z_{n-1}))\,,$$

что, очевидно, эквивалентно следующему ($\sigma(Z_{n-1}, \xi_n) = \mathfrak{F}_n$):

$$\mathbf{P}\,(X(n+1) \in B_{n+1} \mid \sigma(Z_{n-1}, \xi_n)) \equiv$$

$$\equiv \mathbf{P}\,(X(n+1) \in B_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n) = P_{(n)}(X(n), \xi_n, B_{n+1})\,.$$

Это доказывает, что имеет место (2).

Итак, знание распределения $\{\xi_n\}$ и функций $P_{(n)}(x, y, B)$ позволяет определить конечномерные распределения последовательности $Z=\{(X(n), \xi_n)\}$ так, что она удовлетворяет (2). Следовательно, по теореме о продолжении меры существует распределение самой этой последовательности в пространстве $(\mathcal{Z}, \mathfrak{B}_{\mathcal{Z}}) = ((\mathcal{X}\times \mathcal{Y})^{\infty}, (\mathfrak{B}_{\mathcal{X}}\times\mathfrak{B}_{\mathcal{Y}})^{\infty})$ такое, что выполнено (2).

Вопрос о единственности распределения Z в $(\mathcal{Z}, \mathfrak{B}_{\mathcal{Z}})$, удовлетворяющего (2) при заданных функциях $P_{(n)}$ здесь, в отличие от случая ЦМ, остается, вообще говоря, открытым. Однако, если потребовать дополнительно, чтобы распределение Z, удовлетворяющее (2), обладало также свойством (5) условной независимости ξ_n от $X(n), \ldots, X(0)$, то единственность распределения в $(\mathcal{Z}, \mathfrak{B}_{\mathcal{Z}})$ будет иметь место. Другими словами, конечномерные распределения последовательности Z будут с необходимостью определяться формулами (4). Действительно, необходимость задания распределения $Z_0 = (\xi_0, X(1))$ соотношением (3) очевидна, так как по условию $\mathbf{P}\,\big(X(1) \in B_1 \mid \xi_0, X(0)\big) = P_{(0)}(x_0, \xi_0, B_1)$ и, стало быть,

$$\mathbf{P}\,(\xi_0 \in A_0, X(1) \in B_1) = \mathbf{E}\,\{\mathbf{P}\,(X(1) \in B_1 \mid \xi_0, X(0))\,;\, \xi_0 \in A_0\} =$$

$$= \mathbf{E}\,\{P_{(0)}(x_0, \xi_0, B_1)\,;\, \xi_0 \in A_0\} = \int\limits_{A_0} \mathbf{P}\,(\xi_0 \in dy_0)\, P_{(0)}(x_0, y_0, B_1)\,.$$

Далее, обозначим через C_n прямое произведение $\prod_{k=0}^{n} (A_k \times B_{k+1})$. Это есть цилиндрическое множество из фазового пространства случайных величин Z_n. Тогда

$$\mathbf{P}\,(Z_n \in C_n) = \mathbf{E}\,\big[\mathbf{P}\,\big(\xi_n \in A_n, X(n+1) \in B_{n+1} \mid \sigma(Z_{n-1})\big)\,;\, Z_{n-1} \in C_{n-1}\big] =$$

$$= \mathbf{E}\,\big[\mathbf{E}\,\big\{\mathbf{I}\,(\xi_n \in A_n)\, \mathbf{P}\,(X(n+1) \in B_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n) \mid \sigma(Z_{n-1})\big\}\,;\, Z_{n-1} \in C_{n-1}\big] =$$

$$= \mathbf{E}\,\big[\mathbf{E}\,\big\{\mathbf{I}\,(\xi_n \in A_n)\, P_{(n)}(X(n), \xi_n, B_{n+1}) \mid \sigma(Z_{n-1})\big\}\,;\, Z_{n-1} \in C_{n-1}\big]. \qquad (6)$$

Но в силу (5) (напомним, что $X(n)$ измерима относительно $\sigma(Z_{n-1})$)

$$\mathbf{E}\,\{\mathrm{I}\,(\xi_n \in A_n)\,P_{(n)}(X(n), \xi_n, B_{n+1}\,) \mid \sigma(Z_{n-1})\} =$$

$$= \int\limits_{A_n} \mathbf{P}\,(\xi_n \in dy_n \mid \xi_0, \dots, \xi_{n-1})\,P_{(n)}(X(n), y_n, B_{n+1})\,.$$

Если подставим это в равенства (6) и сравним начало и конец этих равенств, то мы получим (4). Что и требовалось доказать.

Сделаем теперь следующее общее замечание. В приложениях (см., в частности, пример 1) последовательность $\{\xi_n\}$ всегда фигурирует как заранее заданная, определяемая некоторыми внешними факторами, а соотношение (1) появляется обычно как характеризующее последовательность $\{X(n)\}$, т.е. позволяющее последовательно строить ее по элементам ξ_n (например, с помощью наиболее естественной процедуры, изложенной выше). Эти обстоятельства позволяют постулировать наряду с (1) также следующее свойство: распределение ξ_n при данных $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$ не зависит от $X(0), \dots, X(n)$. Но это и есть условие (5).

Итак, везде в дальнейшем мы будем считать, что выполнено (5), и, стало быть, распределение Z в $(\mathcal{Z}, \mathfrak{B}_{\mathcal{Z}})$, удовлетворяющее (2), единственно. Это означает, что справедливы формулы (4), определяющие конечномерные распределения Z.

Ясно, что РЦ является более общим объектом, чем ЦМ: любая ЦМ является по определению РЦ при тривиальной управляющей последовательности $\xi_n \equiv \mathrm{const}$.

Если ξ_n независимы, то РЦ также образует ЦМ. Действительно,

$$\mathbf{P}\,(X(n+1) \in B_{n+1} \mid X(0), \dots, X(n)) =$$

$$= \mathbf{E}\,[\,\mathbf{P}\,(X(n+1) \in B_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n\,) \mid X(0), \dots, X(n)\,\,] =$$

$$= \mathbf{E}\,[\,P_{(n)}(X(n), \xi_n, B_{n+1}\,) \mid X(0), \dots, X(n)\,\,] =$$

$$= \mathbf{E}\,\{\mathbf{E}\,[\,P_{(n)}(X(n), \xi_n, B_{n+1}\,) \mid \sigma(Z_{n-1})\,\,] \mid X(0), \dots, X(n)\}\,.$$

Так как справедливо (5) и $X(n)$ измерима относительно $\sigma(Z_{n-1})$, имеем

$$\mathbf{E}\,[P_{(n)}(X(n), \xi_n, B_{n+1}\,) \mid \sigma(Z_{n-1})\,\,] = \int \mathbf{P}\,(\xi_n \in dy_n)\,P_{(n)}(X(n), y_n, B_{n+1}\,)\,.$$

Стало быть,

$$\mathbf{P}\,(X(n+1) \in B_{n+1} \mid X(0), \dots, X(n)) = \int \mathbf{P}\,(\xi_n \in dy_n)\,P_{(n)}(X(n), y_n, B_{n+1})$$

и левая часть зависит лишь от $X(n)$. Это и означает марковость $\{X(n)\}$.

Теорема 1. *Условия (2) и (5) в совокупности эквивалентны следующему:*

$$\mathbf{P}\,(X(n+1) \in B \mid X(0), \dots, X(n), \{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}) = \mathbf{P}\,(X(n+1) \in B \mid X(n), \xi_n) \qquad (7)$$

п.н. при любых $n \ge 0$ и $B \in \mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$.

Доказательство. Пусть выполнены (2) и (5). При произвольном $n \ge 0$ будем использовать сокращенную запись

$$D_n \equiv D_n(x_1, \dots, x_n; y_0, \dots, y_n) = \{X(k) \in dx_k, \xi_k \in dy_k, \ k=1, \dots, n, \xi_0 \in dy_0\}.$$

При любых $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$, $H_1, \dots, H_k \in \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}}$ и для п.в. x_i относительно распределения $X(i)$, $i = 1, \dots, n$, для п.в. y_i относительно распределения ξ_i, $i = 0, \dots, n$, справедливо равенство

$$\mathbf{P}\left(X(n+1) \in B, \xi_{n+1} \in H_1, \dots, \xi_{n+k} \in H_k \mid D_n\right) =$$

$$= \int\limits_B \mathbf{P}\left(X(n+1) \in dx_{n+1} \mid D_n\right) \cdot \int\limits_{H_1} \mathbf{P}\left(\xi_{n+1} \in dy_{n+1} \mid D_n, X(n+1) \in dx_{n+1}\right) \times \dots \times$$

$$\times \int\limits_{H_k} \mathbf{P}\left(\xi_{n+k} \in dy_{n+k} \mid D_n, X(n+1) \in dx_{n+1}, \xi_{n+1} \in dy_{n+1}, \dots, \xi_{n+k-1} \in dy_{n+k-1}\right).$$

Так как по условию (5)

$$\mathbf{P}\left(\xi_{n+j} \in dy_{n+j} \mid D_n, X(n+1) \in dx_{n+1}, \xi_{n+1} \in dy_{n+1}, \dots, \xi_{n+j-1} \in dy_{n+j-1}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\xi_{n+j} \in dy_{n+j} \mid \xi_0 \in dy_0, \dots, \xi_{n+j-1} \in dy_{n+j-1}\right)$$

для почти всех y_i относительно распределения ξ_i, $i = 0, 1, \dots, n+j-1$, и для почти всех x_i относительно распределения $X(i)$, $i = 1, \dots, n+1$; а по условию (2)

$$\mathbf{P}\left(X(n+1) \in dx_{n+1} \mid D_n\right) = \mathbf{P}\left(X(n+1) \in dx_{n+1} \mid X(n) \in dx_n, \xi_n \in dy_n\right)$$

для почти всех y_i относительно распределения ξ_i, $i = 0, \dots, n$, и для почти всех x_i относительно распределения $X(i)$, $i = 1, \dots, n$, для этих (x_i, y_i) справедливо равенство

$$\mathbf{P}\left(X(n+1) \in B, \xi_{n+1} \in H_1, \dots, \xi_{n+k} \in H_k \mid D_n\right) =$$

$$= P_{(n)}(x_n, y_n, B)\, \mathbf{P}\left(\xi_{n+1} \in H_{n+1}, \dots, \xi_{n+k} \in H_{n+k} \mid \xi_0 \in dy_0, \dots, \xi_n \in dy_n\right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(X(n+1) \in B \mid X(0), \dots, X(n), \xi_0, \dots, \xi_{n+k}\right) = P_{(n)}(X(n), \xi_n) \text{ п.н.}$$

В силу произвольности $k \geq 0$, получаем (7).

Обратно, пусть выполнено (7). Покажем справедливость условия (5). Действительно, при любом $n \geq 0$ и любых множествах $A \in \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}}$, $B_i \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$, $i = 1, \dots, n+1$, и для п.в. y_i относительно распределения ξ_i, $i = 0, \dots, n$, имеют место равенства

$$\mathbf{P}\left(X(1) \in B_1, \dots, X(n+1) \in B_{n+1}, \xi_{n+1} \in A \mid \xi_0 \in dy_0, \dots, \xi_n \in dy_n\right) =$$

$$= \int\limits_A \mathbf{P}\left(\xi_{n+1} \in dy_{n+1} \mid \xi_0 \in dy_0, \dots, \xi_n \in dy_n\right) \times$$

$$\times \int\limits_{B_1} \mathbf{P}\left(X(1) \in dx_1 \mid \xi_0 \in dy_0, \dots, \xi_{n+1} \in dy_{n+1}\right) \times \dots \times$$

$$\times\int_{B_{n+1}}\mathbf{P}\left(X(n+1)\in dx_{n+1}\,\middle|\,\xi_0\in dy_0,\ldots,\xi_{n+1}\in dy_{n+1},X(1)\in dx_1,\ldots,X(n)\in dx_n\right)=$$

$$=\int_A\mathbf{P}\left(\xi_{n+1}\in dy_{n+1}\mid\xi_0\in dy_0,\ldots,\xi_n\in dy_n\right)\int_{B_1}\mathbf{P}\left(X(1)\in dx_1\mid\xi_0\in dy_0\right)\times$$

$$\times\ldots\times\int_{B_{n+1}}\mathbf{P}\left(X(n+1)\in dx_{n+1}\mid\xi_n\in dy_n,X(n)\in dx_n\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\xi_{n+1}\in A\mid\xi_0\in dy_0,\ldots,\xi_n\in dy_n\right)\times$$

$$\times\mathbf{P}\left(X(1)\in B_1,\ldots,X(n+1)\in B_{n+1}\mid\xi_0\in dy_0,\ldots,\xi_n\in dy_n\right),$$

что и дает нам (5). Теорема 1 доказана.

Пусть теперь $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ — две случайные последовательности, элементы которых, ξ_n и η_n, принимают значения в произвольных измеримых пространствах $(\mathscr{Y},\mathfrak{B}_{\mathscr{Y}})$ и $(\mathscr{Z},\mathfrak{B}_{\mathscr{Z}})$, соответственно; и $\{X(n)\}$ — РЦ со значениями в $(\mathscr{X},\mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$, управляемая последовательностью $\{(\xi_n,\eta_n)\}$: при $B\in\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$

$$\mathbf{P}\left(X(n+1)\in B\mid X(0),\ldots,X(n),\{\xi_i,\eta_j\}\right)=\widetilde{P}_{(n)}(X(n),\xi_n,\eta_n,B)\ \text{п.н.}\qquad(8)$$

Как и ранее, будем предполагать, что σ-алгебры $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}},\mathfrak{B}_{\mathscr{Y}},\mathfrak{B}_{\mathscr{Z}}$ счетно порождены. Обозначим при $n\ge 0$, $x\in\mathscr{X}$, $y\in\mathscr{Y}$, $B\in\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$

$$P_{(n)}(x,y,B)=\mathbf{E}\,\widetilde{P}_{(n)}(x,y,\eta_n,B)\,.\qquad(9)$$

Нам будет полезна следующая

Теорема 2. *Рассмотрим* РЦ $\{X(n)\}$ *с управлением* $\{(\xi_n,\eta_n)\}$ *и переходными функциями* $\widetilde{P}_{(n)}(x,y,z,B)$, *удовлетворяющую* (8). *Предположим, что элементы последовательности* $\{\eta_n\}$ *независимы между собой, и* $\{\eta_n\}$ *не зависит от* $\{\xi_n\}$. *Тогда* $\{X(n)\}$ *образует* РЦ *с управлением* $\{\xi_n\}$ *и переходными функциями* $P_{(n)}(x,y,B)$ *вида* (9), *удовлетворяющую* (5) (*или, что то же,* (7)).

Доказательство. Из условий теоремы с необходимостью следует, что при каждом n величина η_n не зависит от совокупности случайных величин $\{X(i),i\le n\,;\ \xi_j,-\infty<j<\infty\}$. Поэтому при $B\in\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$, $n\ge 0$

$$\mathbf{P}\left(X(n+1)\in B\mid\mathfrak{F}_n^{(1)}\right)=\mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\mathbf{I}\left(X(n+1)\in B\right)\mid\mathfrak{F}_n^{(2)}\right\}\mid\mathfrak{F}_n^{(1)}\right\}=$$

$$=\mathbf{E}\left\{\widetilde{P}_{(n)}(X(n),\xi_n,\eta_n,B)\mid\mathfrak{F}_n^{(1)}\right\}=P_{(n)}(X(n),\xi_n,B)\ \text{п.н.},$$

где

$$\mathfrak{F}_n^{(1)}=\sigma\{X(i),i\le n,\{\xi_j\}\},\quad\mathfrak{F}_n^{(2)}=\sigma\{X(i),i\le n,\{\xi_j,\eta_j\}\}\,.$$

Следовательно, выполнено условие (7). Теорема 2 доказана.

2. Редукция РЦ к СРП. Пусть, как и прежде, $(\mathscr{X},\mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$, $(\mathscr{Y},\mathfrak{B}_{\mathscr{Y}})$ — произвольные фазовые пространства, $\{\xi_n\}$ — заданная случайная последовательность со значениями в $(\mathscr{Y}, \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}})$. В этом пункте мы будем предполагать, что $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ и $\mathfrak{B}_{\mathscr{Y}}$ счетно порождены.

Наряду с СРП, введенными в § 1, можно рассматривать более общее понятие «неоднородной» стохастически рекурсивной последовательности, когда не предполагается стационарность $\{\xi_n\}$, а функции f зависят от n.

Пусть задан набор $f_{(n)}: \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$, $n \ge 0$, измеримых функций.

Определение 2. Последовательность $\{X(n)\}$ назовем СРП *с управлением* $(\{\xi_n\}, \{f_{(n)}\})$, если $X(n+1) = f_{(n)}(X(n), \xi_n)$ п.н., $n \ge 0$.

Если все функции $f_{(n)} \equiv f$ совпадают, а последовательность $\{\xi_n\}$ стационарна, то такую СРП естественно называть *однородной*, так что в § 1 мы изучали однородные СРП.

Ясно, что значения произвольной СРП $\{X(n)\}$ связаны в РЦ. Действительно,

$$\mathbf{P}\left(X(n+1) \in B_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n\right) = \mathbf{P}\left(f_{(n)}(X(n), \xi_n) \in B_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n\right) \equiv$$

$$\equiv \mathbf{P}\left(f_{(n)}(X(n), \xi_n) \in B_{n+1} \mid X(n), \xi_n\right) = \mathbf{I}\left(f_{(n)}(X(n), \xi_n) \in B_{n+1}\right).$$

Справедливо в известном смысле и обратное утверждение: любая РЦ может быть представлена в виде СРП (при другой, вообще говоря, управляющей последовательности). Этот факт существенно облегчает и упрощает изучение РЦ.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{X(n)\}$ *образует* РЦ *с управлением* $\{\xi_n\}$ *и выполнены соотношения* (2), (5). *Тогда можно определить набор измеримых функций* $f_{(n)}: \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \times [0,1] \to \mathscr{X}$ *и задать на одном вероятностном пространстве последовательности* $Z = \{(X(n), \xi_n)\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, *где* α_n *равномерно распределены на* $[0,1]$ *и независимы, так что*

1) *последовательности* $\{\alpha_n\}$ *и* $\{\xi_n\}$ *независимы;*

2) $\{X(n)\}$ *образует* СРП *с управлением* $(\{\xi_n, \alpha_n\}, \{f_n\})$.

Доказательство. Начнем с рассмотрения случая, когда $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = [0,1]$ и σ-алгебры $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$, $\mathfrak{B}_{\mathscr{Y}}$ борелевские. Обозначим

$$F_{(n)}(t \mid X(n), \xi_n) = \mathbf{P}\left(X(n+1) < t \mid X(n), \xi_n\right) \equiv P_{(n)}(X(n), \xi_n, (-\infty, t))$$

и положим

$$f_{(n)}(x, y, t) = F_{(n)}^{-1}(t \mid x, y),$$

где $F_{(n)}^{-1}(z \mid x, y) = \mathbf{P}\left(X_{(1)} < z \mid X(0) = x, \xi_0 = y\right)$.

Как было выяснено, мы можем считать, не ограничивая общности, что РЦ $\{X(n)\}$ построена с помощью процедуры, приведенной в п. 1 данного параграфа, где последовательность $\{\xi_n\}$ является исходной и заранее заданной. Мы вновь воспроизведем эту процедуру, но в несколько иной форме.

Пусть α_0 равномерно распределена на $[0,1]$ и не зависит от $X(0)$ и $\{\xi_n\}$. Положим $X(1) = f_{(0)}(X(0), \xi_0, \alpha_0)$. Далее воспользуемся индукцией. Пусть при некотором $n \ge 1$ случайные величины $X(0), \ldots, X(n)$,

$\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ построены. Определим α_n как равномерно распределенную на $[0,1]$ случайную величину, не зависящую от $X(0), \dots, X(n)$, $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$, $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$, и положим

$$X(n+1) = f_{(n)}(X(n), \xi_n, \alpha_n).$$

Нетрудно видеть, что построенная таким образом последовательность $\{X(n)\}$ удовлетворяет соотношениям (2), (5). Действительно,

$$\mathbf{P}\left(X(n+1) \in B \mid X(n), \dots, X(0), \xi_n, \dots, \xi_0\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(f_{(n)}(X(n), \xi_n, \alpha_n) \in B \mid X(n), \xi_n\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(F_{(n)}^{-1}\left(\alpha_n \mid \xi_n, X(n)\right) \in B \mid \xi_n, X(n)\right) = P_{(n)}(X(n), \xi_n, B).$$

Перейдем к общему случаю. Пусть $B_1, B_2, \dots$ — базисные множества σ-алгебры $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$, т.е. $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}} = \sigma\{B_k ; k \geq 1\}$. Введем на пространстве $\mathscr{X}$ отношение эквивалентности: $x_1 \sim x_2$, если при любом $k \geq 1$ одновременно либо $x_1 \in B_k$, $x_2 \in B_k$, либо $x_1 \notin B_k$, $x_2 \notin B_k$. Будем обозначать через $\tilde{x}$ (с индексами или без) классы эквивалентности, и через $\tilde{\mathscr{X}} = \{\tilde{x}\}$ — множество классов эквивалентности. Каждой точке $\tilde{x} \in \tilde{\mathscr{X}}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие 0, 1-значную последовательность $s(\tilde{x}) = (s_1(\tilde{x}), \dots, s_k(\tilde{x}), \dots)$, где $s_n(\tilde{x}) = 1$, если $x \in B_n$ для $x \in \tilde{x}$, и $s_n(\tilde{x}) = 0$ в противном случае. Поэтому разумно отождествлять $\tilde{x}$ и $s(\tilde{x})$ и писать $\tilde{x}_n$ вместо $s_n(\tilde{x})$. Тогда множество $\tilde{\mathscr{X}}$ будет являться подпространством пространства 0, 1-значных последовательностей $\mathscr{S} = \{s = (s_1, s_2, \dots)\}$. Если в $\mathscr{S}$ ввести цилиндрическую σ-алгебру $\mathfrak{B}_{\mathscr{S}}$, то $\tilde{\mathscr{X}}$ будет ее элементом, так как $\tilde{\mathscr{X}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathscr{X}}^n$, где $\tilde{\mathscr{X}}^n = \{s = (s_1, s_2, \dots) :$ существует $\tilde{x} \in \tilde{\mathscr{X}}$ такое, что $s_1 = \tilde{x}_1, \dots, s_n = \tilde{x}_n\}$ является элементом $\mathfrak{B}_{\mathscr{S}}$.

Рассмотрим пространство $(\tilde{\mathscr{X}}, \mathfrak{B}_{\tilde{\mathscr{X}}})$, где $\mathfrak{B}_{\tilde{\mathscr{X}}}$ — сужение $\mathfrak{B}_{\mathscr{S}}$ на $\tilde{\mathscr{X}}$. Между σ-алгебрами $\mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ и $\mathfrak{B}_{\tilde{\mathscr{X}}}$ существует естественное взаимно однозначное соответствие: $Q : \mathfrak{B}_{\mathscr{X}} \leftrightarrow \mathfrak{B}_{\tilde{\mathscr{X}}}$. При этом каждой случайной величине $\eta : \langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P} \rangle \to (\mathscr{X}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$ можно поставить в соответствие случайную величину $\tilde{\eta} : \langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P} \rangle \to (\tilde{\mathscr{X}}, \mathfrak{B}_{\tilde{\mathscr{X}}})$ по правилу

$$\{\eta \in B\} = \{\tilde{\eta} \in Q B\}. \tag{10}$$

Две случайные величины η_1 и η_2 со значениями в $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$ назовем *эквивалентными*, $\eta_1 \sim \eta_2$, если $\mathbf{P}(\eta_1 \in B, \eta_2 \in B) = \mathbf{P}(\eta_1 \in B)$ для любого множества $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$. Две случайные величины $\tilde{\eta}_1$ и $\tilde{\eta}_2$ со значениями в $(\tilde{\mathscr{X}}, \mathfrak{B}_{\tilde{\mathscr{X}}})$ будем называть *эквивалентными*, если $\mathbf{P}(\tilde{\eta}_1 \neq \tilde{\eta}_2) = 0$.

Нетрудно видеть, что η_1 и η_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны $\tilde{\eta}_1$ и $\tilde{\eta}_2$. Поэтому соотношение (10) является взаимно однозначным с точностью до эквивалентности. Отображение $\eta \to \tilde{\eta}$ будем также обозначать символом Q. Кроме того, если $\eta_1 \sim \eta_2$, то для любой случайной величины $\eta_3 : \langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P} \rangle \to (\mathscr{X}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$ и при любых $B, C \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ имеет место равенство $\mathbf{P}(\eta_1 \in B, \eta_3 \in C) = \mathbf{P}(\eta_2 \in B, \eta_3 \in C)$.

В свою очередь, пространство $(\widetilde{\mathscr{X}}, \mathfrak{B}_{\widetilde{\mathscr{X}}})$ можно отобразить на отрезок $[0, 1]$ по следующему правилу: $H(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{x}_i 3^{-i}$. Обозначим область значений $H(\widetilde{x})$ через $\widetilde{\widetilde{x}}$. Множество $\widetilde{\widetilde{\mathscr{X}}}$ является борелевским. Более того, отображение $H : (\widetilde{\mathscr{X}}, \mathfrak{B}_{\widetilde{\mathscr{X}}}) \to (\widetilde{\widetilde{\mathscr{X}}}, \mathfrak{B}_{\widetilde{\widetilde{\mathscr{X}}}})$ будет взаимно однозначным и измеримым (как и H^{-1}), где $\mathfrak{B}_{\widetilde{\widetilde{\mathscr{X}}}}$ — σ-алгебра борелевских множеств на $\widetilde{\widetilde{\mathscr{X}}}$.

Следовательно, если аналогично ввести множества $\widetilde{\mathscr{Y}}$, $\widetilde{\widetilde{\mathscr{Y}}}$ и определить отображения Q', H', то можно перейти от случайных величин $\{X(n)\}$, $\{\xi_n\}$ к величинам $\{H((X(n)))\}$, $\{H'(Q'(\xi_n))\}$, принимающим значения на $[0, 1]$, определить для них случайные величины $\{\alpha_n\}$ и с помощью обратных преобразований вернуться к исходным характеристикам. Теорема 3 доказана.

Из доказательства теоремы вытекает

Следствие 1. *Если функции* $P_{(n)} \equiv P$ *совпадают при различных* n, *то будут совпадать и функции* $f_{(n)} \equiv f$.

Кроме того, очевидно, что если $\{\xi_n\}$ является стационарной метрически транзитивной последовательностью, то таковой будет и последовательность $\{(\xi_n, \alpha_n)\}$.

Как уже отмечалось в введении, из теоремы 3 следует, что СРП (наряду с РЦ) является объектом более общим, чем ЦМ: если $\{X(n)\}$ есть ЦМ, то $\{X(n)\}$ есть РЦ, т.е. условие (1) выполняется при $\xi_n \equiv \mathrm{const}$ и, стало быть, в силу теоремы 3 $\{X(n)\}$ есть СРП, управляемая последовательностью $\{\alpha_n\}$. Заметим, что сказанное дает нам еще одну полезную характеризацию ЦМ.

С другой стороны, очевидно, что если $\{\xi_n\}$ суть произвольные независимые случайные величины, то СРП $\{X(n)\}$ образует ЦМ.

Определение 3. Назовем РЦ $\{X(n)\}$ *однородной*, если

1) последовательность $\{\xi_n\}$ является стационарной;

2) функции $P_{(n)}$ не зависят от n: $P_{(n)}(x, y, B) \equiv P(x, y, B)$ при всех n, y, x и B.

Из следствия 1 и сделанных замечаний вытекает

Следствие 2. *Если* $\{X(n)\}$ *является однородной* РЦ *с управлением (управляющей последовательностью)* $\{\xi_n\}$, *то она является однородной* СРП *с управлением* $\{(\xi_n, \alpha_n)\}$.

Отметим, что в случае, когда $\{X(n)\}$ принимают значения на прямой (т.е. $\mathscr{X} = \mathbf{R}$), РЦ были введены и конструктивно редуцированы к СРП в [21].

В дальнейшем мы будем рассматривать только однородные РЦ и СРП, поэтому слово «однородные» будем опускать.

§ 3. ЭРГОДИЧНОСТЬ РЕКУРСИВНЫХ ЦЕПЕЙ

1. Общие критерии эргодичности РЦ. Как было отмечено в § 1, условия эргодичности СРП и ЦМ близки как по форме, так и по существу. В еще большей мере эта связь проявляется при сопоставлении РЦ и ЦМ.

Пусть $\{X(n)\}$, $X(0) = \text{const}$, — РЦ с управлением $\{\xi_n\}$. Зафиксируем $m \geq 0$ и обозначим через $\mathfrak{F}_{n,m}$ σ-алгебру, порожденную случайными величинами $\{X(1), \dots, X(n), \{\xi_k, k \leq n+m\}\}$. Как и ранее, через $\mathfrak{F}^{\xi}_n$ будем обозначать σ-алгебру, порожденную величинами $\{\xi_k, k \leq n\}$, так что $\mathfrak{F}_{n,m} = \sigma(\mathfrak{F}_n, \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m})$, $\mathfrak{F}_{n,0} = \mathfrak{F}_n$. Справедлива

Теорема 1. *Предположим, что* $\{X(n)\}$ *есть* РЦ *с управлением* $\{\xi_n\}$, *удовлетворяющая* (3.5); *последовательность* $\{\xi_n\}$ *стационарна и метрически транзитивна. Пусть для некоторого* $m \geq 0$ *существует стационарная последовательность событий* $\{A_n\}$, $A_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$, *такая, что*

($\mathrm{I_R}$) $\mathbf{P}(A_0) > 0$;

($\mathrm{II_R}$) *при* $\omega \in A_n$ *и всех* $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$

$$\mathbf{P}(X(n+m+1) \in B \mid \mathfrak{F}_{n+m}) = \varphi(\xi_n, \dots, \xi_{n+m}; B) \quad \text{п.н.},$$

где $\varphi : \mathscr{Y}^{m+1} \times \mathfrak{B}_{\mathscr{X}} \to [0,1]$ — *измеримая функция*; $\varphi(y_0, \dots, y_m; B)$ *является вероятностной мерой для п.в.* $(y_0, \dots, y_m) \in \mathscr{Y}^{m+1}$ *относительно распределения* $(\xi_0, \dots, \xi_m)$.

Тогда можно задать на одном с $\{X(n), \xi_n\}$ *вероятностном пространстве стационарную последовательность* $\{X^n\}$ *такую, что* $X(n) \xrightarrow{s\mathfrak{C}} X^n$. *При этом последовательность* $\{X^n\}$ *образует* РЦ *с теми же управлением* $\{\xi_n\}$ *и переходной функцией* $P(x, y, B)$, *что и* РЦ $\{X(n)\}$.

Из утверждения теоремы 1 с необходимостью вытекает, что совместное распределение пары (X^0, ξ_0),

$$\pi(A, B) = \mathbf{P}(X^0 \in A, \xi_0 \in B), \quad A \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}, \quad B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}},$$

удовлетворяет уравнению

$$\pi(A, \mathscr{Y}) = \int_{\mathscr{X}} \int_{\mathscr{Y}} \pi(dx, dy)\, P(x, y, A), \quad A \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}. \tag{1}$$

Аналогичные соотношения имеют место для совместных распределений векторов $(X^0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k)$ при каждом $k \geq 0$. Например, при $k = 1$ совместное распределение величин (X^0, ξ_0, ξ_1),

$$\pi(A, B_0, B_1) = \mathbf{P}(X^0 \in A, \xi_0 \in B_0, \xi_1 \in B_1), \quad A \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}, B_0, B_1 \in \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}},$$

удовлетворяет уравнению

$$\pi(A, \mathscr{Y}, \mathscr{Y}) = \int\limits_{\mathscr{X}}\int\limits_{\mathscr{Y}}\int\limits_{\mathscr{Y}} \pi(dx, dy_0, dy_1)\, P_2(x, y_0, y_1, A),$$

где $P_2(x, y_0, y_1, A) = \int_{\mathscr{X}} P(x, y_0, dz)\, P(z, y_1, A)$.

Очевидно, что если последовательность $\{\xi_n\}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин, то РЦ $\{X(n)\}$ образует ЦМ, и для нее справедливы равенства

$$\pi(A, B) = \pi(A)\, \mathbf{P}(\xi_0 \in B), \text{ где } \pi(A) = \mathbf{P}(X^0 \in A),$$

а уравнение (1) может быть записано в виде

$$\pi(A) = \int\limits_{\mathscr{X}} \pi(dx) \int\limits_{\mathscr{Y}} \mathbf{P}(\xi_0 \in dy)\, P(x, y, A) \equiv \int\limits_{\mathscr{X}} \pi(dx)\, P(x, A),$$

где $P(x, A) = \int_{\mathscr{Y}} \mathbf{P}(\xi_0 \in dy)\, P(x, y, A)$.

Замечание 1. В дополнение к теореме 1 можно сформулировать следующие утверждения:

Если выполнены условия $(\mathrm{I}_{\mathrm{R}})-(\mathrm{II}_{\mathrm{R}})$ *и в них события* $\{A_n\}$ *и функция* φ *одни и те же для любого начального значения* $X(0) = x \in V_0$ *из некоторого множества* $V_0 \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$, *то распределение предельной последовательности* $\{X^n\}$ *также не зависит от* $X(0) = x \in V_0$.

Если существует возрастающая последовательность множеств $\{V_k\}$, $\bigcup V_k = \mathscr{X}$, *такая, что при каждом* $k = 1, 2, \ldots$ *найдутся стационарная «положительная» последовательность* $\{A_{n,k}\}$ *и функция* φ_k, *при которых для* РЦ $\{X(n)\}$ *выполнены условия* $(\mathrm{I}_{\mathrm{R}})-(\mathrm{II}_{\mathrm{R}})$ *при любом начальном значении* $X(0) = x \in V_k$, *то распределение предельной последовательности* $\{X^n\}$ *не зависит от* $X(0) = x \in \mathscr{X}$.

Теорема 1 допускает следующее обращение.

Теорема 2. *Пусть на одном с* СРП $\{X(n)\}$ *вероятностном пространстве задана стационарная последовательность* $\{X^n\}$ *такая, что* $X(n) \xrightarrow{s\mathscr{C}} X^n$. *Тогда найдутся число* $m \geq 0$, *измеримая функция* $g\colon \mathscr{Y}^{m+1} \to \mathscr{X}$ *и стационарная обновляющая для* $\{X(n)\}$ *последовательность событий* $\{A_n\}$, $A_n \in \mathfrak{F}_{n+m}$, *такие, что для* $\{X(n)\}$ *выполнены условия* $(\mathrm{I}_{\mathrm{R}})-(\mathrm{II}_{\mathrm{R}})$ *при* $\varphi(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m}; B) \equiv \mathrm{I}(g(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m}) \in B)$.

Теорема 2 является переформулировкой части теоремы 2.4, касающейся необходимости существования обновляющих событий. Для доказательства теоремы 1 достаточно представить $\{X(n)\}$ в виде СРП с управлением $\bar{\xi}_n = (\xi_n, \alpha_n)$, где α_n введены в теореме 3.3, и заметить, что на множестве A_n случайная величина $X(n+m+1)$ однозначно определяется по значениям $\bar{\xi}_n, \ldots, \bar{\xi}_{n+m}$. Последовательность $\{\bar{\xi}_n\}$ стационарна и метрически транзитивна. Поэтому A_n образуют стационарную последовательность обновляющих событий для СРП $\{X(n)\}$ с управлением $\{\bar{\xi}_n\}$ и теорема 1 вытекает из первой части теоремы 2.4, а утверждения, содержащиеся в замечании 1, — из рассуждений, следующих за формулировкой теоремы 2.3.

Теорему 1 можно обобщить в следующем направлении.

Теорема 3. *Пусть* $\{X(n)\}$ *есть* РЦ *с управлением* $\{\xi_n\}$, *удовлетворяющая* (3.5), *последовательность* $\{\xi_n\}$ *стационарна и метрически транзитивна. Предположим, что существуют число* $m \geq 0$, *стационарная последовательность событий* $\{A_n\}$, $A_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$, *и измеримые функции* $p: \mathcal{Y}^{m+1} \to [0,1]$, $\varphi: \mathcal{Y}^{m+1} \times \mathfrak{B}_{\mathcal{X}} \to [0,1]$, *где* $\varphi(y_0, \dots, y_m; \cdot)$ *является вероятностной мерой на* $\mathcal{X}$ *для п.в.* $(y_0, \dots, y_m) \in \mathcal{Y}^{m+1}$ *относительно распределения* $(\xi_0, \dots, \xi_m)$, *такие, что*

($\mathrm{I_{RC}}$) *справедливо неравенство*

$$\mathbf{E}\{\mathrm{I}(A_0)\, p(\xi_0, \dots, \xi_m)\} > 0 , \tag{2}$$

($\mathrm{II_{RC}}$) *при* $\omega \in A_n$, $B \in \mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$

$$\mathbf{P}\left(X(n+m+1) \in B \mid \mathfrak{F}_{n,m}\right) \geq p(\xi_n, \dots, \xi_{n+m})\, \varphi(\xi_n, \dots, \xi_{n+m}; B) . \tag{3}$$

Тогда можно задать на одном с $\{X(n), \xi_n\}$ *вероятностном пространстве стационарную последовательность* $\{X^n\}$ *такую, что* $X(n) \overset{sc}{\to} X^n$. *При этом последовательность* $\{X^n\}$ *образует* РЦ *с теми же управлением и переходной функцией, что и* РЦ $\{X(n)\}$.

Теорема 1 есть частный случай теоремы 3 при $p(y_0, \dots, y_m) \equiv 1$ и замене в (3) неравенства на равенство. Поэтому теорема 2 может рассматриваться также и как обращение (в известном смысле) теоремы 3.

Отметим, что условие (II) для ЦМ является частным случаем условия ($\mathrm{II_{RC}}$) при $\xi_n \equiv \mathrm{const}$.

Можно сформулировать естественные аналоги теорем 1—3 и условий ($\mathrm{I_R}$), ($\mathrm{II_R}$) и ($\mathrm{I_{RC}}$), ($\mathrm{II_{RC}}$), относящиеся к нестационарным обновляющим событиям A_n (ср. с теоремой 1.3). Эти утверждения и условия будут обеспечивать c-сходимость последовательности $X(n)$ к стационарной последовательности X^n .

Замечание 2. В частном случае, когда $m = 0$, $p \equiv \mathrm{const}$, а мера φ не зависит от аргументов $(y_0, \dots, y_m)$, условия ($\mathrm{I_{RC}}$), ($\mathrm{II_{RC}}$) приобретают вид

$$\mathbf{P}(A_0) > 0 , \ \mathbf{P}\left(X(n+1) \in B \mid \mathfrak{F}_n\right) \geq p\, \varphi(B) \tag{4}$$

при $\omega \in A_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_n$. Эти условия в силу теоремы 3 обеспечивают эргодичность РЦ $\{X(n)\}$. Сохранится ли это утверждение, если предположить, что $A_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n-1}$ и в условии (4) σ-алгебру $\mathfrak{F}_n$ заменить более «бедной» σ-алгеброй $\sigma(X(n), \xi_{n-1}, \dots, \xi_0)$? Ответ на этот вопрос, как показывает пример 1.5, вообще говоря, отрицателен. Пример 1.5 дает отрицательный ответ и на другой очень близкий вопрос. С точки зрения многих приложений было бы заманчиво (и естественно, если исходить из аналогии с ЦМ) попытаться получить условия эргодичности вида ($\mathrm{I_{RC}}$), ($\mathrm{II_{RC}}$), но для СРП и при «обедненной» σ-алгебре в ($\mathrm{II_{RC}}$) (иначе левая часть в ($\mathrm{II_{RC}}$) есть индикаторная функция). В простейшем случае при $m = 0$ эти условия могли бы иметь вид

$$\mathbf{P}(A_0 > 0), \quad \mathbf{P}\left(X(n+1) \in B \mid X(n), \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots, \xi_0\right) \geq p\,\varphi(B)$$

при $\omega \in A_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n-1}$. Но, как уже было сказано (см. пример 1.5), эти условия не гарантируют эргодичность.

Замечание 3. В теореме 3 отсутствует аналог условия (III) § 1 (непериодичность). Это связано, очевидно, со свойством стационарности последовательности A_n, $n \geq 0$.

Доказательство теоремы 3. Заметим, что в условиях теоремы 3 можно без ограничения общности считать $p(y_0, \dots, y_m) \equiv \mathrm{const} > 0$. Действительно, из (2) следует, что найдутся множество $A_n^1 \subseteq A_n$ и число $p > 0$ такие, что $\mathbf{P}(A_n^1) > 0$ и $p(\xi_n, \dots, \xi_{n+m}) \geq p$ п.н. на A_n^1. Поэтому условие (3) остается справедливым при замене A_n на A_n^1 и $p(\xi_n, \dots, \xi_{n+m})$ на p.

Итак, будем считать, что $p = \mathrm{const} > 0$. Можно предполагать также, что $p < 1$. Воспользуемся приемом, предложенным в [7, 8]. Простоты ради, как и в [7, 8], проведем рассуждения лишь при $m = 0$. Обозначим $P(X(n), \xi_n, B) = \mathbf{P}(X(n+1) \in B \mid \mathfrak{F}_{n,0})$.

Построим на одном с $\{\xi_n\}$ вероятностном пространстве последовательность $\{\widetilde{X}(n)\}$ и последовательность $\{\delta_n\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, не зависящую от $\{\xi_n\}$ и имеющую распределение $\mathbf{P}(\delta_n = 1) = 1 - \mathbf{P}(\delta_n = 0) = p$. Построение произведем следующим образом.

Положим $\widetilde{X}(0) = X(0) = \mathrm{const}$. Зададим δ_0 независимой от $\{\xi_n\}$. Пусть $\{\widetilde{X}(k), \delta_k\}$ построены при $k \leq n$. Обозначим $\xi_k^* = (\xi_k, \delta_k)$, $X^*(k) = (X(k), \delta_k)$. Определим σ-алгебры

$$\mathfrak{F}_k^* = \sigma\{X^*(0), \dots, X^*(k), \xi_0^*, \dots, \xi_k^*\},$$

$$\mathfrak{F}_k^{**} = \sigma\{X^*(0), \dots, X^*(k), \xi_0^*, \dots, \xi_k^*, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots\}.$$

Зададим пару $(\widetilde{X}(n+1), \delta_{n+1})$ с помощью условного распределения

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{X}(n+1) \in B, \delta_{n+1} = 1 \mid \mathfrak{F}_n^{**}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\widetilde{X}(n+1) \in B \mid \mathfrak{F}_n^{**}\right) \mathbf{P}\left(\delta_{n+1} = 1\right) = p\,\mathbf{P}\left(\widetilde{X}(n+1) \in B \mid \mathfrak{F}_n^{**}\right).$$

Другими словами, мы считаем, что $\widetilde{X}(n+1)$, δ_{n+1} условно независимы относительно $\mathfrak{F}_n^{**}$ и δ_{n+1} не зависит от $\mathfrak{F}_n^{**}$. Далее, с учетом (2.5) (или, что то же, (2.7)), определим $\mathbf{P}\left(\widetilde{X}(n+1) \in B \mid \mathfrak{F}_n^{**}\right)$ из равенств

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{X}(n+1) \in B \mid \mathfrak{F}_n^{**}\right) = \mathbf{P}\left(\widetilde{X}(n+1) \in B \mid \mathfrak{F}_n^{*}\right) =$$

$$= \begin{cases} \varphi(\xi_n, B) & \text{при } \omega \in A_n, \delta_n(\omega) = 1, \\ (1-p)^{-1} P(\widetilde{X}(n), \xi_n, B) - p\varphi(\xi_n, B) & \text{при } \omega \in A_n, \delta_n(\omega) = 0, \\ P(\widetilde{X}(n), \xi_n, B) & \text{при } \omega \notin A_n. \end{cases}$$

Отметим, что при таком задании имеет место (2.2) и $\{\widetilde{X}(n)\}$ образует РЦ. Действительно, при $\omega \notin A_n$ это равенство выполнено по определению, а при $\omega \in A_n$

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{X}(n+1) \in B \mid \widetilde{X}(0), \ldots, \widetilde{X}(n), \xi_0^*, \ldots, \xi_n^*\right) =$$

$$= p\,\varphi(\xi_n, B) + (1-p)\,\frac{P(\widetilde{X}(n), \xi_n, B) - p\,\varphi(\xi_n, B)}{1-p} = P(\widetilde{X}(n), \xi_n, B)\,.$$

Следовательно, распределение последовательности $\{\widetilde{X}(n), \xi_n\}$ совпадает с исходным распределением $\{X(n), \xi_n\}$.

С другой стороны, для РЦ $\{X^*(n)\}$ с управлением $\{\xi_n^*\}$ и стационарной последовательности событий $A_n^* = A_n \cap \{\delta_n = 1\}$ выполнены условия теоремы 1. Действительно, $\mathbf{P}(A_n^*) = \mathbf{P}(A_n)\,p > 0$ и для

$$\mathscr{X}^* = \mathscr{X} \times \{0, 1\}\,, \quad \mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_{\mathscr{X}^*}\,, \quad B^* = (B_1, 1) \cup (B_2, 0)$$

при $\omega \in A_n^*$ верно равенство

$$\mathbf{P}\left(X^*(n+1) \in B^* \mid \mathfrak{F}_{n,0}^*\right) = \varphi(\xi_n, B_1)p + \varphi(\xi_n, B_2)\,(1-p) \equiv \varphi(\xi_n, B^*)\,.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 4. Нам будет полезно также одно утверждение, близкое к теореме 3. Пусть $\{X(n)\}$ — РЦ с управлением $\{(\xi_n, \eta_n)\}$; управляющие последовательности принимают значения в произвольных измеримых пространствах. При фиксированном $m \geq 0$ и произвольном $n \geq 0$ обозначим через $\mathfrak{F}_{n,m}'$ σ-алгебру, порожденную случайными величинами $\{X(1), \ldots, X(n), \{\eta_k, k < n\}, \{\xi_k, k \leq n+m\}\}$ и через $\mathfrak{F}_{n,m}''$ — σ-алгебру, порожденную величинами $\{\{\eta_k, k < n\}, \{\xi_k, k \leq n+m\}\}$. Имеет место

Следствие 1. *Пусть последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ независимы, причем последовательность $\{\xi_n\}$ стационарна и метрически транзитивна, а $\{\eta_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Предположим, что для некоторого $m \geq 0$ существует стационарная последовательность событий $\{A_n\}$, $A_n \in \mathfrak{F}_{n,m}''$, такая, что выполнены условия $(\mathrm{I_{RC}})$ и $(\mathrm{II_{RC}})$, где в условии $(\mathrm{II_{RC}})$ σ-алгебра $\mathfrak{F}_{n,m}$ заменена на σ-алгебру $\mathfrak{F}_{n,m}'$. Тогда имеет место утверждение теоремы 3.*

Доказательство. Из теоремы 2.2 следует, что $\{X(n)\}$ является также РЦ с управлением $\{\xi_n\}$. Так как σ-алгебры $\mathfrak{F}_{n+m}^{\xi}$ и $\mathfrak{F}_{n-1}^{\eta} \equiv \sigma(\eta_k, k < n)$ независимы и $\mathfrak{F}_{n,m}'' = \sigma(\mathfrak{F}_{n+m}^{\xi}, \mathfrak{F}_{n,1}^{\eta})$, в силу условий следствия найдутся множества $A_n' \in \mathfrak{F}_{n+m}^{\xi}$, $A_n'' \in \mathfrak{F}_{n-1}^{\eta}$ такие, что $A_n' \cap A_n'' \subseteq A_n$ и $\mathbf{P}(A_n' \cap A_n'') = \mathbf{P}(A_n')\,\mathbf{P}(A_n'') > 0$. Значит, на множестве A_n' выполняются п.н. соотношения

$$\mathbf{P}\left(X(n+m+1) \in B \mid \mathfrak{F}_{n,m}\right) = \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\mathbf{I}\left(X(n+m+1) \in B \mid \mathfrak{F}_{n,m}'\right\} \mid \mathfrak{F}_{n,m}\right\} \geq\right.$$

$$\geq \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\mathbf{I}\left(X(n+m+1) \in B\right)\mathbf{I}(A_n'') \mid \mathfrak{F}_{n,m}'\right\} \mid \mathfrak{F}_{n,m}\right\} \geq$$

$$\geq \mathbf{P}\,(A_n'')\, p(\xi_n, \dots, \xi_{n+m})\, \varphi(\xi_n, \dots, \xi_{n+m}\,; B)\,.$$

Поэтому применима теорема 3 и следствие 1 доказано.

2. Эргодичность РЦ при нестационарном управлении. Для РЦ можно сформулировать теоремы эргодичности и в случае нестационарных управляющих последовательностей, аналогичные теоремам 1.5—1.7 для СРП. Например, аналогом теоремы 1.5 является следующее утверждение.

Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\zeta_n\}$ — две управляющие последовательности со значениями в пространстве $\mathcal{Y}$. Определим две РЦ: $\{X(n)\}$ с управлением $\{\xi_n\}$, начальным состоянием $X(0) = \mathrm{const}$ и переходной функцией $P(x, y, B)$ и РЦ $\{Y(n)\}$ с управлением $\{\zeta_n\}$, начальным состоянием $Y(0) = \mathrm{const}$ и той же переходной функцией $P(x, y, B)$.

Теорема 4. *Пусть заданы стационарная метрически транзитивная последовательность* $\{\xi_n\}$, *последовательность* $\{\zeta_n\}$, *переходная функция* $P(x, y, B)$ *и множество* $V_0 \in \mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$ *такие, что*

1) *существуют число* $m \geq 0$, *стационарная последовательность «положительных» событий* $A_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$ *и функции* p, φ, *при которых для* РЦ $\{X(n)\}$ *выполняются условия* (I_{RC}), (II_{RC}) *для любого начального значения* $X(0) \in V_0$;

2) *последовательность* $\{\zeta_n\}$ *с-сходится к* $\{\xi_n\}$;

3) *последовательность* $\{Y(n)\}$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\geq n} \{Y(k) \in V_0\}\right) = 1 \text{ при всех } n\,.$$

Тогда на одном с $\{Y(n)\}$ *вероятностном пространстве можно задать стационарную последовательность* $\{X^n\}$ *такую, что* $Y(n) \xrightarrow{c} X^n$. *При этом* $\{X^n\}$ *образует* РЦ *с управлением* $\{\xi_n\}$ *и переходной функцией* $P(x, y, B)$.

Доказательство теоремы 4 практически повторяет доказательство теоремы 2, и мы его приводить не будем.

3. О некоторых условиях, достаточных для эргодичности. Пусть, как и ранее, $\{X(n)\}$ есть РЦ с управлением $\{\xi_n\}$, удовлетворяющая (2.5). Рассмотрим случай, когда сама управляющая последовательность удовлетворяет условию перемешивания вида

$$\mathbf{P}\,(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_n, \xi_{n-1}, \dots) \geq q\,\Psi(B) \text{ п.н.}, \tag{4}$$

где Ψ — некоторая вероятностная мера на $(\mathcal{Y}, \mathfrak{B}_{\mathcal{Y}})$, а $q > 0$ — вещественное число.

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\hat{\xi}_n$ с общим распределением Ψ (которые, вообще говоря, могут быть заданы на другом вероятностном пространстве, чем ξ_n). При каждом начальном условии $\hat{X}(0) = x \in \mathcal{X}$ введем РЦ $\{\hat{X}(x, n)\}$ с управлением $\{\hat{\xi}_n\}$ и той же переходной функцией $P(x, y, B)$, что и у первоначальной РЦ. В соответствии со сказанным выше, РЦ $\hat{X}$ образует ЦМ. Имеет место

Теорема 5. *Пусть выполнено* (4). *Предположим, что существуют множество* $V \subseteq \mathcal{X}$, *стационарная последовательность событий* $A_n \in$

$\in \mathfrak{F}^{\xi}_{n-1}$, $\mathbf{P}(A_n) > 0$, число $m \ge 0$ и измеримые функции $p : \mathcal{Y}^{m+1} \to [0, 1]$, $\varphi : \mathcal{Y}^{m+1} \times \mathfrak{B}_{\mathcal{X}} \to [0, 1]$ такие, что $\mathbf{E}\, p(\hat{\xi}_0, \dots, \hat{\xi}_m) > 0$, $\varphi(y_0, \dots, y_m; \cdot)$ является вероятностной мерой на $(\mathcal{X}, \mathfrak{B}_{\mathcal{X}})$ при любых $(y_0, \dots, y_m) \in \mathcal{Y}^{m+1}$ и выполнены условия

1) $\mathbf{P}(X(n) \in V \mid \mathfrak{F}^{\xi}_{n-1}) = 1$ *на множестве* A_n *при всех* $n \ge 0$;

2) $\mathbf{P}(\hat{X}(x, m+1) \in B \mid \hat{\xi}_0, \dots, \hat{\xi}_m) \ge p(\hat{\xi}_0, \dots, \hat{\xi}_m)\, \varphi(\hat{\xi}_0, \dots, \hat{\xi}_m; B)$ *п.н. относительно распределения* $(\hat{\xi}_0, \dots, \hat{\xi}_m)$ *при всех* $B \in \mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$, $x \in V$.

Тогда для РЦ $X(n)$ *справедливо утверждение теоремы* 1.

Доказательство. По индукции построим вспомогательную последовательность $\{\tilde{\xi}_n \equiv (\xi^*_n, \hat{\xi}_n, \beta_n), n \ge 0\}$ следующим образом. При $n = 0$ будем предполагать, что случайные величины $\hat{\xi}_0$ и β_0 независимы между собой, $\hat{\xi}_0$ принимает значения в пространстве $(\mathcal{Y}, \mathfrak{B}_{\mathcal{Y}})$ и имеет распределение Ψ, β_0 принимает значения 0 и 1; $\mathbf{P}(\beta_0 = 1) = 1 - \mathbf{P}(\beta_0 = 0) = q$, случайная величина ξ^*_0 принимает значения в пространстве $(\mathcal{Y}, \mathfrak{B}_{\mathcal{Y}})$ и определяется по $(\hat{\xi}_0, \beta_0)$ с помощью соотношений

$$\xi^*_0 = \hat{\xi}_0 \text{ на множестве } \{\beta_0 = 1\},$$

$$\mathbf{P}(\xi^*_0 \in B \mid \hat{\xi}_0, \beta_0) = \mathbf{P}(\xi^*_0 \in B \mid \beta_0) = (\mathbf{P}(\xi_0 \in B) - q\Psi(B))(1-q)^{-1} \text{ на множестве } \{\beta_0 = 0\} \text{ при всех } B \in \mathfrak{B}_{\mathcal{Y}}.$$

Пусть случайные величины $\xi^*_k, \hat{\xi}_k, \beta_k$ определены при всех $0 \le k \le n$. Определим величины $\xi^*_{n+1}, \hat{\xi}_{n+1}, \beta_{n+1}$. Будем предполагать, что $\hat{\xi}_{n+1}$ и β_{n+1} независимы между собой и не зависят от $\{\tilde{\xi}_k, k \le n\}$, причем $\hat{\xi}_{n+1}$ имеет распределение Ψ на $(\mathcal{Y}, \mathfrak{B}_{\mathcal{Y}})$ и $\mathbf{P}(\beta_{n+1} = 1) = 1 - \mathbf{P}(\beta_{n+1} = 0) = q$. Случайная величина ξ^*_{n+1} определяется по ранее заданным случайным величинам с помощью соотношений $\xi^*_{n+1} = \hat{\xi}_{n+1}$ на множестве $\{\beta_{n+1} = 1\}$. На множестве $\{\beta_{n+1} = 0\}$ при $B \in \mathfrak{B}_{\mathcal{Y}}$; $\tilde{y}_i = (y_i, \hat{y}_i, c_i) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \times \{0, 1\}$, $\hat{y}_{n+1} \in \mathcal{Y}$ полагаем

$$\mathbf{P}(\xi^*_{n+1} \in B \mid \tilde{\xi}_0 \in d\tilde{y}_0, \dots, \tilde{\xi}_n \in d\tilde{y}_n, \hat{\xi}_{n+1} \in d\hat{y}_{n+1}, \beta_{n+1} = 0) =$$

$$= \mathbf{P}(\xi^*_{n+1} \in B \mid \xi^*_0 \in dy_0, \dots, \xi^*_n \in dy_n, \beta_{n+1} = 0) =$$

$$= (1-q)^{-1}\,[\,\mathbf{P}(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_0 \in dy_0, \dots, \xi_n \in dy_n) - q\,\Psi(B)].$$

По теореме о продолжении меры мы можем задать последовательность $\{\tilde{\xi}_n, n \ge 0\}$ со значениями в пространстве $(\tilde{\mathcal{Y}}^\infty, \mathfrak{B}_{\tilde{\mathcal{Y}}^\infty})$, $\tilde{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \times \{0, 1\}$, совместные распределения элементов которой удовлетворяют приведенным выше соотношениям. Нетрудно проверить, что последовательность $\{\tilde{\xi}_n, n \ge 0\}$ стационарна и метрически транзитивна. Поэтому в силу теоремы Колмогорова о согласованных распределениях можно дополнить эту последовательность до стационарной на всей оси. Другими словами, можно предполагать, что задана стационарная метрически транзитивная последовательность $\{\widetilde{\xi}_n = (\xi_n^*, \widehat{\xi}_n, \beta_n),\ -\infty < n < \infty\}$, удовлетворяющая при любом n следующим соотношениям:

а) случайные величины $\widehat{\xi}_{n+1}$ и β_{n+1} независимы между собой, независимы также и σ-алгебры $\sigma(\widehat{\xi}_{n+1}, \beta_{n+1})$ и $\widetilde{\mathfrak{F}}_n \equiv \sigma\{\widetilde{\xi}_k, k \le n\}$;

б) $\xi_{n+1}^* = \widehat{\xi}_{n+1}$ п.н. на множестве $\{\beta_{n+1} = 1\}$ и при $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}}$, $\widetilde{y}_l = (y_l, \widehat{y}_l, c_l) \in \widetilde{Y}$, $k \le l \le n$; $\widehat{y}_{n+1} \in \mathscr{Y}$ полагаем

$$\mathbf{P}(\xi_{n+1}^* \in B \mid \widetilde{\xi}_k \in d\widetilde{y}_k, \ldots, \widetilde{\xi}_n \in d\widetilde{y}_n, \widehat{\xi}_{n+1} \in d\widehat{y}_{n+1}, \beta_{n+1} = 0) =$$

$$= \mathbf{P}(\xi_{n+1}^* \in B \mid \xi_k^* \in dy_k, \ldots, \xi_n^* \in dy_n, \beta_{n+1} = 0) =$$

$$= (1-q)^{-1}[\mathbf{P}(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_k \in dy_k, \ldots, \xi_n \in dy_n) - q\Psi(B)]$$

при любом $k < n$ для почти всех $(\widetilde{y}_k, \ldots, \widetilde{y}_n, \widehat{y}_{n+1})$ относительно распределения $(\widetilde{\xi}_k, \ldots, \widetilde{\xi}_n, \widehat{\xi}_{n+1})$.

Нетрудно видеть, что последовательности $\{\xi_n^*\}$ и $\{\xi_n\}$ имеют одинаковые конечномерные распределения. Действительно, при любом $n \ge 0$ п.н. относительно распределения $(\xi_0^*, \ldots, \xi_n^*)$ имеют место равенства

$$\mathbf{P}(\xi_{n+1}^* \in B \mid \xi_0^* \in dy_0, \ldots, \xi_n^* \in dy_n) =$$

$$= q\,\mathbf{P}(\xi_{n+1}^* \in B \mid \xi_0^* \in dy_0, \ldots, \xi_n^* \in dy_n, \beta_{n+1} = 1) +$$

$$+ (1-q)\,\mathbf{P}(\xi_{n+1}^* \in B \mid \xi_0^* \in dy_0, \ldots, \xi_n^* \in dy_n, \beta_{n+1} = 0) =$$

$$= q\Psi(B) + (1-q)\frac{\mathbf{P}(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_0 \in dy_0, \ldots, \xi_n \in dy_n) - q\Psi(B)}{1-q} =$$

$$= \mathbf{P}(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_0 \in dy_0, \ldots, \xi_n \in dy_n).$$

Далее, построим РЦ $X^*(n)$ с управлением $\{\widetilde{\xi}_n\}$, удовлетворяющую (3.5) и следующему соотношению:

$$\mathbf{P}(X^*(n+1) \in B \mid X^*(n), \widetilde{\xi}_n) = \mathbf{P}(X^*(n+1) \in B \mid X^*(n), \xi_n^*) = P(X^*(n), \xi_n^*, B)$$

п.н., где $P(x, y, B)$ — та же переходная функция, что и у РЦ $X(n)$ с управлением $\{\xi_n\}$. Заданная таким образом последовательность $X^*(n)$ является РЦ с управлением $\{\widetilde{\xi}_n\}$ и одновременно РЦ с управлением $\{\xi_n^*\}$. Кроме того, конечномерные распределения последовательностей $(X^*(n), \xi_n^*)$ и $(X(n), \xi_n)$ совпадают. Поэтому мы можем рассматривать $(X^{*(n)}, \xi_n^*)$ как реализацию $(X(n), \xi_n)$ на некотором вероятностном пространстве и, следовательно, не писать в дальнейшем верхний индекс*.

Рассмотрим стационарную последовательность событий

$$\widetilde{A}_n = A_n \cap \{\beta_{n+i} = 1, 0 \le i \le m\} \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{n+m}, \quad \mathbf{P}(\widetilde{A}_n) = \mathbf{P}(A_n)\,q^{m+1} > 0.$$

При любом n на событии $\widetilde{A}_n$ последовательность $X(n+k)$, $0 \le k \le m$, имеет то же совместное условное распределение, что и ЦМ $\hat{X}(n+k)$, $0 \le k \le m$, с начальным (в момент времени n) условием $X(n) = X(n) \in V$. Из условия 2 теоремы вытекает, что при $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}}$

$$\mathbf{P}\left(X(n+m+1) \in B \mid X(n) \in dx, \hat{\xi}_{n+i} \in dy_i, \beta_{n+i} = 1, 0 \le i \le m\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\hat{X}(x, m+1) \in B \mid \xi_i \in dy_i, 0 \le i \le m\right) \ge p(y_0, \dots, y_m)\, \varphi(y_0, \dots, y_m; B)$$

для почти всех $x \in V$ относительно распределения $X(n)$ и почти всех $(y_0, \dots, y_m)$ относительно распределения $(\hat{\xi}_0, \dots, \hat{\xi}_m)$. Следовательно, для почти всех $\omega \in \widetilde{A}_n$

$$\mathbf{P}\left(X(n+m+1) \in B \mid \widetilde{\mathfrak{F}}_{n,m}\right) = \mathbf{P}\left(X(n+m+1) \in B \mid X(n), \xi_n, \dots, \xi_{n+m}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(X(n+m+1) \in B \mid X(n), \hat{\xi}_n, \dots, \hat{\xi}_{n+m}\right) \ge p(\hat{\xi}_n, \dots, \hat{\xi}_{n+m})\, \varphi(\hat{\xi}_n, \dots, \hat{\xi}_{n+m}; B),$$

где $\widetilde{\mathfrak{F}}_{n,m}$ есть σ-алгебра, порожденная случайными величинами $X(1), \dots, X(n)$ и $\{\widetilde{\xi}_k, k \le n\}$.

Введем функции $\widetilde{p}: \widetilde{\mathscr{Y}}^{m+1} \to [0,1]$ и $\widetilde{\varphi}: \widetilde{\mathscr{Y}}^{m+1} \times \mathfrak{B}_{\mathscr{X}} \to [0,1]$ по правилам: $\widetilde{p}(\widetilde{y}_0, \dots, \widetilde{y}_m) = p(\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_m)$ и $\widetilde{\varphi}(\widetilde{y}_0, \dots, \widetilde{y}_m; B) = \varphi(\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_m; B)$ при $\widetilde{y}_l = (y_l, \hat{y}_l, c_l) \in \widetilde{\mathscr{Y}}$, $0 \le l \le m$, $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$. Из условий теоремы и приведенных выше соотношений следует, что для РЦ $X(n)$ с управлением $\{\widetilde{\xi}_n\}$ имеют место соотношения

$$\mathbf{E}\left[\mathrm{I}(\widetilde{A}_n)\, \widetilde{p}(\widetilde{\xi}_n, \dots, \widetilde{\xi}_{n+m})\right] = \mathbf{E}\left[\mathrm{I}(\widetilde{A}_n)\, p(\hat{\xi}_n, \dots, \hat{\xi}_{n+m})\right] =$$

$$= \mathbf{P}(\widetilde{A}_n)\, \mathbf{E}\, p(\hat{\xi}_n, \dots, \hat{\xi}_{n+m}) > 0$$

и при $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$

$$\mathbf{P}\left(X(n+m+1) \in B \mid \widetilde{\mathfrak{F}}_{n,m}\right) \ge \widetilde{p}(\widetilde{\xi}_n, \dots, \widetilde{\xi}_{n+m})\, \varphi(\widetilde{\xi}_n, \dots, \widetilde{\xi}_{n+m}; B)$$

п.н. на множестве $\widetilde{A}_n$. Следовательно, выполнены условия теоремы 3 и теорема 5 доказана.

Пример 1. Пусть $\{w(n)\}$, $w(0) = 0$, — последовательность векторов ожидания в многоканальной системе обслуживания $G/G/l$ с очередью

$$w(n+1) = R(w(n) + e_1 s_n - i\tau_n)^+, \tag{5}$$

где s_n — времена обслуживания, τ_n — интервалы между моментами поступления вызовов, последовательность $\xi_n \equiv (s_n, \tau_n)$ стационарна и метрически транзитивна, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $i = (1, 1, \dots, 1)$, R — операция перестановки координат l-мерных векторов в порядке неубывания. Как показано в [2], если

$$l\,\mathbf{E}\,\tau_n > \mathbf{E}\, s_n, \tag{6}$$

то можно построить стационарную последовательность $\{Y^n\}$-мерных векторов такую, что $w(n) \le Y^n$ п.н. при всех l. Кроме того, в [2, с. 360] доказано, что если при всех n $\mathbf{P}\left(\tau_{n+1} > x \mid \mathfrak{F}_n^{\xi}\right) > 0$ п.н., где $\mathfrak{F}_n^{\xi} = \sigma\{s_k,$

τ_k, $k \le n\}$, то при некотором дополнительном условии имеет место c-сходимость последовательности $\{w(n)\}$ к некоторой собственной стационарной последовательности $\{w^n\}$.

Поскольку СРП есть частный случай РЦ, теоремы 1—5 применимы и к СРП (правда, применимы «вырожденно», так как в левой и правой частях неравенства ($\mathrm{II_{RC}}$) должны стоять индикаторы событий). В частности, теорема 5 дает нам другой вариант условий эргодичности СРП $\{w(n)\}$. Справедливо

Следствие 2. *Предположим, что для последовательности $w(n)$ вида (5) выполнено (6) и найдутся число $q > 0$ и вероятностная мера Ψ на $[0, \infty) \times [0, \infty)$ такие, что*

1) $\mathbf{P}\left((\tau_{n+1}, s_{n+1}) \in B \mid \mathfrak{F}_n^{\xi}\right) > q\Psi(B)$ *п.н. для всех борелевских* $B \subseteq \mathbf{R}_+^2$,

2) $\inf\{z : \Psi(C_z) > 0\} < 0$, *где* $C_z = \{(x, y) : y - lx \le z\}$.

Тогда для последовательности $\{w(n)\}$ имеет место утверждение теоремы 1.

Доказательство. Найдем число $z_0 < 0$ такое, что $\Psi(C_{z_0}) > 0$ и по нему — числа $y_0 \ge 0$ и $x_0 > 0$ такие, что $y_0 - lx_0 < z_0$ и $\Psi(D) > 0$. Обозначим $D = [0, y_0\,] \times [x_0, \infty)$ и определим число $\hat{q} = q\Psi(D) > 0$ и меру $\hat{\Psi}(B) = = \Psi(B \cap D)/\Psi(D)$. Заметим, что условие (3) остается справедливым при замене q на $\hat{q}$ и Ψ на $\hat{\Psi}$.

Выберем число M настолько большим, чтобы событие $A_n = \{Y_n \le \le (M, \ldots, M)\}$ имело положительную вероятность. Пусть $(\hat{\tau}_n, \hat{s}_n)$ — последовательность независимых одинаково распределенных двумерных случайных векторов с распределением $\hat{\Psi}$ (при этом $l\hat{\tau}_n > \hat{s}_n$ п.н. и, в частности, $l\,\mathbf{E}\,\hat{\tau}_n > \mathbf{E}\,\hat{s}_n$). Рассмотрим две l-канальные системы обслуживания с одним и тем же управлением $\hat{\xi}_n = (\hat{\tau}_n, \hat{s}_n)$ и различными начальными условиями $\hat{w}_0(0) = (0, \ldots, 0)$ и $\hat{w}_M(0) = (M, \ldots, M)$. Как показано в [18], при любом фиксированном $M < \infty$ последовательности $\{\hat{w}_0(n)\}$ и $\{\hat{w}_M(n)\}$ sc-сходятся к одной и той же предельной стационарной последовательности $\{\hat{w}^n\}$. Обозначим через $\gamma = \gamma(M)$ момент «склеивания» последовательностей $\{\hat{w}_0(n)\}$ и $\{\hat{w}_M(n)\}$: $\gamma = \min\{n \ge 0 : \hat{w}_0(n) = \hat{w}_M(n)\}$ и найдем такое m, что $\mathbf{P}(\gamma \le m) > 0$.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_l) \le (M, \ldots, M)$ — любой вектор с неотрицательными координатами, и $\hat{w}_x(n)$, $n \ge 0$, — последовательность векторов ожидания в l-канальной системе обслуживания с управлением $\hat{\xi}_n = (\hat{\tau}_n, \hat{s}_n)$ и начальным условием $\hat{w}_x(0) = x$. Как известно (см., например, [18]), неравенства $\hat{w}_0(n) \le \hat{w}_x(n) \le \hat{w}_M(n)$ сохраняются п.н. при всех $n \ge 0$. Поэтому на множестве $\{\gamma \le m\}$ имеют место равенства $\hat{w}_x(m+1) = \hat{w}_0(m+1)$ при любых $x \le (M, \ldots, M)$. Следовательно, условия теоремы 5 выполнены при $p(\hat{\xi}_0, \ldots, \hat{\xi}_m) = \mathbf{I}(\gamma \le m)$ и $\varphi(\hat{\xi}_0, \ldots, \hat{\xi}_m; B) = \mathbf{I}(\hat{w}_0(m+1) \in B)$. Следствие 2 доказано.

Вернемся к произвольным РЦ $\{X(n)\}$ с управлением $\{\xi_n\}$ и предположим, что управляющая последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет теперь более сильному, чем (4), условию перемешивания

$$\mathbf{P}\,(\xi_{n+1} \in B,\, (\xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \ldots) \in C \mid \xi_n, \xi_{n-1}, \ldots) \ge$$

$$\ge q\,\Psi(B)\,\mathbf{P}\,((\xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \ldots) \in C \mid \xi_n, \xi_{n-1}, \ldots) \text{ п.н.} \tag{7}$$

для некоторой вероятностной меры Ψ на $(\mathscr{Y}, \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}})$, некоторого числа $q > 0$, любого $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ и произвольного цилиндрического множества $C \in \mathscr{Y}^{\infty}$. Тогда справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнено* (7). *Предположим, что существуют множество $V \subseteq \mathscr{X}$, стационарная последовательность событий $A_n \in \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n-1}$, $\mathbf{P}\,(A_n) > 0$, числа $m \ge 0$, $p > 0$ и вероятностная мера φ на $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$ такие, что*

1) $\mathbf{P}\,(X(n) \in V \mid \mathfrak{F}^{\xi}_{n-1}) = 1$ *на множестве* A_n *при всех* $n \ge 0$;
2) $\mathbf{P}\,(\hat{X}(x, m+1) \in B) \ge p\,\varphi(B)$ *при всех* $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$, $x \in V$.

Тогда для РЦ $X(n)$ *справедливо утверждение теоремы* 1.

Отметим, что условие (7) эквивалентно следующему:

$$\mathbf{P}\,(\xi_n \in B \mid \xi_k,\, k \ne n) \ge q\,\Psi(B) \quad \text{п.н.} \tag{8}$$

при всех $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$. Кроме того, для выполнения (7), (8) достаточно, чтобы коэффициент перемешивания вида $h \equiv \inf\big(\mathbf{P}\,(A \cap B)/\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)\big)$ был положителен (где инфимум берется по всем множествам $A \in \mathfrak{F}^{\xi}_{-\infty,0}$, $B \in \in \mathfrak{F}^{\xi}_{1,\infty}$, имеющим положительную вероятность).

Доказательство теоремы 6. Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная метрически транзитивная последовательность, удовлетворяющая (7). С помощью индукции построим на одном с $\{\xi_n\}$ вероятностном пространстве вспомогательную последовательность $\bar{\xi}_n = (\xi^*_n, \xi^{(1)}_n, \xi^{(0)}_n, \beta_n)$ следующим образом. При $n = 0$ будем предполагать, что случайные величины $\xi^{(1)}_0$ и β_0 независимы между собой и не зависят от $\{\xi_i\}$, величина $\xi^{(1)}_0$ имеет распределение Ψ на пространстве $(\mathscr{Y}, \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}})$ и $\mathbf{P}\,(\beta_0 = 1) = 1 - \mathbf{P}\,(\beta_0 = 0) = = q$. Случайная величина $\xi^{(0)}_0$ не зависит от $\xi^{(1)}_0$ и β_0 определяется по условному распределению

$$\mathbf{P}\,(\xi^{(0)}_0 \in B \mid \xi_i,\, i \ne 0) = (1-q)^{-1}\,[\mathbf{P}\,(\xi_0 \in B \mid \xi_i,\, i \ne 0) - q\,\Psi(B)] \quad \text{п.н.}$$

Совместное распределение величин ξ_0 и $\xi^{(0)}_0$ может быть произвольным. Определенности ради, можно считать, что ξ_0 и $\xi^{(0)}_0$ условно независимы относительно $\{\xi_i,\, i \ne 0\}$. Случайную величину ξ^*_0 определим из равенства

$$\xi^*_0 = \xi^{(1)}_0\,\mathrm{I}\,(\beta_0 = 1) + \xi^{(0)}_0\,\mathrm{I}\,(\beta_0 = 0)\,.$$

Введем последовательность случайных величин $\{\xi_n(0),\, -\infty < n < \infty\}$, полагая $\xi_0(0) = \xi^*_0$ и $\xi_n(0) = \xi_n$ при $n \ne 0$. Нетрудно видеть, что конечномерные распределения последовательностей $\{\xi_n(0)\}$ и $\{\xi_n\}$ совпадают.

Пусть при всех l, $0 \le l \le k$, построены случайные величины $\tilde{\xi}_l = (\xi_l^*, \xi_l^{(1)}, \xi_l^{(0)}, \beta_0)$ и последовательности $\{\xi_n(l)\,,\ -\infty < n < \infty\}$, где

$$\xi_n(l) = \begin{cases} \xi_n^* & \text{при } 0 \le n \le l, \\ \xi_n & \text{при } n > l \text{ или } n < 0\,. \end{cases}$$

Последовательности $\{\xi_n(l),\ -\infty < n < \infty\}$ имеют те же конечномерные распределения, что и первоначальная последовательность $\{\xi_n\}$. Определим случайные величины $\tilde{\xi}_{k+1} = (\xi_{k+1}^*, \xi_{k+1}^{(1)}\,, \xi_{k+1}^{(0)}\,, \beta_{k+1})$ из следующих условий: величины $\xi_{k+1}^{(1)}$ и β_{k+1} независимы между собой и не зависят от ранее определенных случайных величин, причем $\xi_{k+1}^{(1)}$ имеет распределение Ψ на $(\mathcal{Y}, \mathfrak{B}_{\mathcal{Y}})$ и $\mathbf{P}(\beta_{k+1}= 1) = 1- \mathbf{P}(\beta_{k+1}= 0) = q$; случайная величина $\xi_{k+1}^{(0)}$ не зависит от $\xi_{k+1}^{(1)}, \beta_{k+1}$ и определяется по условному распределению

$$\mathbf{P}(\xi_{k+1}^{(0)} \in B \mid \{\xi_i^{(k)}, i = k+1\}, \{\xi_j^{(0)}, \xi_j^{(1)}, \beta_j, j \le k\}) =$$

$$= (1-q)^{-1}\ [\mathbf{P}(\xi_{k+1} \in B\ \mid \xi_i(k), i \ne k+1) - q\,\Psi(B)] \quad \text{п.н.}$$

Случайную величину ξ_{k+1}^* определим с помощью равенства

$$\xi_{k+1}^* = \xi_{k+1}^{(1)}\, \mathrm{I}(\beta_{k+1}\ = 1) + \xi_{k+1}^{(0)}\, \mathrm{I}(\beta_{k+1} = 0)\,.$$

Определим последовательность $\{\xi_n(k+1), -\infty < n < \infty\}$ так: $\xi_{k+1}(k+1) = \xi_{k+1}^*$ и $\xi_n(k+1) = \xi_n(k)$ при $n \ne k+1$. Итак, при каждом $0 \le k < \infty$ мы определили стационарную метрически транзитивную последовательность $\{\tilde{\xi}_l = (\xi_l^*, \xi_l^{(1)}, \xi_l^{(0)}, \beta_l)\,,\ 0 \le l \le k\}$,обладающую следующими свойствами:

а) совместные распределения элементов последовательности $\{\xi_l^*,\ 0 \le l \le k\}$ те же, что и у последовательности $\{\xi_l, 0 \le l \le k\}$;

б) при любом $0 \le l \le k$ случайные величины $\xi_l^{(1)}$ и β_l независимы между собой и не зависят от случайных величин $\{\tilde{\xi}_i, 0 \le i \le k, i \ne l\}$, причем $\xi_l^{(1)}$ имеет распределение Ψ на пространстве $(\mathcal{Y}, \mathfrak{B}_{\mathcal{Y}})$ и $\mathbf{P}(\beta_l{=}1)= 1- \mathbf{P}(\beta_l{=}\ 0) = q$;

в) $\xi_l^* = \xi_l^{(1)}\, \mathrm{I}(\beta_l\ = 1) + \xi_l^{(0)}\, \mathrm{I}(\beta_l = 0)$.

По теореме о продолжении меры мы можем задать последовательность $\{\tilde{\xi}_n, n \ge 0\}$ со значениями в пространстве $(\tilde{\mathcal{Y}}^\infty, \mathfrak{B}_{\tilde{\mathcal{Y}}^\infty})$, $\tilde{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \times \{0, 1\}$, конечномерные распределения которой удовлетворяют приведенным выше соотношениям. Так как полученная последовательность является стационарной, по теореме Колмогорова о согласованных распределениях ее можно дополнить до стационарной на всей оси.

Далее, следуя доказательству теоремы 5, можно определить последовательность $\{X^*(n)\}$, являющуюся РЦ с управлением $\{\xi_n^*\}$, и, одновременно, РЦ с управлением $\{\tilde{\xi}_n\}$ такую, что конечномерные распределения

$\{X^*(n), \xi_n^*\}$ и $\{X(n), \xi_n\}$ совпадают. Поэтому можно рассматривать $\{X^*(n), \xi_n^*\}$ как реализацию $\{X(n), \xi_n\}$ на некотором вероятностном пространстве и не писать далее верхний индекс *.

Определим σ-алгебры

$$\mathfrak{F}_{n,m}' = \sigma\left\{X(1), \dots, X(n), \{\xi_j^{(1)}, j < n\}, \{(\xi_j^{(0)}, \beta_j), j \le n+m\}\right\},$$
$$\mathfrak{F}_{n,m}'' = \sigma\left\{\{\xi_j^{(1)}, j < n\}, \{(\xi_j^{(0)}, \beta_j), j \le n+m\}\right\}$$

и рассмотрим множества $\widetilde{A}_n = A_n \cap \{\beta_{n+i} = 1, 0 \le i \le m\} \in \mathfrak{F}_{n,m}''$ положительной вероятности $\mathbf{P}(\widetilde{A}_n) = \mathbf{P}(A_n)\, q^{m+1} > 0$. При любом $n \ge 0$ и при $B \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$

$$\mathbf{P}\left(X(n+m+1) \in B \mid \mathfrak{F}_{n,m}'\right) = \mathbf{P}\left(X(n+m+1) \in B \mid X(n), \beta_{i+n}, 0 \le i \le m\right)$$

п.н. на множестве $\widetilde{A}_n$, и

$$\mathbf{P}\left(X(n+m+1) \in B \mid X(n) \in dx, \beta_{n+i} = 1,\ 0 \le i \le m\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\widehat{X}(x, m+1) \in B\right) \ge p\varphi(B)$$

для п.в. $x \in V$ относительно распределения $X(n)$. Значит, выполнены условия следствия 1 при $\xi_n = (\xi_n^{(0)}, \beta_n)$, $\eta_n = \xi_n^{(1)}$. Теорема 6 доказана.

Вернемся к примеру 1. Из теоремы 6 вытекает

Следствие 3. *Предположим, что последовательность* $\{w(n)\}$ *определяется соотношениями* (5) *и выполнено* (6). *Пусть, кроме этого, существуют число* $q > 0$ *и вероятностная мера* Ψ *на* $\mathbf{R}_+^2$ *такие, что*

1) *для последовательности* $\xi_n = (\tau_n, s_n)$ *выполнено* (7);

2) *мера* Ψ *содержит абсолютно непрерывную компоненту относительно меры Лебега* λ *на* $\mathbf{R}_+^2$:

$$\Psi(B) \ge \int\int_B g(x, y)\, \lambda(dx \times dy),$$

причем существуют числа $0 \le a_1 < a_2 < \infty$ *и* $0 \le b_1 < b_2 < \infty$ *такие, что* $\operatorname{vrai\,inf}_A g(x, y) \equiv C > 0$ *при* $A = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$.

Тогда для последовательности $\{w(n)\}$ *имеет место утверждение теоремы* 1.

Доказательство. Пусть $\widehat{q} = qC$ и $\widehat{\Psi}(B) = \lambda(B \cap A)$. Из условий следствия вытекает, что (7) остается справедливым при замене q на $\widehat{q}$ и Ψ на $\widehat{\Psi}$. Определим, как и в доказательстве следствия 2, число $M > 0$ и при произвольном $0 \le x = (x_1, \dots, x_l) \le (M, \dots, M)$ рассмотрим ЦМ $\widehat{w}_x(n)$ с начальным условием $\widehat{w}_x(0) = x$. С помощью несложных, но громоздких арифметических выкладок можно убедиться в том, что найдутся число $m \ge 0$, множество $C = [a'_1, a'_2] \times [b'_1, b'_2]$, $\lambda(C) > 0$, и число $d > 0$ такие, что $\mathbf{P}(\widehat{w}_x(m+1) \in B) \ge d\lambda(B)$ при всех $B \subseteq C$, $x \le (M, \dots, M)$. Значит, выполнены условия теоремы 6. Следствие 3 доказано.

§ 4. УСЛОВИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ СУЩЕСТВОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ОБНОВЛЯЮЩИХ СОБЫТИЙ. СТАЦИОНАРНЫЕ МАЖОРАНТЫ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ

1. О структуре обновляющих событий. Мы видели в § 3, что условие эргодичности ($\mathrm{II_{RC}}$) для РЦ «доведено до уровня» условия (II) для ЦМ. Оно выражается в терминах локальных характеристик изучаемого процесса и, в этом смысле, является окончательным. Помимо этого, условие ($\mathrm{II_{RC}}$) и его модификации наглядны, и их проверка в прикладных задачах не вызывает, как правило, трудностей.

Иначе обстоит дело с условием ($\mathrm{I_{RC}}$). Оно требует дополнительных исследований. Ниже будут построены сравнительно простые условия, достаточные для выполнения ($\mathrm{I_{RC}}$). При этом опять проявляется существенная аналогия с условием (I) для ЦМ.

Прежде всего, отметим, что для РЦ, как и для СРП, неравенства типа ($\mathrm{II_{RC}}$) часто выполняются на событиях C_n^V вида

$$C_n^V = \{X(n) \in V,\ (\xi_n, \dots, \xi_{n+m}) \in Z\}, \tag{1}$$

$$\mathbf{P}\,((\xi_n, \dots, \xi_{n+m}) \in Z) > 0\,,$$

где $V \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$—множество из фазового пространства $\mathscr{X}$, которое задается с помощью некоторой (пробной) функции $L : \mathscr{X} \to \mathbf{R}$, а именно:

$$V = V_N = \{x :\ L(x) \le N\}. \tag{2}$$

Очевидно, что события такого вида не являются, вообще говоря, стационарными. Стационарной является лишь «часть» $\{(\xi_n, \dots, \xi_{n+m}) \in Z\}$. Поэтому, если нам удастся построить стационарную последовательность B_n такую, что

$$B_n \subseteq \{X(n) \in V\}\,,\ \mathbf{P}\left(B_n \cap \{(\xi_n, \dots, \xi_{n+m}) \in Z\}\right) > 0\,, \tag{3}$$

то требуемые обновляющие события будут найдены.

Пример 1. Рассмотрим последовательность $\{w(n)\}$, $w(0) = 0$, векторов ожидания в многоканальной системе обслуживания $G/G/l$ с очередью (см. пример 4.1): $w(n+1) = R(w(n) + e_1 s_n - i\tau_n)^+$, образующую СРП с управлением (τ_n, s_n). Обозначим $w(n) = (w_{n1}, \dots, w_{nl})$, где $w_{n1} \le w_{n2} \le \dots \le w_{nl}$. Как известно (см. [2]), при $\varepsilon > 0$ и достаточно больших N и $m = m(N, \varepsilon)$ события

$$C_n^N = \{\max_{1 \le i \le l} w_{ni} \le N,\ s_{n+j} - l\tau_{n+j} \le -\varepsilon,\ 0 \le j \le m\}$$

являются обновляющими для $\{w(n)\}$. Другими словами, в качестве V берется множество $V_N = \{x :\ L(x) \le N\}$, где $L(x) = \max_{1 \le i \le l} x_i$, а в качестве $Z \subseteq \mathbf{R}^{2m+2}$ — множество $Z = \{(y_1, \dots, y_{2m+2}) :\ y_{2k-1} \le l y_{2k} - \varepsilon\,,\ 1 \le k \le m+1\}$.

В [2] построены стационарные события A_n, влекущие за собой C_n и удовлетворяющие (3).

Вернемся к произвольным РЦ $\{X(n)\}$.

Определение 1. Последовательность событий $B_n \in \mathfrak{F}_n$ назовем *V-индуцирующей* для РЦ $\{X(n)\}$ (где $V \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$), если

1) $\{B_n\}$ — стационарна, $\mathbf{P}(B_0) > 0$;

2) $B_n \subseteq \{X(n) \in V\}$ при всех $n \ge n_0$ и некотором $n_0 < \infty$.

Существование V-индуцирующих последовательностей для весьма широкого класса множеств $\{V\}$ является необходимым для существования sc-сходимости, что показывает следующая

Лемма 1. *Если $X(n) \xrightarrow{sc} X^n$, то для любого множества V такого, что $\mathbf{P}(X^0 \in V) > 0$, существует V-индуцирующая последовательность $\{B_n\}$.*

Доказательство. Пусть, как и ранее,

$$\nu = \min\{n \ge 1 :\ U^{-k} X(k) = X^0 \text{ при всех } k \ge n\}.$$

Возьмем множество V, удовлетворяющее условию леммы, и положим

$$B_0 = \{\nu \le N\} \cap \{X^0 \in V\}, \quad B_n = T^n B_0,$$

где $N = \min\{l \ge 1 :\ \mathbf{P}(\nu \ge l) \ge 1 - \mathbf{P}(X^0 \in V)/2\}$. Тогда $\mathbf{P}(B_0) > 0$ и при $n \ge N$

$$\{X(n) \in V\} \supseteq \{X(n) \in V\} \cap B_n = B_n,$$

так как $X(n) = X^n$ п.н. на $T^n\{\nu \le N\}$. Лемма 1 доказана.

С учетом введенного определения из теоремы 4.3 вытекает

Следствие 1. *Пусть условие* (4.2) *выполняется п.н. на событиях C_n^V вида* (1), (2). *Если при этом существует V-индуцирующая последовательность $\{B_n\}$ такая, что*

$$\mathbf{P}\left(B_0 \cap \{(\xi_0, \dots, \xi_m) \in Z\}\right) > 0, \tag{4}$$

то существует собственная стационарная последовательность $\{X^n \equiv U^n X^0\}$ такая, что $X(n) \xrightarrow{sc} X^n$.

Условие (4) выполнено, если $\mathbf{P}(B_0) > 0$ и $\mathbf{P}((\xi_0, \dots, \xi_m) \in Z \mid \mathfrak{F}_{-1}) > 0$ при почти всех ω или если $\mathbf{P}(B_0) + \mathbf{P}((\xi_0, \dots, \xi_m) \in Z) > 1$.

Из вышесказанного следует, что одной из основных задач, возникающих при изучении условия (I_{RC}), является нахождение путей построения «доступных» V-индуцирующих последовательностей достаточно высокой вероятности. Если V задано в форме (2), то дело сводится к построению собственных стационарных мажорант L_n для последовательности $L(X(n))$: $L_n \ge L(X(n))$ п.н. Если такая мажоранта L_n построена, то V-индуцирующая последовательность имеет вид

$$B_n = \{L_n \le N\} \subseteq \{L(X(n)) \le N\} = \{X(n) \in V_N\}.$$

2. Условия существования стационарных V-индуцирующих событий в случаях $\mathscr{X}=\mathbf{R}_+$ и $\mathscr{X}=\mathbf{R}$. В этом пункте, как и в следующем, мы ограничимся рассмотрением СРП. Отметим, что утверждения, приведенные ниже для СРП, могут быть переформулированы и для РЦ, хотя и в более громоздкой форме.

Рассмотрим СРП $\{X(n)\}$ со значениями в $\mathbf{R}_+$. В этом случае уравнение (1) из введения может быть записано в виде

$$X(n+1) = (X(n) + h(X(n), \xi_n))^+ , \tag{5}$$

где $x^+ = \max(0, x)$, а $h : \mathbf{R}_+ \times \mathscr{Y} \to \mathbf{R}$ — любая измеримая функция такая, что $(x+h(x, y))^+ = f(x, y)$. Запись СРП в виде (5) иногда более удобна, так как накладывает меньше ограничений на приращения $h(X(n), \xi_n)$.

В этом случае множество V часто имеет вид компакта $V = \{x : x \le N\}$. Поэтому построение V-индуцирующего множества сводится к построению стационарной последовательности $\{L_n\}$, мажорирующей $\{X(n)\}$ в естественном смысле:

$$L_n \ge X(n) \text{ п.н. при всех } n \ge 0 ; \tag{6}$$

и нахождению числа N такого, что $\mathbf{P}(L_n \le N) > 1 - \mathbf{P}((\xi_0, \dots, \xi_m) \in Z)$.

Следующее достаточное условие для выполнения (6) было предложено в [21] (см. также п. 5):

Теорема 1. *Предположим, что существуют число $N > 0$ и функция $g_1 : \mathscr{Y} \to \mathbf{R}$, обладающие свойствами*

$$\mathbf{E}\, g_1(\xi_1) < 0 ; \tag{7}$$

$$h(x, y) \le \begin{cases} g_1(y) & \text{при } x > N, \\ g_1(y)+N-x & \text{при } x \le N . \end{cases} \tag{8}$$

Если $X(0) \le M < \infty$ п.н., то стационарная последовательность

$$L_n = \max(M, N) + \max\left(0, \sup_{k \ge 1} \sum_{j=n-k}^{n-1} g_1(\xi_j)\right)$$

является мажорантой для $\{X(n)\}$ (в смысле (6)).

Нам будет полезна следующая простая

Лемма 2. *Совокупность условий (7), (8) эквивалентна следующим: существуют измеримые функции $g_2 : \mathscr{Y} \to \mathbf{R}$, $g_3 : \mathscr{Y} \to \mathbf{R}_+$ и постоянная $C \ge 0$ такие, что*

$$\mathbf{E}\, g_2(\xi_1) < 0 , \ \mathbf{E}\, g_3(\xi_1) < \infty ; \tag{9}$$

$$X(n+1) - X(n) \le g_2(\xi_n) + g_3(\xi_n)\, \mathrm{I}(X(n) \le C) \tag{10}$$

п.н. при всех $n \ge 0$.

Доказательство. Пусть выполнены (7), (8). Определим число $z > 0$ так, чтобы $\mathbf{E}\max(g_1(\xi_1), -z) < 0$. Тогда при $n \ge 0$

$$X(n+1) - X(n) = \max(- X(n), h(X(n), \xi_n)) \le$$

$$\le \max(-X(n), g_1(\xi_n)) + (N - X(n))^+ \le \max(-z, g_1(\xi_n)) + z\mathrm{I}(X(n) \le z) +$$

$$+ N\,\mathrm{I}(X(n) \le N) \le \max(-z, g_1(\xi_n)) + (N+z)\,\mathrm{I}(X(n) \le N+z) .$$

Следовательно, (9), (10) справедливы при $g_2(y) = \max(-z, g_1(y))$, $g_3(y) \equiv \equiv C = N+z$.

Пусть теперь выполнены (9), (10). Обозначим $\alpha = -\mathrm{E}\, g_2(\xi_1)$ и найдем число $M > 0$ такое, что $\mathrm{E}\,\{g_3(\xi_1)\,;\, g_3(\xi_1) > M\} \le \alpha/2$. Введем функцию $g_1(y) = g_2(y) + g_3(y)\,\mathrm{I}\,(g_3(y) > M)$. Тогда $\mathrm{E}\, g_1(\xi_1) \le -\alpha/2 < 0$ и

$$h(X(n), \xi_n) \le X(n+1) - X(n) \le g_1(\xi_n) + M\,\mathrm{I}\,(X(n) \le C) \le$$

$$\le g_1(\xi_n) + (M + C - X(n))\,\mathrm{I}\,(X(n) \le M + C)\,.$$

Поэтому (8) имеет место при $N = M+C$. Лемма 2 доказана.

Обозначим, как и ранее, $\mathfrak{F}_n^\xi = \sigma\{\xi_k, k \le n\}$, $\mathfrak{F}^\xi = \mathfrak{F}_\infty^\xi$. Отметим, что доказательство теоремы 1 не претерпит изменений, если вместо $g_1(\xi_i)$, $g_2(\xi_i)$ мы рассмотрим произвольные стационарные метрически транзитивные последовательности $\{\Psi_n\}$, $\{\varphi_n\}$ измеримых относительно $\mathfrak{F}^\xi$ случайных величин, а также если будем предполагать, что $X(n)$ принимает значения на всей вещественной оси. Поэтому имеет место

Следствие 2. *Пусть* $\mathscr{X} = \mathbf{R}$, *и* $X(n)$, $X(0) \le M < \infty$, *есть* СРП *с управлением* $\{\xi_n\}$. *Если найдутся число* C *и измеримые относительно* $\mathfrak{F}^\xi$ *стационарные последовательности* $\{\Psi_n\}$, $\{\varphi_n\}$ *такие ,что*

1) $\mathrm{E}\,\Psi_n < 0$, $\varphi_n \ge 0$ *п.н.*, $\mathrm{E}\,\varphi_n < \infty$, (11)

2) $X(n+1) - X(n) \le \Psi_n + \varphi_n\,\mathrm{I}\,(X(n) \le C)$ *п.н.* (12)

при всех n, *то для последовательности* $\{X(n)\}$ *существует собственная стационарная мажоранта* $\{L_n\}$.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение следствия 2 останется в силе, если постоянную C в (12) заменить на случайную величину η_n, где $\{\eta_n\}$ — произвольная стационарная последовательность $\mathfrak{F}^\xi$-измеримых случайных величин, $\mathrm{E}\,|\eta_n| < \infty$. Действительно, достаточно рассмотреть последовательность $Y(n) = X(n) - \eta_n^+$ и заметить, что $Y(n+1) - Y(n) \le \Psi_n' + \varphi_n\,\mathrm{I}\,(Y(n) \le 0)$, где $\Psi_n' = \Psi_n + \eta_n^+ - \eta_{n+1}^+$, $\mathrm{E}\,\Psi_n' = \mathrm{E}\,\Psi_n < 0$. Поэтому для последовательности $\{Y(n)\}$ применимо следствие 2 и, значит, $X(n) \le \le L_n' + \eta_n^+$, где $\{\,\{L_n'\}$ — стационарная мажоранта для $Y(n)$.

З а м е ч а н и е 2 . Нетрудно видеть, что утверждение следствия 2 остается справедливым, если не предполагать, что $\{X(n)\}$ является СРП, а считать, что $\{X(n)\}$ — произвольная последовательность, заданная на одном с $\{\xi_n\}$ вероятностном пространстве и удовлетворяющая (11), (12).

Предположим теперь несколько более широкие по сравнению с (11), (12) условия, достаточные для построения стационарной мажоранты. Отметим, что если для вещественнозначной СРП $X(n+1) = f(X(n), \xi_n)$ выполнены условия (7), (8), то при $G(y) = \sup(f(z,y) - z : z > N)$ справедливо (при всех $y \in \mathscr{Y}$) неравенство $G(y) \le g_1(y)$, и, следовательно, $\mathrm{E}\, G(y) \le \mathrm{E}\, g_1(\xi_1) < 0$. Приведем пример, когда $\mathrm{E}\, G(\xi_1) \ge 0$, но оказывается возможным построить стационарную мажоранту, так что условия (7), (8) (или (11), (12)) являются ограничительными.

Пример 3. Пусть последовательность $X(n+1) = (X(n)+h(X(n), \xi_n))^+$ принимает значения в множестве $\mathbf{Z}_+$ и $\xi_n = (\psi_n, \eta_n)$ есть двумерная управляющая последовательность с целочисленными координатами,

$$h(X(n), \xi_n) = \Psi_n + \begin{cases} 0 & \text{при нечетных } X(n)\,, \\ \chi_n & \text{при четных } X(n)\,. \end{cases} \tag{13}$$

Предположим, что Ψ_n, χ_n — независимые случайные величины, причем $\mathbf{P}\,(\Psi_n=1)=1-\mathbf{P}\,(\Psi_n=-1)=p$, $0<p<1/2$ и $\mathbf{P}(\chi_n=2)=\mathbf{P}(\chi_n=-2)=1/2$. Отметим, что при любом $N>0$ $G(\xi_1) = \max(\Psi_1, \Psi_1+\chi_1) = \Psi_1+\max(0,\chi_1)$ и $\mathbf{E}\,G(\xi_1) = 2p > 0$. С другой стороны, пусть $X(0)=0$. Обозначим $\mu_n = \max\{k \le n : X(k)=0\}$. Тогда при любом $0<\varepsilon<1/2-p$ и при $\Psi_k' = \Psi_k+\varepsilon$, $\chi_k' = \chi_k-\varepsilon$ имеем

$$X(n) = \sum_{k=\mu_n}^{n-1} \Psi_k + \sum_{k=\mu_n}^{n-1} \chi_k \mathrm{I}\,\{k \ \text{ четно}\} \le$$

$$\le \max\left(0, \sup_{k\le n-1} \sum_{i=k}^{n-1} \Psi_i'\right) + \max\left(0, \sup_{k\ge 0} \sum_{i=0}^{k} \chi'_{n-2i-2}\right) + \max\left(0, \sup_{k\ge 0} \sum_{i=0}^{k} \chi'_{n-2i-1}\right),$$

т.е. мы построили стационарную мажоранту для $\{X(n)\}$.

Отметим, что условие (12) можно записать в виде

$$X(n+1) - X(n) \le \begin{cases} \Psi_n & \text{при } X(n) > C, \\ \chi_n & \text{при } X(n) \le C, \end{cases}$$

где $\chi_n = \Psi_n + \varphi_n$, $\mathbf{E}\chi_n^+ < \infty$.

Для того, чтобы понять, какого типа обобщения (12) возможны, рассмотрим следующую модель. Предположим, что множество (C,∞) можно разбить на две части $H_1 \cup H_2$ так, что выполнены неравенства

$$X(n+1) - X(n) \le \begin{cases} \Psi_{n,0} & \text{при } X(n) \le C, \\ \Psi_{n,1} & \text{при } X(n) \in H_1, \\ \Psi_{n,2} & \text{при } X(n) \in H_2, \end{cases} \tag{14}$$

где $\{\Psi_{n,0}\}$, $\{\Psi_{n,1}\}$, $\{\Psi_{n,2}\}$ — стационарные метрически транзитивные последовательности, измеримые относительно $\mathfrak{F}^\xi$, причем $\mathbf{E}\,\Psi_{n,0}^+ < \infty$, $\mathbf{E}\,\Psi_{n,1} < 0$, $\mathbf{E}\,\Psi_{n,2} < 0$. Следует ли из этих условий существование стационарной мажоранты для $\{X(n)\}$? Как показывает следующий пример, ответ на этот вопрос отрицателен. Более того, при выполнении перечисленных условий $X(n)$ может стремиться к бесконечности при $n \to \infty$.

Пример 4. Пусть последовательность $X(n+1) = (X(n) + h(X(n), \xi_n))^+$ определена по управлению $\xi_n = (\Psi_n, \chi_n)$ так же, как и в предыдущем примере, и последовательность $\{\Psi_n\}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{P}\,(\Psi_n=1)=1-\mathbf{P}\,(\Psi_n=-1)=p$. Последовательность $\{\chi_n\}$ определим несколько по-иному: $\{\chi_n\}$ не зависит от $\{\Psi_n\}$ и $\chi_{n+1} \equiv -\chi_n$, $\mathbf{P}\,(\chi_0=2)=\mathbf{P}\,(\chi_0=-2)=1/2$. Условие (14) выполнено при $\Psi_{n,1}=\Psi_n$, $\Psi_{n,2}=\Psi_n+\chi_n$. Однако нетрудно убедиться, что $X(n) \to \infty$

п.н. при любом начальном условии. Простоты ради, проверим это лишь при $X(0) = 0$ и на множестве $\{\chi_0 = 2\}$. Нетрудно видеть, что если $\Psi_0 = 1$, то $X(1) = 1$ и $X(2) = (1+\Psi_2-2)^+ = 0$. Кроме того, $X(2) = 0$ и в случае, когда $\Psi_0 = -1$, $\Psi_1 = -1$. Пусть $\nu = \min\{k \geq 0 : \Psi_{2k} = -1,\ \Psi_{2k+1} = 1\}$. Ясно, что $\mathbf{P}(\nu < \infty) = 1$ и $X(2\nu) = 0$. Кроме того, $X(2\nu+1) = 0$, $X(2\nu+2) = 1$ и при $i \geq 1$

$$X(2\nu+2i+1) = 1+2i + \sum_{j=3}^{2i+1} \Psi_{2\nu+j-1} \to \infty \quad \text{п.н. при } i \to \infty .$$

Отметим, что «отрицательный» эффект, использованный в примерах, состоит в том, что $\mathbf{E}(\chi_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n^\xi)$ может быть больше нуля с положительной вероятностью. Если же эту возможность исключить, то, как будет показано ниже, при некоторых дополнительных условиях удается построить стационарную мажоранту.

Перейдем к формулировке утверждений. Нам потребуется одно определение.

Пусть $V \subseteq \mathscr{X}$ — некоторое измеримое множество. Будем говорить, что выполнено условие (N_V), если случайные величины $X(n)$ принимают в множестве V лишь конечное число значений, т.е.

(N_V) *существует конечный набор точек* $x_1, \ldots, x_M \in V$ *таких, что при всех* n

$$\mathbf{P}(X(n) \in V) = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{P}(X(n) = x_i) .$$

Условие (N_V), конечно же, выполняется, если множество V конечно. Если $\{X(n)\}$ принимают значения на целочисленной решетке $\mathbf{Z}_+$, то условие (N_V) имеет место для любого ограниченного множества V.

Теорема 2. *Пусть* $\mathscr{X} = \mathbf{R}_+$, *и* $\{X(n)\}$, $X(0) = \text{const}$, *есть* СРП *с управлением* $\{\xi_n\}$. *Предположим, что для некоторого* $C \geq 0$ *существуют функции* $F_1\colon \mathscr{Y}^\infty \to \mathbf{R}$, $F_2\colon \mathbf{R}_+ \times \mathscr{Y}^\infty \to \mathbf{R}$, $F_3\colon \mathscr{Y}^\infty \to \mathscr{Y}$ *такие, что случайные величины* $\Psi_n = F_1(\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots)$, $\zeta_n(x) = F_2(x, \xi_n, \xi_{n-1}, \ldots)$, $\varphi_n = F_3(\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots)$ *удовлетворяют следующим соотношениям*:

1) $X(n+1) - X(n) \leq \Psi_n + \zeta_n(X(n)) + \varphi_n \mathrm{I}(X(n) \leq C)$; (13)

2) $\mathbf{E}\psi_n < 0$, $\mathbf{E}\varphi_n < \infty$;

3) *для некоторого* $\delta > 0$ $\sup_x \mathbf{E} \,|\zeta_0(x)|^{2+\delta} < \infty$;

4) *при всех* $n \geq 0$, x $\quad \mathbf{E}\{\zeta_n(x) \mid \mathfrak{F}_{n-1}^\xi\} \leq 0$ *п.н.*

Если при этом для множества $V = [0, C]$ *выполнено условие* (N_V), *то для последовательности* $\{X(n)\}$ *можно построить собственную стационарную мажоранту.*

Обозначим через $X(y, n)$ СРП с начальным условием $X(0) = y$, через $\gamma_0(y)$ — момент первого попадания $X(y, n)$ в множество V:

$$\gamma_0(y) = \min\{n \geq 1 : X(y, n) \in V\}$$

и через $S_n(y)$ — случайную величину

$$S_n(y) = \sum_{j=0}^{n} \zeta_j(X(y, j)) .$$

Рассмотрим, наряду с $(\mathrm{N_V})$, следующее более слабое условие:

$(\mathrm{N_V^1})$ *существуют случайная величина* Φ_0, $\mathbf{E}\,\Phi_0 < \infty$, *и конечный набор точек* $x_1, \dots, x_M \in \mathscr{X}$ *такие, что для любых* $y \in V$, $n \ge 1$ *неравенство*

$$S_n(y) \le \Phi_0 + \max_{1 \le i \le M} S_n(x_i)$$

справедливо п.н. на множестве $\{\gamma_0(y) > n\}$.

Имеет место

Теорема 3. *Если в теореме 2 условие* $(\mathrm{N_V})$ *заменить на условие* $(\mathrm{N_V^1})$, *то при любом начальном условии* $X(0) \in \mathbf{R}_+$, $X(0) = \mathrm{const}$, *для последовательности* $\{X(n) = X(X(0), n)\}$ *также можно построить стационарную мажоранту.*

В соответствии с рассуждениями, приведенными в доказательстве леммы 2, при доказательстве теорем 2, 3 можно без ограничения общности предполагать, что $\varphi_n \equiv C_1 = \mathrm{const} \ge 0$. Отметим также, что следствие 2 вытекает из теоремы 3 при $\zeta_n \equiv 0$, $\Phi_0 \equiv 0$, $M = 1$, $x_1 = C$.

Доказательство теоремы 2. Пусть, как и прежде, U — сохраняющее меру преобразование сдвига, порожденное $\{\xi_n\}$. Обозначим через $\mu_n = \max\{k \le n : X(k) \in V\}$ последний на интервале времени $[0, n]$ момент попадания в множество $V = [0, C]$, $\mu_n = 0$, если $X(k) > C$ при всех $k \le n$. Имеют место соотношения

$$X(n+1) \le C_2 + \sum_{j=\mu_{n+1}}^{n} \Psi_j + \sum_{j=\mu_{n+1}}^{n} \zeta_j(X(j)) \equiv$$

$$\equiv C_2 + \sum_{j=\mu_{n+1}}^{n} (\Psi_j + \alpha/2) + \sum_{j=\mu_{n+1}}^{n} (\zeta_j(X(j)) - \alpha/2) \equiv C_2 + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 ,$$

где $\alpha = -\mathbf{E}\,\Psi_1 > 0$, $C_2 = \max(x_0, C) + C_1$. Обозначим

$$\Psi_j' = \Psi_j + \alpha/2 , \qquad \zeta_j'(y) = \zeta_j(y) - \alpha/2 ,$$

$$S_n'(y) = \sum_{j=0}^{n} \zeta_j'(X(y, j)) \equiv S_n(y) - (n+1)\,\alpha/2 .$$

Отметим, что $\sum_1 \le \max\left(0, \sup_{k \le n} \sum_{i=k}^{n} \Psi_j'\right) \equiv \Psi^{n+1} < \infty$ п.н. и

$$\sum\nolimits_2 = \mathrm{I}\,(\mu_{n+1} = 0)\, S_n'(x_0) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}\,(\mu_{n+1}=k) \sum_{i=1}^{M} \mathrm{I}\,(X(k)=x_i) \sum_{j=k}^{n} \zeta_j'(X(j)) \equiv \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4 ,$$

где

$$\sum\nolimits_3 \le U^{n+1} \max \left(0, \sup_{k\ge 0} U^{-k-1} S_k'(x_0)\right) \equiv T^{n+1}(x_0) ,$$

$$\sum\nolimits_4 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}\,(\mu_{n+1}=k) \sum_{i=1}^{M} \mathrm{I}\,(X(k)=x_i) \sum_{j=k}^{n} U^k \xi_{j-k}'\,(X(x_i, j-k)) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}\,(\mu_{n+1}=k) \max_{1\le i\le M} U^k S_{n-k}'\,(x_i) \le$$

$$\le \sup_{k\le n} \max_{1\le i\le M} U^k S_{n-k}'\,(x_i) \equiv U^{n+1}\left(\max_{1\le i\le M} \sup_{k\ge 0} U^{-k-1} S_k'(x_i)\right) \equiv \max_{1\le i\le M} T^{n+1}(x_i) .$$

При каждом $i = 0, 1, \dots, M$ последовательность $\{T^n(x_i)\}$ стационарна. Покажем, что $T^n(x_i) < \infty$ п.н. Действительно,

$$\mathbf{P}\,(T^0(x_i) > t) \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\,(U^{-k} S_k'(x_i) > t\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\,(S_k'(x_i) > t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\,(S_k(x_i) > t + (k+1)\,\alpha/2) .$$

Так как $\{S_n(x_i)\}$ образует полумартингал, из условия 3 и известных неравенств для полумартингалов [22] следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\,(S_k(x_i) > t + (k+1)\,\alpha/2) \le \sum_{k=1}^{\infty} k\, c(t + k\,\alpha/2)^{-2-\delta}$$

при $t \to \infty$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 получается из доказательства теоремы 2, если заметить, что в условиях теоремы 3 верхняя оценка для $\sum_4$ совпадает с

$$\widetilde{T}^{n+1} \equiv U^n(\max_{1\le i\le M} \sup_{k\ge 0} U^{-k}(\Phi_0 + S_k'(x_i))$$

и имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\,(S_k(x_i) + \Phi_0 > t + (k+1)\,\alpha/2) \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\,(S_k(x_i) > t/2 + (k+1)\,\alpha/4) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\,(\Phi_0 > t/2 + (k+1)\,\alpha/4) .$$

3. Условия существования V-индуцирующих событий в случае произвольного фазового пространства. Сформулированные в предыдущем пункте результаты для фазовых пространств $\mathscr{X} = \mathbf{R}_+$ и $\mathscr{X} = \mathbf{R}$ естественным образом переносятся на случай произвольного фазового пространства $\mathscr{X}$, если воспользоваться так называемыми пробными функциями. Как и в предыдущем пункте, мы ограничимся лишь случаем СРП.

Пусть $\{X(n)\}$, $X(0) = \mathrm{const}$, есть СРП с управлением $\{\xi_n\}$, принимающая значения в пространстве $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$ и $L: \mathscr{X} \to \mathbf{R}_+$ — некоторая измеримая функция. Обозначим $X^L(n) = L(X(n))$. Имеет место

Следствие 3. *Пусть для последовательности* $\{X^L(n)\}$ *выполнены условия* (11), (12). *Тогда для нее можно построить собственную стационарную мажоранту* $\{L_n\}$. *Следовательно, если число* $c' \geq c$ *таково, что* $\mathbf{P}(L_n \leq c') > 0$, *то последовательность событий* $B_n = \{L_n \leq c'\}$ *является* V'*-индуцирующей для* $\{X(n)\}$, *где* $V' = L^{-1}([0, c'])$.

Следствие 3 вытекает из следствия 2, замечания 2 и определения V-индуцирующих событий.

Справедлива также

Теорема 4. *Пусть при некотором* $c \geq 0$ *для последовательности* $\{X^L(n)\}$ *выполняются условия* 1—4 *теоремы* 2 *и для* СРП $\{X(n)\}$ *выполнено одно из условий* $(\mathrm{N_V})$ *или* $(\mathrm{N_V^1})$ *при* $V = L^{-1}([0, C])$. *Тогда для последовательности* $\{X^L(n)\}$ *можно построить собственную стационарную мажоранту* $\{L_n\}$ *и последовательность событий* $B_n = \{L_n \leq c'\}$, *где* $c' \geq c$, $\mathbf{P}(B_n) > 0$, *является* V'*-индуцирующей для* $\{X(n)\}$ *при* $V' = L^{-1}([0, c'])$.

Формально утверждение теоремы 4 не следует из теорем 2, 3, так как последовательность $\{X^L(n)\}$ может, вообще говоря, не образовывать СРП. Однако, как нетрудно убедиться, рассуждения, используемые в ходе доказательства теорем 2, 3, применимы практически без изменений и в этом случае.

Приведем примеры, показывающие, что условия теорем 2—4 аналогичны известным критериям положительной возвратности для ЦМ.

Пример 5. Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная метрически транзитивная последовательность со значениями на прямой, $\mathbf{E}\,\xi_n < 0$, $\mathbf{E}\,(\xi_n^+)^2 < \infty$ и $f: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $X(0) = 0$, $X(n+1) = f(X(n), \xi_n)$. Предположим, что существует постоянная $c > 0$ такая, что $f(x, y) \leq (x + y/\max(x, c))^+$. Построим стационарную мажоранту для $\{X(n)\}$. Во-первых, заметим, что можно без ограничения общности предполагать, что $\mathbf{P}(\xi_n \geq -N) = 1$ для некоторого $N \gg 1$, $N > c^2$. При этом

$$f(x, y) \leq \begin{cases} N + y^+/c & \text{при } 0 \leq x \leq N, \\ x + g_1(y)/x & \text{при } x > N, \end{cases}$$

где $g_1(y) = \max(y, -n)$. Для пробной функции $L(x) = x^2$ имеем

$$L(f(x,y)) - L(x) \le \begin{cases} (N+y^+/c)^2 & \text{при } 0 \le x \le N, \\ 2\,g_1(y) + g_1^2(y)/x^2 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Выберем число $k > N^2$ так, что $\mathbf{E}\,(2\,g_1(\xi_1) + g_1^2(\xi_1)/k) < 0$, и определим функцию $g_2(y) = 2g_1(y)+g_1^2(y)/k$. Тогда

$$L(f(x,y)) - L(x) \le \begin{cases} g_2(y) & \text{при } x^2 > k, \\ G(y) & \text{при } x^2 < k, \end{cases}$$

где $G(y) = (N+y^+/c)^2 + 2\,y^+ + \max(N^2, (y^+)^2)/k$, $\mathbf{E}\,G(\xi_1) < \infty$. Поэтому применимо следствие 3, т.е. существует стационарная последовательность L_n такая, что $L(X(n)) \le L_n$ п.н. при всех n. Окончательно получаем, что $X(n) \le \sqrt{L_n}$ п.н. при всех n.

П р и м е р 6. Рассмотрим осциллирующее случайное блуждание на прямой. Пусть $\{\xi_{n,1}\}$, $\{\xi_{n,2}\}$, $\{\xi_{n,0}\}$ — три независимые между собой последовательности, состоящие из независимых одинаково распределенных в каждой последовательности величин, $\mathbf{E}\,|\xi_{n,0}| < \infty$, $\mathbf{E}\,\xi_{n,1} < 0$, $\mathbf{E}\,\xi_{n,2} < 0$. При $a, b > 0$ определим последовательность $X(n)$ по правилу

$$X(n+1) - X(n) = \begin{cases} \xi_{n,1} & \text{при } X(n) > b, \\ -\,\xi_{n,2} & \text{при } X(n) < -\,a, \\ \xi_{n,0} & \text{при } -\,a \le X(n) \le b\,. \end{cases}$$

Пусть, определенности ради, $-\,\alpha \equiv \mathbf{E}\,\xi_{n,1} \ge \mathbf{E}\,\xi_{n,2}$. Положим $\varphi_n = \xi_{n,1}$, $\eta_n = \xi_{n,2} - \xi_{n,1}$, $\mathbf{E}\,\eta_n \le 0$. Для любого N определим случайные величины

$$\psi_n = \alpha/3 + \varphi_n + 2(\,|\varphi_n|\,\mathrm{I}\,\{\,|\varphi_n| > N\} + |\eta_n|\,\mathrm{I}\,\{\,|\eta_n| > N\} + |\xi_{n,0}|\,\mathrm{I}\,\{\,|\xi_{n,0}| > N\})$$

и выберем число N настолько большим, чтобы выполнялись соотношения $\mathbf{E}\,\psi_n \le -\alpha/3$ и $\mathbf{E}\,\{\eta_n\,;\,|\eta_n| \le N\} \le \alpha/3$. При этом

$$|X(n+1)| - |X(n)| \le \psi_n + \zeta_n + \begin{cases} 3N & \text{при } |X(n)| \le N, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\zeta_n = \zeta_n(X(n)) = \eta_n\,\mathrm{I}\,\{\,|\eta_n| \le N\}\,\mathrm{I}\,\{X(n) < -a\} - \alpha/3$, т.е. условие 1 теоремы 2 выполнено при $L(x) = |x|$. Условия 2 и 3 теоремы 2 выполнены, так как величины ζ_n ограничены. Наконец, условие ($\mathrm{N}^1_{\mathrm{V}}$) выполнено при $V = [-n, N]$, если взять $\varepsilon \ll N$ так, чтобы N/ε было целым, и положить $M = 2N/\varepsilon+1$, $x_i = -n+(i+1)\varepsilon$, $1 \le i \le M$. Следовательно, применима теорема 4, т.е. для $\{X(n)\}$ найдется такая стационарная последовательность L_n, что $|X(n)| \le L_n$ п.н. Отметим, что приведенные в этом примере рассуждения проходят и в несколько более общем случае, когда последовательность $\{(\xi_{n,0}, \xi_{n,1})\}$ стационарна и метрически транзитивна, а последовательность $\{\eta_n = \xi_{n,2} - \xi_{n,1}\}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин, не зависящих от $\{\xi_{n,0}\,;\,\xi_{n,1}\}$.

4. Условия ограниченности по вероятности. Вернемся к случаю фазового пространства $\mathscr{X} = \mathbf{R}$ и исследуем следующую задачу: при каких условиях последовательность $\{X(n)\}$ ограничена по вероятности, т.е. когда $\sup_n \mathbf{P}\,(X(n) > t) \to 0$ при $t \to \infty$. Конечно же, из существования стационарной мажоранты следует ограниченность по вероятности. Однако обратное, вообще говоря, не верно и ограниченность по вероятности может быть получена и при существенно более широких условиях.

Кроме того, из замечаний к теореме 1.3 и к примеру 1.1 видно, что для условий c-сходимости требование существования стационарных мажорант является завышенным. Можно показать, что c-сходимость СРП (или РЦ) $X(n)$ к стационарной последовательности будет вытекать из полученных в пп. 4.2, 4.3 условий, содержащих предположение о наличии стационарной мажоранты, если это предположение заменить на ограниченность $X(n)$ по вероятности. Условия ограниченности по вероятности имеют и значительный самостоятельный интерес, так как в прикладных задачах часто бывает достаточно указать условия, гарантирующие ограниченность по вероятности рассматриваемого процесса, а изучение условий стабилизации процесса носит второстепенный характер.

Как мы увидим ниже, условия ограниченности по вероятности носят существенно более общий характер, чем условия существования V-индуцирующих множеств. Кроме того, они формулируются для произвольных последовательностей $\{X(n)\}$, не обязательно являющихся СРП или РЦ. Имеет место

Теорема 5. *Предположим, что на одном вероятностном пространстве заданы последовательности вещественнозначных случайных величин* $\{X(n)\}$, $\{\psi_n\}$, $\{\zeta_n\}$ *и возрастающая последовательность* σ*-алгебр* $\mathfrak{F}_n$ *такие, что*

1) *справедливо неравенство*

$$X(n+1) - X(n) \le \psi_n + \zeta_n + C_1 \, \mathrm{I}\,(X(n) \le C_2) \tag{16}$$

п.н. при всех $n \ge 0$ *для некоторых постоянных* C_1 *и* C_2;

2) $\{\psi_n\}$ — *стационарная метрически транзитивная последовательность;* $\mathbf{E}\,\psi_n < 0$;

3) $\mathfrak{F}_n \supseteq \sigma\{\zeta_k\,;\, k \le n\}$, $\mathbf{E}\,(\zeta_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n) \le 0$ *п.н.*;

4) $\sup\limits_n \mathbf{E}\,(\,|\zeta_n|\; g(|\zeta_n|)) \equiv C < \infty$

для некоторой функции $g\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, *являющейся непрерывной, выпуклой вверх, монотонно возрастающей и удовлетворяющей условиям*

$$g(0) = 0\,, \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x g(x)} < \infty\,.$$

Тогда последовательность $\{X(n)\}$ *ограничена по вероятности.*

Очевидно, что в качестве g можно взять $g(x)=x^\varepsilon$ при любом $0<\varepsilon\le 1$.

Следствие 4. *Предположим, что* СРП $\{X(n)\}$ *принимает значения в* $\mathbf{R}_+$, $X(0) = 0$ *и функция* f *монотонно не убывает по первому аргументу. Тогда при выполнении условий теоремы 5 для последовательности* $\{X(n)\}$ *можно построить стационарную мажоранту. Более того, имеет место слабая сходимость распределений* $X(n)$ *к собственному предельному распределению.*

Доказательство. Из свойств монотонности следует, что последовательность $U^{-n}X(n)$ монотонно не убывает. Следовательно, существует п.н. предел $X^0 = \lim_{n\to\infty} U^{-n}X(n)$ и, в силу теоремы 5,

$$\mathbf{P}(X^0 > x) = \sup_n \mathbf{P}(U^{-n}X(n) > x) = \sup_n \mathbf{P}(X(n) > x) \to 0 \text{ при } x \to \infty .$$

Доказательство теоремы 5 начнем с двух вспомогательных лемм.

Лемма 3. *Пусть* $g: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *— выпуклая вверх, непрерывная, неубывающая функция,* $g(0) = 0$. *Тогда найдется постоянная* $K = K(g)$, $1 \le K \le 3$, *такая, что для любых чисел a, b будет справедливо неравенство*

$$|a+b|\, g(|a+b|) \le$$

$$\le |a|\, g(|a|) + K|b|\, g(|b|) + b(g(|a|) + |a|\, g'(|a|))\,\mathrm{sign}\, a.$$

Здесь $g'(x) \equiv \lim_{\Delta \downarrow 0} (g(x+\Delta) - g(x))/\Delta$ — правая производная в точке x, $x > 0$.

Доказательство. Без ограничения общности, можно предполагать, что $g(x) > 0$ при $x > 0$. Далее, отметим, что так как $g'(x)$ — невозрастающая функция, $x\,g'(x) \le g(x)$ при любом $x > 0$. Действительно,

$$g'(x)\,x = \int_0^x g'(x)\,dz = \lim_{\Delta\to 0} \int_\Delta^x g'(x)\,dz \le$$

$$\le \lim_{\Delta\to 0} \int_\Delta^x g'(z)\,dz = \lim_{\Delta\to 0} (g(x) - g(\Delta)) = g(x).$$

Поэтому можно ввести постоянную $c = c(g) = \sup_{x>0} g'(x)\,x/g(x) \le 1$ и положить $0\cdot g'(0) = 0$.

Отметим, что достаточно доказать утверждение леммы лишь при $a > 0$. Обозначим $d = |b|$ и рассмотрим три возможных случая 1) $b \ge 0$, 2) $b < 0$, $d \le a$ и 3) $b < 0$, $d > a$.

Случай 1. Имеет место равенство

$$(a+b)g(a+b) = ag(a) + bg(b) + a[g(a+b) - g(a)] + b[g(a+b) - g(b)].$$

Так как

$$g(a+b) - g(a) = \int_a^{a+b} g'(z)\,dz \le g'(a)\,b, \quad g(a+b) - g(b) \le g(a),$$

выполнены неравенства

$$(a+b)g(a+b) \le ag(a) + bg(b) + b[ag'(a) + g(a)] \le ag(a) + Kbg(b) + b[ag'(a) + g(a)]$$

при любом $K \ge 1$.

Случай 2. Имеет место равенство

$$(a+b)g(a+b) = (a-d)g(a-d) = ag(a) + dg(d) - a[g(a) - g(a-d)] - d[g(a-d) + g(d)].$$

Так как $g(a-d)+g(d) \ge g(a)$,

$$g(a) - g(a-d) = \int\limits_{a-d}^{a} g'(z)\, dz \ge g'(a)d ,$$

имеем

$$(a-d)g(a-d) \le ag(a)+dg(d)-ag'(a)d-dg(a) \le ag(a)+K|b|g(|b|)+b(g(a)+ag'(a))$$

при любом $K \ge 1$.

Случай 3. Справедливы соотношения

$$|a+b|g(|a+b|) = (d-a)g(d-a) \le dg(d) \le ag(a)+(2+c)dg(d)-(1+c)dg(d) \le$$

$$\le ag(a)+(c+2)dg(d)-d(g(a)+ag'(a)) = ag(a)+(c+2)|b|g(|b|)+b(g(a)+ag'(a)) .$$

Следовательно, утверждение леммы справедливо при $K = c+2$.

Лемма 4. *Пусть $\{\eta_{-k}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность случайных величин, $S_k = \eta_{-k}+ \ldots + \eta_{-1}$, $S_0 = 0$ и $\ldots \subseteq \mathfrak{F}_{-k} \subseteq \mathfrak{F}_{-k+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{F}_{-1}$ — возрастающая последовательность σ-алгебр такие, что*

1) $\mathfrak{F}_{-k} \supseteq \sigma(\eta_{-l},\ l \ge k)$ *при всех* k ;

2) $\mathbf{E}\,(\eta_{-k} \mid \mathfrak{F}_{-k-1}) \le -\delta < 0$ *п.н. при всех* k ; (17)

3) $\sup\limits_{k\ge 1} \mathbf{E}\,(\,|\eta_{-k}|\ g(\,|\eta_{-k}|\,)) = c < \infty$, (18)

где g — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 5. Тогда $\overline{S} = \sup\{S_k : k\ge 0\}$ есть собственная случайная величина. Более того, можно подобрать постоянные K_1 и K_2 так, что

$$\mathbf{P}\,(\overline{S} > t) \le \frac{K_1}{g(t)} + K_2 \int\limits_{t\delta/2}^{\infty} \frac{dx}{xg(x)} .$$

З а м е ч а н и е 4. Утверждение леммы 4 остается справедливым, если а) условие (17) заменить на следующее:

$$\mathbf{E}\,(\eta_{-k} \mid \mathfrak{F}^{+}_{-k+1}) \le -\delta < 0 \text{ п.н.}$$

при всех k , где $\mathfrak{F}^{+}_{-k} \supseteq \sigma(\eta_{-l},\ 1 \le l \le k)$ — некоторая убывающая последовательность σ-алгебр

или

б) условия (17), (18) заменить на следующее:

$$\mathbf{P}\,(\eta_{-k} > t \mid \mathfrak{F}_{-k-1}) \le \psi(t)) \text{ п.н.}$$

при всех t, k , где $\int t\, d\psi(t) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 4. Не ограничивая общности можно предполагать, что $\mathfrak{F}_{-k} = \sigma(\eta_{-l},\ l \ge k)$. Введем случайные величины $z_k = \eta_{-k} - \mathbf{E}\,(\eta_{-k} \mid \mathfrak{F}_{-k-1})$, $Y_{k,n} = z_{n+1} + \ldots + z_{n+k}$, $\overline{Y}_{k,n} = \max\left(0,\ \max\limits_{1\le l\le n} Y_{l,n}\right)$, $Y_k = Y_{k,0}$, $\overline{Y}_k = \overline{Y}_{k,0}$. Обозначим $d_{k,n} = \mathbf{E}\,(\overline{Y}_{k,n}\ g(\overline{Y}_{k,n}))$. Отметим, что последовательность $\{Y_k\}$ образует мартингал и $\mathbf{E}\ |z_k|\, g(\,|z_k|\,)) \le c' < \infty$. Кроме того, $z_k \ge \eta_{-k} + \delta$ п.н. Используем лемму 3:

$$d_{k,\,n} = \mathbf{E}\,\{\max(0,\, z_{n+1} + \overline{Y}_{k-1,\,n+1})\, g(\max(0,\; z_{n+1} + \overline{Y}_{k-1,\,n+1}))\} \le$$

$$\le \mathbf{E}\,\{\,|\, z_{n+1} + \overline{Y}_{k-1,n+1}\,|\, g(\,|\, z_{n+1} + \overline{Y}_{k-1,n+1}\,|\,)\} \le$$

$$\le d_{k-1,n+1} + K\,\mathbf{E}\,\{\,|\, z_{n+1}\,|\;\; g(\,|\, z_{n+1}\,|\,)\} +$$

$$+\,\mathbf{E}\,\{g(\overline{Y}_{k-1,n+1}) + \overline{Y}_{k-1,n+1}\;\; g'(\overline{Y}_{k-1,n+1})\}\;\mathbf{E}\,\{z_{n+1}\,|\,\mathfrak{F}_{-n-2}\} \le d_{k-1,n+1} + K\,c'.$$

Так как $d_{1,\,l} \le c' < \infty$ при любом l, по индукции получаем оценку $d_{k,\,n} \le kK\,c' \equiv\; k\,K_1$ при всех $n,\, k \ge 0$. Далее, для любого целого $t > 0$

$$\mathbf{P}\,(\overline{S} \ge t) \le \mathbf{P}\,(\overline{S}_t \;\ge t) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\,\Big(\max_{t2^{i-1} < k \le t2^i} S_k \;\ge t\Big) \le$$

$$\le \mathbf{P}\,(\overline{Y}_t \;\ge t) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\max_{t2^{i-1} < k \le t2^i} Y_k \;\ge t\,(1 + 2^{i-1}\,\delta)\right) \le$$

$$\le \mathbf{P}\,(\overline{Y}_t \;\ge t) + \;\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\,(\overline{Y}_{t\,2^i} \;\ge t\,(1 + 2^{i-1}\,\delta))\,.$$

По неравенству Чебышева последняя сумма не превосходит выражения (здесь $d_k \equiv d_{k,0}$)

$$\frac{d_t}{t\,g(t)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_t\; 2^i}{t\,2^{i-1}\;\;\delta\, g(t\,2^{i-1}\delta)} \le \frac{K_1}{g(t)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_1 t\, 2^i}{t\,2^{i-1}\;\delta\; g(t\,2^{i-1}\delta)} =$$

$$= \frac{K_1}{g(t)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4K_1}{\delta} \int\limits_{t2^{i-2}\delta}^{t\,2^{i-1}\delta} \frac{dx}{t\,2^{i-1}\delta\; g(t\,2^{i-1}\delta)} \le$$

$$\le \frac{K_1}{g(t)} + \frac{4K_1}{\delta} \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{t2^{i-2}\delta}^{t2^{i-1}\delta} \frac{dx}{x\,g(x)} = \frac{K_1}{g(t)} + \frac{4K_1}{\delta} \int\limits_{t\,\delta/2}^{\infty} \frac{dx}{x g(x)}\,.$$

Лемма 4 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 5. Введем случайные величины $\psi_k^* = \psi_k + \varepsilon/2$ и $\zeta_k^* = \zeta_k - \varepsilon/2$, где $\varepsilon = -\,\mathbf{E}\,\psi_k$. Тогда

$$X(n+1) \le C_1 + C_2 + \sum_{k=\mu_{n+1}}^{n} \psi_k^* + \sum_{k=\mu_{n+1}}^{n} \zeta_k^* \equiv C_3 + \textstyle\sum_1 + \sum_2\,,$$

где $\mu_n = \max\,\{k \le n : X(k) \le C_2\}$ и $\mu_n = 0$, если $X(k) > C_2$ при всех $k \le n$. Отметим, что

$$\textstyle\sum_1 \le \max\left(0,\; \sup\limits_{j \ge 0} \sum\limits_{k=n-j}^{n} \psi_k^*\right) \;\equiv\; \Psi^{\,n+1} < \infty \text{ п.н.},$$

где последовательность $\{\Psi^{\,n}\}$ является стационарной.

Положим $\zeta_k^* = -\varepsilon/2$ при $k \le 0$ и $\eta_l = \zeta_{l+n-1}^*$. Тогда $\sum_2 \le \max(0, \sup(\sum_{k=-l}^{-1} \eta_k : l \ge 1))$. Из леммы 4 следует, что

$$\mathbf{P}\left(\sum\nolimits_2 > t\right) \le \frac{K_1}{g(t)} + K_2 \int_{t\varepsilon/4}^{\infty} \frac{dx}{x\, g(x)},$$

где правая часть неравенства не зависит от n. Тем самым $\mathbf{P}(X(n+1) > t + C_3) \le \mathbf{P}(\Psi^{n+1} > t/2) + \mathbf{P}(\sum_2 > t/2)$ равномерно по n. Теорема 5 доказана.

5. О других условиях существования V-индуцирующих событий и ограниченности по вероятности. Содержание пп. 2—4 состоит, грубо говоря, в следующем: взяв в качестве исходных условия (7), (8), мы рассмотрели варианты их обобщения, достаточные либо для построения V-индуцирующих множеств, либо для ограниченности по вероятности изучаемой последовательности $\{X(n)\}$. Изложенные подходы могут быть реа- лизованы также для моделей с другими «исходными» условиями.

Рассмотрим, например, последовательность $\{X(n)\}$ со значениями в $\mathscr{X} = \mathbf{R}_+$, для которой п.н. имеют место неравенства

$$X(n+1) \le \alpha_n X(n) + \begin{cases} \beta_n & \text{при } X(n) > C_2, \\ C_1 & \text{при } X(n) \le C_2, \end{cases} \tag{19}$$

где $\{\alpha_n, \beta_n\}$ — стационарная метрически транзитивная последовательность, причем $\mathbf{P}(\alpha_n > 0) = 1$, $\mathbf{E}(\ln \alpha_n)^+ < \infty$, $\mathbf{E}(\ln \beta_n^+)^+ < \infty$. В работах [23, 24] изучались асимптотические свойства последовательностей вида $X(n+1) = \alpha_n X(n) + \beta_n$ и связанных с ними процессов с непрерывным временем. Обозначим $\sigma_n = \ln \alpha_n$. Справедлива

Теорема 6. *Если* $\mathbf{E}\sigma_n < 0$ *или* $\sigma_n \equiv 0$, $\mathbf{E}\beta_n < 0$ *(последние два соотношения означают выполнение условий* (7), (8)), *то для последовательности* $\{X(n)\}$ *можно построить стационарную мажоранту.*

Доказательство. Предположим, простоты ради, что $X(0) = \text{const} \le C_1$. Введем, как и ранее, случайную величину $\mu_{n+1} = \max\{k \le n+1 : X(k) \le C_2\}$. Тогда

$$X(n+1) \le C_2 \prod_{i=\mu_{n+1}}^{n} \alpha_i + \sum_{i=\mu_{n+1}}^{n} \beta_i \prod_{j=i}^{n-1} \alpha_j + C_1 =$$

$$= C_2 \exp\left\{ \sum_{i=\mu_{n+1}}^{n} \sigma_i \right\} + \sum_{i=\mu_{n+1}}^{n} \beta_i \exp\left\{ \sum_{j=i}^{n-1} \sigma_j \right\} + C_1 \le$$

$$\le \sup_{-\infty < m \le n+1} \left(C_1 + C_2 \exp\left\{ \sum_{i=m}^{n} \sigma_i \right\} + \sum_{i=m}^{n} \beta_i \exp\left\{ \sum_{j=i}^{n-1} \sigma_j \right\} \right) \equiv Y^{n+1}.$$

Покажем, что $Y^{n+1} < \infty$ п.н. Действительно, при $n = -1$ случайная величина $\sup(\sum_{i=m}^{-1} \sigma_i : m \le 0)$ конечна п.н. и

$$\sup_{m\le 0}\sum_{i=m}^{-1}\beta_i \exp\left\{\sum_{j=i}^{-2}\sigma_j\right\} \le \sup_{m\le -N}(\dots) + \max_{-N\le m\le 0}(\dots),$$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{m\le -N}(\dots) > t\right) \le$$

$$\le \mathbf{P}\left(\sup_{m\le -N}\sum_{i=m}^{-1}\beta_i^+ e^{-i(\varepsilon-\delta)} > \frac{t}{2}\right) + \mathbf{P}\left(\sup_{m\le -N}\left(\sum_{i=m}^{-2}\sigma_i\right) - (i-1)(\varepsilon-\delta) \ge 0\right),$$

где $\varepsilon = -\mathbf{E}\sigma_1 > 0$ и $0 < \delta < \varepsilon$ — любое число. Из последних неравенств следует конечность Y^0 и тем самым утверждение теоремы 5.

Условие (19) может быть обобщено, если использовать изложенные в пп. 2—4 подходы.

Утверждение теоремы 6 было инициировано обсуждениями с профессором Ф. Баччелли проблем, затронутых в данном параграфе.

§ 5. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РЕКУРСИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим последовательность РЦ $\{{}^rX = {}^rX(n) \equiv {}^rX({}^rx_0, n)\}$, $r = 1, 2, \dots, \infty$, с управлениями $\{{}^r\xi_n\}$ и переходными функциями ${}^rP(x, y, B)$, зависящими от параметра r. Все РЦ ${}^rX$ принимают значения в пространстве $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$, а управления (являющиеся стационарными метрически транзитивными последовательностями) — в пространстве $(\mathscr{Y}, \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}})$. Все обозначения, введенные ранее и соответствующие процессу ${}^rX$, мы будем снабжать верхним левым индексом r. Нам будет удобно полагать $X = {}^\infty X$. Будем предполагать, что выполнено следующее условие:

(S_1) При каждом $r = 1, 2, \dots, \infty$ РЦ $\{{}^rX(n)\}$ удовлетворяет условиям (I_{RC}), (II_{RC}), так что $\{{}^rX(n)\}$ *sc*-сходится к стационарной последовательности $\{{}^rX^n\}$.

Помимо этого, чтобы избежать излишне громоздких обозначений и формулировок, мы дополнительно предположим, что выполнено условие

(S_2) Функции φ и p, фигурирующие в условии (II_{RC}), не зависят от своих аргументов $(y_0, \dots, y_m)$ (т.е. $p \equiv \mathrm{const}$ и $\varphi(\dots; B) = \varphi(B)$); параметры $m \ge 0$, p и мера φ не зависят от r.

Задача устойчивости состоит в выявлении условий, при которых стационарные и достационарные распределения РЦ ${}^rX$ сходятся к стационарным распределениям РЦ $X = {}^\infty X$.

Чтобы сформулировать основное утверждение, нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения. Пусть задана стационарная последовательность обновляющих событий $A_n \in \mathfrak{F}^\xi_{n+m}$, $\mathbf{P}(A_n) > 0$. Введем случайные величины

$$\mu_0 = \max\{k \le -m : \mathrm{I}(A_k) = 1\},$$

$$\mu_{j+1} = \min\{k \ge \mu_j + m : \mathrm{I}(A_k) = 1\} \quad \text{при } j \ge 0,$$

$$\mu_{j-1} = \max\{k < \mu_j - m : \mathrm{I}(A_k) = 1\} \quad \text{при } j \le 0 .$$

Другими словами, мы ввели в рассмотрение последовательные моменты наступления событий A_n, разделенные интервалами времени m.

При заданных $n \ge 0$, $k_1 \le 0 \le k_2$ и последовательности $\{l_j \; k_1 \le j \le k_2\}$ такой, что $l_{k_2} < n-m$, $l_0 = -m$, $l_j - l_{j-1} > m$ при $j = k_1+1$, $k_1+2, \dots, k_2$ обозначим через $D_n = D_n\{k_1, k_2, \{l_j\}\}$ событие

$$D_n = \bigcap_{j=k_1}^{k_2} \{\mu_j = l_j\} \cap \{\mu_{k_2+1} \ge n-m\} .$$

В частности, при $m = 0$ событие D_n означает, что на отрезке времени $[1, n-1]$ события A_j (назовем их «успехами») происходят ровно k_2 раз (т.е. происходит k_2 «успехов», причем первый из них происходит в момент времени l_1, второй — в момент $l_2, \dots$, и k_2-й — в момент l_{k_2}; (k_2+1)-й «успех» происходит в момент $n-m$ или позже), последовательные «успехи» на отрицательной полуоси происходят в моменты l_j, $k_1 \le j \le 0$, соответственно. Аналогичная, но более сложная словесная версия может быть дана и при $m > 0$.

При $n \ge 0$ для $x \in \mathscr{X}$, $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ и события $D \in \mathfrak{F}_n^{\xi}$ через $P_{(n)}(x, B, D)$ будем обозначать вероятность

$$P_{(n)}(x, B, D) = \mathbf{P}(\{X(x, n+1) \in B\} \cap D) .$$

Имеет место

Теорема 1. *Предположим, что наряду с* (S_1), (S_1) *выполнены следующие условия:*

(S_3) $\liminf\limits_{r \to \infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} ({}^rA_i)\right) \equiv d_n \to 1$ *при* $n \to \infty$;

(S_4) *для некоторого* $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ *и при любых* n, k_1, k_2 *и* $\{l_j\}$, *удовлетворяющих сформулированным в определении* D_n *условиям,*

$$\int \varphi(dx)\; {}^rP_{(n)}(x, B, {}^rD_n) \to \int \varphi(dx)\, P_{(n)}(x, B, D_n)$$

при $r \to \infty$. *Тогда для данного события* B $\mathbf{P}({}^rX(n) \in B) \to \mathbf{P}(X^0 \in B)$ *при* $n, r \to \infty$. *В частности,* $\mathbf{P}({}^rX^0 \in B) \to \mathbf{P}(X^0 \in B)$.

Замечание 1. Можно привести ряд естественных и сравнительно простых условий, достаточных для выполнения (S_3), (S_4). Пусть в пространствах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ введены топологии слабой сходимости, согласованные с соответствующими σ-алгебрами. Предположим, простоты ради, что ${}^rX$ являются СРП с управлениями $\{{}^r\xi_n\}$ при всех r: ${}^rX(n+1) = {}^rf({}^rX(n), {}^r\xi_n)$, события ${}^rA_n \in {}^r\mathfrak{F}_{n+m}$ являются обновляющими для ${}^rX(n)$, т.е. ${}^rX(n+m+1) = = {}^rg({}^r\xi_n, \dots, {}^r\xi_{n+m})$ п.н. на ${}^rA_n$, и ${}^rA_n$ представимы в виде ${}^rA_n = \{{}^rh_n < C\}$, где $C = \mathrm{const}$, ${}^rh_n = h({}^r\xi_{n+m}, {}^r\xi_{n+m-1}, \dots)$ и $h : \mathscr{Y}^{\infty} \to \mathbf{R}$ — некоторая измеримая функция.

Тогда (см. [21]) условия (S_3), (S_4) будут выполнены, если

1) конечномерные совместные распределения $({}^r\xi_n, {}^rh_n)$ слабо сходятся при $r \to \infty$ к распределениям (ξ_n, h_n), и $\mathbf{P}(h_n = C) = 0$;

2) функции $g_k(x_0, \dots, x_k)$, определяемые из равенств $g_m = g$ и $g_{k+1}(x_0, \dots, x_{k+1}) = f(g_k(x_0, \dots, x_k), x_{k+1})$, непрерывны п.н. относительно распределения $(\xi_0, \dots, \xi_k)$ при всех k, и

$$\sup_{(x_0,\dots x_k) \in B_k^r} |{}^rg_k(x_0, \dots, x_k) - g_k(x_0, \dots, x_k)| \to 0$$

при $r \to \infty$ для любой последовательности множеств $\{B_k^r,\ r \ge 1\}$ такой, что $\mathbf{P}(({}^r\xi_0, \dots, {}^r\xi_k) \notin B_k^r) \to 0$;

3) множество $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ таково, что $\mathbf{P}(X^0 \in \partial B) = 0$, где через ∂B обозначена граница множества B.

Доказательство теоремы 1. Как и ранее, ограничимся лишь случаем $m = 0$. Будем считать, что все рассматриваемые случайные величины заданы на одном вероятностном пространстве.

Рассмотрим, как и в доказательстве теоремы 4.3, «расширенные» РЦ ${}^r\widetilde{X}(n) = ({}^rX(n), \delta_n)$ с управлениями ${}^r\widetilde{\xi}_n = ({}^r\xi_n, \delta_n)$ и введем события ${}^rC_n = {}^rA_n \cap \{\delta_n = 1\}$. Заметим, что из условия (S_3) следует

$$\liminf_{r \to \infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} {}^rC_i\right) \to 1 \tag{1}$$

при $n \to \infty$. Действительно, рассмотрим событие $E_{lk} = \{\delta_l = \delta_{l+1} = \dots = \delta_{l+k} = 1\}$. Тогда при $k \le n$

$$\liminf_{r \to \infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} {}^rC_i\right) \ge \sum_{l=0}^{n-k} \mathbf{P}\left(E_{lk} \cap \left(\bigcap_{j=0}^{l-1} \overline{E}_{jk}\right)\right) \liminf_{r \to \infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=l}^{l+k} {}^rA_i\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\bigcup_{l=0}^{n-k} E_{lk}\right) \liminf_{r \to \infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=0}^{k} {}^rA_i\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{l=0}^{n-k} E_{lk}\right) d_k .$$

Выберем k так, чтобы $d_k \ge 1-\varepsilon$ и по нему n — так, чтобы $\mathbf{P}(\bigcup_{l=0}^{n-k} E_{lk}) \ge 1-\varepsilon$. Тогда искомый предел будет не меньше, чем $1-2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ соотношение (1) доказано.

Далее, обозначим ${}^r\gamma_n = \max\{k \le n : \mathbf{I}({}^rC_k) = 1\}$. Так как

$$\mathbf{P}({}^r\gamma_n < n-j) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{j} {}^r\overline{C}_{n-i}\right),$$

где $\overline{C}_k = \Omega \setminus C_k$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется L такое, что $\mathbf{P}({}^r\gamma_n < n-L) \le \varepsilon$ при всех $r = 1, 2, \dots, \infty$. Поэтому при $n \gg L$

$$\mathbf{P}({}^r\widetilde{X}(n+1) \in B) = \sum_{i=m}^{L} \mathbf{P}({}^r\widetilde{X}(n+1) \in B, {}^r\gamma_n = n-i) + O(\varepsilon) .$$

Покажем, что при всех i

$$\mathbf{P}\,({}^r\widetilde{X}(n+1) \in B, {}^r\gamma_n = n-i)) \to \mathbf{P}\,(\widetilde{X}(n+1) \in B,\ \gamma_n = n-i)$$

при $r \to \infty$. Действительно, при $s = n-i$

$$\mathbf{P}\,({}^r\widetilde{X}(n+1) \in B, {}^r\gamma_n = n-i)) = \mathbf{P}\,({}^r\widetilde{X}(s+1) \in B, {}^r\gamma_s = 0) =$$

$$= \sum_{1\le k\le s}\ \sum_{l_1<\ldots<l_k\le s} \mathbf{P}\,({}^r\widetilde{X}(s+1) \in B, {}^r\mu_0 = 0, {}^r\mu_j = l_j,\ 1 \le j \le k,$$

$${}^r\mu_{k+1} > s,\ \delta_0 = 1,\ \delta_{l_j} = 0,\ 1 \le j \le k)\,,$$

где каждое слагаемое в последней сумме можно представить в виде

$$\mathbf{P}\,({}^r\widetilde{X}(s+1) \in B, {}^r\mu_0 = 0,\ \delta_0 = 1, {}^r\mu_j = l_j,\ 1 \le j \le k,\ {}^r\mu_{k+1} > s) -$$

$$- \sum_{t=1}^{k} \mathbf{P}\,({}^r\widetilde{X}(s+1) \in B,\ {}^r\mu_0 = 0,\ \delta_0 = 1,\ {}^r\mu_j = l_j,\ 1 \le j \le k,$$

$${}^r\mu_{k+1} > s,\ \delta_{l_j} = 0,\ 1 \le j \le k,\ \delta_{l_t} = 1)\,.$$

При этом уменьшаемое в последнем выражении равно

$$p\int \mathbf{P}\,({}^r\widetilde{X}(x, s) \in B,\ {}^r\mu_0 = -1,\ {}^r\mu_j = l_{j-1},\ 1 \le j \le k,\ {}^r\mu_{k+1} > s-1)\,\varphi(dx)\,, \tag{2}$$

а каждое из вычитаемых совпадает, соответственно, с

$$p^2\,(1-p)^{t-1} \int \mathbf{P}\,({}^r\widetilde{X}(x, s-l_t-1) \in B,$$

$${}^r\mu_{j-t} = l_j - l_t - 1,\ 1 \le j \le k,\ {}^r\mu_{k+1-t} > s-l_t-1)\,\varphi(dx)\,. \tag{3}$$

В силу условия (S_4), каждое из выражений (2), (3) сходится при $r \to \infty$ к соответствующему выражению, в котором опущен индекс r. Тем самым теорема 1 доказана.

Другие подходы к задачам устойчивости рассматривались в [31, 32].

§ 6. ЭРГОДИЧНОСТЬ ПРОЦЕССОВ, ДОПУСКАЮЩИХ ВЛОЖЕННЫЕ РЕКУРСИВНЫЕ ЦЕПИ

1. Основные определения. Пусть $Z = \{Z(t) = Z(t, x), t \in \mathrm{T}\}$, $Z(x, 0) = x$, — произвольный случайный процесс со значениями в $\mathscr{X}$. Время $t \ge 0$ может быть как дискретным ($\mathrm{T} = \mathbf{Z}_+$), так и непрерывным ($\mathrm{T} = \mathbf{R}_+$).

Один из естественных подходов к изучению условий эргодичности процесса Z связан с построением так называемых «вложенных» последовательностей, эргодичность которых может быть установлена. Вложенными обычно называют последовательности, образованные значениями процесса в некоторые «вложенные» (обычно марковские) моменты времени. Пусть

$$0 \le T_0 < T_1 < \ldots < T_n < \ldots\,, \qquad T_n \in \mathrm{T}\,, \qquad T_n \to \infty \quad \text{п.н.} \tag{1}$$

при $n \to \infty$, — некоторая случайная последовательность. Естественно ожидать, что при достаточно широких предположениях из эргодичности последовательности $X(n) \equiv Z(T_n)$ будет следовать и эргодичность процесса Z (о другом подходе к изучению эргодичности процессов с непрерывным временем см. в [33]).

Будем предполагать, что моменты T_n являются марковскими, т.е. при любых n, t событие $\{T_n \le t\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{F}_{(t)} = \sigma\{Z(u), u \le t\}$. Обозначим $\nu_t = \max\{k: T_k \le t\}$, так что случайные величины ν_t и T_{ν_t} измеримы относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}_{(t)}$. Определим σ-алгебру $\mathfrak{F}^*_{(t)}$, порожденную множествами вида $B \cap \{T_{\nu_t} \ge u\}$, $B \in \mathfrak{F}_{(u)}$, $u \le t$, $u \in \mathrm{T}$. Ясно, что $\mathfrak{F}^*_{(t)} \subseteq \mathfrak{F}_{(t)}$.

Определение 1. Будем говорить, что *процесс Z допускает вложенную* РЦ, если существуют последовательность марковских моментов $\{T_n, n \ge 0\}$ удовлетворяющих (1), измеримое пространство $(\mathcal{Y}, \mathfrak{B}_{\mathcal{Y}})$ и последовательность $\mathcal{Y}$-значных случайных величин η_n, измеримых относительно σ-алгебр $\mathfrak{F}_{(T_n)}$, такие, что

1) последовательность $\xi_n \equiv (e_n \equiv T_{n+1} - T_n, \eta_n)$, $n \ge 0$, стационарна;

2) последовательность $X(n) = Z(T_n)$, $n \ge 0$, образует РЦ с управлением $\{\xi_n\}$;

3) при всех t условное относительно $\mathfrak{F}^*_{(t)}$ распределение случайной величины $Z(t)$ зависит лишь от $X(\nu_t)$ и $t - T_{\nu_t}$, т.е.

$$\mathbf{P}\left(Z(t) \in B \mid \mathfrak{F}^*_{(t)}\right) = \mathbf{P}\left(Z(t) \in B \mid X(\nu_t), t - T_{\nu_t}\right) \equiv G(X(\nu_t), t - T_{\nu_t}, B) \quad \text{п.н.}$$

при всех $B \in \mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$, где функция $G(x, u, B)$ измерима по (x, u) при любом $B \in \mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$ и является вероятностной мерой на $\mathcal{X}$ при любых x, u.

З а м е ч а н и е 1. Можно определять процессы, допускающие вложенные РЦ, по-иному. А именно, если ввести σ-алгебры $\mathfrak{F}^{**}_{(t)}$, порожденные множествами вида $B \cap \{T_{\nu_t+1} \ge u\}$, $B \in \mathfrak{F}_{(u)}$, $u \in \mathrm{T}$, а условие 3) в определении 1 заменить на следующее:

3′) условное относительно $\mathfrak{F}^{**}_{(t)}$ распределение $Z(t)$ зависит лишь от $X(\nu_t)$, $X(\nu_t+1)$, ξ_{ν_t+1} и $t - T_{\nu_t}$;

то мы получим другой вариант «вложения». Приведенные ниже утверждения могут быть переформулированы и доказаны и для процессов, допускающих «вложение» в смысле условия 3.

Получим сначала теоремы эргодичности для процессов, допускающих вложенные РЦ, а затем поясним на примерах, какого рода предположения в терминах процесса Z гарантируют существование вложенной РЦ. Так как при этом в случае непрерывного времени нам понадобятся свойства непрерывности траекторий процесса Z, то мы будем предполагать, что пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ являются метрическими.

Начнем с одного простого случая.

2. Эргодичность процессов в случае, когда управляющая последовательность $\{\xi_n\}$ вложенной РЦ состоит из независимых элементов. Отметим сразу же, что в условиях этого пункта вложенная РЦ будет ЦМ. Рассмотрим случай непрерывного времени. Справедлива

Теорема 1. *Предположим, что процесс Z допускает вложенную* РЦ, $T_0 < \infty$ *п.н.,* РЦ $\{X(n)\}$ *sc-сходится к некоторой стационарной* РЦ $\{X^n\}$ *и последовательность $\{\xi_n\}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных элементов. Пусть также*

1) *случайная величина e_0 нерешетчата,* $\mathbf{E}\, e_0 < \infty$;

2) *траектории процесса Z с вероятностью единица непрерывны справа (слева).*

Тогда существует собственное вероятностное распределение $\mathbf{P}$ *на* $(\mathcal{X}, \mathfrak{B}_{\mathcal{X}})$ *такое, что имеет место слабая сходимость*

$$\mathbf{P}_t(\cdot) \equiv \mathbf{P}(Z(t) \in \cdot) \Rightarrow \mathbf{P}(\cdot) \text{ при } t \to \infty . \qquad (2)$$

Если вместо условия нерешетчатости e_0 предположить, что выполняется более сильное условие:

3) *распределение случайной величины e_0 имеет абсолютно непрерывную компоненту,*

то условие 2 излишне и имеет место сходимость по вариации:

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}_{\mathcal{X}}} \left| \mathbf{P}_t(B) - \mathbf{P}(B) \right| \to 0 \text{ при } t \to \infty . \qquad (3)$$

При выполнении условия 3 метричность пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ можно не предполагать.

Замечание 1. Условие 3 теоремы 1 можно заменить на следующее: для почти всех траекторий процесса Z замыкание множества точек разрыва имеет нулевую лебегову меру.

Доказательство. Достаточно рассмотреть лишь случай, когда $\{X(n)\}$ образует СРП. Пусть V и $G_n = \{X(n) \in V\} \cap A_n^{(2)}$ — множество и события, фигурирующие в формулировке теоремы 1.9. Введем событие $\widetilde{D}_n = \{e_n \le M, e_{n+1} \le M, \ldots, e_{n+m} \le M\}$, где число M взято настолько большим, что событие $D_n \equiv G_n \cap \widetilde{D}_n$ имеет положительную вероятность. Введем случайные величины $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_j = T_{\mu_j}$ при $j \ge 1$, где $\mu_{j+1} = \min\{n > \mu_j + m : \mathrm{I}(G_n) = 1\}$ — последовательные моменты осуществления событий G_n , определенные в теореме 1.9. Обозначим $\psi_j = \gamma_j - \gamma_{j-1}$. Из теоремы 1.9 следует, что $\{\psi_j\}$ есть последовательность независимых (при $j \ge 1$) одинаково распределенных (при $j \ge 2$) случайных величин, причем ψ_j нерешетчаты и по тождеству Вальда $\mathbf{E}\,\psi_2 < \infty$.

Обозначим через $H(y)$ функцию восстановления для последовательности $\{\gamma_j\}$. Без ограничения общности можно считать $T_0 = 0$. Пусть $h : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$, $0 \le h \le 1$, — произвольная неотрицательная непрерывная ограниченная функция. При $L = m M$ для процесса $Z(t) = Z(x, t)$ имеют место равенства

$$\mathbf{E}\, h(Z(t+L)) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\,(h(Z(t+L))\,;\gamma_j \le t \le \gamma_{j+1}) =$$

$$= \mathbf{E}\,(h(Z(t+L))\,;\gamma_1 > t) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \mathbf{E}\,\big(h(Z(t+L))\,\mathbf{I}\,(\gamma_{j+1} > t) \mid \gamma_j \in du\big)\, d\,\mathbf{P}\,(\gamma_j < u) =$$

$$= \mathbf{E}\,(h(Z(t+L))\,;\gamma_1 > t) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \mathbf{E}\,\big(h(Z(w,\, t+L-u))\,\mathbf{I}\,(\gamma_1 > t-u) \mid D_0\big)\, d\,\mathbf{P}\,(\gamma_j < u) =$$

$$= \mathbf{E}\,(h(Z(t+L))\,;\gamma_1 > t) + \int_0^t \mathbf{E}\,(h(Z(w,\, t+L-u))\,\mathbf{I}\,(\gamma_1 > t-u) \mid D_0)\, dH(u)\,,$$

где $w \in V$ — произвольно выбранная точка.

При дальнейших рассуждениях используются те же аргументы, что и при доказательстве теоремы эргодичности для регенерирующих процессов (см., например, [25]). Введем случайный процесс

$$\varphi(u) = g(Z(w,\, L+u))\,\mathbf{I}\,(\gamma_1 > u)\,\mathbf{I}\,(D_0)\,[\,\mathbf{P}\,(D_0)\,]^{-1}\,, \quad u \ge 0\,,$$

и обозначим $F(u) = \mathbf{E}\,\varphi(u)$. При этом

$$\mathbf{E}\, g(Z(t+L)) = \int_0^t F(t-u)\, dH(u) + \mathbf{E}\,(g(Z(t+L))\,;\gamma_1 > t)$$

и для доказательства (2) достаточно проверить, что функция $F(u)$ непосредственно интегрируема по Риману (см. [26]). Из условия 2 следует, что траектории процесса $\varphi(u)$ также непрерывны справа с вероятностью единица. Поэтому по теореме Лебега о мажорированной сходимости непрерывна справа и функция $F(u)$. Кроме того,

$$F(u) \le \mathbf{P}\,(\gamma_1 > u \mid D_0)\,, \qquad \int_0^{\infty} \mathbf{P}\,(\gamma_1 > u \mid D_0)\, du = \mathbf{E}\,(\gamma_1 \mid D_0) < \infty\,.$$

Как показано, например, в [25], при выполнении этих условий функция F непосредственно интегрируема по Риману и

$$\mathbf{E}\, g(Z(t+L)) \to \frac{1}{a} \int_0^{\infty} F(u)\, du\,.$$

Следовательно, (2) доказано.

Докажем второе утверждение. Из предыдущих выкладок следует, что для любого $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$

$$\mathbf{P}\,(Z(t+L) \in B) = \int_0^t F_1(t-u)\, dH(u) + \mathbf{P}\,(Z(t+L) \in B,\ \gamma_1 > t)\,,$$

где $F_1(u) = \mathbf{P}\,(Z(x_0,\, u+L) \in B,\ \gamma_1 > u \mid D_0)$. Покажем, что

$$\mathbf{P}\,(Z(t+L) \in B) \to \frac{1}{a} \int_0^\infty F_1(u)\,du \tag{4}$$

равномерно по $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$. Так как $F_1(u) \le \mathbf{P}\,(\gamma_1 > u \mid D_0)$ и $\mathbf{E}\,(\gamma_1 \mid D_0) < \infty$, для доказательства (4) нам достаточно проверить, что

$$I_b \equiv \left| -\int_0^b F_1(u)\,d_u H(t-u) - \frac{1}{a} \int_0^b F_1(u)\,du \right| \to 0$$

равномерно по $B \in \mathrm{B_X}$ при произвольном фиксированном $b < \infty$. Обозначим $R(u) = H(u) - u/a$. Из условия 3 следует, что случайные величины $\{\psi_i\}$ также имеют абсолютно непрерывную компоненту. Поэтому (см., например, [27])

$$\int_{t-b}^{t} |\,dR(u)\,| \to 0$$

при $t \to \infty$ для любого $b < \infty$. Так как

$$I_b = \left| \int_0^b F_1(u)\,dR(t-u) \right| \le \int_0^b |\,dR(t-u)\,| = \int_{t-b}^{t} |\,dR(u)\,|$$

при всех $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$, второе утверждение теоремы 1 доказано.

В случае дискретного времени имеет место

Теорема 2. *Предположим, что процесс Z допускает вложенную* РЦ, $T_0 < \infty$ *п.н.,* РЦ $\{X(n)\}$ *sc-сходится к некоторой стационарной* РЦ $\{X^n\}$ *и последовательность $\{\xi_n\}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин. Если при этом наибольший общий делитель чисел k таких, что* $\mathbf{P}\,(e_1 = k) > 0$, *равен единице, то существует собственное вероятностное распределение* $\mathbf{P}$ *на* $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$, *такое что имеет место сходимость* (3).

Доказательство. При $t = 1, 2, \ldots$ и фиксированном целом b

$$-\int_0^b F_1(u)\,d_u H(t-u) = \sum_{k=1}^{b} \big(H(t-k) - H(t-k-1)\big)\,F_1(k) \to \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{b} F_1(k),$$

где функция F_1 введена в доказательстве теоремы 1, причем, сходимость является равномерной по $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$. В соответствии с замечаниями, высказанными ранее, из этого следует сходимость по вариации. Теорема 2 доказана.

3. Эргодичность процессов, допускающих вложенные цепи Маркова. Утверждения теорем 1, 2 остаются справедливыми и в несколько более общей ситуации. Введем следующее

Определение 2. Будем говорить, что *процесс Z допускает вложенную* ЦМ , если существует последовательность марковских моментов T_n, удовлетворяющих соотношениям (1) и таких, что

1) последовательность $X(n) = Z(T_n)$ образует однородную ЦМ;

2) при любых $n \geq 0, t \geq 0$ совместное распределение $\{Z(T_n+t),$ $\{e_{n+k}, k \geq 0\}\}$ зависит лишь от $Z(T_n) = X(n)$ и t, т.е.

$$\mathbf{P}\left(Z(T_n+t) \in B, \{e_{n+k}, k \geq 0\} \in D \mid \mathfrak{F}_{(T_n)}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(Z(T_n+t) \in B, \{e_{n+k}, k \geq 0\} \in D \mid \sigma(X(n))\right)$$

п.н. при любых $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$, $D \in \mathfrak{B}_{\mathbf{R}_+^\infty}$.

Отметим, что в этом определении отсутствует требование независимости элементов $\{\xi_n\}$ (в терминах определения 1). Если обозначить $e_n = T_{n+1}-T_n$, то, очевидно, последовательность $\{X(n), e_n\}$ также образует однородную ЦМ, причем распределение e_n зависит лишь от $X(n)$. Отметим также, что если процесс Z допускает вложенную ЦМ, то он, вообще говоря, не обязан быть марковским.

Подходы, связанные с изучением «вложенных процессов», давно и широко используются при изучении условий эргодичности «исходных» процессов. Эти подходы ведут свое начало, по-видимому, с работ Кендалла [28]. В современной литературе используются различные варианты определения процессов, допускающих вложенные ЦМ (полумарковские процессы; процессы, регенерирующие по Асмуссену, и т.д.; см. [24, 29], а также списки литературы в этих книгах).

Предположим, что ЦМ $X = \{X(n)\}$ удовлетворяет условиям (I), (II) (см. §1). Пусть число $n_1 > 0$ такое, что $\mathbf{P}(\tau_V(\varphi) = n_1) \equiv q > 0$. Определим вероятностную меру $\varphi^{(1)}$ на $\mathscr{X}$: для $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$ полагаем

$$\varphi^{(1)}(B) = \mathbf{P}\left(X(\varphi, n_1) \in B \cap V\right)/q. \tag{5}$$

По определению $\varphi^{(1)}(V) = 1$. Кроме того, для любых $x \in V$, $B \subseteq V$ и $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$

$$\mathbf{P}\left(X(x, m+1+n_1) \in B\right) \geq p\, q\, \varphi^{(1)}(B).$$

Рассмотрим ЦМ $X^{(1)} = \{X^{(1)}(n), n \geq 0\}$, где $X^{(1)}(n) = X((m+1+n_1)n)$. Ясно, что если ЦМ X удовлетворяет условиям (I), (II), то для ЦМ $X^{(1)}$ выполняются условия (I)—(III) при $p^{(1)} = pq$, $m^{(1)} = 0$, $n_1^{(1)} = 0$ и $\varphi^{(1)}$, определенной в (5), где верхний индекс (1) означает соответствие цепи $X^{(1)}$. Кроме того, если процесс Z допускает вложенню ЦМ X, то он, очевидно, допускает и вложенную ЦМ $X^{(1)}$.

Итак, мы можем считать, не ограничивая общности, что процесс Z допускает вложенную ЦМ X, удовлетворяющую условиям (I)—(III) при $m = 0$. Как отмечалось ранее (см. [7, 8], а также § 2, 4), можно задать на расширенном вероятностном пространстве ЦМ $\widetilde{X} = \{X(n), \delta_n\}$, обладающую «положительным» атомом. Если при этом определить случайную функцию $\delta(t)$, принимающую значение δ_n на множестве $T_n \leq t < T_{n+1}$, то, очевидно, процесс $\widetilde{Z}(t) = (Z(t), \delta(t))$ допускает вложенную ЦМ $\widetilde{X}$.

Рассмотрим теперь последовательные моменты $0 \leq \widetilde{\mu}_1 < \widetilde{\mu}_2 < \ldots$ попадания $\widetilde{X}(n)$ в «атом» $\widetilde{x} = (V, 1)$ и положим $\widehat{T}_n = t_{\widetilde{\mu}_n}$. Как нетрудно видеть, процесс $\tilde{Z}$ допускает «тривиальную» вложенную РЦ $\hat{X} = \{\hat{X}(n) = X(T_n) \equiv \equiv \tilde{x}\}$ с управлением $\hat{\xi}_n = (\hat{e}_n, \cdot)$, образующим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. При этом $\mathbf{E}\,\hat{e}_n$ конечно, если

$$\sup_{x \in \mathscr{X}} \mathbf{E}\,\{e_0 \mid X(0) = x\} < \infty. \tag{6}$$

Обозначим через $\tau(y)$ случайную величину с распределением $\mathbf{P}\,(\tau(y) > t) = = \mathbf{P}\,(T_\mu - T_0 > t \mid X(0) \in dy)$, где μ — первый положительный момент попадания $X(n)$ в множество V, φ — мера, фигурирующая в условии (II).

Теорема 3. *Пусть процесс* $\{Z(t), t \in [0, \infty)\}$ *допускает вложенную* ЦМ X *и выполняются условия*

1) ЦМ X *удовлетворяет условиям* (I), (II);

2) *выполнено* (6);

3) *случайная величина* $\hat{\tau}$ *с распределением*

$$\mathbf{P}\,(\hat{\tau} > t) = \int \varphi(dy)\, \mathbf{P}\,(\tau(y) > t)$$

нерешетчата;

4) *выполнено условие* 2 *теоремы* 1.

Тогда распределения $\mathbf{P}\,(Z(t) \in \cdot)$ *слабо сходятся к некоторому собственному распределению. Если вместо условия* 3 *потребовать, чтобы распределение* $\hat{\tau}$ *имело абсолютно непрерывную компоненту, то условие* 4 *излишне и имеет место сходимость по вариации.*

Теорема 3 непосредственно следует из теоремы 1 и вышеприведенных рассуждений. Действительно, процесс Z допускает тривиальную вложенную РЦ $\hat{X}$, и из условий 2 и 3 теоремы 3 следует условие 1 теоремы 1.

Аналогичное утверждение можно сформулировать для дискретного случая.

4. Эргодичность процессов в случае, когда вложенные РЦ имеют стационарные управляющие последовательности. Предположим, что процесс Z допускает вложенную РЦ X с управлением $\xi_n = (e_n, \eta_n)$, образующим стационарную метрически транзитивную последовательность. Как уже ранее отмечалось, можно без ограничения общности считать, что X есть СРП с управлением ξ_n. Предположим дополнительно, что выполняется следующее условие:

(A) (T_n, η_n) есть стационарный маркированный точечный процесс (СМТП) (где (T_n) — точечный процесс, (η_n) — соответствующие стационарные «марки»).

Определение СМТП можно найти, например, в [3, 5, 24]. Имеет место

Теорема 4. *Если выполнено* (A), *и для* СРП X *существует стационарная последовательность «положительных» обновляющих событий* $A_n \in \mathfrak{F}^{\xi}_{n+m}$, *то найдется вероятностная мера* $\mathbf{P}\,(\cdot)$ *на* $(\mathscr{X}; \mathfrak{B}_{\mathscr{X}})$ *такая, что имеет место сходимость по вариации*

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}} |\mathbf{P}(Z(t) \in B) - \mathbf{P}(B)| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Обозначим

$$\beta_t = t - T_{\nu_t}, \quad \alpha(n) = \min\{k > m : \mathrm{I}(A_{n-k}) = 1\}, \quad \alpha_t = \alpha(\nu_t),$$

$$\psi_{n,l} = f^{(l-m)}(g(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m}), \xi_{n+m+1}, \ldots, \xi_{n+l}) \quad \text{при } l \ge m,$$

где, как и ранее, $f^{(i)}$ — итерации функции f; g — функция, участвующая в определении обновляющего события, $\psi(t) = \psi_{\nu_t - \alpha_t, \alpha_t - 1}$. Из условия (A) следует, что процесс $(\eta_{\nu_t}, \alpha_t, \beta_t)$ является стационарным. Следовательно, стационарным будет и процесс $(\psi(t), \beta_t)$. Определим меру $\mathbf{P}(\cdot)$ равенством $\mathbf{P}(B) = \mathbf{E}\, G(\psi(t), \beta_t, B)$, где $t > 0$ произвольно. Пусть $\{X^n\}$ — стационарная последовательность, к которой sc-сходится последовательность $\{X(n)\}$. Заметим, что $X^{\nu_t} = \psi(t)$ п.н. при всех t и $\mathbf{P}(X(\nu_t) = X^{\nu_t}) \ge \mathbf{P}(\alpha_t \le \nu_t) \to 1$ при $t \to \infty$. Поэтому

$$\mathbf{P}(Z(t) \in B) = \mathbf{E}\, G(X(\nu_t), \beta_t, B) = \mathbf{E}\, G(\psi(t), \beta_t, B) + O(\mathbf{P}(\alpha_t > \nu_t)) \to \mathbf{P}(B)$$

равномерно по $B \in \mathfrak{B}_{\mathscr{X}}$. Теорема 4 доказана.

Случай, когда условие (A) не имеет места и последовательность (T_n, η_n) лишь сходится в известном смысле к некоторому стационарному маркированному точечному процессу, является технически более сложным, и мы сочли целесообразным не рассматривать его в рамках данной работы.

5. Примеры процессов, допускающих вложенные РЦ. Рассмотрим один частный, но важный для приложений случай, когда процесс с непрерывным временем определяется по вложенной СРП. Такие процессы изучаются, например, в моделях систем обслуживания.

Предположим, что задана СРП $\{X(n+1) = f(X(n), \xi_n)\}$ и пространство, в котором принимают значения элементы управляющей последовательности ξ_n, имеет вид $\mathbf{R}_+ \times \mathscr{Y}$, где $(\mathscr{Y}, \mathfrak{B}_{\mathscr{Y}})$ — некоторое измеримое пространство. При этом случайные величины ξ_n естественно записывать в виде $\xi_n = (e_n, \eta_n)$, где $e_n \ge 0$ п.н. Предположим дополнительно, что $e_n > 0$ п.н. Обозначим $T_0 = 0$ и $T_n = e_0 + \ldots + e_{n-1}$ при $n \ge 1$.

Пусть $h: \mathscr{X} \times \mathbf{R}_+ \to \mathscr{X}$ — некоторая измеримая функция такая, что $h(x, 0) = x$ при всех $x \in \mathscr{X}$. Процесс $Z(t)$ определим по правилу

$$Z(t) = h(X(n), t - T_n) \tag{7}$$

при $T_n \le t < T_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$. Из определения, в частности, следует, что $Z(T_n) = X(n)$ п.н. Нетрудно видеть, что процесс $Z(t)$, заданный с помощью (7), допускает вложенную РЦ X. Условия эргодичности процессов вида (7) рассматривались в [24, 30]. Примерами процессов вида (7) могут служить рассматриваемые в теории систем обслуживания процессы виртуального времени ожидания. В частности, для систем вида $G/G/1$ виртуальное время ожидания определяется равенствами:

$Z(t) = (X(\nu_t)-(t-T_{\nu_t}))$, $t \geq 0$, где $T_n= e_0+ \ldots + e_{n-1}$ — момент поступления в систему n-го по счету вызова, s_n — время его обслуживания и $X(n) = (X(n-1)-e_{n-1})^+ + s_n$ — время пребывания n-го вызова в системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Loynes R.** The stability of a queue with nonindependent inter-arrival and service times // Proc. Cambridge Phil. Soc.—1962.—V. 58, N 3.—P. 497–520.
2. **Боровков А. А.** Асимптотические методы в теории массового обслуживания.—М.: Наука, 1980.
3. **Franken P., Konig D., Arndt U., Schmidt V.** Queues and point processes.—Berlin: Akademie-Verlag, 1981.
4. **Borovkov A. A.** Asymptotic methods in queueing theory.—Chichester–New York–Toronto: J. Wiley, 1984.
5. **Baccelli F., Bremaud P.** Palm probabilities and stationary queues // Lecture Notes in Statistics.—Vol. 41: Springer-Verlag, 1987.
6. **Borovkov A. A.** Ergodicity and stability of Markov chains and their generalizations. Multidimensional chains // Prob. theory and math. statistics: Proc. 5th Vilnius Conf., 1989.—Vilnius.—1990.—V. 1.—P. 179–188.
7. **Athreya K. B., Ney P.** A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains // Trans. Amer. Math. Soc.—1978.—V. 245.—P. 493–501.
8. **Nummelin E.** A splitting technique for Harris recurrent Markov chains // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.—1978.—V. 43.—P. 309–318.
9. **Harris T. E.** Recurrent Markov processes, II // Ann. Math. Statist.—1955.—V. 26.—P. 152–153.
10. **Orey S.** Lecture notes on limit theorems for Markov chain transition probabilities.—London: Van Nostrand, 1971.
11. **Нуммелин Э.** Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы.—М.: Мир, 1989. (Nummelin E. General irreducible Markov chains and nonnegative operators.—Cambridge University Press, 1984.)
12. **Боровков А. А.** Эргодичность и устойчивость случайных процессов.—М.: Наука, в печати.
13. **Боровков А. А.** Эргодичность и устойчивость многомерных цепей Маркова // Теория вероятностей и ее применения.—1990.—Т. 35, № 3.—С. 543–547.
14. **Боровков А. А.** Теоремы эргодичности и устойчивости для одного класса стохастических уравнений // Теория вероятностей и ее применения.—1978.—Т. 23, № 2.—С. 241–262.
15. **Калашников В. В.** Оценки устойчивости обновляющихся процессов // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика.—1979.—5.—С. 85–89.
16. **Калашников В. В., Рачев С. Т.** Математические методы построения стохастических моделей обслуживания.—М.: Наука, 1988.
17. **Фосс С. Г.** Об одном способе оценивания скорости сходимости в теоремах эргодичности и непрерывности для многоканальных систем обслуживания // Предельные теоремы теории вероятностей.—Ново-

сибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1985.—С. 126–137.—(Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 5).

18. **Фосс С. Г.** Об условиях эргодичности в многоканальных системах массового обслуживания с ожиданием // Сиб. мат. журн.—1983.—6.—С. 168–175.
19. **Цыбаков В. С., Михайлов В. А.** Эргодичность синхронной системы АЛОХА // Проблемы передачи информации.—1979.—Т. 15, № 4.—С. 73–87.
20. **Боровков А. А.** Явление асимптотической стабилизации для децентрализованного алгоритма ALOHA. Диффузионная аппроксимация // Проблемы передачи информации.—1989.—Т. 26, № 1.—С. 55–64.
21. **Боровков А. А.** Об эргодичности и устойчивости последовательностей $w_{n+1}=f(w_n, \xi_n)$. Приложения к коммуникационным сетям // Теория вероятностей и ее применения.—1988.—Т. 33, № 4.—С. 641–659.
22. **Ширяев А. Н.** Вероятность.—М.: Наука, 1989.
23. **Лев Г. Ш.** Полумарковские процессы умножения со сносом // Теория вероятностей и ее применения.—1972.—Т. 17, № 1.—С. 160–166.
24. **Brandt A., Franken P., Lisek B.** Stationary stochastic models.—Berlin: Akademie-Verlag, 1990.
25. **Asmussen S.** Applied probability and queues.—Chichester–New York–Toronto: J. Wiley, 1987.
26. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения.—М.: Мир, 1984.
27. **Боровков А. А.** Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.—М.: Наука, 1972. (Borovkov A.A. Stochastic processes in queueing theory.—J. Wiley, 1976).
28. **Kendall D. G.** Stochastic processes occuring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain // Ann. Math. Statist.—1953.—V. 24, N 3.—P. 338–354.
29. **Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.** Введение в теорию массового обслуживания.—М.: Наука, 1987.
30. **Foss S. G., Kalashnikov V. V.** Regeneration and renovation in queues // Queueing Systems.—V. 8, N 3.—P. 211–223.
31. **Золотарев В. М.** О непрерывности стохастических последовательностей, порождаемых рекуррентными процедурами // Теория вероятностей и ее применения.—1975.—Т. 20, № 4.—С. 834–847.
32. **Калашников В. В.** Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций.—М.: Наука, 1978.
33. **Lisek B.** A method for solving a class of recursive stochastic equations // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.—1982.—B. 60, H. 2.—P. 151–161.
34. **Nawrotski K.** Discrete open systems of Markov chains in a random environment. I, II // U. Inform Process. Cebernet. 1981—1982.—17.—P. 569–599.—18.—P. 83–98.
35. **Orey S.** Markov chains with stochastically stationary transition probabilities // Ann. Probab.—1991.—V. 19, N 3.—P. 907–928.
36. **Kifer Ju.** Ergodic theory of random transformations.—Boston: Birkhauser, 1986.