БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ТОЧКИ ДОСТИЖЕНИЯ МИНИМУМА ДЛЯ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Д. Бямбажав, А. А. Могульский

1. Введение. В работе изучается асимптотика вероятностей больших уклонений точек минимума поля, «зашумленного» исчезающе малым гауссовским полем. В [1] была рассмотрена «зашумленная» функция вида

$$X_\varepsilon(\theta) = H(\theta) + \varepsilon\,\xi(\theta)\,, \quad \varepsilon > 0\,, \quad \theta \in D_1 \equiv [-1, 1]^m\,,$$

где $H(\theta)$ — неслучайная функция, $\xi(\theta)$ — гауссовское случайное поле. Такой вид может принимать, например, логарифмическая функция правдоподобия при фиксированной выборке, когда логарифм плотности одного наблюдения известен с точностью до некоторой случайной гауссовской погрешности. Очевидно, что, если минимум функции $H(\theta)$ достигается в единственной точке $\theta = 0$ и поле $\xi(\theta)$ непрерывно с вероятностью 1, то точка минимума θ^*_ε поля $X_\varepsilon(\theta)$ сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$. В [1] даны условия на функцию H и поле ξ, при выполнении которых точка θ^*_ε ведет себя как $\varepsilon^{1/(2-\alpha)}\theta^*_0$ при $\varepsilon \to 0$, где $0 < \alpha < 2$, θ^*_0 — некоторый случайный вектор в $\mathbf{R}^m$. В частности, в [1] установлена слабая сходимость $\mathbf{P}_\pm \Rightarrow \mathbf{P}_0$ при $\varepsilon \to 0$, где $\mathbf{P}_0 \equiv \mathbf{P}\,(\theta^*_0 \in A)$, случайный вектор θ^*_0 определяется как точка минимума некоторого «стохастически однородного» гауссовского случайного поля, $A \subset \mathbf{R}^m$ — измеримое множество, «верхнее распределение» $\mathbf{P}_+$ точки минимума θ^*_ε определяется как

$$\mathbf{P}_+\left(\varepsilon^{-1/(2-\alpha)}\theta^*_\varepsilon \in A\right) \equiv \mathbf{P}\left(\inf_{\theta \in \varepsilon^{1/(2-\alpha)}A} X_\varepsilon(\theta) \le \inf_{\theta \notin \varepsilon^{1/(2-\alpha)}A} X_\varepsilon(\theta)\right)\,, \tag{1}$$

а «нижнее распределение» $\mathbf{P}_-$ определяется формулой (1), со знаком $<$ вместо знака $\le$. Известно [1, 2], что функции множеств $\mathbf{P}_+$ и $\mathbf{P}_-$ являются полуаддитивными.

В настоящей работе изучается поведение логарифмов вероятностей (точнее, «нижних» и «верхних» распределений) больших уклонений точки θ^*_ε: $\ln \mathbf{P}_\pm(\varepsilon^{-1/(2-\alpha)}\theta^*_\varepsilon \in xA)$, где $x = x(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. При довольно общих предположениях доказано, что

$$\ln \mathbf{P}_\pm\left(\varepsilon^{-1/(2-\alpha)}\theta^*_\varepsilon \in xA\right) \sim \ln \mathbf{P}\,(\theta^*_0 \in xA) \sim -x^{4-2\alpha}\inf_{\theta \in A} K(\theta)\,,$$

причем функция $K(\theta)$, играющая роль функции уклонений, найдена в явном виде.

---

2. Обозначения и формулировка результата. Пусть на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P} \rangle$ задано сепарабельное гауссовское случайное поле $\xi(\theta)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in D_1$, с нулевым средним и ковариационной функцией $B(t, s) = \mathbf{E}\, \xi(t)\, \xi(s)$. Пусть

$$\varphi^2(h) = \sup_{t,\, s \in D_1,\ |t-s| \le h} [B(t, t) + B(s, s) - 2\, B(t, s)]\,, \tag{2}$$

$$Q_\Delta(p) = \int_1^\infty \varphi\left(\Delta\, p^{-u^2}\right) du\,, \qquad p > 1\,. \tag{3}$$

Будем предполагать, что поле $\xi(\theta)$ удовлетворяет следующим условиям:

(I) $\xi(0) = 0$ с вероятностью 1.

(II) Для некоторых числа $\alpha \in (0, 2)$ и функции $B_0(t, s)$ имеет место сходимость

$$B_\Delta(t, s) \equiv \Delta^{-2\alpha} B(\Delta t, \Delta s) \to B_0(t, s)\,, \text{ при } \Delta \to 0\,, \quad (t, s) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m\,,$$

причем $B_0(t, t) + B_0(s, s) - 2\, B_0(t, s) > 0$ для любых t, $s \in \mathbf{R}^m$, $t \neq s$.

(III) $\limsup\limits_{\Delta \to 0} \Delta^{-\alpha} Q_\Delta(e) < \infty$.

Замечание 1. Из условия (III) следует, что случайное поле $\xi(\theta)$ с вероятностью 1 непрерывно. Действительно, по условию (III) найдется $\Delta_0 \in (0, 1\,]$ такое, что

$$Q_{\Delta_0}(e) < \infty\,. \tag{4}$$

Очевидно, что $\Delta_0 \exp\left(-u^2\right) \ge \exp\left(-\left(u + \sqrt{-\ln \Delta_0}\right)^2\right)$, так что

$$Q_{\Delta_0}(e) \ge \int_1^\infty \varphi\left(\exp\left(-\left(u + \sqrt{-\ln \Delta_0}\,\right)^2\right)\right) du = \int_{1+\sqrt{-\ln \Delta_0}}^\infty \varphi\left(e^{-u^2}\right) du\,. \tag{5}$$

Таким образом, в силу (4) функция $\varphi\left(e^{-u^2}\right)$ интегрируема на положительной полуоси; выборочная непрерывность случайного поля $\xi(\theta)$ следует из теоремы 4.11 [3, с. 97].

Обозначим

$$\overline{Q}(p) = \sup_{0 < \Delta \le 1} \Delta^{-\alpha}\, Q_\Delta(p) \tag{6}$$

при $p \ge e$. Нетрудно показать, что

$$Q_\Delta(p) = \int_{\sqrt{\ln p}}^\infty \varphi\left(\Delta\, e^{-u^2}\right) du \,/ \sqrt{\ln p} \le Q_\Delta(e) / \sqrt{\ln p}\,.$$

Ввиду условия (III) и неравенства (5) имеем $\overline{Q}(e) < \infty$. Поэтому при $p \to \infty$

$$\overline{Q}(p) \le \overline{Q}(e) / \sqrt{\ln p} \to 0\,. \tag{7}$$

Теперь приведем условия для функции $H(\theta) : D_1 \to \mathbf{R}$.

(IV) Функция $H(\theta)$ непрерывна на D_1, неотрицательна и обращается в нуль в единственной точке $\theta = 0$.

(V) В некоторой окрестности точки $\theta = 0$ матрица вторых производных функции $H(\theta)$,

$$H''(\theta) = \left\| \frac{\partial^2 H(\theta)}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j} \right\|_{i,j=1}^{m},$$

непрерывна и положительно определена.

Обозначим $H_0(\theta) = \theta\, H''(0)\, \theta^T/2$, $\theta \in \mathbf{R}^m$. Для функции $f=f(\theta)$ введем:

$m_f(A) = \inf\limits_{\theta\in A} f(\theta)$ — минимум функции f на множестве A;

$\Theta_f^* = \{\theta : f(\theta) = m_f(D_1)\}$ — множество точек достижения минимума функции $f(\theta)$ на множестве D_1.

Будем считать, что $X_\varepsilon(\theta) = H(\theta) + \varepsilon\,\xi(\theta) = +\infty$ при $\theta \notin D_1$. Через D_2 обозначим куб $[-r, r]^m$.

При $0 < \Delta \le 1$ рассмотрим наряду с полем $\xi(\theta)$, $\theta \in D_1$, поле $\xi_\Delta(\theta) = \Delta^{-\alpha}\,\xi(\Delta\theta)$, $\theta \in D_{1/\Delta}$. Функция $B_\Delta(t, s)$ $(t, s \in D_{1/\Delta})$ из условия (II) является ковариационной функцией поля $\xi_\Delta(\theta)$. Поэтому условие (II) означает, что ковариационная функция поля ξ_Δ сходится при $\Delta \to 0$ к функции $B_0(t, s)$, которая, в свою очередь, является ковариационной функцией гауссовского поля $\xi_0(\theta)$, $\theta \in \mathbf{R}^m$. Функцию (2), отвечающую полю $\xi_\Delta(\theta)$, $\theta \in D_{1/\Delta}$, обозначим через $\varphi_\Delta(h)$. Очевидно, что

$$\varphi_\Delta(h) = \Delta^{-\alpha}\,\varphi(\Delta h),$$

и условие (III) означает следующее:

$$\limsup_{\Delta\to 0} \int_1^\infty \varphi_\Delta\!\left(e^{-u^2}\right) du < \infty. \tag{8}$$

Пусть $\Delta_0 > 0$ и $A < \infty$ таковы, что для всех $0 < \Delta \le \Delta_0$

$$\int_1^\infty \varphi_\Delta\!\left(e^{-u^2}\right) du \le A.$$

Тогда функция $\varphi_\Delta(h)$ допускает оценку $\varphi_\Delta\!\left(e^{-u^2}\right) \le (u-1)^{-1}A$ при $u > 1$, т. е. при $h < 1$ имеем

$$\varphi_\Delta(h) \le A \,/ \left(\sqrt{\ln(1/h)} - 1\right). \tag{9}$$

Таким образом, из условия (III) следует, что функция $\varphi_\Delta(h)$ стремится к нулю при $h \to 0$ равномерно по Δ. Поскольку введение функции $\varphi_\Delta(h)$ позволяет оценивать приращения ковариационной функции $|B_\Delta(t, s) - B_\Delta(t', s')|$, т. е. $\varphi_\Delta(h)$ играет роль «модуля непрерывности» ковариационной функции $B_\Delta(t, s)$, из неравенства (9) вытекает следующее утверждение:

(II_0) В условии (II) $B_\Delta(t, s)$ сходится к $B_0(t, s)$ равномерно по (t, s) на любом компакте $K \subset \mathbf{R}^{2m}$.

Определим при произвольном $T < \infty$ функцию

$$\varphi_{0,T}(h) = \sup_{s,\, t \in D_T,\ |t-s| \le h} \left[B_0(t, t) + B_0(s, s) - 2\, B_0(t, s)\right]^{1/2},$$

которая является функцией вида (2) для поля $\xi_0(\theta)$ на множестве D_T. В силу (II_0) при любом $T < \infty$

$$\liminf_{\Delta \to 0} \varphi_\Delta(h) \ge \varphi_{0,T}(h) .$$

Из последнего неравенства и условия (III) следует, что при любом $T < \infty$

$$\int_1^\infty \varphi_{0,T}\left(e^{-u^2}\right) du < \infty .$$

Поэтому ввиду уже упоминавшейся теоремы 4.11 [3] предельное поле $\xi_0(\theta)$ непрерывно с вероятностью 1 в $\mathbf{R}^m$.

Ранее (см п. 1) мы обозначили через θ_ε^* точку достижения минимума поля $X_\varepsilon(\theta)$. На самом деле множество $\Theta^*_{X_\varepsilon}$ может состоять более чем из одной точки, поэтому случайная величина θ_ε^* и событие $\{\theta_\varepsilon^* \in A\}$ могут быть не определены. Можно предложить целый спектр интерпретаций «события» $\{\theta_\varepsilon^* \in A\}$, например:

{хотя бы одна точка минимума принадлежит A} ,

{минимальная по норме точка минимума принадлежит A} ,

{все точки минимума принадлежат A}

и т. д. Мы выделим две «крайние» интерпретации — «самое большое» событие:

{хотя бы одна точка минимума принадлежит $\overline{A}$}

и «самое малое» событие:

{все точки минимума принадлежат A^0} ,

где, как обычно, $\overline{A}$ и A^0 — замыкание и внутренность множества A. Эти события можно представить в виде $\{\Theta^*_{X_\varepsilon} \cap \overline{A} \ne \varnothing\}$ и $\{\Theta^*_{X_\varepsilon} \subseteq A^0\}$ соответственно. Поскольку поле X_ε непрерывно с вероятностью 1, «верхние» и «нижние» вероятности, введенные ранее, представляются с помощью этих «крайних» событий следующим образом:

$$\mathbf{P}_+ \left(\theta_\varepsilon^* \in A \right) = \mathbf{P} \left(\Theta^*_{X_\varepsilon} \cap \overline{A} \ne \varnothing \right), \qquad \mathbf{P}_- \left(\theta_\varepsilon^* \in A \right) = \mathbf{P} \left(\Theta^*_{X_\varepsilon} \subseteq A^0 \right).$$

Рассмотрим теперь функцию

$$K(\theta) = H_0^2(\theta) \,/\, 2\, B_0(\theta, \theta) , \tag{10}$$

которая будет играть роль функции уклонений для точки достижения минимума θ_ε^*.

В силу условия (II) $B_0(t, t) + B_0(s, s) - 2B_0(t, s) > 0$ при $t \neq s$, поэтому $B_0(t, t) > 0$ при всех $t \neq 0$. Далее, ввиду условия (II) выполняется равенство $\Delta^{-2\alpha} B_0(\Delta t, \Delta t) = B_0(t, t)$, следовательно, функция $K(\theta)$ имеет вид

$$K(\theta) = |\theta|^{2-2\alpha} K_0(\theta)/2, \tag{11}$$

где $K_0(\theta) = K(\theta/|\theta|)$. Таким образом, «функция уклонений» $K(\theta)$ неотрицательна и обращается в нуль в единственной точке $\theta = 0$.

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (I)—(V), *и пусть функция* $x = x(\varepsilon)$ *удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(\varepsilon) = \infty, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1/(2-\alpha)} x(\varepsilon) = 0. \tag{12}$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$

а) *для открытых множеств* $U \subseteq \mathbf{R}^m$

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} x^{-4+2\alpha} \ln \mathbf{P}_{\pm} \left(\varepsilon^{-1/(2-\alpha)} \theta^*_\varepsilon \in xU \right) \geq -\inf\{K(\theta) : \theta \in U\}; \tag{13}$$

б) *для замкнутых множеств* $V \subseteq \mathbf{R}^m$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} x^{-4+2\alpha} \ln \mathbf{P}_{\pm} \left(\varepsilon^{-1/(2-\alpha)} \theta^*_\varepsilon \in xU \right) \leq -\inf\{K(\theta) : \theta \in V\}. \tag{14}$$

Следствие 1. *Пусть множество* $A \subseteq \mathbf{R}^m$ *удовлетворяет условию*

$$0 < K(A^0) = K(\overline{A}) < \infty, \tag{15}$$

где $K(A) = \inf\{K(\theta) : \theta \in A\}$. *Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$\ln \mathbf{P}_{\pm} \left(\varepsilon^{-1/(2-\alpha)} \theta^*_\varepsilon \in A \right) \sim -x^{4-2\alpha} K(A). \tag{16}$$

Следствие 2. *Утверждения* (13), (14) *и* (16) *сохраняются, если в них* $\varepsilon^{-1/(2-\alpha)}\theta^*_\varepsilon$ *заменить на случайный вектор* θ^*_0 (см. (1)), *который определяется как точка минимума поля* $H_0(\theta)+\xi_0(\theta)$, *где* $\xi_0(\theta)$ — *гауссовское случайное поле с нулевым средним и ковариационной функцией* $B_0(t, s)$.

Так как множество $A = \{\theta : |\theta| \geq 1\}$ удовлетворяет соотношению (15), справедливо

Следствие 3.

$$\ln \mathbf{P}_{\pm} \left(|\theta^*_\varepsilon| \geq x\,\varepsilon^{-1/(2-\alpha)} \right) \sim -x^{4-2\alpha} \inf_{|\theta| \geq 1} K(\theta).$$

3. Вспомогательные результаты. В этом пункте мы предполагаем выполненными условия теоремы. Буквой c с индексами и без них обозначаются конечные положительные константы, зависящие только от α и m. В дальнейшем будем также использовать следующие обозначения:

$$\Delta = \varepsilon^{-1/(2-\alpha)}, \qquad H_r(\theta) = r^{-2} H(r\theta), \qquad r > 0, \ \theta \in D_{1/r},$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2/2}\, du.$$

Напомним неравенство Ферника [3, с. 100]. Пусть $X(\theta)$, $\theta \in T = [a, b]^m$,— сепарабельное гауссовское поле с нулевым средним и ковариационной функцией $\Gamma(t, s)$, $(t, s) \in T \times T$. Функцию (2) для поля $X(\theta)$ на множестве T обозначим через $\varphi_X(h)$. Положим

$$b_p = \sup_{(t, s) \in T\times T} |\Gamma(t, s)|^{1/2} + (2+\sqrt{2}\,) \int_1^\infty \varphi_X\left(\frac{b-a}{2}\, p^{-u^2}\right) du . \tag{17}$$

Тогда при $x \geq \sqrt{1+4m \ln p}$ и любом целом $p \geq 2$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}\left(\inf_T X(\theta) \leq -x\, b_p\right) \leq 5\sqrt{\pi/2}\, p^{2m}\, \psi(x) .$$

Для положительных (отрицательных) функций $a(u)$, $b(u)$ будем писать $a(u) \gtrsim b(u)$, если $\limsup_{u\to 0} b(u)/a(u) \leq 1$ $(\liminf_{u\to 0} b(u)/a(u) \geq 1\,)$. Очевидно, что для функций одного знака $a(u) \sim b(u)$, если одновременно $a(u) \gtrsim b(u)$ и $b(u) \gtrsim a(u)$.

Лемма 1. *Пусть* $S_M = \mathbf{R}^m \setminus D_M$. *Существует* $c_0 > 0$ *такое, что*

$$\ln \mathbf{P}\,(\, m_{X_\varepsilon}(\Delta\, x\, S_M) \leq 0\,) \lesssim -c_0(Mx)^{4-2\alpha}/2$$

для любого $M \geq 1$.

Доказательство. В силу условий (IV), (V) найдутся положительные числа β_1, δ_1 и β_2 такие, что при $\theta \in D_{\delta_1}$ выполняется неравенство

$$H(\theta) \geq \beta_1\, |\theta|^2/2 , \tag{18}$$

и при $\theta \in D_1 \setminus D_{\delta_1}$ — неравенство

$$H(\theta) \geq \beta_2 . \tag{19}$$

На основании (19) находим

$$\mathbf{P}\,(\, m_{X_\varepsilon}(\Delta x S_M) \leq 0) \leq \mathbf{P}\left(m_\xi((\Delta x S_M) \cap (D_1 \setminus D_{\delta_1})) \leq -\Delta^{-(2-\alpha)}\beta_2\right) +$$

$$+\, \mathbf{P}\left(m_{X_\varepsilon}((\Delta x S_M) \cap D_{\delta_1}) \leq 0\right) \equiv \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 .$$

Чтобы оценить сверху $\mathbf{P}_1$, воспользуемся неравенством Ферника для поля $\xi(\theta)$, $\theta \in D_1$:

$$\mathbf{P}_1 \leq \mathbf{P}\left(m_\xi(D_1) \leq -\Delta^{-(2-\alpha)}\beta_2\right) \leq 5\sqrt{\pi/2}\; 3^{2m}\, \psi(\Delta^{-(2-\alpha)}\beta_2/b_3) ,$$

где $b_3 < \infty$ в силу того, что $\overline{Q}(3) < \infty$ (см. (17)). Поскольку $\psi(t) \leq e^{-t^2/2}$, имеем

$$\ln\, \mathbf{P}_1 \lesssim -\beta_2^2\, \Delta^{-(4-2\alpha)}/(2b_3^2) .$$

Согласно (12), для любого $M < \infty$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\Delta^{-1} \geq Mx$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Поэтому

$$\ln \mathbf{P}_1 \lesssim -\beta_2^2 (Mx)^{4-2\alpha}/(2b_3^2).$$

Теперь оценим $\mathbf{P}_2$. Пусть $B_k = D_{k+1} \backslash D_k$. Обозначим через I класс всех кубов в $\mathbf{R}^m$ с единичными ребрами и вершинами в «целочисленных» точках $\theta = (n_1, \ldots, n_m)$. Пусть $I_k = \{z \in I: \ z \cap B_k \neq \varnothing\}$, так что

$$B_k \subseteq \bigcup_{z \in I_k} z .$$

Заметим, что в множестве I_k содержится не более $(2k+2)^m$ кубов.

При $z \in I_k$ в силу (18) справедливы соотношения

$$\mathbf{P}(z) \equiv \mathbf{P}\left(m_{X_\varepsilon}(\Delta xz \cap D_{\delta_1}) \le 0 \right) \le \mathbf{P}\left(m_\xi(\Delta xz \cap D_1) \le -(k-1)^2 \beta_1 \Delta^\alpha x^\alpha/2 \right) \le$$

$$\le \mathbf{P}\left(m_{\xi_r}(z' \cap D_{\delta/r}) \le (k-1)^2 \beta_1 (xk)^{2-\alpha}/2k^2 \right) \le \mathbf{P}\left(m_{\xi_r}(z') \le -\beta_1 (xk)^{2-\alpha}/4 \right),$$

где $r = k\Delta x$, $z' = z/k$. Поскольку $z' \subseteq D_2$, при $0 < r \le 1/2$ получаем

$$\mathbf{P}\left(m_{\xi_r}(D_r) \le -\beta_1 (xk)^{2-\alpha}/4 \right) \le \mathbf{P}\left(m_{\xi_r}(D_2) \le -\beta_1 (xk)^{2-\alpha}/4 \right) \le$$

$$\le \max_{0<r\le 1/2} \mathbf{P}\left(m_{\xi_r}(D_2) \le -\beta_1 (xk)^{2-\alpha}/4 \right).$$

Далее, при $r \ge 1/2$

$$\mathbf{P}\left(m_{\xi_r}(z') \le -\beta_1 (xk)^{2-\alpha}/4 \right) \le \mathbf{P}\left(m_{\xi_{1/2}}(D_2) \le -2\beta_1 (xk)^{2-\alpha} \right).$$

Таким образом, для $z \in B_k$

$$\mathbf{P}(z) \le \max_{0<r\le 1/2} \mathbf{P}\left(m_{\xi_r}(D_2) \le -\beta_1 (xk)^{2-\alpha}/4 \right). \tag{20}$$

Воспользуемся неравенством Ферника для поля $\xi_r(\theta)$, $\theta \in D_2$. В силу отмеченных ранее свойств функций $\varphi_\Delta(h)$ и $B_\Delta(t, s)$ (см. (8) и (II_0)) $\overline{b_3} \equiv \sup\limits_{0<r\le 1/2} b_3(r) < \infty$, где $b_3(r)$ — константа (17), построенная для поля $\xi_r(\theta)$, $\theta \in D_2$. Поэтому по неравенству Ферника для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\mathbf{P}(z) \le 5\sqrt{\pi/2}\, 3^{2m} \exp\left\{-c_0 (xk)^{4-2\alpha}/2\right\},$$

где $c_0 \equiv \beta_1^2 \overline{b}_3^{\,-2}/4$. Тогда

$$\mathbf{P}_2 \le \sum_{k=M}^{\infty} 2(k+1)^m\, 5\sqrt{\pi/2}\, 3^{2m} \exp\left\{-c_0^2 (xk)^{4-2\alpha}/2\right\} \equiv \Sigma. \tag{21}$$

Очевидно, что ряд в правой части (21) допускает требуемую оценку:

$$\ln \Sigma \lesssim -c_0^2 (xM)^{4-2\alpha}/2.$$

Лемма доказана.

Обозначим $S_h(\theta_0) = \{\theta: \ |\theta - \theta_0| < h\}$.

Лемма 2. *Пусть* $\theta \in \mathbf{R}^m$, $\theta \neq 0$ *и* T — *компакт в* $\mathbf{R}^m$ *такой, что* $\theta \notin T$. *Тогда для любого фиксированного числа* ν *найдется число* ν_0 *такое, что при* $\varepsilon \to 0$

$$\ln \mathbf{P}\left(-X_\varepsilon(\Delta x\theta) \leq -\nu(\Delta x)^2,\ m_{X_\varepsilon}(\Delta x T) \leq -\nu(\Delta x)^2\right) \lesssim$$

$$\lesssim \quad -x^{4-2\alpha}\left[\left(\sqrt{K(\theta)} + \nu/\sqrt{2B_0(\theta,\theta)}\right)^2 + \nu_0\right], \tag{22}$$

где $K(\theta)$ *определена формулой* (10), $B_0(\theta,\theta)$ — *функция из условия* (II).

Доказательство. Пусть $h_0 > 0$, $T_h = \{t_1, t_2, \ldots t_q\}$ — конечная h-сеть компакта $T \backslash N_{h_0}(0)$ такая, что $\theta \notin N_h(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Тогда, очевидно, справедливо включение

$$T \subseteq N_{h_0}(0) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{q} N_h(t_k)\right). \tag{23}$$

Для $k = 1, 2, \ldots, q$ и положительного числа $\nu_1 < \nu$ находим

$$p_k \equiv \mathbf{P}\left(X_\varepsilon(\Delta x\theta) < -\nu(\Delta x)^2,\ m_{X_\varepsilon}(\Delta x N_h(t_k)) \leq -\nu(\Delta x)^2\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left(\xi_{\Delta x}(\theta) < -x^{2-\alpha}\left(H_{\Delta x}(\theta) + \nu\right),\ \xi_{\Delta x}(t_k) \leq -\nu_1 x^{2-\alpha}\right) +$$

$$+ \mathbf{P}\left(\sup_{t \in N_h(t_k)} |\xi_{\Delta x}(t) - \xi_{\Delta x}(t_k)| > \nu_2 x^{2-\alpha}\right) \equiv p_k' + p_k'', \tag{24}$$

где $\nu_2 = \nu - \nu_1$. Таким образом, в силу (23) выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\left(X_\varepsilon(\Delta x\theta) \leq -\nu(\Delta x)^2,\ m_{X_\varepsilon}(\Delta x T) \leq -\nu(\Delta x)^2\right) \leq \sum_{k=1}^{q} p_k' + \sum_{k=1}^{q} p_k'', \tag{25}$$

где $p_0'' = \mathbf{P}\left(m_{\xi_{\Delta x}}(N_{h_0}(0)) \leq -\nu x^{2-\alpha}\right)$.

Оценим вероятность p_k'. Так как $t_k \neq \theta$ для $k = 1, \ldots, q$, из условия (III) вытекает, что при достаточно малых ε матрица

$$B_k = \begin{bmatrix} B_{\Delta x}(\theta,\theta) & B_{\Delta x}(\theta, t_k) \\ B_{\Delta x}(\theta, t_k) & B_{\Delta x}(t_k, t_k) \end{bmatrix}$$

невырождена. В силу хорошо известных теорем о грубой асимптотике (см. [4, 5]) получаем при $\varepsilon \to 0$

$$\ln p_k' \sim -\frac{1}{2} \inf_{\alpha_1 \leq -d_1,\ \alpha_2 \leq -d_2} (\alpha_1, \alpha_2)\, B_k^{-1} (\alpha_1, \alpha_2)^T = -\frac{1}{2}(d_1, d_2)\, B_k^{-1}(d_1, d_2)^T,$$

где $d_1 = x^{2-\alpha}(H_{\Delta x}(\theta) + \nu)$, $d_2 = \nu_1 x^{2-\alpha}$. Согласно условиям (II), (IV) и (V) при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$(d_1, d_2)\, B_k^{-1}(d_1, d_2)^T \sim (d_1^0, d_2)\, B_0(d_1^0, d_2)^T, \tag{26}$$

где $d_1^0 = x^{2-\alpha}(H_0(\theta) + \nu)$,

$$B_0 = \begin{bmatrix} B_0(\theta,\theta) & B_0(\theta,\theta_k) \\ B_0(\theta,t_k) & B_0(t_k,t_k) \end{bmatrix}.$$

Прямой подсчет в правой части (26) показывает, что при $\varepsilon \to 0$

$$\ln p_k' \lesssim \; -x^{4-2\alpha}\,[\,(\sqrt{K(\theta,\theta)} + \nu/\sqrt{2\,B_0(\theta,\theta)}\,)^2 + \nu_0]\;, \tag{27}$$

где $k = 1, \dots, q$,

$$\nu_0 = \min_{1\le k\le q} \frac{1}{2\det B_0}\left[\frac{B_0(\theta,t_k)}{\sqrt{B_0(\theta,\theta)}}\,(H_0(\theta)+\nu) - \sqrt{B_0(\theta,\theta)}\;\nu_1\right]^2, \tag{28}$$

Очевидно, что выбирая $\nu_1 > 0$ достаточно малым, можно добиться выполнения неравенства $\nu_0 > 0$.

Теперь выведем оценки сверху для p_k''. Пусть $M > 0$ такое, что $D_M \supset N_h(t_k)$ для $k = 1, \dots, q$. Если $\varepsilon > 0$ такое, что $\Delta x D_M \subseteq D_1$, то имеют место соотношения

$$\varphi^2_{\Delta x}(h) \;\equiv \sup_{|t-s|\le h,\, t,\, s\in D_M} \mathbf{E}\,(\xi_{\Delta x}(t) - \xi_{\Delta x}(s))^2 \le\; (\Delta x)^{-2\alpha}\,\varphi^2(\Delta x h)\,,$$

$$\int_1^\infty \varphi_{\Delta x}\left(h\,3^{-u^2}\right) du \le (\Delta x)^{-\alpha}\, Q_{\Delta x h}(3)\,,$$

где функции $\varphi(h)$ и $Q_\Delta(p)$ определены формулами (2) и (3) соответственно. Поэтому в силу неравенства Ферника при достаточно малых ε

$$p_k'' \le 5\,\sqrt{\pi/2}\;3^{2m}\,\psi(h^{-\alpha}\,\nu_2\,c\,x^{2-\alpha})\,, \tag{29}$$

где $c \equiv \sup\limits_{0\le r\le 1} r^{-\alpha}(\varphi(r) + (2+\sqrt{2})Q_r(3))$. Аналогично находим

$$p_0'' \equiv \mathbf{P}\left(m_{\xi_{\Delta x}}(N^{(0)}_{h_0}) \le \nu\,x^{2-\alpha}\right) \le c_1\,\psi(h_0^{-\alpha}\,\nu\,c\,x^{2-\alpha})\,. \tag{30}$$

Согласно условиям (II), (III) константа c в (29) и (30) положительна и не зависит от k, поэтому выбирая h и h_0 подходящим образом, при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\ln p_k'' \lesssim \; -\,x^{4-2\alpha}\,[\,(\sqrt{K(\theta)} + \nu/\sqrt{2\,B_0(\theta,\theta)}\,)^2 + \nu_0]\;, \tag{31}$$

где $k = 0, \dots, q$, а $\nu_0 > 0$ определено формулой (28). В силу (25), (27) и (31) приходим к требуемому утверждению. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\varepsilon \to 0$, $\theta \in \mathbf{R}^m$, $\theta \ne 0$ и U — открытое множество, содержащее θ. Тогда*

$$\ln \mathbf{P}_0 \equiv \ln \mathbf{P}\,(X_\varepsilon(\Delta x\theta) < m_{X_\varepsilon}(\mathbf{R}^m \setminus \Delta x U)) \gtrsim \; -\,x^{4-2\alpha}\,K(\theta)\,. \tag{32}$$

Доказательство. Для $\nu > 0$ имеем

$$\mathbf{P}_0 \ge \mathbf{P}\,(X_\varepsilon(\Delta x\theta) < -\,\nu\,(\Delta x)^2 \le m_{X_\varepsilon}(\mathbf{R}^m \setminus \Delta x U)) =$$

$$= \mathbf{P}\,(X_\varepsilon(\Delta x\theta) < -\nu(\Delta x)^2) - \mathbf{P}\,(X_\varepsilon(\Delta x\theta) < -\nu(\Delta x)^2,\, m_{X_\varepsilon}(\mathbf{R}^m \setminus \Delta x U) \le -\nu(\Delta x)^2) \equiv$$

$$\equiv \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 . \tag{33}$$

Выведем оценку снизу для $\mathbf{P}_1$. В силу условий (II), (IV) и (V) находим, что при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}\cdot\left(\xi_{\Delta x}(\theta)/\sqrt{B_{\Delta x}(\theta,\theta)} < -\, x^{2-\alpha}\, (H_{\Delta x}(\theta) + \nu)/\sqrt{B_{\Delta x}(\theta,\theta)} \right) \sim$$

$$\sim \mathbf{P}\, \left(\xi_0 < -\, x^{2-\alpha}(\sqrt{2\, K(\theta)} + \nu/\sqrt{B_{\Delta x}(\theta,\theta)}\,)\right) ,$$

где ξ_0 — гауссовская случайная величина с параметрами (0, 1). Следовательно,

$$\ln \mathbf{P}_1 \gtrsim \quad -\, x^{4-2\alpha}\, (\sqrt{K(\theta)} + \nu/\sqrt{2\, B_0(\theta,\theta)}\,)^2 . \tag{34}$$

Теперь оценим сверху $\mathbf{P}_2$. Воспользовавшись леммой 1, найдем конечное число $M \geq 1$ такое, что при $\varepsilon \to 0$

$$\ln \widetilde{\mathbf{P}}_2 \equiv \ln \mathbf{P}\, (m_{X_\varepsilon}(\mathbf{R}^m \backslash \Delta x D_M) < -\nu(\Delta x)^2) \lesssim \quad -2x^{4-2\alpha}(\sqrt{K(\theta)} + \nu/\sqrt{2B_0(\theta,\theta)}\,)^2 . \tag{35}$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P}_2 \leq \widetilde{\mathbf{P}}_2 + \mathbf{P}\, (X_\varepsilon(\Delta x\theta) \leq -\, \nu\, (\Delta x)^2,\, m_{X_\varepsilon}(\Delta x(D_M \backslash U)) < -\, \nu\, (\Delta x)^2) . \tag{36}$$

В силу леммы 2 второе слагаемое в правой части (33) допускает нужную оценку:

$$\ln \mathbf{P}_2 \lesssim \quad -\, x^{4-2\alpha}\, [\, (\sqrt{K(\theta)} + \nu/\sqrt{2B_0(\theta,\theta)}\,)^2 + \nu_0] , \tag{37}$$

где $\nu_0 > 0$. На основании (33)—(37) заключаем, что $\ln \mathbf{P}_1 \lesssim \quad \ln \mathbf{P}_0$. Таким образом, ввиду произвольности числа ν в (34) получаем (32). Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы. Для открытого множества $U \subseteq \mathbf{R}^m$ и $\theta \in U$ имеем

$$\mathbf{P}\, (m_{X_\varepsilon}(\Delta x U) < m_{X_\varepsilon}(\mathbf{R}^m \backslash \Delta x\, U)) \geq \mathbf{P}\, (X_\varepsilon(\Delta x\theta) < m_{X_\varepsilon}(\mathbf{R}^m \backslash \Delta x U)) . \tag{38}$$

В силу леммы 3 для $\theta \in U$, $\theta \neq 0$, справедливо соотношение

$$x^{-4+2\alpha} \ln \mathbf{P}_-\, (\varepsilon^{-1/(2-\alpha)}\theta^*_\varepsilon \in xU\,) \gtrsim \quad -\, K(\theta) . \tag{39}$$

Поскольку функция $K(\theta)$ непрерывна, из (3.9) следует, что если множество U содержит точку $\theta = 0$, то справедливо неравенство

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} x^{-4+2\alpha} \ln \mathbf{P}_-\, (\varepsilon^{-1/(2-\alpha)}\theta^*_\varepsilon \in xU) \geq 0 .$$

Таким образом, (39) верно для любых открытого множества $U \subseteq \mathbf{R}^m$ и точки θ из множества U. Заметим, что $\mathbf{P}_+ \geq \mathbf{P}_-$. Поэтому утверждение (13) доказано.

Обратимся теперь ко второму утверждению теоремы. Пусть V — замкнутое подмножество $\mathbf{R}^m$. Если $0 \in V$, то очевидно, что

$$K(V) \equiv \inf_{\theta \in V} K(\theta) = 0 ,$$

и неравенство (14) выполняется. Пусть теперь $0 \notin V$. Тогда $K(V) > 0$. Для верхнего распределения $\mathbf{P}_+$ имеем

$$\mathbf{P}_+ \left(\varepsilon^{-1/(2-\alpha)} \theta_\varepsilon^* \in xV\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left(m_{X_\varepsilon}(\Delta x(V \cap D_M)) \leq 0\right) + \mathbf{P}\left(m_{X_\varepsilon}(\Delta x(\mathbf{R}^m \setminus D_M)) \leq 0\right) \equiv \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 .$$

В силу леммы 1 можно выбрать число $M < \infty$ так, что

$$\ln \mathbf{P}_2 \lesssim \ - x^{4-2\alpha}\, 2K(V) .$$

Оценим сверху вероятность $\mathbf{P}_1$. Для этого заметим, что в силу отмеченных ранее свойств функции $B_\Delta(t, s)$ (см. (II_0))

$$\inf_{\theta \in V \cap D_M} \frac{H_{\Delta x}(\theta)}{\sqrt{2B_{\Delta x}(\theta, \theta)}} \to \inf_{\theta \in V \cap D_M} \frac{H_0(\theta)}{\sqrt{2B_0(\theta, \theta)}} = \sqrt{K(V \cap D_M)} = \sqrt{K(V)} . \qquad (40)$$

Последнее равенство справедливо для всех достаточно больших M, так как (см. (11)) $K(\theta) \to \infty$ при $|\theta| \to \infty$. Легко видеть, что в силу (40)

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}\left(m_{X_\varepsilon / B_{\Delta x}(\theta, \theta)}(\Delta x(V \cap D_M)) \leq 0\right) \lesssim \ \mathbf{P}\left(m_{\eta_\varepsilon}(V \cap D_M) \leq - x^{2-\alpha}\sqrt{2K(V)}\ \right),$$

где $\eta_\varepsilon \equiv \xi_{\Delta x}(\theta)/\sqrt{B_{\Delta x}(\theta, \theta)}$. Нетрудно показать, что найдется конечное множество кубов $z_1, \ldots, z_N$ в $\mathbf{R}^m$ таких, что $0 \notin z_i$ и $\bigcup_{i=1}^N z_i \supseteq V \cap D_M$. Поэтому

$$\mathbf{P}_1 \lesssim \ \sum_{i=1}^N \mathbf{P}\left(m_{\eta_\varepsilon}(z_i) \leq - x^{2-\alpha}\sqrt{2K(\theta)}\ \right) . \qquad (41)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (41) с помощью неравенства Ферника. Для этого оценим функцию (2) для поля $\eta_\varepsilon(\theta)$, $\theta \in z_i$:

$$\tilde{\varphi}(h) \equiv \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in z_i}} \mathbf{E}^{1/2}(\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon(s))^2 = \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in z_i}} \mathbf{E}^{1/2}\left(\frac{\xi_\Delta(t)}{\sqrt{B_\Delta(t, t)}} - \frac{\xi_\Delta(s)}{\sqrt{B_\Delta(s, s)}}\right)^2 .$$

Отметим, что

$$\mathbf{E}^{1/2}\left(\frac{\xi_\Delta(t)}{\sqrt{B_\Delta(t, t)}} - \frac{\xi_\Delta(s)}{\sqrt{B_\Delta(s, s)}}\right)^2 \leq$$

$$\leq \ \mathbf{E}^{1/2}\,\frac{(\,\xi_\Delta(t, t) - \xi_\Delta(s, s))^2}{\sqrt{B_\Delta(t, t)}} + \mathbf{E}^{1/2}(\,\xi_\Delta(s))^2\,\frac{\sqrt{B_\Delta(t, t)} - \sqrt{B_\Delta(s, s)}}{\sqrt{B_\Delta(t, t)\, B_\Delta(s, s)}} ,$$

$$B_\Delta(s, s) = B_\Delta(t, t) + \varepsilon ,$$

где

$$|\varepsilon| \leq \sqrt{B_\Delta(t, t)}\ \mathbf{E}^{1/2}\,|\xi_\Delta(t) - \xi_\Delta(s)|^2 + \sqrt{B_\Delta(s, s)} .$$

Поэтому $\widetilde{\varphi}(h) \le c_i \varphi_{\Delta x}(h)$, где функция $\varphi_{\Delta x}(h)$ построена для поля $\xi_{\Delta x}(\theta)$, $\theta \in D_{1/\Delta x}$, $c_i < \infty$. Следовательно, существует число $c = \max\{c_i\colon 1 \le i \le N\} < < \infty$ такое, что для всех достаточно малых ε

$$\widetilde{\varphi}(h) \le c\,\varphi_{\Delta x}(h) \le c\,(x\Delta)^{-\alpha}\,\varphi(\Delta x h),$$

где функция $\varphi(h)$ построена для поля $\xi(\theta)$, $\theta \in D_1$.

Оценим теперь константу b_p (см. (17)) для поля $\eta_\varepsilon(\theta)$, $\theta \in z_i$:

$$b_p = 1 + (2+\sqrt{2}) \int_1^\infty \widetilde{\varphi}\big(d_i\, p^{-u^2}/2\big)\, du \le$$

$$\le 1 + (2+\sqrt{2})\,(\Delta x)^{-\alpha} \int_1^\infty \varphi\big(\Delta x\, d_i\, p^{-u^2}/2\big)\, du \le 1 + (2+\sqrt{2})\,(d_i/2)^\alpha\, \overline{Q}(p),$$

где d_i — длина ребра куба z_i, функция $\overline{Q}(p)$ определена формулой (6). Пусть теперь целочисленная функция $p(\varepsilon)$ стремится к бесконечности достаточно медленно, так что

$$\sqrt{1+4m\ln p(\varepsilon)} = o(x), \qquad 2m\ln p(\varepsilon) = o\big(x^{4-2\alpha}\big).$$

Тогда по неравенству Ферника

$$\mathbf{P}\left(m_{\eta_\varepsilon}(z_i) \le -\sqrt{2}\, x^{2-\alpha}\sqrt{K(V)}\,\right) \le 5\sqrt{\pi/2}\; p^{2m} \exp\{-x^{4-2\alpha} K(V)/b_p^2\}.$$

Так как в силу (7) $b_p \to 1$ при $p \to \infty$, то

$$\ln \mathbf{P}\left(m_{\eta_\varepsilon}(z_i) \le -\sqrt{2}\, x^{2-\alpha}\sqrt{K}\,\right) \sim -\, x^{4-2\alpha} K(V).$$

Требуемая оценка сверху для $\mathbf{P}_1$ получена:

$$\ln \mathbf{P}_1 \lesssim\; -\, x^{4-2\alpha} K(V).$$

Неравенство (14) и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бямбажав Д., Могульский А. А. Предельные теоремы для минимума и точки достижения минимума «зашумленной» функции // Теория вероятностей и ее применения.—1992.—Т. 37, № 3.—С. 548–554.
2. Mogulskii A. A. Large deviations for the maximum likelihood estimators// Probability theory and mathematical statistics: Proc. 5th Japan–USSR symp. 1986.—Berlin at. ol.: Springer, 1988.—P. 326–331.—(Lecture Notes in Math., 1299.)
3. Ферник К. Регулярность траекторий гауссовских случайных функций.—Случайные процессы.—М.: Мир, 1978.
4. Боровков А. А., Рогозин Б. А. О центральной предельной теореме в многомерном случае // Теория вероятностей и ее применения.—1965.—Т. 10, № 1.—С. 61–69.
5. Могульский А. А. Большие уклонения для траекторий многомерных случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения.—1976.—Т. 21, № 2.—С. 309–323.