О ЧИСЛЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

В. И. Лотов, В. Р. Ходжибаев

1. Рассматриваются случайный процесс $\eta(t)$, $t \geq 0$, и марковский момент τ, возможно, несобственный. Обозначим $\xi(t) = \eta(\tau + t) - \eta(\tau)$, $t \geq 0$, и предположим, что ξ — однородный случайный процесс с независимыми приращениями (ОСПНП), выборочные траектории которого непрерывны справа. Будем считать также, что процесс ξ не зависит от поведения процесса η до момента τ включительно.

Для произвольного вещественного x на событии $\{\tau < \infty\}$ определим случайные величины

$$\tau_+(x) = \inf\{\, t \geq \tau : \eta(t) \geq x \,\}, \quad \tau_-(x) = \inf\{\, t \geq \tau : \eta(t) \leq x \,\},$$

полагая всегда $\inf\varnothing = \infty$. Объектом изучения является совместное распределение пары случайных величин $(\tau_\pm(x), \eta(\tau_\pm(x)))$ на множестве $\{\tau_\pm(x) < \infty\}$. Для функций

$$f_x^{\pm}(u, \lambda) = \mathbf{E}\left(\exp\{-u\,\tau_\pm(x) + \lambda\,\eta(\tau_\pm(x))\};\ \tau_\pm(x) < \infty \right),$$

определенных при $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$, в работе найдены представления в терминах функции

$$f(u, \lambda) = \mathbf{E}\left(\exp\{-u\,\tau + \lambda\,\eta(\tau)\}\ ;\ \tau < \infty \right)$$

и вероятностных характеристик процесса $\xi(t)$, что составляет содержание теоремы 1. Эта теорема может служить инструментом для исследования так называемых осциллирующих случайных процессов, т. е. тех процессов, которые меняют свои характеристики при поочередном достижении границ некоторого интервала. Ниже рассмотрена другая область применения теоремы 1 — изучение числа пересечений полосы траекторией ОСПНП в том случае, когда оно конечно с вероятностью единица. Непосредственным следствием теоремы 1 являются точные формулы для распределения числа пересечений (теорема 2). Эти выражения основываются на использовании компонент безгранично делимой факторизации (БДФ), введенной и изученной Б. А. Рогозиным [1]. Однако прямые вычисления по этим формулам, как правило, затруднены; исключение составляют те немногочисленные процессы, для которых БДФ находится в явном виде и при этом оказывается просто устроенной. Среди них — винеровский процесс со сносом, для которого в п. 3 в качестве следствия теоремы 2 вычисляется распределение числа пересечений полосы; оно оказывается геометрическим. Далее, в п. 4 проводится асимптотический анализ полученных в теореме 1 выражений, когда полоса неограниченно расширяется и выполнены условия крамеровского типа. В итоге выделяются главные члены распределения числа пересечений полосы, имеющие весьма простой вид, и оцениваются остатки, которые в условиях теоремы оказываются экспоненциально малыми (теорема 3).

Распределение числа пересечений уровня (не полосы) достаточно полно исследовалось в теории стационарных гауссовских процессов (см. например, [2]), тогда как для ОСПНП данный вопрос мало изучен. Отметим, что в [3, с. 70] изучалась асимптотика числа пересечений узкой полосы траекторией броуновского движения, а в [4] выведены некоторые представления для распределения числа пересечений полосы траекторией ОСПНП через распределения других граничных функционалов. В ряде работ (см. [5] и библиографию там) изучалось предельное поведение для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания, порожденного суммами независимых одинаково распределенных слагаемых. Настоящей работе предшествовала публикация одного из авторов [6], где также рассматривались случайные блуждания, порожденные суммами независимых одинаково распределенных случайных величин. При этом использовался метод факторизации, который, как известно, дает широкие возможности при решении разного рода граничных задач. К настоящему времени факторизационная техника получила развитие и для ОСПНП, поэтому естественным шагом является перенесение результатов [6] на эти процессы, что и делается ниже.

2. Обозначим $\psi(\lambda) = \ln \mathrm{E} \exp \{ \lambda\, \xi(1) \}$, и пусть

$$r_u(\lambda) \equiv u\,(u - \psi(\lambda))^{-1} = r_{u+}(\lambda)\, r_{u-}(\lambda)$$

— БДФ при $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ (см. [1]). Отметим, что компоненты факторизации $r_{u\pm}(\lambda)$ аналитичны по λ при $\operatorname{Re}\lambda \lessgtr 0$, непрерывны и не обращаются в нуль при $\operatorname{Re}\lambda \lesseqqgtr 0$ за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки. Следуя [6], для каждого x введем операторы $\mathscr{A}_x^{\pm}$, связанные с компонентами указанной факторизации. Пусть на прямой $\operatorname{Re}\lambda = 0$ функция $g(\lambda)$ допускает представление

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y}\, dG(y)\,, \qquad \operatorname{Var} G < \infty\,,$$

тогда при $\operatorname{Re} u > 0$ полагаем

$$(\mathscr{A}_x^{+} g)\,(u,\lambda) = r_{u+}^{-1}(\lambda)\, [r_{u+}(\lambda)\, g(\lambda)\,]^{[x,\,\infty)}\,,$$

$$(\mathscr{A}_x^{-} g)\,(u,\lambda) = r_{u-}^{-1}(\lambda)\, [r_{u-}(\lambda)\, g(\lambda)\,]^{(-\infty,\,x]}\,.$$

Здесь принято обозначение

$$\left[\,\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y}\, dG(y)\right]^{D} = \int\limits_{D} e^{\lambda y}\, dG(y)\,, \qquad D \subset \mathbf{R}\,,$$

функция g может зависеть от u. Для краткости в обозначениях операторов $\mathscr{A}_x^{\pm}$ зависимость от u не указывается.

Теорема 1. *При* $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *справедливы равенства*

$$f_x^{+}(u,\lambda) = (\mathscr{A}_x^{+} f)\,(u,\lambda)\,, \quad f_x^{-}(u,\lambda) = (\mathscr{A}_x^{-} f)\,(u,\lambda)\,. \tag{1}$$

Доказательство проводится способом, описанным в [1, 7]. Для произвольного натурального m построим случайное блуждание с дискретным временем $S_n^{(m)} = \xi(n/2^m)$, $n \geq 0$, которое порождается суммами независимых одинаково распределенных случайных величин:

$$S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} [\xi(k/2^m) - \xi((k-1)/2^m)] .$$

Пусть

$$\tau^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathrm{I}_{k,\, m} ,$$

где через $\mathrm{I}_{k,\, m}$ обозначен индикатор события $\{(k-1)/2^m < \tau \leq k/2^m\}$. Событие $\{\tau^{(m)} \leq k\} = \{\tau \leq k/2^m\}$ при любом k не зависит от σ-алгебры, порожденной случайными величинами

$$\xi((k+1)/2^m) - \xi(k/2^m) ,\quad \xi((k+2)/2^m) - \xi((k+1)/2^m) , \dots ,$$

и потому к последовательности $\{S_n^{(m)}\}$ и случайной величине $\tau^{(m)}$ применима теорема 1 [6]. Пусть

$$\tau_+^{(m)}(x) = \inf\{\, k \geq \tau^{(m)} :\, S_k^{(m)} \geq x \,\} ,\qquad \tau_-^{(m)}(x) = \inf\{\, k \geq \tau^{(m)} :\, S_k^{(m)} \leq x \,\} ,$$

$$f_x^{(m)\pm}(z, \lambda) = \mathbf{E}\left(z^{\tau_\pm^{(m)}(x)} \exp\left\{ \lambda\, S^{(m)}_{\tau_\pm^{(m)}(x)} \right\} ;\ \tau_\pm^{(m)}(x) < \infty \right) ,$$

$$f^{(m)}(z, \lambda) = \mathbf{E}\left(z^{\tau^{(m)}} \exp\left\{ \lambda\, S^{(m)}_{\tau^{(m)}} \right\} ;\ \tau^{(m)} < \infty \right) ,$$

$R_{z+}^{(m)}(\lambda)$, $R_{z-}^{(m)}(\lambda)$ — компоненты канонической факторизации функции $1 - z\,\mathbf{E}\exp\left\{\lambda S_1^{(m)}\right\}$ при $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Тогда в силу теоремы 1 [6]

$$\begin{aligned} f_x^{(m)+}(z, \lambda) &= R_{z+}^{(m)}(\lambda) \left[\left(R_{z+}^{(m)}(\lambda)\right)^{-1} f^{(m)}(z, \lambda)\right]^{[x,\, \infty)} , \\ f_x^{(m)-}(z, \lambda) &= R_{z-}^{(m)}(\lambda) \left[\left(R_{z-}^{(m)}(\lambda)\right)^{-1} f^{(m)}(z, \lambda)\right]^{(-\infty,\, x]} . \end{aligned} \tag{2}$$

Моменты $\tau^{(m)}$, $\tau_\pm^{(m)}(x)$ обладают, очевидно, следующими свойствами: $\tau^{(m)} \geq \tau$, $\tau_\pm^{(m)}(x) \geq \tau_\pm(x)$, $\tau^{(m)} \to \tau$, $\tau_\pm^{(m)}(x) \to \tau_\pm(x)$ при $m \to \infty$ с вероятностью единица. Соотношения (1) получаются из (2) предельным переходом при $m \to \infty$, $z = \exp\{-u\, 2^{-m}\}$. Все обоснования такого перехода содержатся в [1, 7]. Теорема доказана.

3. Перейдем к изучению распределения числа пересечений полосы. Предположим, что $\eta(t)$, $t \geq 0$,— ОСПНП, и для произвольных чисел a и b таких, что $a < 0 < b$, введем последовательность моментов остановки

$$\tau_0^\pm = 0,\quad \tau_i^- = \inf\{t \geq \tau_{i-1}^+ :\ \eta(t) \leq a\} ,\ \tau_i^+ = \inf\{t \geq \tau_i^- :\ \eta(t) \geq b\},\quad i \geq 1 .$$

Событие $\{\tau_k^+ < \infty\}$ означает, что траектория процесса по меньшей мере k раз пересекла снизу вверх полосу $\{a < y < b\}$ на плоскости точек (x, y). Обозначив через ζ_1 число таких пересечений, будем иметь $\mathbf{P}(\zeta_1 \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty)$. Введем также ζ_2 — число пересечений полосы сверху вниз и $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ — общее число пересечений. Из теоремы 1 следует, что при $\mathrm{Re}\, u > 0$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$

$$\mathbf{E}\left(\exp\{-u\tau_k^+ + \lambda\,\eta(\tau_k^+)\};\ \tau_k^+ < \infty\right) = \left((\mathscr{A}_b^+\mathscr{A}_a^-)^k e\right)(u, \lambda),$$

где $e(\lambda) \equiv 1$. Полагая $\lambda = 0$ и устремляя u к нулю, получим следующее утверждение.

Теорема 2. *При любом* $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\zeta_1 \geq k) = \lim_{u \to 0} \left((\mathscr{A}_b^+\mathscr{A}_a^-)^k e\right)(u, 0),$$

и аналогично

$$\mathbf{P}(\zeta_2 \geq k) = \lim_{u \to 0} \left((\mathscr{A}_a^-\mathscr{A}_b^+)^k e\right)(u, 0), \tag{3}$$

$$\mathbf{P}(\zeta \geq 2k) =$$

$$= \lim_{u \to 0} \left\{[\mathscr{A}_a^-(\mathscr{A}_b^+\mathscr{A}_a^-)^k + \mathscr{A}_b^+(\mathscr{A}_a^-\mathscr{A}_b^+)^k - (\mathscr{A}_b^+\mathscr{A}_a^-)^{k+1} - (\mathscr{A}_a^-\mathscr{A}_b^+)^{k+1} + \ldots]e\right\}(u, 0),$$

$$\mathbf{P}(\zeta \geq 2k-1) = \tag{4}$$

$$= \lim_{u \to 0} \left\{[(\mathscr{A}_b^+\mathscr{A}_a^-)^k + (\mathscr{A}_a^-\mathscr{A}_b^+)^k - \mathscr{A}_a^-(\mathscr{A}_b^+\mathscr{A}_a^-)^k - \mathscr{A}_b^+(\mathscr{A}_a^-\mathscr{A}_b^+)^k + \ldots]\,e\right\}(u, 0).$$

Последние два соотношения, очевидно, имеют смысл только при условии конечности ζ с вероятностью единица. Заметим, что требование $0 \in (a, b)$ не принципиально; изменения, которые следует внести в формулы (3), (4) при $0 \notin (a, b)$, очевидны (см. [6]).

Пример. Пусть $\eta(t)$ — винеровский процесс с отрицательным сносом, т. е. $\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \sigma^2\lambda^2/2$, $\alpha < 0$. В этом случае имеем $r_{u\pm}(\lambda) = \lambda_\pm(u)\,(\lambda_\pm(u) - \lambda)^{-1}$, где $\lambda_\pm(u) = \left(\pm(\alpha^2 + 2u\sigma^2)^{1/2} - \alpha\right)/\sigma^2$.

Непосредственными вычислениями устанавливаем, что

$$(\mathscr{A}_a^- e)(u, \lambda) = \exp\{(\lambda - \lambda_-(u))\,a\}, \quad (\mathscr{A}_b^+ e)(u, \lambda) = \exp\{(\lambda - \lambda_+(u))\,b\},$$

$$\left((\mathscr{A}_b^+\mathscr{A}_a^-)^k e\right)(u, \lambda) = \exp\{\lambda b + \lambda_-(u)\,((k-1)b - ka) - k\lambda_+(u)\,(b-a)\},$$

$$\left((\mathscr{A}_a^-\mathscr{A}_b^+)^k e\right)(u, \lambda) = \exp\{\lambda a + k\lambda_-(u)\,(b-a) - \lambda_+(u)\,(kb - (k-1)a)\},$$

$$\left(\mathscr{A}_a^-(\mathscr{A}_b^+\mathscr{A}_a^-)^k e\right)(u, \lambda) = \exp\{\lambda a + \lambda_-(u)\,(kb - (k+1)a) - k\lambda_+(u)\,(b-a)\},$$

$$\left(\mathscr{A}_b^+(\mathscr{A}_a^-\mathscr{A}_b^+)^k e\right)(u, \lambda) = \exp\{\lambda b + k\lambda_-(u)\,(b-a) - \lambda_+(u)\,((k+1)b - ka)\}.$$

Так как $\lambda_+(0) = -2\alpha/\sigma^2$, $\lambda_-(0) = 0$, из (3), (4) получаем

$$\mathbf{P}(\zeta_1 \geq k) = \exp\{2\alpha\sigma^{-2}k(b-a)\} = \mathbf{P}(\zeta \geq 2k),$$

$$\mathbf{P}(\zeta_2 \geq k) = \exp\{2a\sigma^{-2}(kb - (k-1)a)\} = \mathbf{P}(\zeta \geq 2k-1).$$

4. Пусть выполнены условия п. 3. Займемся изучением асимптотики распределений ζ_1, ζ_2 и ζ при $b-a \to \infty$. В дальнейшем используются техника и результаты работ [6, 8, 9]. Предположим, что процесс удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathbf{E}\,\eta(1) < 0$;

2) $\mathbf{E}\exp\{\lambda\eta(1)\} < \infty$ при $-\infty < \lambda_- \leq \lambda \leq \lambda_+ < \infty$, $\lambda_- \leq 0$, $\lambda_+ > 0$, $\psi(\lambda_+) = \lim\limits_{\lambda \to \lambda_+} \psi(\lambda) > 0$;

3) $\limsup \dfrac{|\,\mathbf{E}\exp\{\lambda\eta(1)\}\,|}{\mathbf{E}\exp\{\mathrm{Re}\,\lambda\eta(1)\}} < 1$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda_- \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq \lambda_+$;

4) имеет место представление

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x)\, d\,S(x),$$

в котором

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\, dS(x) < \infty, \qquad S(-\infty) = S(+\infty) = 0;$$

если $\sigma^2 = 0$, то полагаем $\int_{|x|<1} |x|\, dS(x) < \infty$ и $\gamma \equiv \alpha - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, dS(x) \neq 0$.

Отметим некоторые свойства функции $\psi(\lambda)$, установленные в [8]. Функция $\psi(\lambda)$ выпукла на отрезке $[\lambda_-, \lambda_+]$, поэтому она достигает на нем минимума. Пусть λ_0 — точка достижения минимума $\psi(\lambda)$ на $[\lambda_-, \lambda_+]$. Тогда $u_0 = \psi(\lambda_0) < 0$. При $\lambda_- \leq \lambda \leq \lambda_+$ уравнение $u = \psi(\lambda)$ имеет не более двух корней $\lambda_+(u) \geq \lambda_-(u)$. При этом

$$\lambda_0 \leq \lambda_+(u) \leq \lambda_+, \text{ если } u_0 \leq u \leq \psi(\lambda_+) = u_+,$$

$$\lambda_- \leq \lambda_-(u) \leq \lambda_0, \text{ если } u_0 \leq u \leq \psi(\lambda_-) = u_-.$$

При указанных предположениях имеем

$$\lambda_+(0) = h > 0, \ \ \lambda_-(0) = 0, \ \ 0 < h < \lambda_+.$$

Пусть $\mathcal{B}(\mu_-, \mu_+)$ — кольцо преобразований Фурье — Стилтьеса функций $v(t)$, $-\infty < t < \infty$, имеющих ограниченную вариацию, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{Re}\,\lambda t}\, dv(t) < \infty \text{ при } \mu_- \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq \mu_+,$$

и пусть $\mathcal{B}_\pm(\mu_\pm)$ — множество элементов $\int e^{\lambda x}\, dv(x) \in \mathcal{B}(\mu_-, \mu_+)$, для которых $v(x) \equiv \mathrm{const}$ при $x \gtrless 0$.

Если $\sigma^2 > 0$ или $\sigma^2 = 0$, $\gamma > 0$, то при некотором $\gamma_1 > 0$ и $u_0 < u < u_+$ имеет место включение

$$[r_{u+}(\lambda)\,(\lambda - \lambda_+(u))]^{\pm 1} \in \mathcal{B}_+(\lambda_{\gamma_1 +}(u)),$$

где $\lambda_{\gamma_1+}(u) = \min\{\lambda_+(u) + \gamma_1, \lambda_+\}$; а в случае $\sigma^2 = 0$, $\gamma < 0$ —

$$\left[r_{u+}(\lambda) \frac{(\lambda - \lambda_+(u))}{(\lambda - \lambda_+ - 1)} \right]^{\pm 1} \in \mathscr{B}_+(\lambda_{\gamma_1+}(u)) .$$

Аналогично, при $\sigma^2 > 0$ или при $\sigma^2 = 0$, $\gamma < 0$, справедливо соотношение

$$[r_{u-}(\lambda)\,(\lambda - \lambda_-(u))]^{\pm 1} \in \mathscr{B}_-(\lambda_{\gamma_1-}(u)) , \quad u_0 < u < u_- ,$$

где $\lambda_{\gamma_1-}(u) = \max\{\lambda_-(u) - \gamma_1, \lambda_-\}$, а при $\sigma^2 = 0$, $\gamma > 0$, и $u_0 < u < u_-$ —

$$\left[r_{u-}(\lambda) \frac{(\lambda - \lambda_-(u))}{(\lambda - \lambda_- + 1)} \right]^{\pm 1} \in \mathscr{B}_-(\lambda_{\gamma_1-}(u)) .$$

Исследуем асимптотику $\mathscr{A}_b^+ g(u,\lambda)$, где $g(u,\lambda) \in \mathscr{B}(0, \lambda_{\gamma_1+}(u))$. Пусть сначала $\sigma^2 > 0$ или $\sigma^2 = 0$, $\gamma > 0$. Тогда

$$\mathscr{A}_b^+ g(u,\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_+(u)}{\nu_u(\lambda)} \left[\frac{\nu_u(\lambda)\, g(u,\lambda) - \nu_u(\lambda_+(u))\, g(u, \lambda_+(u))}{\lambda - \lambda_+(u)} \right]^{[b,\infty)} +$$

$$+ \frac{\lambda - \lambda_+(u)}{\nu_u(\lambda)} \left[\frac{\nu_u(\lambda_+(u))\, g(u,\lambda_+(u))}{\lambda - \lambda_+(u)} \right]^{[b,\infty)} =$$

$$= \frac{\nu_u(\lambda_+(u))\, g(u,\lambda_+(u))\, e^{\lambda b}}{e^{\lambda_+(u) b}\, \nu_u(\lambda)} + (\lambda - \lambda_+(u)) \int_b^\infty e^{\lambda x}\, \theta_u(x)\, dx ,$$

$$|\theta_u(x)| \le C_1 \exp\{-\lambda_{\gamma_1+}(u) x\}, \quad x \ge b , \tag{5}$$

$\nu_u(\lambda) = (\lambda - \lambda_+(u))\, r_{u+}(\lambda)$ (в дальнейшем буквой C с индексами обозначаются положительные постоянные). Последняя оценка следует из теоремы 2 [10, с. 328]. При $\lambda \to 0$, $u \to 0$ получим

$$\mathscr{A}_b^+ g(0,0) = -\frac{\nu_0(h)\, g(0,h)}{h\, \nu_0(0)} e^{-hb} + O\left(e^{-(h+\gamma_2)b}\right), \quad \gamma_2 > 0 .$$

Пусть теперь $\sigma^2 = 0$, $\gamma < 0$. Тогда при $u_0 < u < u_+$

$$\mathscr{A}_b^+ g(u,\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_+(u)}{\nu_u(\lambda)} \left[\frac{\nu_u(\lambda)}{\lambda - \lambda_+ - 1} \, \frac{\lambda - \lambda_+ - 1}{\lambda - \lambda_+(u)}\, g(u,\lambda) \right]^{[b,\infty)} +$$

$$+ \frac{\lambda - \lambda_+(u)}{\nu_u(\lambda)} \left[\frac{\nu_u(\lambda)\, g(u,\lambda)}{\lambda - \lambda_+ - 1} \right]^{[b,\infty)} +$$

$$+ \frac{\lambda - \lambda_+(u)}{\nu_u(\lambda)} \left[\frac{\nu_u(\lambda)\, (\lambda_+(u) - \lambda_+ - 1)\, g(u,\lambda)}{(\lambda - \lambda_+ - 1)\, (\lambda - \lambda_+(u))} \right]^{[b,\infty)} =$$

$$= \frac{\nu_u(\lambda_+(u))\, g(u,\lambda_+(u))\, e^{\lambda b}}{\nu_u(\lambda)\, e^{\lambda_+(u) b}} + (\lambda - \lambda_+(u)) \int_b^\infty e^{\lambda x}\, \eta_u(x)\, dx ,$$

$$|\eta_u(x)| \le C_2\, e^{-\lambda_{\gamma_1+}(u)\, x}\,, \quad x \ge b\,,$$

т. е. приходим к тому же результату, что и в предыдущем случае.

Аналогично для любой функции $g_1(u,\lambda) \in \mathscr{B}(\lambda_{\gamma_1-}(u), 0)$ при $u_0 < u < u_-$ получаем

$$\mathscr{A}_a^- g_1(u,\lambda) = \frac{w_u(\lambda_-(u))\, g_1(u, \lambda_-(u))\, e^{\lambda a}}{w_u(\lambda)\, e^{\lambda_-(u)\, a}} + (\lambda - \lambda_-(u)) \int\limits_{-\infty}^{a} e^{\lambda x}\, \theta_u^*(x)\, dx\,,$$

$$|\theta_u^*(x)| \le C_2 \exp\{\lambda_{\gamma_1-}(u)\, x\}\,, \quad x \le a\,, \qquad \mathscr{A}_a^- g_1(0,0) = g_1(0,0)\,.$$

Учитывая, что $[e^{\lambda a}\, g(u,\lambda)]^{[b,\,\infty)} = e^{\lambda a}\, [g(u,\lambda)]^{[b-a,\,\infty)}$, получаем далее

$$\mathscr{A}_b^+ \mathscr{A}_a^- g_1(u,\lambda) = \frac{w_u(\lambda_-(u))\, v_u(\lambda_+(u))\, g_1(u,\lambda_-(u))\, e^{(\lambda-\lambda_+(u))\, b}}{w_u(\lambda_+(u))\, v_u(\lambda)\, e^{(\lambda_-(u)\, -\, \lambda_+(u))\, a}} +$$

$$+ e^{\lambda a} (\lambda - \lambda_+(u)) \int\limits_{b-a}^{\infty} e^{\lambda x}\, \theta_u^{(1)}(x)\, dx + e^{\lambda b} (\lambda_+(u) - \lambda_-(u)) \int\limits_{b-a}^{\infty} e^{\lambda x}\, \theta_u^{(2)}(x)\, dx +$$

$$+ e^{\lambda b} (\lambda - \lambda_+(u)) \int\limits_{b-a}^{\infty} e^{\lambda x}\, \theta_u^{(3)}(x)\, dx\,,$$

где для функций $\theta_u^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, 3$, имеет место оценка (5),

$$\mathscr{A}_b^+ \mathscr{A}_a^- g_1(0,0) = \frac{w_0(0)\, v_0(h)\, g_1(0,0)}{w_0(h)\, v_0(0)}\, e^{-h(b-a)} \left(1 + O\left(e^{-\gamma_3(b-a)}\right)\right), \quad \gamma_3 > 0\,.$$

Обозначим

$$\beta_1 = v_0(h)/v_0(0)\,, \quad \beta_2 = w_0(0)/w_0(h)\,.$$

Последовательное применение операторов $\mathscr{A}_b^+$, $\mathscr{A}_a^-$ в соответствии с (3)—(4) и полученные выше асимптотические представления для них позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1—4 *и* $k \ge 1$. *Тогда при некотором* $\delta > 0$ *и* $b \to \infty$ *справедливы соотношения*

$$\mathbf{P}(\zeta_1 \ge k) = (\beta_1 \beta_2)^k\, e^{-h(b-a)k} \left(1 + O\left(e^{-\delta(b-a)}\right)\right) =$$

$$= \mathbf{P}(\zeta \ge 2k) \left(1 + O\left(e^{-\delta(b-a)}\right)\right),$$

$$\mathbf{P}(\zeta_2 \ge k) = (\beta_1^k \beta_2^{k-1})\, e^{h(b-a)(k-1)\, -\, hb} \left(1 + O\left(e^{-\delta(b-a)}\right)\right) =$$

$$= \mathbf{P}(\zeta \ge 2k-1) \left(1 + O\left(e^{-\delta(b-a)}\right)\right).$$

Если $\psi(\lambda_+)=0$, то $O\left(e^{-\delta(b-a)}\right)$ следует заменить на $o(1)$. Случай $\mathbf{E}\,\eta(1)>0$ рассматривается аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рогозин Б. А.** О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения.—1966.—Т. 11, № 4.—С. 656–670.
2. **Крамер Г., Лидбеттер М.** Стационарные случайные процессы.—М.: Мир, 1969.
3. **Ито К., Маккин Г.** Диффузионные процессы и их траектории.—М.: Мир, 1968.
4. **Скороход А. В.** Случайные процессы с независимыми приращениями.— М.: Наука, 1986.
5. **Гіхман Й. І.** Асимптотичні розподіли числа перетинів випадковою функциею границі даної області // Вісник Київського университету. Сер. астрономії, математики та механіки.—1958.—Т. 1, № 1.—С. 25–46.
6. **Лотов В. И.** Об одном подходе в двуграничных задачах // Статистика и управление случайными процессами.—М.: Наука, 1989.—С. 117–121.
7. **Печерский Е. А.** Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и полуинтервала // Теория вероятностей и ее применения.—1974.—Т. 19, № 1.—С. 104–119.
8. **Рогозин Б. А.** Распределение максимума процесса с независимыми приращеними // Сиб. мат. журн.—1969.—Т. 10, № 6.—С. 1334–1363.
9. **Ходжибаев В. Р.** Асимптотический анализ в двуграничных задачах для случайных блужданий с непрерывным временем // Предельные теоремы для сумм случайных величин.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1984.—С. 77–93.—(Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 3).
10. **Боровков А. А.** Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.—М.: Наука, 1972.